

# Traitement du signal et des images

---



# Traitement du signal et des images

## Actes du 20<sup>e</sup> colloque GRETSI

---

Louvain-la-Neuve (Belgique)

6–9 septembre 2005

**Volume I**

**UCL** PRESSES  
UNIVERSITAIRES  
 DE LOUVAIN

© Presses universitaires de Louvain, 2005

Dépôt légal : D/2005/9964/20

ISBN : 2-87463-001-2

Imprimé en Belgique

Tous droits de reproduction, d'adaptation ou de traduction, par quelque procédé que ce soit, réservés pour tous pays, sauf autorisation de l'éditeur ou de ses ayants droit.

Couverture : Isabelle Sion

Diffusion : [www.i6doc.com](http://www.i6doc.com), l'édition universitaire en ligne

Sur commande en librairie ou à

Diffusion universitaire CIACO

Grand-Place, 7

1348 Louvain-la-Neuve, Belgique

Tél. 32 10 47 33 78

Fax 32 10 45 73 50

[duc@ciaco.com](mailto:duc@ciaco.com)



# Le mot du président du Comité de Programme

Pour la première fois depuis sa création en 1967, le Colloque GRETSI passe les frontières et, tout en restant prioritairement francophone, s'installe en Belgique. Accueillie cette année à Louvain-la-Neuve, l'édition 2005 du GRETSI témoigne une fois encore du succès que rencontre ce rendez-vous biennal de la communauté francophone du signal et de l'image.

Avec 463 soumissions pour 313 communications retenues, l'ensemble du Comité de Programme, s'appuyant sur l'avis de nombreux experts, a dû opérer une sélection difficile mais nécessaire, au détriment inévitable de soumissions de qualité. Il en résulte un ensemble de contributions brossant un panorama très diversifié, représentatif d'un domaine allant de la théorie aux applications, en passant par les algorithmes et les implémentations.

En complément des sessions usuelles (orales et affichées), l'édition 2005 du GRETSI a souhaité mettre en avant trois thèmes particuliers ("astro-statistique", "traitement du signal et télétrafic informatique" et "signal et images en bio-ingénierie") par le biais de trois sessions spéciales dont l'organisation a été confiée à des spécialistes. Trois conférences plénières invitées donneront par ailleurs trois éclairages différents sur des aspects récents et complémentaires de la discipline.

L'intervention d'Ingrid Daubechies témoignera d'un regard de mathématicienne sur les défis posés par les besoins de résolutions toujours plus grands en IRM fonctionnelle. Michael Unser "re-visitera" ensuite une question à la fois ancienne et cependant toujours d'actualité en proposant une théorie unifiée pour le traitement numérique/analogique des signaux. Hugues Vinet enfin dressera un l'état de l'art et ouvrira des perspectives quant aux avancées offertes par le traitement du signal dans le domaine de l'acoustique musicale. Comme on le voit, le GRETSI 2005 s'annonce riche et varié, et il m'est agréable de remercier toutes celles et tous ceux (invités, auteurs, experts) qui auront contribué à sa qualité. Je remercie aussi tout particulièrement Vincent Nicolas, Laurent Jacques et l'ensemble du Comité d'Organisation pour l'aide considérable qu'ils ont apportée à la mise en place d'une manifestation qui, tout au long de ses quatre jours, témoignera du spectre très large que présente aujourd'hui le traitement du signal et des images, et de la vitalité des équipes venues échanger à Louvain-la-Neuve leurs résultats les plus récents.

Patrick Flandrin

Président du Comité de Programme du Grets'i'05



# Le mot des Présidents du Comité d'Organisation

Le GRETSI'05 est l'illustration, cette année encore, d'une communauté francophone du traitement du signal et de l'image bien vivante !

Avec près de quatre cents participants, la présence d'invités prestigieux tels Ingrid Daubechies, Michael Unser ou encore Hugues Vinet, plus de trois cents sessions et communication posters et orales, c'est un grand honneur pour l'Université Catholique de Louvain d'accueillir l'édition 2005 de la conférence Grets. i.

Nous avons voulu, cette année, consacrer un effort particulier à l'animation des soirées et avons organisés différentes activités aussi agréables qu'enrichissantes. Soulignons pour cela le travail et l'investissement du Comité d'organisation et aux soucis organisationnels, administratifs et logistiques auquel ils ont dû faire face.

L'efficacité et la souplesse du comité de programme dirigé par P. Flandrin ainsi que celles de l'équipe dirigeante du GRETSI sous la houlette de B. Picinbono nous ont particulièrement impressionnées : l'efficacité française, sans la raideur de son administration ! Nous tenons à remercier tous les membres pour avoir relever ce défi.

Si cette conférence, pour certains participants, est l'occasion d'un premier voyage en Belgique, nous espérons, de par ces activités extrascientifiques, les encourager à revenir. Et pour ceux, y ayant déjà séjourné, nous avons voulu leur donner l'occasion de faire encore quelques découvertes de par l'originalité des différentes animations proposées.

Nous vous souhaitons à tous, chère participant, un agréable colloque.

Benoît Macq et Jean-Pierre Antoine

Présidents du Comité d'organisation



# Comité de Programme

*Président du Comité de Programme :*

Patrick Flandrin (ENS, Lyon)

*Membres :*

Abry Patrice (ENS, Lyon)

Bloch Isabelle (Télécom-Paris)

Cardoso Jean-François (ENST, Paris)

Chassery Jean-Marc (LIS, Grenoble)

Chonavel Thiery (ENST-Br, Brest)

Common Pierre (I3S, Nice)

Demoment Guy (L2S, Supélec, Gif-sur-Yvette)

Ferrari Andrea (UNICE, Nice)

Fijalkow Inbar (ETIS-ENSEA, Cergy)

Fuchs Jean-Jacques (IRISA, Rennes)

Gribonval Remi (IRISA, Rennes)

Guglielmi Michel (IRCCyN, Nantes)

Jutten Christian (INPG, Grenoble)

Labit Claude (IRISA, Rennes)

Lambert-Nebout Catherine (CNES, Toulouse)

Le Chevalier François (Thalès, Elancourt)

Magnin Isabelle (INSA-CREATIS, Lyon)

Maitre Henri (ENST, Paris)

Marcos Sylvie (L2S, Supélec, Gif-sur-Yvette)

Paindavoine Michel (LE2I, Dijon)

Pesquet Jean-Christophe (MLV, Marne la Vallée)

Roux Christian (ENST-Br, Brest)

Sorel Yves (INRIA, Rocquencourt)

Tourneret Jean-Yves (TESA, Toulouse)

Vandendorpe Luc (UCL, Louvain la Neuve)

Vandergheynst Pierre (EPFL, Lausanne)



# Comité de Lecture

Abed Merait Karim (Telecom-Paris)  
Abry Patrice (ENS, Lyon)  
Akil Mohamed (ESIEE)  
Amblard Pierre-Olivier (INPG Grenoble)  
Andre-Obrecht Régine (IRIT Toulouse)  
Anquetil Eric (IRISA)  
Antoniadis Anestis (IMAG Grenoble)  
Auger François (niv. Nantes/IUT de Saint-Nazaire/IREENA)  
Amis Karine  
Barba Dominique (IRCYNN Nantes)  
Barbaresco Frédéric (Thales Air Defence)  
Barlaud Michel (I3S Sophia-Antipolis)  
Baskurt Attila (Univ. Lyon)  
Basseville Michèle (IRISA / CNRS)  
Belfiore Jean-Claude (Telecom-Paris)  
Bellanger Maurice (CNAM Paris)  
Benidir Messaoud (L2S Orsay)  
Besson Olivier (ENSICA)  
Bimbot Frédéric (IRISA Rennes)  
Blanc-Feraud Laure (I3S Sophia-Antipolis)  
Bloch Isabelle (Telecom-Paris)  
Bolon Philippe (Univ. Savoie)  
Bondon Pascal (L2S Orsay)  
Boucher Jean-Marc (ENST Bretagne)  
Boutros Joseph (Telecom-Paris)  
Brie David (Univ. Nancy)  
Brossier Jean-Marc (INPG Grenoble)  
Boeffard Olivier (IRISA)  
Borgnat Pierre (labo Physique, ENSLyon, CNRS)  
Boujemâa Hatem (Supcom (Tunis))  
Burel Gilles  
Cao Frédéric (IRISA Rennes)  
Cardoso Jean-François (Telecom-Paris)  
Chalmond Bernard (ENS Cachant)  
Chapeau-Blondeau François (Univ. Angers)  
Charbonnier Pierre (Laboratoire Régional des Ponts et Chaussées de Strasbourg)  
Charvillat Vincent (ENSEEIH)  
Chassery Jean-Marc (INPG)  
Chevalier Pascal (THALES)

Chevreuil Antoine (Univ. Marne la Vallée)  
Chonavel Thierry (ENST Bretagne)  
Coatrieux Jean-Louis (IRISA, Université de Rennes 1)  
Cocquerez Jean-Pierre (UTC)  
Cohen Albert (Paris VI)  
Cohen Laurent (Univ. Dauphine)  
Collet Christophe (LSIIT Strasbourg)  
Combettes Patrick (Univ. Jussieu)  
Comon Pierre (I3S, UMR6070)  
Carrault Guy  
Cazuguel Guy  
Cerou Frederic (IRISA)  
Daudet Laurent (Univ. Pierre et Marie Curie (Paris 6))  
Davoine Franck (CNRS, UTC Compiègne)  
Davy Manuel (Centrale Lille)  
Declercq David (ENSEA Cergy-Pontoise)  
Deforges Olivier (INSA Rennes)  
Degerine Serge (IMAG Grenoble)  
Delhote Christian (Defense)  
Demigny Didier (IRISA R2D2)  
Demoment Guy (L2S Orsay)  
Desbouvries François (GET-INT Evry)  
Descombes Xavier (INRIA Sophia-Antipolis)  
Deville Yannick (CICT)  
Dinten Jean-Marc (CEA-LETI Grenoble)  
Diouris Jean-François (IREENA Nantes)  
Dittmar Andre  
Djafari Ali Mohammad (L2S/CNRS-Supélec-UPS)  
Doncarli Christian (IRCYNN Nantes)  
Duchene Jacques (Univ. Troyes)  
Duhamel Pierre (L2S Orsay)  
Dalle Patrice (IRIT)  
De Antonini Marc (I3S Sophia-Antipolis)  
De Courville Marc (Motorola)  
De Lathauwer Lieven (ENSEA Cergy-Pontoise)  
Elloy Jean-Pierre (IRCYNN Nantes)  
Faucon Gérard (Rennes I)  
Favier Gérard (I3S Sophia-Antipolis)  
Feng Gang (INPG)  
Ferrari André (Sophia-Antipolis)  
Ferreol Anne (Thales)  
Fety Luc (CNAM Paris)  
Fleury Gilles (Supélec)  
Forster Philippe (Paris X)  
Fuchs Jean-Jacques (IRISA Rennes)  
Furon Teddy (INRIA)  
Garbay Catherine (IMAG Grenoble)  
Garnero Line (Univ. Jussieu)



Gilloire André (France-Telecom R&D)  
Girard Stéphane (IMAG Grenoble)  
Gobert Jean (Philips)  
Goncalves Paulo (INRIA)  
Gounon Patrick (INPG Grenoble)  
Graffign Christine (Paris V)  
Gravier Guillaume (IRISA Rennes)  
Grenier Yves (Telecom-Paris)  
Guillemot Christine (IRISA)  
Hachem Walid (L2S Orsay)  
Heite Fabrice (Univ. Strasbourg)  
Helard Jean-François (INSA Rennes)  
Helard Maryline (France-Telecom R&D)  
Herault Jeanny (INPG Grenoble)  
Hillion Alain (ENST Bretagne)  
Hirsch Ernest (Univ. Strasbourg)  
Haigron Pascal  
Herment Alain  
Hernandez Alfredo  
Idier Jérôme (IRCYNN Nantes)  
Jaidane Meriem (ENIt Tunis)  
Jauffret Claude (Univ. Toulon)  
Jolion Jean-Michel (INSA Lyon)  
Joly Philippe (IRIT Toulouse)  
Jourdain Geneviève (INPG Grenoble)  
Lacaze Bernard (ENSEEIH)  
Lacoume Jean-Louis (INPG Grenoble)  
Laot Christophe (ENST Bretagne)  
Larzabal Pascal (ENS Cachan)  
Laurent Nathalie (France-Telecom R&D)  
Lavielle Marc (Univ. Paris-Sud)  
Le Cadre Jean-Pierre (IRISA Rennes)  
Le Carpentier Eric (IRCYNN Nantes)  
Le Chevalier François (Thales)  
Lebrun Jérôme (I3S Sophia-Antipolis)  
Legland François (IRISA)  
Lengelle Régis (Univ. Troyes)  
Lienard Joël (INPG)  
Loonis Pierre (Univ. de la Rochelle)  
Lorette Guy (IRISA, Université de Rennes 1)  
Loubaton Philippe (Institut Gaspard Monge)  
Lucas Marie-Françoise (IRCYNN Nantes)  
Luthon Franck (Univ. Pau)  
Laugier Pascal  
Le Caillec J.M. (ENST Bretagne)  
Lutton Evelyne (INRIA - Rocquencourt)  
Macaire Ludovic (LAGIS - UFR d'IEEA)  
Magnin Isabelle (Creatis Lyon)

Mailhes Corinne (TESA PRD)  
Maitre Henri (Telecom-Paris)  
Malandin Gregoire (INRIA - I3S)  
Mallat Stéphane (CMAP)  
Mars Jérôme (INPG)  
Martin Eric (Univ. UBS)  
Martin Nadine (INPG)  
Matignon Denis (Telecom-Paris)  
Memin Etienne (IRISA Rennes)  
Michel Olivier (Sophia-Antipolis)  
Moreau Eric (ISITV, Univ. Toulon)  
Moreau Nicolas (Telecom-Paris)  
Moulines Eric (Telecom-Paris)  
Mevel Laurent (IRISA)  
Myriam Ariaudo  
Najim Mohamed (Enseirb/Univ. Bordeaux)  
Nicolas Jean-Marie (Telecom-Paris)  
Nikiforov Igor (Univ. Troyes)  
Oudart Patrick (Alcatel Space)  
Ovarlez Jean-Philippe (ONERA)  
Odet Christophe (CREATIS (INSA))  
Orkisz Maciej (CREATIS (INSA))  
Pellerin Denis (INPG Grenoble)  
Pesquet Jean-Christophe (Univ. Marne la Vallée)  
Pesquet-Popescu Béatrice (ENST/département TSI)  
Pham Dinh-Tuan (IMAG Grenoble)  
Philipp-Foliguet Sylvie (ENSEA Cergy-Pontoise)  
Philippe Jean-Luc (Univ. UBS)  
Pieczynski Wojciech (GET-INT Evry)  
Postaire Jack-Gérard (Univ. Lille)  
Preteux Françoise (GET-INT Evry)  
Pronzato Luc (I3S Sophia-Antipolis)  
Prost Rémy (Creatis Lyon)  
Queré Raymond  
Ranchin Thierry (Ecole des Mines de Paris)  
Refregier Philippe (Institut Fresnel Marseille)  
Regalia Philippe (GET-INT Evry)  
Revenu Marinette  
Richard Gaël (Telecom-Paris)  
Richetin Marc (LESMEA)  
Rix Hervé  
Rodet Xavier (IRCAM)  
Roebel Axel (IRCAM)  
Rombaut Michèle (INSA Lyon)  
Roques Sylvie (Observatoire Midi Pyrénées)  
Roueff François (Telecom-Paris)  
Rouge Bernard (CNES)  
Rougon Nicolas (GET-INT Evry)

Roux Christian (ENST Bretagne)  
Roux Michel (Telecom-Paris)  
Ruan Su (Département GEII, IUT de Troyes)  
Roumy Aline  
Saillard Joseph (Univ. Nantes)  
Senhadji Lotfi (Rennes I)  
Sentieys Olivier (IRISA/ENSSAT)  
Serot Jocelyn (LASMEA)  
Sidahmed Ménad (UTC Compiègne)  
Sigelle Marc (Telecom-Paris)  
Simard Patrice (UTC Compiègne)  
Simon Laurent (Univ. Le Mans)  
Siohan Pierre (France-Telecom R&D)  
Slock Dirk (EURECOM)  
Strauss Olivier (LIRMM)  
Saoudi Samir  
Sayadi Bessem  
Sequeira Jean  
Taravola Ina (IRCYNN Nantes)  
Tarel Jean-Philippe (Laboratoire Central des Ponts et Chaussées - LCPC)  
Thirion-Moreau Nadège (Univ. Toulon)  
Thomas Gérard (ECL Lyon)  
Torres Lionel (LIRMM)  
Torresani Bruno (Univ. Provence )  
Tournieret Jean-Yves (TESA)  
Toumoulin Christine (LTSI - INSERM U642)  
Uhlig Steve (UCL)  
Vigneron Vincent (INPG Grenoble)  
Vincent Emmanuel (Queen Mary University of London)  
Wang Yide (IRENNA Nantes)  
Wendling Fabrice  
Zerubia Josiane (INRIA Sophia-Antipolis)  
Zhu Yuemin (Creatis Lyon)



# Comité d'Organisation

## *Présidents :*

Macq Benoit (TELE/UCL)

Antoine Jean-Pierre (FYMA/UCL)

## *Membres :*

De Vleeschouwer Christophe (UCL/TELE)

Deschuyter Jean (TELE/UCL)

Desmedt Virginie (TELE/UCL)

Dewael Marie-Hélène (TELE/UCL)

Jacques Laurent (TELE/UCL)

Nicolas Vincent (TELE/UCL)



# Remerciements

Le comité organisateur du Grets'i'05 remercie avec gratitude tous les membres du “Comité de Lecture” et du “Comité de Programme” pour leur aide précieuse dans la longue lecture des 463 soumissions et pour l’organisation des 313 soumissions acceptées.

Le comité organisateur remercie également le sponsoring et le support du colloque de la part des organisations et des sociétés suivantes :

- l’Université Catholique de Louvain (UCL, Louvain-la-Neuve, Belgique),
- l’Ecole Nationale des Télécommunications (ENST, Paris, France),
- l’Ecole Supérieure d’Electricité (Supélec, France),
- le Groupe des écoles des télécommunications (GET, France),
- la Société d’Electricité, de l’Electronique et des Technologies de l’Information et de la Communication (SEEE, France),
- le Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS, France),
- et le réseau Similar (network of excellence).





# Table des Communications

## Volume 1

### Session Affiches : *P3.1 “Images : analyse et modèles”*

*“Suivi de points robuste aux spécularités et aux changements d’éclairage”* 1-4

Michèle Gouiffès, Christophe Collewet, Christine Fernandez-maloigne, Alain Trémeau

*“Suivi temps réel de personnes dans des séquences d’images couleur”* 5-8

Ghilès Mostafaoui, Catherine Achard, Maurice Milgram

*“IDENTIFICATION PAR ANALYSE EN PAQUETS D’ONDELETTES DE L’IRIS ET TESTS DE ROBUSTESSE”* 9-12

Florence Rossant, Thomas Ea, Frédéric Amiel, Manuel Torres Eslava, Amara Amara

*“Diagonalisation de matrices polynomiales quaternioniques : application à la séparation de mélanges convolutifs d’ondes polarisées”* 13-16

Nicolas Le Bihan

*“Vers une classification non supervisée basée sur un nouvel indice de connectivité”* 17-20

Frédéric Blanchard, Michel Herbin, Philippe Vautrot

*“LISSAGE ET SEGMENTATION D’IMAGES MULTI-PARAMETRIQUES ULTRASONORES PAR UNE APPROCHE « MEAN SHIFT »”* 21-24

Franck Davignon, Thomas Grenier, Chantal Revol-muller, Gérard Gimenez, Olivier Basset

*“Représentation éparsée d’images par ondelettes fovéales : principes et applications”* 25-28

Julien Ros, Christophe Laurent

*“Filtrage Perceptuel Pyramidal”* 29-32

Azeddine Beghdadi, Razvan Iordache, Abdel-ouahab Abdel-ouahab

*“Suivi Tridimensionnel en Stéréovision”* 33-36

Simon Conseil, Salah Bourennane, Lionel Martin

*“Les représentations “steerable” pour la compression et l’extraction de caractéristiques de bas niveau”* 37-40

Francois Tonnin, Patrick Gros, Christine Guillemot

---

### Session Affiches : *P3.3 “Filtrage adaptatif et traitement d’antenne”*

*“Filtrage adaptatif non-linéaire par méthodes de gradient stochastique court-terme à noyau”* 41-44

Cédric Richard

<b><i>“Algorithmes du module constant en filtrage adaptatif : impact des progrès récents”</i></b>	<b>45-48</b>
Maurice Bellanger	
<b><i>“Evaluation de la précision des Algorithmes de Projection Affine en Virgule Fixe”</i></b>	<b>49-52</b>
Romuald Rocher, Daniel Ménard, Olivier Sentieys, Pascal Scalart	
<b><i>“MEAN SHIFT ADAPTATIF POUR LE LISSAGE D’IMAGES ULTRA-SONORES”</i></b>	<b>53-56</b>
Thomas Grenier, Franck Davignon, Chantal Revol-muller, Olivier Basset, Gérard Gimenez	
<b><i>“Decision Directed Algorithms for Blind Equalization Based on Constant Modulus Criteria”</i></b>	<b>57-60</b>
Carlos Alexandre Rolim Fernandes, João Cesar Moura Mota, Gérard Favier	
<b><i>“Etude des performances du modèle quaternionique en traitement d’antenne vectorielle”</i></b>	<b>61-64</b>
Sebastian Miron, Nicolas Le Bihan, Jérôme I. Mars	
<b><i>“Estimation des paramètres de propagation d’un canal MIMO par l’algorithme ESPRIT-Unitaire multidimensionnel”</i></b>	<b>65-68</b>
Steve Bartelmaos, Karim Abed-meraim, Valery Guillet, Jean-marie Chaufray	
<b><i>“Bornes de Cramer Rao de DOA pour signaux BPSK et QPSK en présence de bruit non uniforme”</i></b>	<b>69-72</b>
Habti Abeida, Jean Pierre Delmas	
<b><i>“Méthode Haute Résolution large bande pour la Localisation d’Objets Enfous”</i></b>	<b>73-76</b>
Zineb Saidi, Salah Bourennane	
<b><i>“Estimation de directions d’arrivée en présence d’erreur de phase”</i></b>	<b>77-80</b>
Zineb Saidi, Salah Bourennane, Abdel-ouahab Boudraa, Délphine Dare-emziviat	
<b><i>“Blind Multiuser Equalization using a PARAFAC-Subspace Approach”</i></b>	<b>81-84</b>
André L. F. De Almeida, Gérard Favier, Joao C. M. Mota	
<b><i>“Conception et implémentation d’un système de localisation de source sonore large bande par formation de voie pour des applications robotiques”</i></b>	<b>85-88</b>
Sylvain Argentieri, Patrick Danes, Philippe Soueres	

---

## Session Affiches : P4.3 “Détection”

<b><i>“Détection sous optimale en contexte alpha-stable : performances et algorithmes”</i></b>	<b>89-92</b>
Steeve Zozor, Jean-marc Brossier, Pierre-olivier Amblard, Cédric Duchêne	
<b><i>“Approche a contrario pour la détection de changements à partir d’images basse résolution”</i></b>	<b>93-96</b>
Amandine Robin, Lionel Moisan, Sylvie Le Hégarat-masclé	

<b><i>“Détection des zones de mouvement et régularisation : Application à la vidéo surveillance”</i></b>	<b>97-100</b>
Lionel Carminati, Jenny Benois Pineau	
<b><i>“Transformée de Radon Lissée et utilisation dans une procédure de détection en contrôle non destructif”</i></b>	<b>101-104</b>
Patrice Aknin, Patrice Simard, Hervé Cygan	
<b><i>“Segmentation Conjointe de Données Astrophysiques à l’aide d’une Analyse Bayésienne Hiérarchique”</i></b>	<b>105-108</b>
Nicolas Dobigeon, Jean-yves Tourneret	
<b><i>“DETECTION SOUS-OPTIMALES ET QUANTIFIEURS STOCHASTIQUES”</i></b>	<b>109-112</b>
Cédric Duchêne, Steeve Zozor, Pierre Olivier Amblard	
<b><i>“Algorithme de Synthèse d’Ouverture Basé sur un Détecteur à Sous Espace”</i></b>	<b>113-116</b>
Rémi Durand, Guillaume Ginolhac, Philippe Forster, Laetitia Thirion, Marc Lesturgie	
<b><i>“Utilisation des Statistiques d’Ordres Supérieurs en Contrôle Qualité de Détecteurs de Rayons X”</i></b>	<b>117-120</b>
Frédéric Maussang, Jocelyn Chanussot	
<b><i>“PROPRIETE CFAR-MATRICE DU DETECTEUR BORD - APPLICATION RADAR SUR SIGNAUX EXPERIMENTAUX NON-GAUSSIENS”</i></b>	<b>121-124</b>
Frédéric Pascal, Jean-philippe Ovarlez, Philippe Forster, Pascal Larzabal	
<b><i>“Un théorème limite et un test pour la détection non paramétrique de signaux dans un bruit blanc gaussien de variance inconnue”</i></b>	<b>125-128</b>
Dominique Pastor	

---

## **Session Affiches : P4.4 “Estimation”**

<b><i>“Restauration d’images dans le cas d’un bruit Gaussien Poissonien”</i></b>	<b>129-132</b>
Céline Theys, Henri Lantéri	
<b><i>“Inversion de données infrarouges issues du télescope SPITZER”</i></b>	<b>133-136</b>
Thomas Rodet, Alain Abergel, Hervé Dole, Alain Coulais	
<b><i>“Approche de Suivi d’Objet par Courbes de Niveau”</i></b>	<b>137-140</b>
Ali Ganoun, Raphael Canals, Sylvie Treuillet	
<b><i>“Une nouvelle approche des bornes Bayésiennes”</i></b>	<b>141-144</b>
Alexandre Renaux, Philippe Forster, Pascal Larzabal	
<b><i>“Estimation robuste de l’orientation locale par l’opérateur IRON”</i></b>	<b>145-148</b>
Franck Michelet, Christian Germain, Pierre Baylou	
<b><i>“Estimation semi-paramétrique robuste par minimisation de l’entropie des résidus, application en traitement d’images”</i></b>	<b>149-152</b>
Eric Wolsztynski, Eric Thierry, Luc Pronzato	

<b><i>“Régressions par machines à vecteurs supports pour la prédiction de séries chaotiques”</i></b>	<b>153-156</b>
Herwig Wendt, Patrick Flandrin, Patrice Abry	
<b><i>“Estimation paramétrique multiresolution de mouvements transparents”</i></b>	<b>157-160</b>
Vincent Auvray, Patrick Bouthemy, Jean Lienard	
<b><i>“Estimation des données occultées : modèles statistiques à noyau”</i></b>	<b>161-164</b>
Barbara Romaniuk, Michel Desvignes, Maxime Bérar	
<b><i>“Estimation imprécise de densité de probabilité par transfert imprécis de comptage.”</i></b>	<b>165-168</b>
Olivier Strauss	
<b><i>“Probabilité de décrochement d’un estimateur autodidacte du résidu de porteuse”</i></b>	<b>169-172</b>
Philippe Ciblat, Mounir Ghogho	
<b><i>“Estimation des dérivées d’un signal multidimensionnel avec applications aux images et aux vidéos”</i></b>	<b>173-176</b>
Michel Fliess, Cédric Join, Mamadou Mboup, Alexandre Sedoglavic	
<b><i>“Récepteur aveugle basé sur la décomposition PARAFAC pour des canaux de communication non linéaires”</i></b>	<b>177-180</b>
Alain Kibangou, Gérard Favier, Moha Hassani	

---

## Session Orale : *O6.1 “Applications : bio-ingénierie”*

<b><i>“Sélection de segments pertinents dans des enregistrements SEMG en conditions expérimentales perturbées”</i></b>	<b>181-184</b>
Georges Farah, David Hewson, Jacques Duchêne	
<b><i>“Prédiction précoce de la syncope chez l’homme par réseaux de neurones”</i></b>	<b>185-188</b>
Mathieu Feuilloy, Daniel Schang, Jacques-olivier Fortrat, Sylvain Poggi, Elisabeth Bellard, Pascal Nicolas	
<b><i>“SEGMENTATION COMPETITIVE DE L’HIPPOCAMPE ET DE L’AMYGDALE A PARTIR DE VOLUMES IRM”</i></b>	<b>189-192</b>
Marie Chupin, Dominique Hasboun, Eric Bardinnet, Sylvain Baillet, Line Garnerio	
<b><i>“Compensation de déformations en tomographie dynamique”</i></b>	<b>193-196</b>
Laurent Desbat, Sébastien Roux, Pierre Grangeat	
<b><i>“Modélisation Markovienne pour l’Estimation Combinée de Forme et de Mouvement : Application au Cœur en Imagerie Scanner Multibarrette.”</i></b>	<b>197-200</b>
Antoine Simon, Mireille Garreau, Jean-louis Coatrieux, Hervé Le Breton	

---

## Session Orale : O4.4 “*Filtrage particulière*”

<i>“A propos de l’utilisation des méthodes de Monte Carlo séquentielles pour l’estimation de paramètres dans les modèles de Markov cachés”</i>	201-204
Olivier Cappé, Eric Moulines	
<i>“Détection et suivi simultanés dans une séquence vidéo en couleur par filtres particuliers”</i>	205-208
Jacek Czyz, Branko Ristic, Benoit Macq	
<i>“Méthode de modélisation non supervisée du canal satellite mobile par chaînes de Markov”</i>	209-212
Clémence Alasseur, Lionel Husson, Sandro Scalise, Harald Ernst	
<i>“Filtrages de Kalman et particulière dans les Chaînes de Markov Triplet”</i>	213-216
Boujemaa Ait-el-fquih, François Desbouvries	
<i>“Fusion de capteurs potentiellement défaillants par filtrage particulière”</i>	217-220
François Caron, Manuel Davy, Emmanuel Duflos, Philippe Vanheegehe	

---

## Session Orale : O3.1 “*Analyse multirésolution*”

<i>“Bases orthonormées d’ondelettes splines linéaires adaptées à une grille irrégulière”</i>	221-224
Najat Chihab, Anissa Zergaïnoh, Pierre Duhamel, Jean-pierre Astruc	
<i>“Multiscale analysis of multiple change points using unbalanced wavelets”</i>	225-228
Maarten Jansen	
<i>“Etude du bruit dans une analyse M-bandes en arbre dual”</i>	229-232
Caroline Chaux, Laurent Duval, Jean-christophe Pesquet	
<i>“Modélisation statistique multivariée des images dans le domaine de la transformée de curvelet”</i>	233-236
Larbi Boubchir, Jalal Fadili	
<i>“Analyse multirésolution L2-optimale : estimation par quasi-projections”</i>	237-240
Laurent Condat, Annick Montanvert	

---

## Session Spéciale : S3.1 “*Signal et Image en bioingénierie 1*”

<i>“Sur les signaux électrophysiologiques : réflexion et quelques perspectives ouvertes”</i>	241-244
Lotfi Senhadji, Alfredo Hernandez, Fabrice Wendling, Guy Carrault	
<i>“Classification multivoie de signaux électromyographiques par ondelettes adaptées”</i>	245-248
Aude Maitrot, Marie-françoise Lucas, Christian Doncarli	

<b><i>“Etude de la cyclostationnarité du signal Doppler sanguin ultrasonore pour la détection de micro-embolies”</i></b>	<b>249-252</b>
--	----------------

Jean-marc Girault, Mathieu Biard, Denis Kouamé, Gregory Souchon, Aurore Bleuzzen, François Tranquart

<b><i>“ANALYSE DES SIGNAUX POUR UN DISPOSITIF DE MESURE ET DE STIMULATION DU SYSTEME NERVEUX CENTRAL”</i></b>	<b>253-256</b>
---	----------------

Céline Moulin, Daniel Barbier, Blaise Ivert, Régis Guillemaud, Lionel Rousseau, François Goy

## **Session Spéciale : S1.1 “Astro-statistique 1”**

<b><i>“Détection de familles d’astéroïdes : un problème de segmentation non supervisée”</i></b>	<b>257-260</b>
---	----------------

Olivier J.j. Michel, Philippe Bendjoya, Pablo Rojo Guerra

<b><i>“Géométrie des ensembles de chirps et détection des ondes gravitationnelles”</i></b>	<b>261-264</b>
--	----------------

Eric Chassande-mottin

<b><i>“Analyse statistique de la détection de planètes par imagerie directe”</i></b>	<b>265-268</b>
--	----------------

André Ferrari, Jean Yves Tourneret, Eduard Serradel, Claude Aime

## **Session Spéciale : S2.1 “Traitement du signal et télétrafic informatique 1”**

<b><i>“Deux applications de processus ponctuels aux réseaux de communications”</i></b>	<b>269-272</b>
--	----------------

Olivier Dousse, Hung X. Nguyen, Patrick Thiran

<b><i>“Traitement du signal et modélisation probabiliste du trafic Internet”</i></b>	<b>273-276</b>
--	----------------

Fabrice Guillemin

<b><i>“Estimation en temps réel de la Matrice de Trafic par filtres de Kalman”</i></b>	<b>277-278</b>
--	----------------

Augustin Soule, Kavé Salamatian, Nina Taft

<b><i>“Marginales non gaussiennes et longue mémoire : analyse et synthèse de trafic Internet”</i></b>	<b>279-282</b>
---	----------------

Antoine Scherrer, Patrice Abry

## **Session Spéciale : S3.2 “Signal et Image en bioingénierie 2”**

<b><i>“Quelques perspectives en imagerie médicale”</i></b>	<b>283-286</b>
--	----------------

Isabelle Bloch

<b><i>“Modèle numérique d’estimation 2D de la déformation des tissus mous biologiques à partir d’images échographiques radiofréquence : Résultats sur simulations numériques et données expérimentales”</i></b>	<b>287-290</b>
---	----------------

Elisabeth Brusseau, Ghada Said, Patrick Clarysse

<b><i>“Approximation de courbes de quaternions duaux par des courbes de Bézier et des splines”</i></b>	<b>291-294</b>
--	----------------

Gwenaël Guillard, Chafiaâ Hamitouche, Christian Roux

<b><i>“Détection-estimation conjointe de l’activité cérébrale en imagerie fonctionnelle (IRMf)”</i></b>	<b>295-298</b>
---	----------------

Salima Makni, Philippe Ciuciu, Jérôme Idier, Jean-baptiste Poline

---

## **Session Spéciale : S1.2 “Astro-statistique 2”**

<b><i>“L’analyse des images dans les grands relevés d’astronomie visible/proche-infrarouge”</i></b>	<b>299-302</b>
---	----------------

Emmanuel Bertin

<b><i>“Statistiques direction-multipôle pour la séparation de composantes astrophysiques dans le fonds de rayonnement cosmologique”</i></b>	<b>303-306</b>
---	----------------

Jean-françois Cardoso, Pierrick Abrial, Yassir Moudden, Jean-luc Stark, Jacques Delabrouille

<b><i>“Deux méthodes de déconvolution de mélanges de composantes ; application à la reconstruction des amas de galaxies”</i></b>	<b>307-310</b>
--	----------------

Sandrine Anthoine, Elena Pierpaoli, Ingrid Daubechies

<b><i>“Déconvolution avec contraintes de positivité et de support : sources ponctuelles + source étendue en astronomie”</i></b>	<b>311-314</b>
---	----------------

Jean-françois Giovannelli, Alain Coulais

---

## **Session Spéciale : S2.2 “Traitement du signal et télétrafic informatique 2”**

<b><i>“Revisiting the multiscaling hypothesis at medium timescales”</i></b>	<b>315-318</b>
---	----------------

Claudio Narduzzi, Paolo Attilio Pegoraro, Steve Uhlig

<b><i>“Caractérisation et analyse du trafic Internet en fonction du type d’application”</i></b>	<b>319-322</b>
---	----------------

Nicolas Larrieu, Yu Zhang, Philippe Owezarski

<b><i>“Détection d’attaques de “Dénis de Services” : ruptures dans les statistiques du trafic”</i></b>	<b>323-326</b>
--	----------------

Pierre Borgnat, Nicolas Larrieu, Patrice Abry, Philippe Owezarski

---

## **Session Affiches : P1.1 “Images”**

<b><i>“Suivi des mouvements faciaux et de la pose 2D d’un visage”</i></b>	<b>327-330</b>
---	----------------

Soumya Hamlaoui, Franck Davoine

<i>“Modélisation, Analyse et Fusion Markovienne Cachée de Multiples Séquences d’Événements : Application en Cartographie IRM Fonctionnelle Cérébrale”</i>	331-334
Laurent Thoraval, Sylvain Faisan, Jean-paul Armspach	
<i>“Partitionnement optimal de l’image par minimisation d’un critère d’uniformité globale”</i>	335-338
Luc Klaine, Kacem Chehdi, Benoit Vozel	
<i>“Segmentation pyramidale et groupements perceptuels”</i>	339-342
Jérémy Huart, Pascal Bertolino	
<i>“Une méthode pour le pré-traitement et le calcul de matrices de crosstalk pour des images couleur issues d’une caméra tri-CCD”</i>	343-346
Alexandra Lathuillère, Yvon Voisin, Franck Marzani	
<i>“Traitement non linéaire uniforme pour la reconstruction d’une mosaïque chromatique répartie aléatoirement”</i>	347-350
Brice Chaix De Lavarène, David Alleysson, Jeanny Hérault	
<i>“Invariants intégraux pour l’indexation d’images omnidirectionnelles”</i>	351-354
Cyril Charron, Ouidad Labbani-igbida, El Mustapha Mouaddib	

---

## Session Affiches : P6.1 “Signal et images en bio-ingénierie 1”

<i>“Simulation d’images échographiques à partir de données scanner X”</i>	355-358
Soizic Laguitton, Jean-jacques Patard, Jean-louis Dillenseger	
<i>“Segmentation d’images échocardiographiques par contours actifs implicites : exploitation de descripteurs statistiques de régions”</i>	359-362
Olivier Bernard, Jan D’hooge, Denis Friboulet	
<i>“Estimation 3D du flux sanguin par imagerie ultrasonore haute fréquence : application à l’étude de la microcirculation”</i>	363-366
Walid Aoudi, Hervé Liebgott, Andrew Needles, Victor Yang, Stuart Foster, Didier Vray	
<i>“Evaluation de l’équilibre postural suite à la réalisation d’un pas selon trois méthodes d’estimation de l’exposant de Hurst”</i>	367-370
Hassan Amoud, Mohammed Abadi, Valérie Michel, David Hewson, Michel Doussot, Jacques Duchêne	
<i>“Reconstruction 3D de sténoses par modélisation markovienne à partir de plus de deux images d’angiographie rotative par rayons X”</i>	371-374
Moez Chakchouk, Sylvie Sevestre-ghalila, Christine Graffigne, Mériem Jaïdane, Hatem Rajhi, Radhi Hamza	
<i>“ICASENSE : une application de l’Analyse en Composantes Indépendantes à l’IRM parallèle”</i>	375-376
Gaël Le Bec, Kosai Raoof, Jean Paul Yonnet	
<i>“Modèle de connaissances pour l’interprétation d’un électrogramme”</i>	377-380
Antoine Defontaine, Alfredo Hernandez, Guy Carrault	



<b><i>“Proposition d’un indice de synchronisation pour la validation de réponses neuronales à des stimuli périodiques”</i></b>	<b>381-384</b>
Julien Huillery, Régine Le Bouquin Jeannès, Gérard Faucon, Pierre Dugué, Alexandre Guérin	
<b><i>“Mesure volumétrique à partir de vues stéréoscopiques non calibrées”</i></b>	<b>385-388</b>
Benjamin Albouy, Sylvie Treuillet, Yves Lucas	
<b><i>“Evaluation des déformations du myocarde sur des séquences temporelles d’images IRM par estimation contrainte du flot optique”</i></b>	<b>389-392</b>
Solofohery Randrianariso, Eric Deléchelle, Eric Petit, Yasmina Chenoune, Jérôme Garot, Alain Rahmouni	
<b><i>“Détection et caractérisation d’un bioprocédé fed-batch par l’analyse de l’exposant de Hölder”</i></b>	<b>393-396</b>
Sebastien Regis, Andrei Doncescu, Laetitia Faure, Jean-louis Uribelarea	

---

## **Session Affiches : P6.2 “Signal et images en bio-ingénierie 2”**

<b><i>“Extraction des signatures de composés purs constituant la couche externe du grain d’orge à partir d’images de fluorescence”</i></b>	<b>397-400</b>
Abdelkamel Elhafid, Danielle Nuzillard, Marie-françoise Devaux, Nicolas Petrochilos, Fabien Belloir	
<b><i>“Application de modèles à dérivée non entière à la détection électrochimique sur biopuce”</i></b>	<b>401-404</b>
Alexandre Chibane, Pierre Grangeat, Laurent Desbat, Alina Voda	
<b><i>“Etude des parties codantes de l’ADN en fonction du sens lecture”</i></b>	<b>405-408</b>
Guillaume Sicot, Ramesh Pyndiah	
<b><i>“Caractérisation 3D d’images IRM pour l’analyse de l’ostéochondrite primitive de la hanche”</i></b>	<b>409-412</b>
Philippe Pouletaut, Isabelle Claude, Renaud Winzenrieth, Marie-christine Ho Ba Tho, Guy Sebag	
<b><i>“Caractérisation par analyse d’images de l’angiogenèse sur des coupes histologiques”</i></b>	<b>413-416</b>
Sophie Le Maire, Silvia Blacher, Jean-michel Foidart, Jacques Verly	
<b><i>“Réduction du bruit par pré-détection pour la localisation échographique radio fréquence de micro-outils dans les tissus biologiques”</i></b>	<b>417-420</b>
Jean Martial Mari, Christian Cachard	
<b><i>“Localisation distribuée des activités épileptiques par une analyse vectorielle : Approche expérimentale multi agent”</i></b>	<b>421-424</b>
Mamadou Ndiaye, Abel Kinié, Jean-jacques Montois, Fabrice Wendling	
<b><i>“Mesure de l’excitation et de l’inhibition dans le tissu neuronal en épilepsie par identification d’un modèle dynamique non linéaire d’activité EEG”</i></b>	<b>425-428</b>
Jean-jacques Bellanger, Alfredo Hernandez, Fabrice Wendling, Paul Frogerais	

<b><i>“Nouvelle approche de modélisation de milieux poreux. Application à l’os trabéculaire”</i></b>	<b>429-432</b>
Gabriel AUFORT, Rachid JENNANE, Rachid HARBA, Alain GASSER, Damien SOULAT, Claude LAURENT BENHAMOU	
<b><i>“Etude des paramètres d’un modèle de génération de signaux EEG intracérébraux : synchronisation, conductivité cérébrale et surface corticale.”</i></b>	<b>433-436</b>
Delphine COSANDIER-RIMÉLÉ, Jean-michel BADIER, Fabrice WENDLING	
<b><i>“Vers un codage numérique de l’activité Stéréo-EEG critique par une approche expérimentale multi-agent.”</i></b>	<b>437-440</b>
Abel KINIE, Mamadou NDIAYE, Jean-jacques MONTOIS, Fabrice WENDLING, Yann JACQUELET	

---

## Session Affiches : P6.3 “Applications”

<b><i>“Filtrage des échos ultrasonores en CND par la fonction de Cross Validation Généralisée (GCV)”</i></b>	<b>441-444</b>
Farid TAFININE, Boulem OUAZINE, Amrane HOUACINE	
<b><i>“A novel approach in the Characterization of Correlated Measurements”</i></b>	<b>445-448</b>
Carlos LOPEZ-MARTINEZ, Eric POTTIER	
<b><i>“Localisation de source par filtrage modal : application à des données petites échelles en ASM”</i></b>	<b>449-452</b>
Barbara NICOLAS, Philippe ROUX, Jean-louis LACOUME, Jérôme MARS	
<b><i>“Application d’opérateurs de fusion floue à la classification automatique de cibles réalisée par un radar polarimétrique”</i></b>	<b>453-456</b>
Emanuel RADOI, André QUINQUIS, Felix TOTIR	
<b><i>“Pollution de milieux poreux : identifiabilité et identification de modèles paramétriques de sources”</i></b>	<b>457-460</b>
Aurélien HAZART, Jean-françois GIOVANNELLI, Stéphanie DUBOST, Laurence CHATELLIER	
<b><i>“Calcul Rapide du Kurtogramme et Applications”</i></b>	<b>461-464</b>
Jérôme ANTONI	
<b><i>“Apport du modèle de Lambert généralisé à l’extraction de relief de surface rugueuse par stéréovision photométrique : application aux revêtements routiers”</i></b>	<b>465-468</b>
Anis BENSLIMANE, Majdi KHOUDAIR, Jacques BROCHARD, Minh-tan DO	
<b><i>“Modélisation, évaluation et contrôle d’une chaîne de traitement d’images routières”</i></b>	<b>469-472</b>
Antonio DOMINGUES, Yves LUCAS, Driss DRIOUCHI, Pierre MARCHÉ	
<b><i>“Détection de jingles dans les documents sonores”</i></b>	<b>473-476</b>
Julien PINQUIER, Régine ANDRÉ-OBRECHT	
<b><i>“Estimation du signal glottique basée sur un modèle ARX”</i></b>	<b>477-480</b>
Damien VINCENT, Olivier ROSEC, Thierry CHONAVEL	

<b><i>“Classification d’Expressions Vocales Passives Versus Actives”</i></b>	<b>481-484</b>
Zakia Hammal, Baris Bozkurt, Laurent Couvreur, Devrim Unay, Alice Caplier, Thierry Dutoit	
<b><i>“Détection et classification des sons : application aux sons de la vie courante et à la parole”</i></b>	<b>485-488</b>
Dan Istrate, Michel Vacher, Jean François Serignat	
<b><i>“Extraction temps-réel de contours labiaux par segmentation vidéo robuste en vue d’animation 3D”</i></b>	<b>489-492</b>
Brice Beaumesnil, Franck Luthon, Marc Chaumont	
<b><i>“Influence de la Réduction des Couleurs sur la Détection des Changements de Plan dans les Films d’Animation”</i></b>	<b>493-496</b>
Bogdan Ionescu, Patrick Lambert, Didier Coquin, Vasile Buzuloiu	
<b><i>“Filtrage matriciel multicomposante et estimation de la polarisation”</i></b>	<b>497-500</b>
Caroline Paulus, Jérôme Mars	

---

## Session Orale : O6.3 “Télédétection et spatial”

<b><i>“Analyse d’images SAR polarimétriques au moyen d’outils temps-fréquence”</i></b>	<b>501-504</b>
Paul Leducq, Laurent Ferro-famil, Eric Pottier	
<b><i>“Fusion de Méthodes pour la Classification de Zones Urbaines en Télédétection Satellitaire”</i></b>	<b>505-508</b>
Mathieu Fauvel, Jocelyn Chanussot, Jon Atli Benediktsson	
<b><i>“Détection de feux de forêt à partir d’images satellitaires IRT par analyse statistique d’évènements rares”</i></b>	<b>509-512</b>
Florent Lafarge, Xavier Descombes, Josiane Zerubia, Sandrine Mathieu-marni	
<b><i>“Variational approach to interpolate and correct biases in stereo”</i></b>	<b>513-516</b>
Gabriele Facciolo, Andrés Almansa, Alvaro Pardo	
<b><i>“RECONNAISSANCE AUTOMATIQUE DE FREQUENCES DE RESONANCE A PARTIR DES DONNEES SATELLITAIRES DE LA MISSION SPATIALE CLUSTER”</i></b>	<b>517-520</b>
Xavier Suraud, Jean-louis Rauch, Roger Lédée, Pierrette Décréau	

---

## Session Orale : O4.1 “Segmentation d’images médicales”

<b><i>“Une méthode d’initialisation automatique pour contour actif paramétrique, application aux images échographiques”</i></b>	<b>521-524</b>
Clovis Tauber, Hadj Batatia, Alain Ayache	
<b><i>“Detection robuste et automatique des contours myocardiques en IRM cardiaque marquée”</i></b>	<b>525-528</b>
Aymeric Histace, Christine Cavarro-menard	

*“Segmentation guidée en imagerie CT 3D : Application à l’arborescence artérielle pulmonaire”* **529-532**

Raphael Sebbe, Bernard Gosselin, Roger Lédée, Emmanuel Coche, Benoît Macq

*“SEGMENTATION AUTOMATIQUE D’IMAGES A FAIBLE RESOLUTION ET FAIBLE CONTRASTE : APPLICATION A L’IRM CARDIAQUE DU PETIT ANIMAL”* **533-536**

Roger Lédée, Rémy Leconge, Christine Cavarro-ménard

*“Segmentation du contour de l’endocarde sur des séquences d’images d’échographie cardiaque”* **537-540**

Jérôme Lebossé, François Lecellier, Marinette Revenu, Eric Saloux

---

## Session Orale : *O1.3 “Multifractales : synthèse et analyse”*

*“Synthèse de champs scalaires multifractals : application à la synthèse de texture”* **541-544**

Pierre Chainais, Jian-jin Li

*“Applications d’outils fractals pour la classification d’images microscopiques de matière grasse laitière”* **545-548**

Antoine Echelard, Jacques Lévy-vehel, Ina Taralova

*“Contributions à l’étude des performances statistiques des estimateurs multifractals”* **549-552**

Stephane Roux, Bruno Lashermes, Patrice Abry, Stephane Jaffard

*“Débruitage multifractal par évolution interactive”* **553-556**

Evelyne Lutton, Jacques Levy Vehel, Pierre Grenier

---

## Conférence invitée : *C2, M. Unser*

*“Vers une théorie unificatrice pour le traitement numérique/analogique des signaux”* **557-558**

Michael Unser

---

## Session Affiches : *P1.2 “Non stationnaire et non linéaire”*

*“Caractérisation des Fonds Marins par Décomposition Modale Empirique”* **559-562**

Abdel-ouahab Boudraa, Claire Pollet, Jean-christophe Cexus, Zineb Saidi

*“La Décomposition Modale Empirique à la recherche de l’Onde Circumpolaire Antarctique”* **563-566**

Sylvie Roques, Frédérique Rémy

<b><i>“Utilisation des contours actifs ou « snake » pour l’extraction des arêtes de représentations temps-fréquences : Application à l’analyse des contractions utérines”</i></b>	<b>567-570</b>
Jérémy Terrien, Catherine Marque, Guy Germain	
<b><i>“Analyse et représentation de signaux transitoires : application à la compression, au débruitage et à la détection de rupture”</i></b>	<b>571-574</b>
Michel Fliess, Cédric Join, Mamadou Mboup, Hebertt Sira-ramirez	
<b><i>“Synthèse temps-fréquence de signaux transitoires dans un contexte de tomographie acoustique océanique discrète”</i></b>	<b>575-578</b>
Lionel Cros, Cornelia Ioana, André Quinquis, Gwladys Theuillon	
<b><i>“Amélioration de l’estimation spectrale par modélisation AR multi-dimensionnelle et découpage en sous-bandes”</i></b>	<b>579-582</b>
David Bonacci, Corinne Mailhes	
<b><i>“Vers une carte d’identité spectrale”</i></b>	<b>583-586</b>
Nadine Martin, Corinne Mailhes, Kheira Sahli, Gérard Lejeune	
<b><i>“Représentations temps-fréquence adaptées aux ondes guidées”</i></b>	<b>587-590</b>
Grégoire Le Touzé, Barbara Nicolas, Jérôme Mars, Jean-louis Lacoume, Dominique Fattaccioli	
<b><i>“Choix d’une covariance pour la prédiction par krigeage de séries chronologiques échantillonnées irrégulièrement”</i></b>	<b>591-594</b>
Emmanuel Vazquez, Eric Walter	
<b><i>“Amélioration par le bruit de la dynamique de capteurs à saturation”</i></b>	<b>595-598</b>
David Rousseau, François Chapeau-blondeau	

---

## **Session Affiches : P2.1 “Codage de canal et techniques turbo”**

<b><i>“Optimisation des codes LDPC pour les communications OFDM”</i></b>	<b>599-602</b>
Valérien Mannoni, Guillaume Gelle	
<b><i>“Une méthode simple de turbo estimation de source en décodage conjoint source-canal”</i></b>	<b>603-606</b>
Marion Jeanne, Valérien Mannoni, Pierre Siohan	
<b><i>“Algorithme Simplifié pour le Décodage de Codes LDPC non-binaires”</i></b>	<b>607-610</b>
Adrian Voicila, David Declercq, Marc Fossorier, François Verdier	
<b><i>“Transmission prioritaire JPEG2000 sur lien sans fil”</i></b>	<b>611-614</b>
Benoit Parrein, Nicolas Normand, Patrick Le Callet	
<b><i>“ULTRA-WIDE-BAND RECEIVER BASED ON TURBO-EQUALIZATION”</i></b>	<b>615-618</b>
F. Benedetto, G. Giunta, A. Neri, D. Blasi	
<b><i>“Synchronisation de phase - Boucle à remodulation souple”</i></b>	<b>619-622</b>
Stéphanie Bay, Christophe Vanstraceele, Benoît Geller, Jean-pierre Barbot, Jean-marc Brossier	

<b><i>“Impact de l’a priori sur les performances de l’égaliseur MAP et distribution des LRV extrinsèques”</i></b>	<b>623-626</b>
Noura Sellami, Aline Roumy, Inbar Fijalkow	
<b><i>“Analyse de la convergence d’un système multi-antennes précodé itératif”</i></b>	<b>627-630</b>
Jérôme Le Masson, Charlotte Langlais	
<b><i>“Décodage de Turbo Codes Produit Ternaires”</i></b>	<b>631-634</b>
Loic Barnault, David Declercq, Jacques Eudes	

---

# Table des Communications

## Volume 2

### Session Affiches : *P3.4 “Reconstruction et débruitage d’images”*

***“Reconstruction d’objets composés de plusieurs matériaux en tomographie micro onde”*** 635-638

Olivier Féron, Bernard Duchêne, Ali Mohammad-djafari

***“Restauration d’images par diffusion sélective”*** 639-642

Aymeric Histace, Vincent Courboulay, Michel Menard, Christine Cavarro-menard

***“Denoising and Migration Techniques for Target Identification from Ground Penetrating Radar 2D data; a case study”*** 643-646

Olga Lopera, Nada Milisavljevic, Bart Scheers, Benoît Macq

***“Opérateurs tomographiques pour la reconstruction d’objets à symétrie de révolution”*** 647-650

François Lavallou, Jean Michel Lagrange

***“COMPARAISON ENTRE LES ALGORITHMES SEMI-QUADRATIQUES ET GRADIENTS CONJUGUES PRECONDITIONNES POUR LA RESTAURATION D’IMAGE PRESERVANT LES BORDS”*** 651-654

Christian Labat, Jérôme Idier

***“ECLATEMENT DES CONTRAINTES EN RECONSTRUCTION TOMOGRAPHIQUE”*** 655-658

Thomas Capricelli, Patrick Combettes

***“Restauration myope d’images pour l’inspection des ouvrages d’art par un système de vision embarqué sur drone”*** 659-662

Benoît Vozel, Kacem Chehdi, Jean Dumoulin

***“Scintigraphic Image Denoising using Fisz Transformation and Redundant Wavelet Packets”*** 663-666

Nawres Kahlifa, Kamel Hamrouni, Nouredine Ellouze

***“Restauration des images floues et bruitées multiplicativement”*** 667-670

Luc Klaine, Benoit Vozel, Kacem Chehdi

---

### Session Affiches : *P4.1 “Reconnaissance et classification”*

***“Une nouvelle transformation pour la localisation des yeux dans une image de visage monochrome”*** 671-674

Maurice Milgram, Lionel Prevost, Rachid Belaroussi

***“Extraction d’un modèle 3D de visage en temps-réel et de manière robuste”*** 675-678

Marc Chaumont

<b><i>“Perception visuelle du geste de préhension”</i></b>	<b>679-682</b>
Pablo Augusto Negri, Xavier Clady, Maurice Milgram	
<b><i>“Détection de piétons par stéréovision et noyaux de graphes.”</i></b>	<b>683-686</b>
Frédéric Suard, Alain Rakotomamonjy, Abdelaziz Bensrhair	
<b><i>“Apprentissages discriminants en reconnaissance de mots cursifs en-ligne”</i></b>	<b>687-690</b>
Emilie Caillault, Christian Viard-gaudin	
<b><i>“Analyse des Orientations pour la Caractérisation d’Images de Documents de la Renaissance”</i></b>	<b>691-694</b>
Nicholas Journet, Jean-yves Ramel, Rémy Mullot, Véronique Eglin	
<b><i>“Appariement couleur de planches de bois par inférence floue”</i></b>	<b>695-698</b>
Emmanuel Schmitt, Vincent Bombardier, Patrick Charpentier	
<b><i>“Reconnaissance et détection robuste d’objets couleur”</i></b>	<b>699-702</b>
Choubeila Maaoui, Hélène Laurent, Bruno Emile	
<b><i>“Quantification des images couleur par un algorithme de classification crédibiliste”</i></b>	<b>703-706</b>
Anne-sophie Capelle, Olivier Colot, Christine Fernandez	
<b><i>“Comparaison expérience/calcul par association de courbes”</i></b>	<b>707-710</b>
Jean-michel Lagrange, Roberto Ardon, Nicolas Villain	
<b><i>“Une Nouvelle Méthode de Classification en Grande Dimension pour la Reconnaissance de Formes”</i></b>	<b>711-714</b>
Charles Bouveyron, Stéphane Girard, Cordelia Schmid	
<b><i>“Localisation de défauts de capteur pour la validation des mesures hydro-métriques dans les réseaux d’assainissement”</i></b>	<b>715-718</b>
Farida Hamioud, Claude Joannis, José Ragot	
<b><i>“Classification d’EEG pour les interfaces cerveau-machine”</i></b>	<b>719-722</b>
Alain Rakotomamonjy, Vincent Guigue, Gregory Mallet, Victor Alvarado	
<b><i>“Nouveau noyau de séquences pour la vérification du locuteur”</i></b>	<b>723-726</b>
Jérôme Louradour, Khalid Daoudi	
<b><i>“Espaces hybrides couleur-texture adaptés au comptage d’épis de blé”</i></b>	<b>727-730</b>
Frédéric Cointault, Dominique Guérin	

---

## **Session Orale : O2.1 “Théorie de l’information et systèmes de communication”**

<b><i>“Codage entropique à base de règles de ré-écriture”</i></b>	<b>731-734</b>
Hervé Jégou, Christine Guillemot	



<b><i>“Allocation MC-CDMA : augmentation des débits sur les lignes de transmission”</i></b>	<b>735-738</b>
Jean-yves Baudais, Matthieu Crussière	
<b><i>“Égalisation fréquentielle sous-optimale d’un système mono ou multipor-teuse”</i></b>	<b>739-742</b>
Carine Simon, Sylvie Mayrargue	
<b><i>“Un nouveau système de transmission basé sur les techniques MIMO SS-MC-MA avec saut de fréquence pour la voie montante des futurs réseaux cellulaires de quatrième génération”</i></b>	<b>743-746</b>
Laurent Cariou, Jean-françois Hélard	
<b><i>“PERFORMANCE OF HARQ SCHEMES WITH PACKET AND CODE COMBINING OVER MULTIPATH FADING CHANNELS FOR DS-SSS”</i></b>	<b>747-750</b>
M. Wissem El Bahri, Hatem Boujemâa, Mohamed Siala	

---

## **Session Orale : O1.4 “Représentation des signaux et des images”**

<b><i>“Propriétés du second ordre de l’effet de grenaille”</i></b>	<b>751-754</b>
Bernard Picinbono	
<b><i>“Sur la Décomposition Modale Empirique des signaux échantillonnés”</i></b>	<b>755-758</b>
Gabriel Rilling, Patrick Flandrin	
<b><i>“Vers une nouvelle décomposition de matrice”</i></b>	<b>759-762</b>
Jean Jacques Fuchs	
<b><i>“Estimation de signaux par noyaux d’ondelettes”</i></b>	<b>763-766</b>
Vincent Guigue, Alain Rakotomamonjy, Stéphane Canu	
<b><i>“Une procédure générale d’estimation efficace de paramètres multiples avec application en localisation”</i></b>	<b>767-770</b>
Philippe Forster, Guillaume Ginolhac	

---

## **Session Orale : O5.1 “Architectures matérielles et logicielles”**

<b><i>“Conception fonctionnelle d’une caméra intelligente pour le traitement vidéo temps réel”</i></b>	<b>771-774</b>
Barthélémy Heyrman, Michel Paindavoine, Renaud Schmit, Laurent Letellier	
<b><i>“Plate-forme de Prototypage et Conception pour les Systèmes de Radio Logicielle”</i></b>	<b>775-778</b>
Fabienne Nouvel, Arnaud Massiani, Pierre De Stéfano	
<b><i>“Synthèse Comportementale Sous Contraintes de Communication et de Placement Mémoire pour les composants du TDSI”</i></b>	<b>779-782</b>
Gwenole Corre, Philippe Coussy, Pierre Bomel, Eric Senn, Eric Martin	

<b><i>“Rétroprojection 2D sur plateforme SOPC”</i></b>	<b>783-786</b>
Stéphane Mancini, Nicolas Gac, Michel Desvignes	
<b><i>“Optimisation énergétique d’un système de communication dédié à un réseau de capteurs”</i></b>	<b>787-790</b>
Mickaël Cartron, Olivier Sentieys	

---

## **Session Affiches : P5.1 “Architectures matérielles et logicielles”**

<b><i>“Un cluster de calcul hybride pour les applications de vision temps-réel”</i></b>	<b>791-794</b>
Joel Falcou, Jocelyn Sérot, Thierry Chateau, Frédéric Jurie	
<b><i>“Implantation d’un récepteur Multi-Utilisateurs appliqué à la liaison montante UMTS”</i></b>	<b>795-798</b>
Makram Touzri, Sylvie Kerouedan, Samir Saoudi, Patrick Adde	
<b><i>“Un Modèle Hiérarchique pour les Architectures Reconfigurables en Radio Logicielle”</i></b>	<b>799-802</b>
Jean Philippe Delahaye, Jacques Palicot, Pierre Leray	
<b><i>“Implantation du décodeur arithmétique de JPEG2000 basée sur la reconfiguration dynamique des FPGAs”</i></b>	<b>803-806</b>
Sophie Bouchoux, El-bay Bourennane	
<b><i>“Optimisation sur calculateur d’un modèle d’architecture de couche de cellules rétiniennes”</i></b>	<b>807-810</b>
François Devillard, Bernard Heit, Frédéric Grandidier	
<b><i>“Optimisation de la largeur des opérateurs arithmétiques en synthèse de haut-niveau”</i></b>	<b>811-814</b>
Nicolas Herve, Daniel Menard, Olivier Sentieys	
<b><i>“Une IP de scrutation et de codage entropique pour la normalisation d’un codeur MPEG4 temps réel”</i></b>	<b>815-818</b>
Hachicha Khalil, Garda Patrick	
<b><i>“Reconstruction 3D temps réel dans un VSIP”</i></b>	<b>819-822</b>
Tarik Graba, Bertrand Granado, Olivier Romain, Thomas Ea, Andrea Pinna, Patrick Garda	
<b><i>“Séquenceur Mémoire pour Applications Multimédias Temps Réel Gérant les Séquences d’Accès Indéterministes”</i></b>	<b>823-826</b>
Bertrand Le Gal, Emmanuel Casseau, Sylvain Huet, Caaliph Andriamisaina, Eric Martin	
<b><i>“Etude Spectrale de l’Echantillonnage par Traversée Niveaux”</i></b>	<b>827-830</b>
Fabien Aeschlimann, Emmanuel Allier, Laurent Fesquet, Marc Renaudin	

---

## Session Affiches : P2.2 “Systèmes multi-utilisateurs et multi-capteurs”

- “Séquences de canalisation chaotiques pour les systèmes CDMA multicodes”* 831-834  
Mourad Khanfouci, Sylvie Marcos
- “Contrôle de puissance et détection multicode conjointe dans une liaison descendante à haut débit de l’UMTS”* 835-838  
Bessem Sayadi, Stefan Ataman, Inbar Fijalkow
- “Annulation d’interférence dans les systèmes optiques à accès multiple par répartition de code (O-CDMA)”* 839-842  
Claire Goursaud, Anne Julien-vergonjanne, Christelle Aupetit-berthelemot, Jean-pierre Cancès, Jean-michel Dumas
- “Méthode hybride de suppression d’interférence basée sur l’estimation par paquet des codes inconnus appliquée au HSDPA multicode”* 843-848  
Ahmed Saadani, Jean-marie Chaufray
- “Construction de filtres LPTV orthogonaux pour un système d’accès multiple par étalement spectral. Etude des effets d’une désynchronisation entre utilisateurs”* 849-852  
Wilfried Chauvet, Bernard Lacaze, Daniel Roviras, Alban Duverdier
- “Un nouveau décodeur MIMO pour des transmissions MAQ utilisant une approche géométrique : HISD”* 853-856  
Amor Nafkha, Christian Roland, Emmanuel Boutillon
- “Comparaison du précodeur  $d_{min}$  avec les OSTBC et le précodeur Max-SNR pour les systèmes MIMO”* 857-860  
Baptiste Vrigneau, Philippe Rostaing, Koffi Yao
- 

## Session Affiches : P2.3 “Systèmes de communications”

- “Construction d’une Modulation Codée”* 861-864  
Sami Hadda, Slaheddine Jarboui
- “Synthèse de la notion de facteur de crête et applications aux modulations monoporteuse”* 865-868  
Yves Louët, Jacques Palicot
- “TEB de système OFDM codé multi-utilisateurs”* 869-872  
Adrien Renoult, Inbar Fijalkow, Marc Chenu-tournier
- “ALGORITHMES A NORME CONSTANTE POUR LES SYSTEMES DE COMMUNICATION MIMO”* 873-876  
Aïssa Ikhlef, Daniel Le Guennec, Jacques Palicot
- “Etude théorique des performances d’un détecteur autodidacte d’entrelaceur”* 877-880  
Guillaume Sicot, Sébastien Houcke

<b><i>“Analyse du facteur de crête dans le contexte Radio Logicielle”</i></b>	<b>881-884</b>
Sidkièta Zabré, Jacques Palicot	

---

## **Session Affiches : P4.2 “Segmentation et indexation”**

<b><i>“Critères multi-échelle d’évaluation de la segmentation”</i></b>	<b>885-888</b>
Sylvie Philipp-foliguet, Laurent Guigues	
<b><i>“Segmentation pyramidale localisée dans un ruban fermé”</i></b>	<b>889-892</b>
Pascal Bertolino, Jérémy Huart, Guillaume Foret	
<b><i>“Extraction de formes par approche agent dans des IRM”</i></b>	<b>893-896</b>
Yann Jacquélet, Jean-jacques Montois, Mamadou Lamine Ndiaye, Abel Kinié	
<b><i>“Modèles GMM et algorithme de Brandt pour la correction de la segmentation de la parole par HMM”</i></b>	<b>897-900</b>
Safaa Jarifi, Dominique Pastor, Olivier Rosec	
<b><i>“Segmentation en Caractères Individuels dans des Images de Scènes Naturelles”</i></b>	<b>901-904</b>
Céline Mancas-thillou, Matei Mancas, Bernard Gosselin	
<b><i>“Segmentation d’Images Multispectrales par Arbre de Markov Caché Flou”</i></b>	<b>905-908</b>
Pierre Lanchantin, Fabien Salzenstein	
<b><i>“Segmentation non supervisée d’images non stationnaires avec champs de Markov évidentiels”</i></b>	<b>909-912</b>
Dalila Benboudjema, Wojciech Pieczynski	
<b><i>“Fusion de segmentations d’images microscopiques par SVM dans différents espaces couleur selon la théorie de l’évidence”</i></b>	<b>913-916</b>
Christophe Charrier, Gilles Lebrun, Olivier Lézoray	
<b><i>“Fusion de critères pour l’évaluation de résultats de segmentation d’images”</i></b>	<b>917-920</b>
Sébastien Chabrier, Hélène Laurent, Christophe Rosenberger, Alain Rakotomamonjy	
<b><i>“Chaînes de Markov cachées multivariées à bruit corrélé non gaussien, avec applications à la segmentation du signal radar”</i></b>	<b>921-924</b>
Nicolas Brunel, Wojciech Pieczynski, Frédéric Barbaresco	
<b><i>“Représentation d’images par chaînes de symboles : Application à la recherche par le contenu”</i></b>	<b>925-928</b>
Jean-michel Jolion, Isabelle Simand	
<b><i>“Histogrammes spatiaux couleur optimisés pour l’indexation d’images par le contenu”</i></b>	<b>929-932</b>
Saïd Kharbouche, Patrick Vannoorenberghe, Christèle Lecomte, Pierre Miche	

---

## Session Orale : O4.3 “Reconnaissance des formes”

**“Une approche de type filtrage pour la sélection de variables - Application à la reconnaissance automatique de poissons”** 933-936

Dahbia Semani, Carl Frélicot, Pierre Courtellemont

**“AMELIORATION DE LA RECONNAISSANCE DE PARTITIONS MUSICALES PAR MODELISATION FLOUE ET INDICATION DES ERREURS POSSIBLES”** 937-940

Florence Rossant, Isabelle Bloch

**“Combinaison de classifieurs pour la localisation de visage”** 941-944

Rachid Belaroussi, Lionel Prevost, Maurice Milgram

**“Sélection de variables pour la reconnaissance de formes”** 945-948

Sébastien Gadat, Laurent Younes

**“Classification de signaux invariante en translation”** 949-952

Vincent Guigue, Alain Rakotomamonjy, Stéphane Canu

---

## Session Orale : O2.2 “Codage canal et détection”

**“Treillis à complexité réduite pour le décodage de codes à longueur variable”** 953-956

Gholam-reza Mohammad-khani, Chang-ming Lee, Michel Kieffer, Pierre Duhamel

**“Une comparaison de récepteurs source-canal conjoint utilisant des codes LDPC”** 957-960

Charly Poulliat, Catherine Lamy-bergot, Inbar Fijalkow

**“Détection de phase à très faible rapport signal à bruit à l’aide d’un code de parité”** 961-964

Mathieu Dervin, Marie-laure Boucheret, Gilles Mesnager, Alain Ducasse

**“Séparation aveugle de signaux de type DS-CDMA à l’aide de techniques algébriques”** 965-968

Castaing Joséphine, De Lathauwer Lieven

---

## Session Orale : O1.1 “Nouvelles tendances en temps-fréquence”

**“Reconnaissance des formes par méthodes à noyau dans le domaine temps-fréquence”** 969-972

Paul Honeiné, Cédric Richard, Patrick Flandrin

**“Une Méthode à Noyaux pour l’Approximation Parcimonieuse des Représentations Temps-Fréquence Bilinéaires”** 973-976

Manuel Davy, Patrick Wolfe

**“Estimation et reconstruction des signaux courts multicomposantes modules non linéairement à la fois en amplitude et en fréquence”** 977-980

Meryem Jabloun, Michelle Vieira, Nadine Martin, François Léonard

***“Algorithme de zéro-diagonalisation conjointe pour la séparation de sources déterministes”*** 981-984

Elmostafa Fadaili, Nadège Thirion-moreau, Eric Moreau

***“Suivi de trajectoires temps-fréquence par filtrage particulaire”*** 985-988

Corentin Dubois, Manuel Davy

---

## Conférence invitée : *C3, H. Vinet*

***“Applications musicales du traitement de signal : synthèse et prospective”*** 989-996

Hugues Vinet

---

## Session Affiches : *P2.4 “Codage, compression, cryptage et tatouage”*

***“Estimation de mouvement par maillages et lignes de rupture pour le codage de séquences vidéo”*** 997-1000

Nathalie Cammas, Stéphane Pateux, Luce Morin, Benjamin Le Guen

***“Codage vidéo par schéma lifting avec gestion des occlusions”*** 1001-1004

Thomas André, Marc Antonini, Michel Barlaud

***“Réduction du débit et de la complexité de décodage par l’analyse de scène pour la télé surveillance basée sur Motion JPEG 2000”*** 1005-1008

Jérôme Meessen, Christophe Parisot, Xavier Desurmont, Jean-françois Delaigle

***“Codage par descriptions multiples pour la transmission vidéo”*** 1009-1012

Christophe Tillier, Teodora Petrisor, Beatrice Pesquet-popescu, Jean-christophe Pesquet

***“COMPRESSION DE MAILLAGES 3D DE GRANDE RESOLUTION PAR TRANSFORMEE EN ONDELETTES AU FIL DE L’EAU”*** 1013-1016

Akran Elkefi, Sami Abbadi, Marc Antonini, Chokri Ben Amar

***“Diffusion géométrique pour le masquage d’erreurs de transmission et de quantification sur des images JPEG couleur”*** 1017-1020

Pascal Bourdon, Bertrand Augereau, Christian Chatellier, Christian Olivier

***“Interleaved S+P : Décomposition pyramidale entrelacée à contexte de prédiction enrichi”*** 1021-1024

Marie Babel, Olivier Déforges, Joseph Ronsin

***“Evaluation d’un codeur de parole à très bas débit”*** 1025-1028

Marc Padellini, Geneviève Baudoin, François Capman

***“Métriques de distorsion pour l’analyse comparative de schémas de filigrane 3D”*** 1029-1032

Patrice Rondao Alface, Mathieu De Craene, Benoit Macq

***“Un Algorithme de Tatouage d’Images Numériques reposant sur les Changements d’Horloge Périodiques”*** 1033-1036

Vincent Martin, Marie Chabert, Bernard Lacaze

<b><i>“Stéganographie d’images couleur dans l’espace <math>L^*a^*b^*</math> par modulation de distance”</i></b>	<b>1037-1040</b>
Gael Chareyron, Dinu Coltuc, Alain Trémeau	
<b><i>“Insertion d’informations numériques dans un signal : Application à la classification de données expérimentales en anémométrie laser Doppler”</i></b>	<b>1041-1044</b>
Alain Le Duff, Bruno Gazengel	
<b><i>“Transfert sécurisée d’une ROI sans perte par une méthode d’insertion de données cachées robuste à la compression JPEG”</i></b>	<b>1045-1048</b>
Philippe Amat, William Puech	
<b><i>“Performances d’un cryptosystème numérique à base de chaos”</i></b>	<b>1049-1052</b>
Véronique Guglielmi, Michel Bonnefont, Danièle Fournier-prunaret, Pierre Pinel, Abdel Kadous Taha	

---

## **Session Affiches : P3.2 “Séparation de sources et problèmes inverses”**

<b><i>“Séparation de sources non-négatives par l’approche du maximum de vraisemblance”</i></b>	<b>1053-1056</b>
Saïd Moussaoui, David Brie, Cédric Carteret	
<b><i>“Séparation de mélanges convolutifs de modulations CPM sur-échantillonnées”</i></b>	<b>1057-1060</b>
Pierre Jallon, Antoine Chevreuil, Philippe Loubaton, Pascal Chevalier	
<b><i>“Approximation en champs moyen pour la séparation de sources appliquée aux images hyperspectrales”</i></b>	<b>1061-1064</b>
Nadia Bali, Ali Mohammad-djafari	
<b><i>“Solution analytique et généralisation d’un contraste à référence”</i></b>	<b>1065-1068</b>
Atman Jbari, Abdellah Adib, Driss Aboutajeddine	
<b><i>“Déflation parallèle avec des contrastes APF pour l’extraction aveugle de sources”</i></b>	<b>1069-1072</b>
Vicente Zarzoso, Ludwig Rota, Pierre Comon	
<b><i>“Méthodes séquentielles de séparation aveugle de sources en présence de bruit”</i></b>	<b>1073-1076</b>
Marc Castella, Jean-christophe Pesquet	
<b><i>“Simuler une distribution normale à support positif à partir de plusieurs lois candidates”</i></b>	<b>1077-1080</b>
Vincent Mazet, David Brie, Jérôme Idier	
<b><i>“Déconvolution impulsionnelle positive myope”</i></b>	<b>1081-1084</b>
Vincent Mazet, Jérôme Idier, David Brie	
<b><i>“Identification aveugle de modèle acoustique et application à la déréverbération de la parole”</i></b>	<b>1085-1088</b>
William Bobillet, Eric Grivel, Roberto Guidorzi, Mohamed Najim	

*“Le lissage H-infini : une alternative au filtrage de Kalman pour le rehaussement du signal de parole ?”* 1089-1092

David Labarre, Eric Grivel, Nicolai Christov, Mohamed Najim

*“Recherche Linéaire Optimisée : Une Nouvelle Méthode pour Accélérer PA-RAFAC”* 1093-1096

Myriam Rajih, Pierre Comon

*“Une méthode de sous-espace pour l'extraction aveugle d'une source cyclo-stationnaire”* 1097-1100

Roger Boustany, Jérôme Antoni

*“Déconvolution aveugle dans le domaine fréquentiel fondée sur le taux d'information mutuelle”* 1101-1104

Anthony Larue, Jérôme Mars, Christian Jutten

---

## Session Affiches : P1.3 “Modèles déformables, géométriques et cognitifs”

*“Définition d'une force d'attraction aux LPE pour la segmentation par contours actifs”* 1105-1108

Annabelle Gouze, Cédric De Roover, Benoît Macq

*“Détection de signalisation routière par ajustement de formes prototypes”* 1109-1112

Guillaume Dutilleul, Pierre Charbonnier

*“Utilisation des Gradients de Forme et des Contours Actifs Basés Régions pour la Segmentation des Vecteurs Mouvement”* 1113-1116

Stéphanie Jehan-besson, Stefan Duffner, Ariane Herbulot, Michel Barlaud, Gilles Aubert

*“Extraction de la forme et de la perspective dans des textures artificielles et naturelles par modèles corticaux.”* 1117-1120

Corentin Massot, Jeanny Hérault

*“Recalage semi-rigide d'images de scanner aéroporté”* 1121-1124

Claude Cariou, Kacem Chehdi

*“Contours actifs pour le suivi d'objet en temps-réel : multi-topologies et multi-résolutions”* 1125-1128

Sébastien Lefèvre, Nicole Vincent

---

## Session Orale : O4.2 “Méthodes à noyaux”

*“Influence des Vecteurs Caractéristiques en Stéganalyse par Séparateurs à Vastes Marges”* 1129-1132

Benoit Roue, Patrick Bas, Jean Marc Chassery

*“Kernel machines : une nouvelle méthode pour l'optimisation de l'alignement des noyaux et l'amélioration des performances”* 1133-1136

Jean-baptiste Pothin, Cédric Richard



***“Reconstruction par noyaux polynomiaux”*** 1137-1140

Maxime Berar, Michel Desvignes, Barbara Romaniuk, Gérard Bailly, Yohan Payan

***“Classification de végétaux”*** 1141-1144

Michel Chapron, Louis Assemat

***“Classification avec contraintes : problématique et apprentissage d’une règle de décision par SVM”*** 1145-1148

Edith Grall-maës, Pierre Beauseroy, Abdenour Bounsiar

---

## **Session Orale : O3.2 “Images : séquences et 3D”**

***“Guidage du filtrage particulière par une étude du mouvement”*** 1149-1152

Elodie Bichot, Laurent Mascarilla, Pierre Courtellemont

***“Recalage variationnel non rigide statistique référencé région”*** 1153-1156

Nicolas Rougon, Antoine Discher, Françoise Prêteux

***“Décomposition de déformation pour l’estimation d’un mouvement de caméra”*** 1157-1160

Jonchery Claire, Dibos Françoise, Koepfler Georges

***“Agrégation, sélection et utilisation de l’information de mouvement issue d’un flux MPEG”*** 1161-1164

Renan Coudray, Bernard Besserer

***“Reconnaissance de sauts d’athlète dans les vidéos : fusion du mouvement de caméra et de la trajectoire de points caractéristiques”*** 1165-1168

Emmanuel Ramasso, Denis Pellerin, Michèle Rombaut

---

## **Session Orale : O6.2 “Radar”**

***“Détection MV-TFAC dynamique dans un fouillis de mer hétérogène”*** 1169-1172

Nicolas Bon, Ali Khenchaf, René Garelo, Jean-michel Quéllec, Myriam Chabah

***“Imagerie d’objets mobiles à l’aide d’un radar bande étroite multistatique”*** 1173-1176

Guillaume Ginolhac, Franck Daout, Françoise Schmitt

***“Un algorithme de Gradient Conjugué modifié pour le traitement Spatio-Temporel adaptatif en radar aéroporté”*** 1177-1180

Hocine Belkacemi, Sylvie Marcos, Hichem Semira

***“Antibrouillage Radar en contexte de rotation d’antenne”*** 1181-1184

Marc Oudin, Jean-pierre Delmas, Claude Adnet, Cécile Germond, Frédéric Barbaresco

***“Analyse de la Texture dans les Images SAR Appliquée au Filtrage de Speckle”*** 1185-1188

Olivier D’hondt, Laurent Ferro-famil, Eric Pottier

---

## Session Orale : O2.3 “Tatouage et stéganographie”

*“Quantification vectorielle algébrique modulée : codage de source/tatouage conjoints à débit variable”* 1189-1192

Ludovic Guillemot, Jean-marie Moureaux

*“Amélioration de l’invisibilité par adaptation de la quantification aux données à insérer.”* 1193-1196

Jean-luc Toutant, William Puech, Christophe Fiorio

*“Steganographie d’images basées sur le théorème chinois des restes”* 1197-1200

Dinu Coltuc, Alain Tremeau

*“Tatouage vidéo utilisant l’ACI et basé sur un treillis informé”* 1201-1204

Hussein Joumaa, Franck Davoine

*“Mécanisme de synchronisation dans des systèmes de tatouage audio pour des perturbations désynchronisantes à forte dérive”* 1205-1208

Cléo Baras, Nicolas Moreau, Bassem Zayen

---

## Session Orale : O1.2 “Modèles déformables, géométriques et cognitifs”

*“ETUDE ET EXTENSION DES FLOTS DE RICCI, KÄHLER-RICCI ET CALABI DANS LE CADRE DU TRAITEMENT DE L’IMAGE ET DE LA GEOMETRIE DE L’INFORMATION”* 1209-1212

Frédéric Barbaresco

*“Contraintes de forme invariante aux transformations affines pour les contours actifs orientés région”* 1213-1216

Alban Foulonneau, Pierre Charbonnier, Fabrice Heitz

*“Formalisme et mesure de la perception : intérêt de la dynamique sensori-motrice chez un agent robotique”* 1217-1220

Mickaël Maillard, Philippe Gaussier, Laurence Hafemeister

*“MODELE STATISQUE ET DESCRIPTION LOCALE D’APPARENCE NON LINEAIRE POUR LA DETECTION DES COUTOURS DES LEVRES”* 1221-1224

Pierre Gacon, Pierre-yves Coulon, Gérard Bailly

*“MGS2 : Optimisation multicritères de contours actifs par algorithmes génétiques”* 1225-1228

Nicolas Cladel, Renaud Segurier

## Session Orale : *O3.3 “Séparation de sources dans des mélanges sous-déterminés”*

*“Séparation voix / musique à partir d’enregistrements mono : quelques remarques sur le choix et l’adaptation des modèles”* 1229-1232

Alexey Ozerov, Rémi Gribonval, Pierrick Philippe, Frédéric Bimbot

*“Séparation aveugle sous-déterminée de sources audio par la méthode EMD (Empirical Mode Decomposition)”* 1233-1236

Abdeldjalil Aïssa-el-bey, Karim Abed-meraim, Yves Grenier

*“Séparation de sources dans le cas sous-déterminé : comparaison de deux approches basées sur des décompositions parcimonieuses”* 1237-1240

Sylvain Lesage, Sacha Krstulovic, Rémi Gribonval

*“Séparation d’un mélange sous-déterminé de sources par simulation stochastique”* 1241-1244

Éric Le Carpentier

*“Construction d’estimateurs oracles pour la séparation de sources”* 1245-1248

Emmanuel Vincent, Rémi Gribonval

---



# Suivi de points robuste aux spécularités et aux changements d'éclairage

Michèle GOUIFFÈS<sup>1</sup>, Christophe COLLEWET<sup>1</sup>, Christine FERNANDEZ-MALOIGNE<sup>2</sup>, Alain TRÉMEAU<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Cemagref, 17 Avenue de Cucillé, CS64427 35044 Rennes cedex, France

<sup>2</sup>Laboratoire SIC, Université de Poitiers, France

<sup>3</sup>Laboratoire LIGIV, Université de Saint Etienne, France

michele.gouiffes@cemagref.fr, christophe.collewet@cemagref.fr  
fernandez@sic.univ-poitiers.fr, tremeau@ligiv.org

**Résumé** – La plupart des méthodes de suivi de points suppose que les objets sont lambertiens et qu'aucun changement d'éclairage ne se produit dans la scène. Dans une certaine mesure, le suivi avec normalisation photométrique ainsi que l'approche proposée par Soatto *et al.* [3] répondent à ce problème. Par une étude de la modélisation des variations d'illumination, cet article explique les hypothèses sur lesquelles se basent ces approches. Ensuite, il propose une méthode originale de suivi de points, basée sur le calcul d'un modèle photométrique plus approprié. Quelques expérimentations prouvent la robustesse de cette technique vis-à-vis des réflexions spéculaires et des changements d'éclairage.

**Abstract** – Most feature point tracking approaches assume that objects are Lambertian and that no lighting change occurs. To some extent, the tracking method with photometric normalization and the approach proposed by Soatto *et al.* overcome these issues. From a study on specular reflection models, we explain explicitly the assumptions on which these techniques are implicitly based. Then, we propose an original tracking algorithm based on a more appropriate modeling of the illumination changes. Experimental results demonstrate the robustness of our approach against specular highlights and lighting changes.

## 1 Introduction

Le processus d'appariement ou de mises en correspondance de primitives géométriques entre deux images est une tâche de bas niveau essentielle en vision par ordinateur, comme en vision dynamique ou en asservissement visuel par exemple. Pourtant il s'agit encore d'un problème ouvert. Par ailleurs, lorsque les images sont texturées mais peu structurées, seules des primitives de type point sont susceptibles d'être détectées. Dans ce domaine, les travaux précurseurs sont dus à Lucas et Kanade [4, 7]. Par la suite, des extensions plus robustes ont vu le jour [6, 8]. Néanmoins, ces méthodes se basent toujours sur l'hypothèse de conservation de la luminance, qui n'est en général pas valide, étant donné que la plupart des surfaces sont non lambertiennes et que les conditions d'éclairage sont susceptibles de varier au cours d'une séquence d'images. Afin de répondre à ce problème, Hager et Belhumeur [1] acquièrent des images de la scène sous différents éclairages et utilisent ces données pour compenser les changements d'illumination. Les méthodes en ligne existantes consistent soit à réaliser une normalisation photométrique (comme dans [8] par exemple), soit à estimer les paramètres d'un modèle photométrique [3].

Dans cet article, nous proposons de définir clairement les hypothèses sur lesquelles se basent ces deux dernières approches, en nous appuyant sur des modèles de réflexion plus complets que le modèle lambertien. Nous formalisons ensuite une extension de la méthode de suivi de Lucas et Kanade permettant, dans le cadre de petites fenêtres d'intérêt autour du point à suivre, de compenser les apparitions de spécularités et les changements d'éclairage.

Cette article s'architecture donc ainsi. La section 2 propose une modélisation des variations d'illumination, qu'elles soient dues aux spécularités ou aux changements d'éclairage. La partie 3 détaille les méthodes de suivi existantes et montre sur

quelles hypothèses elles se basent. Ensuite, la section 4 décrit la technique de suivi proposée, en se basant toujours sur des modèles de réflexion spéculaire. Enfin, la section 5 permet de prouver la pertinence de notre approche à l'aide de quelques résultats expérimentaux.

## 2 Modélisation des changements d'illumination

Soient  $f$  et  $g$  des images acquises respectivement aux instants  $k$  et  $k'$ . Un point  $P$  de l'objet se projette dans l'image  $f$  en  $p$  de coordonnées  $(x_p, y_p)$  et en  $p'$  de coordonnées  $(x'_p, y'_p)$  dans l'image  $g$ . La figure 1 décrit les vecteurs et les angles utilisés dans cet article.  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{L}$  sont respectivement les directions d'observation et d'éclairage, qui forment des angles  $\theta_r$  et  $\theta_i$  avec la normale  $\mathbf{n}$  en  $P$ .  $\mathbf{B}$  est la bissectrice de l'angle entre  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{L}$ , formant un angle  $\rho$  avec la normale  $\mathbf{n}$ . Selon les modèles spéculaires tels que ceux de Phong [5] et de Torrance [9], la luminance en  $p$  peut être exprimée par la relation suivante :

$$f(p) = K_d(p)a(p) \cos \theta_i(P) + h_f(p) + K_a \quad (1)$$

où  $a(p)$  est l'albedo du matériau,  $K_d$  et  $K_a$  des termes relatifs aux intensités d'éclairage direct et ambiant.  $\theta_i(P)$  est l'angle d'incidence de l'éclairage au point  $P$ . La fonction  $h_f$ , contribution de la réflexion spéculaire, dépend de la rugosité du matériau, de l'angle d'incidence, mais également de l'angle  $\rho$  entre  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{B}$ . Pour le modèle lambertien,  $h_f = 0$ . Par contre, dans le cas du modèle de Phong [5] par exemple :

$$h_f(p) = K_s(p) \cdot \cos^n \rho(P) \quad (2)$$

où  $n$  est la rugosité et  $K_s$  représente la contribution directe de l'éclairage. Si des variations, exprimées par les fonctions  $t_a, t_d, t_i$  et  $t_h$ , sont respectivement produites sur les termes  $K_a, K_d, \theta_i$  et  $h_f$ , la luminance dans l'image  $g$  devient :

$$g(p') = K'_d(p)a(p) \cos \theta'_i(P) + K'_s(p')h_g(p') + K'_a \quad (3)$$

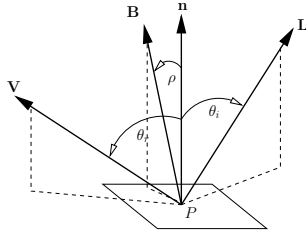


FIG. 1: Vecteurs et angles utilisés pour décrire les réflexions.

avec  $K_a' = K_a + t_a$ ,  $\theta_i'(P) = \theta_i(P) + t_i(P)$ ,  $K_d'(p) = K_d(p) + t_d(p)$  et  $h_g(p') = h_g(p) + t_h(p)$ .

À partir de cette modélisation des variations d'illumination, la section qui suit analyse les hypothèses sur lesquelles se basent les techniques de suivi de points existantes.

### 3 Méthodes de suivi classique

Soit un point  $M$  de la scène se projetant en  $m$  dans la fenêtre d'intérêt  $\mathcal{W}$  de taille  $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ , centrée autour du point à suivre  $p$ . Le suivi de points consiste à calculer le modèle de mouvement  $\delta(m, \mathbf{A})$ ,  $\forall m \in \mathcal{W}$ , paramétrisé par  $\mathbf{A}$ , qui approxime le déplacement de  $\mathcal{W}$ . Suivant les techniques de suivi, les hypothèses quant à la modélisation des variations d'illumination sur  $\mathcal{W}$  sont différentes. En éliminant l'albedo  $a(m)$  entre (1) et (3), on obtient l'expression reliant des luminances  $f$  et  $g$  d'une même séquence :

$$g(\delta(m, \mathbf{A})) = \lambda(m)f(m) + \eta(m) \quad (4)$$

où  $\lambda(m)$  et  $\eta(m)$  sont donnés,  $\forall m \in \mathcal{W}$ , par :

$$\lambda(m) = \frac{[K_d(m) + t_d(m)] \cos(\theta_i(M) + t_i(M))}{K_d(m) \cos(\theta_i(M))} \quad (5)$$

$$\eta(m) = -[h_f(m) + K_a] \lambda(m) + h_g(\delta(m, \mathbf{A})) + K_a + t_a \quad (6)$$

Ces relations nous permettent de comparer les méthodes de suivi et les hypothèses sur lesquelles elles se basent.

**Méthode de suivi KLT.** La méthode de suivi classique [4, 6, 7] se base sur une parfaite conservation de la luminance, de sorte que  $g(m') = f(m)$ ,  $\forall m \in \mathcal{W}$  et  $\forall \mathcal{W}$ . Premièrement, cela implique que  $\lambda(m) = 1$ ,  $\forall m \in \mathcal{W}$ . D'après (5), cette égalité est exacte indépendamment de la surface projetée dans  $\mathcal{W}$ , s'il n'y a aucun changement d'éclairage ( $t_i(M) = 0$  et  $t_d(m) = 0$ ,  $\forall m \in \mathcal{W}$ ). Elle suppose ensuite que  $\eta(m) = 0$ , c'est-à-dire que dans (6), pour  $\lambda = 1$ , on ait  $h_f(m) - h_g(m) = t_a$ ,  $\forall m \in \mathcal{W}$  et quelles que soient la rugosité et la courbure de la surface projetée dans  $\mathcal{W}$  (et donc quelles que soient  $h_f$  et  $h_g$  sur  $\mathcal{W}$ ). Cela n'est possible que si  $h_f(m)$ ,  $h_g(m)$  et  $t_a$  sont tous nuls  $\forall m \in \mathcal{W}$  et  $\forall \mathcal{W}$ , c'est-à-dire si les surfaces sont lambertiennes.

À cause du bruit, des approximations inhérentes au modèle de mouvement, et également à cause des fortes hypothèses qui viennent d'être décrites, le mouvement est estimé en minimisant le critère suivant :

$$\epsilon_1(\mathbf{A}) = \sum_{m \in \mathcal{W}} [f(m) - g(\delta(m, \mathbf{A}))]^2 \quad (7)$$

Cette approche mène à de bons résultats mais souffre des variations d'illumination. Une normalisation photométrique permet de répondre à ce problème.

**Méthode de suivi avec normalisation photométrique.** Cette approche se base sur la minimisation du critère suivant :

$$\epsilon_2(\mathbf{A}) = \sum_{m \in \mathcal{W}} [\lambda f(m) + \eta - g(\delta(m, \mathbf{A}))]^2 \quad (8)$$

où les termes  $\lambda$  et  $\eta$  sont calculés indépendamment de la minimisation de  $\epsilon_2$ . Ainsi,  $\lambda(m)$  est supposé identique  $\forall m \in \mathcal{W}$ . Pour que ce soit exact pour toute courbure de surface projetée dans  $\mathcal{W}$  (et donc  $\forall t_i$  et  $\forall \theta_i$ ) et quel que soit l'éclairage (et donc  $\forall K_d$  et  $\forall t_d$ ), il faut que  $K_d, t_i, t_d, K_a$  soient tous supposés identiques en tout point  $m$  de  $\mathcal{W}$ . Ensuite, elle suppose que  $\eta(m)$  est identique en tout point de  $\mathcal{W}$ . Cela est vrai pour toute courbure et rugosité de surface projetée sur  $\mathcal{W}$ , si  $h_g(m)$  et  $h_f(m)$  sont identiques en tout point  $m$  de  $\mathcal{W}$ . Dans le cas général, ces hypothèses ne sont vérifiées que très localement. Finalement, la méthode avec normalisation photométrique suppose que la luminance s'écrit :

$$f(m) = K_a + K_d a(m) \cos \theta_i + h_f, \quad \forall m \in \mathcal{W} \quad (9)$$

Après variations d'illumination  $t_a, t_d$ , et  $t_i$ , la luminance  $g(m')$  devient :

$$g(m') = K_d' a(m) \cos(\theta_i + t_i) + h_g + K_a', \quad \forall m' \in \mathcal{W} \quad (10)$$

Par ailleurs, soient  $\mu_f$  et  $\mu_g$  les moyennes de  $f$  et  $g$  sur  $\mathcal{W}$ , et  $\sigma_f, \sigma_g$  leurs écarts-type. Les valeurs  $\mu_f$  et  $\sigma_f$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \mu_f &= K_d \cos(\theta_i) \mu_a + K_a + h_f \\ \sigma_f &= K_d \cos(\theta_i) \sigma_a \end{cases} \quad (11)$$

où  $\mu_a$  et  $\sigma_a$  sont la moyenne et la variance de  $a$ . En exprimant de la même façon  $\mu_g$  et  $\sigma_g$ , puis en éliminant  $\mu_a$  et  $\sigma_a$ , on aboutit, tous calculs faits, à une relation de  $g$  en fonction de  $f$ ,  $\sigma_f, \sigma_g, \mu_f$  et  $\mu_g$ , de sorte que  $\lambda = \frac{\sigma_g}{\sigma_f}$  et  $\eta = \mu_g - \frac{\sigma_g \mu_f}{\sigma_f}$ .

Cette technique suppose ainsi que les variations d'illumination sont constantes en tout point  $m$  de  $\mathcal{W}$ . Notons que le calcul de la normalisation devient instable lorsque  $\sigma_a \approx 0$ , c'est-à-dire lorsque les intensités sont proches de la saturation ou lorsqu'elles sont presque homogènes dans  $\mathcal{W}$ .

**Méthode de Soatto [3].** Cette approche se base également sur la minimisation du critère (8). Cependant, à la différence de l'approche normalisée,  $\lambda$  et  $\eta$  sont *estimés* en même temps que le mouvement, et non *calculés*. Ainsi, elle se base exactement sur les mêmes hypothèses photométriques que celles considérées dans la méthode normalisée. Pour éviter toute confusion, nous appelons  $\epsilon_3$  le critère à minimiser pour cette approche [3].

Notre méthode, explicitée dans la section suivante, ne se base pas sur la constance des paramètres d'illumination sur  $\mathcal{W}$  mais sur leur continuité.

### 4 Méthode de suivi proposée

La relation (4) n'est pas l'unique façon de modéliser les variations d'illumination. En effet, à partir de (1) et (3), on obtient également la relation suivante entre  $g$  et  $f$  :

$$g(\delta(m, \mathbf{A})) = f(m) + \psi(m) \quad (12)$$

Dans le cas général :  $\psi(m) = a(m)(K_d'(\delta(m, \mathbf{A})) \cos(\theta_i'(M)) - K_d(m) \cos \theta_i(M)) + h_g(\delta(m, \mathbf{A})) - h_f(m) + t_a$ .

Par contre, lorsque l'éclairage et le gain de la caméra sont constants :  $\psi(m) = h_g(\delta(m, \mathbf{A})) - h_f(m)$ .

D'après (2),  $\psi$  est variable sur  $\mathcal{W}$  puisqu'elle dépend des angles  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{L}$  et par conséquent de la normale  $\mathbf{n}$  en chaque point de  $\mathcal{W}$ . Dans le cas où un changement d'éclairage a lieu (et uniquement dans ce cas) elle dépend également de l'albedo  $a$ . On approxime  $\psi$  sur  $\mathcal{W}$  par une fonction continue et dérivable  $\phi$ . Puisque le suivi de points est une approche locale,  $\phi$  peut être développée en série de Taylor en chaque point  $m$  voisin

de  $p$ . Ainsi, au 1<sup>er</sup> ordre, on aboutit à l'expression de  $\phi(m)$  suivante :

$$\phi(m) = \phi(p) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_p (x - x_p) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_p (y - y_p). \quad (13)$$

Finalement, en intégrant (13) dans (12) avec  $m = (x, y)^T$  et en notant  $\alpha = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_p$ ,  $\beta = \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_p$  et  $\gamma = \phi(p)$ , on obtient :

$$g(\delta(m, \mathbf{A}) = f(m) + \alpha(x - x_p) + \beta(y - y_p) + \gamma. \quad (14)$$

Les paramètres de mouvement  $\mathbf{A}$  et d'illumination  $\mathbf{B} = (\alpha, \beta, \gamma)^T$  sont calculés par minimisation du critère suivant :

$$\epsilon_4(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_{m \in \mathcal{W}} (f(m) - g(\delta(m, \mathbf{A})) - \mathbf{U}^T \mathbf{B})^2 \quad (15)$$

où  $\mathbf{U} = (x - x_p, y - y_p, 1)^T$ . Contrairement aux approches précédentes, la méthode proposée, dite *paramétrique*, admet que les vecteurs  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{L}$ , le paramètre  $K_s$  mais également la rugosité  $n$  varient de manière continue sur  $\mathcal{W}$ . Par conséquent, le terme spéculaire  $h$  n'est pas supposé constant en tout point de  $\mathcal{W}$ . Néanmoins, lorsque des variations d'éclairage se produisent, le modèle (14) suppose que l'albedo varie doucement sur  $\mathcal{W}$ . Comme nous le verrons dans la section suivante, cette limitation n'est pas pénalisante dans le cas du suivi de points, où de petites fenêtres d'intérêt sont considérées.

La section qui suit permet de comparer les différentes approches explicitées précédemment, par le biais de quelques expérimentations.

## 5 Résultats expérimentaux

Les points sont sélectionnés dans la 1<sup>ère</sup> image par la méthode de Harris [2]. Le modèle de mouvement utilisé est un modèle affine. Un point est rejeté du traitement de suivi si ses résidus de convergence  $\epsilon_i$  pour  $i = 1 \dots 4$  dépassent un seuil  $S_{conv} = \mathcal{N}^2 E_{ave}^2$ , où  $E_{ave}$  est la différence de luminance sur  $\mathcal{W}$  qui est tolérée entre les images initiale  $f$  et courante  $g$ . Nous avons fixé  $E_{ave}$  à 15, ce qui représente un seuil sévère étant données les variations d'illumination considérées.

Les méthodes de suivi sont comparées pour des tailles de fenêtre allant de  $\mathcal{N} = 9$  à  $\mathcal{N} = 13$ . Précisons également que la séquence d'images est jouée de la première à la dernière image puis de la dernière à la première afin de vérifier la symétrie de l'évolution des résidus. La figure 2 présente quelques images issues des 4 séquences considérées pour cette étude comparative. Ainsi, les méthodes de suivi *classique* ( $C$ ), avec *normalisation photométrique* ( $N$ ), la technique de *Soatto et al.* ( $S$ ) et enfin l'approche proposée, dite *paramétrique* ( $P$ ) sont comparées, en considérant à la fois le nombre de points suivis et la moyenne des résidus, calculée seulement en quelques points, ceux qui ont été correctement suivis par l'ensemble des méthodes ( $C, S, N, P$ ). Nous nous intéressons tout d'abord aux changements d'illumination dus à des variations de spéularités puis ceux provoqués par des variations d'éclairage.

• **Variations de spéularités.** Les deux premières séquences appelées *Livre* et *Marylin* (respectivement figure 2a et 2b) représentent différents objets spéculaires, de matériaux différents (carton plastifié, porcelaine, verre, métal...). Dans chaque cas, la scène et l'éclairage sont fixes mais la caméra est déplacée, ce qui provoque des variations de spéularité à la surface des objets. En se référant au nombre de points suivis, regroupés dans

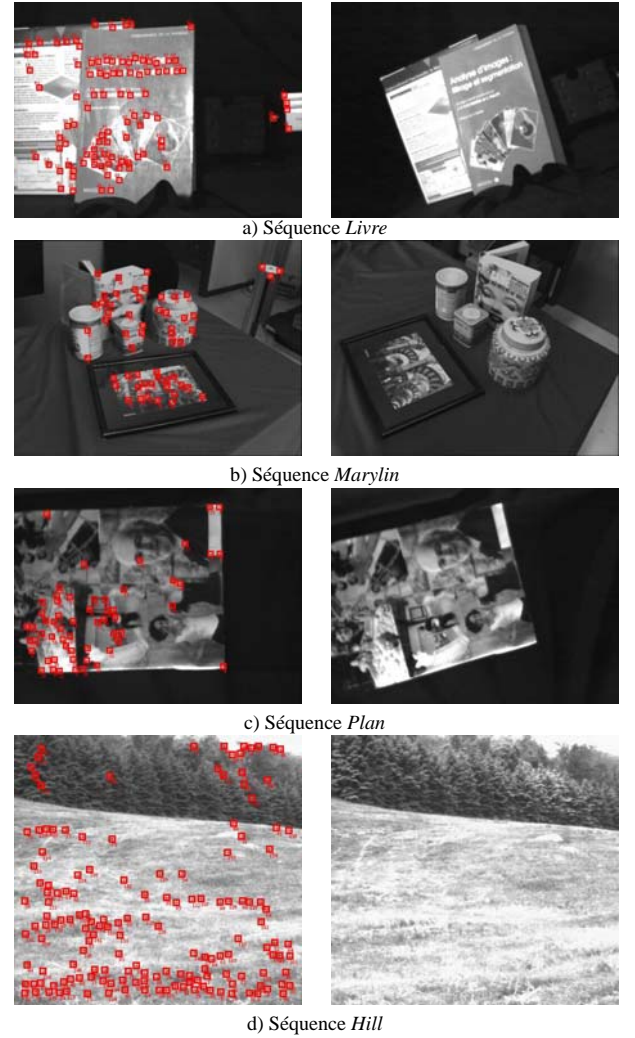


FIG. 2: Images issues des séquences traitées.

les tableaux 1a et 1b, on note la faible robustesse des approches  $C, N$  et  $S$ , par rapport à l'approche  $P$ . En effet, celle-ci suit dans tous les cas un bien plus grand nombre de points. En outre, pour la séquence *Marylin*, l'approche classique ne suit aucun point. Soulignons également que l'efficacité des approches  $N$  et  $S$  s'améliore lorsque la taille de la fenêtre considérée est élargie. En effet, pour de petites fenêtres, le calcul de  $\sigma_f$ ,  $\sigma_g$  ou  $\lambda$  est plus sensible au bruit que sur de plus larges fenêtres. Or, puisque ces valeurs sont divisées ou multipliées par les valeurs de luminance  $f$ , une erreur causée sur  $\sigma_f$ ,  $\sigma_g$  ou  $\lambda$  a une grande influence sur les valeurs de résidus, et peut induire un calcul imprécis de  $\mathbf{A}$ .

Les résidus de convergence obtenus (pour  $\mathcal{N} = 9$ ) sur les quelques points suivis par l'ensemble des méthodes, sont montrés sur les figures 3a et 3b. Ils prouvent que l'approche *paramétrique* est plus précise que les autres méthodes, puisque ses résidus sont plus faibles. Les résidus de  $S$  et  $N$  sont très comparables. Rappelons d'ailleurs qu'ils se basent sur le même modèle et sur les mêmes hypothèses. La courbe d'évolution des résidus obtenus par  $S$  sur la séquence *Marylin* n'est pas symétrique<sup>1</sup>. C'est le signe d'une mauvaise convergence de cette approche, puisque pour une même image, les paramètres cal-

1. La méthode  $N$  est écartée du fait du faible nombre de points suivis

$\mathcal{N}$	9	11	13		$\mathcal{N}$	9	11	13
$C$	27	20	16		$C$	0	0	0
$N$	33	49	53		$N$	1	3	7
$S$	15	25	48		$S$	4	8	15
$P$	<b>68</b>	<b>68</b>	<b>69</b>		$P$	<b>23</b>	<b>21</b>	<b>21</b>
a) Livre					b) Marilyn			
$\mathcal{N}$	9	11	13		$\mathcal{N}$	9	11	13
$C$	37	29	23		$C$	67	42	32
$N$	45	51	53		$N$	62	81	85
$S$	39	48	51		$S$	75	76	86
$P$	<b>58</b>	<b>58</b>	<b>58</b>		$P$	<b>101</b>	<b>101</b>	<b>101</b>
c) Plan					d) Hill			

TAB. 1: Nombre de points suivis par les différentes approches ( $C$ : classique,  $N$ : normalisée,  $S$ : approche de Soatto,  $P$ : paramétrique), en fonction de  $\mathcal{N}$ : a) Livre (sur 86 points), b) Marilyn (sur 36 points), c) Plan (sur 58 points), d) Hill (sur 144 points).

culés sont différents. Ce n'est pas le cas de  $P$ . Ainsi, le nombre de points perdus par  $S$  peut s'expliquer, en plus de sa sensibilité au bruit, par un mauvais conditionnement de la matrice utilisée dans le processus de minimisation du critère  $\epsilon_3$ . Effectivement, puisqu'il dépend des valeurs de luminance de  $f$  en  $m$ , ce conditionnement peut s'avérer mauvais selon le contenu de  $\mathcal{W}$ .

• **Variations d'éclairage.** Les séquences *Plan* et *Hill* représentent deux scènes différentes, qui subissent toutes les deux des variations d'illumination. Ici encore, la scène est fixe, et seule la caméra est en mouvement. Dans le premier cas, il s'agit d'un objet texturé plan. L'intensité de l'éclairage directionnel subit périodiquement de brutales variations (avec une période de 20 itérations environ). Quant à la séquence *Hill*, il s'agit d'une scène d'extérieur représentant une prairie. On peut présumer qu'il s'agit d'images acquises à différents moments de la journée, et que l'apparition de nuages modifie l'illumination de la scène. D'après le nombre de points suivis, qui sont regroupés dans les tableaux 1c et 1d,  $P$  est là encore plus robuste que les autres approches. Pour chaque séquence, elle suit un plus grand nombre de points, quelle que soit la taille de fenêtre. Comme pour les expérimentations précédentes, l'efficacité de  $N$  et  $S$  s'améliore lorsque la taille de  $\mathcal{W}$  est agrandie, et ce pour les mêmes raisons que celles évoquées au cours des expérimentations précédentes. Les résidus de convergence (figures 3c et 3d), pour  $\mathcal{N} = 9$ , montrent notamment la mauvaise précision de la méthode  $C$ . Quant à  $P$ ,  $S$  et  $N$ , elles améliorent significativement la précision du suivi. Les résidus de  $P$  sont toutefois un peu plus faibles. En outre, rappelons que les résidus des points perdus par  $C$ ,  $N$  et  $S$ , qui ont dépassé le seuil fixé  $\mathcal{S}_{conv}$ , ne sont pas pris en compte sur ces figures.

## 6 Conclusion

Les méthodes de suivi de points classiques se basent, d'un point de vue photométrique, sur plusieurs hypothèses, qui n'avaient pas, ou partiellement, été explicitées auparavant. Dans cet article, l'analyse de ces approches est effectuée en se basant sur des modèles de réflexion non-lambertiens. La technique de suivi basée sur une normalisation photométrique, ou celle proposée par [3] sont, dans une certaine mesure, robustes aux variations d'illumination. Elles supposent cependant que les vecteurs, les angles, les termes de rugosité, les fonctions de spécularité sont constantes en tout point du voisinage du point à

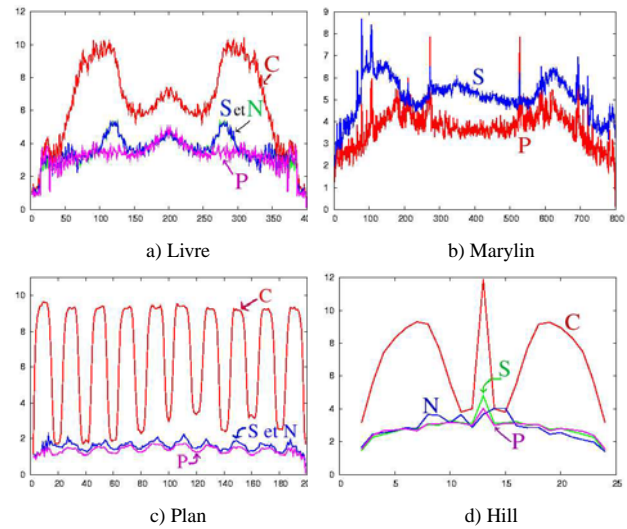


FIG. 3: Évolution des résidus de convergence des différentes approches sur les 4 séquences d'images a) : Livre, b) : Marilyn, c) : Plan d) : Hill.

suivre. Quant à l'approche proposée, elle admet qu'un changement d'illumination forme une fonction continue et dérivable dans le voisinage du point considéré. Le modèle utilisé s'avère plus adapté au suivi de points puisqu'il permet d'en suivre davantage. Notons toutefois que son apport est encore plus significatif pour les variations de spécularités que pour les variations d'illumination. De futures études s'intéresseront à la robustesse du suivi de points, cette fois dans les images couleur.

## Remerciements

Nous tenons à remercier nos partenaires dans ce projet : le conseil régional de Poitou-Charentes et l'OFIVAL<sup>2</sup>.

## Références

- [1] G. D. Hager and P. N. Belhumeur, *Efficient Region Tracking With Parametric Models of Geometry and Illumination*. IEEE Trans. on Pattern Analysis & Machine Intelligence, vol.20, num. 10, pp 1025–1039, 1998.
- [2] C. Harris and M. Stephens, *A combined edge and corner detector*. 4<sup>th</sup> Alvey Vision. Conf, Manchester, pp 147–151, 1988.
- [3] H. Jin, S. Soatto and P. Favaro, *Real-Time Feature Tracking and Outlier Rejection with Changes in Illumination*. IEEE Int. Conf. on Computer Vision, pp 684–689, 2001.
- [4] B.D. Lucas and T. Kanade, *An iterative image registration technique*. IJCAI'81, pp 674–679, 1981.
- [5] B-T Phong, *Illumination for Computer Generated Images*. Communications of the ACM, vol. 18, num. 6, pp 311–317, 1975.
- [6] J. Shi and C. Tomasi, *Good features to track*. IEEE Int. Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition, pp 593–600, 1994.
- [7] C. Tomasi and T. Kanade, *Detection and tracking of point features*. Technical Report CMU-CS-91-132, Carnegie Mellon University, 1991.
- [8] T. Tommasini, A. Fusiello, E. Trucco and V. Roberto, *Improving Feature Tracking with Robust Statistics*. Pattern Analysis & Applications, vol.2, pp 312–320, 1999.
- [9] K.E. Torrance and E.M. Sparrow, *Theory for Off-Specular Reflection from Roughened Surfaces*. Journal of the Optical Society of America, vol. 57, num. 9, 1967.

<sup>2</sup>. Office National Interprofessionnel des Viandes, de l'Élevage et de l'Aviculture



# Suivi temps réel de personnes dans des séquences d'images couleur

G. MOSTAFAOUI<sup>1</sup>, C. ACHARD<sup>1</sup>, M. MILGRAM<sup>1</sup>

<sup>1</sup>L'aboratoire des Instruments et Systèmes d'Iles de France, 3 rue Galilée 94200 Ivry-sur-seine

ghiles.mostaoui@lis.jussieu.fr, {achard, maum}@ccr.jussieu.fr

**Résumé** – Nous proposons dans cet article un algorithme temps réel de suivi de personnes, il est entièrement non supervisé, il ne nécessite aucune initialisation ni sur les modèles de pistes, ni sur leur nombre qui peut évoluer dans le temps. Il permet de gérer divers problèmes tels que les occlusions et les sous ou sur segmentations. La première étape du processus consiste à détecter les zones en mouvement. Les différentes régions ainsi obtenues seront affectées à des trajectoires en utilisant le concept de pistes élémentaires. Ces dernières nous permettent d'une part de faciliter le suivi et d'autre part de détecter les sorties d'occlusions en introduisant des ensembles cohérents de régions sur lesquels des modèles cinématiques, de forme ou de couleur pourront être définis. Des résultats significatifs seront présentés sur des séquences réelles avec vérité de terrain.

**Abstract** – We propose a real time algorithm to track moving persons without any a priori knowledge neither on the model of person, nor on their size or their number, which can evolve with time. It manages several problems such as occlusion and under or over-segmentations. The first step consisting in motion detection, leads to regions that have to be assigned to trajectories. This tracking step is achieved using the concept of elementary tracks. They allow on the one hand to manage the tracking and on the other hand, to detect the output of occlusion by introducing coherent sets of regions. Those sets enable to define temporal kinematical, shape and colour models. Significant results will be presented on several sequences with ground truth.

## 1. Introduction

La détection et suivi d'objets temps réel est une problématique difficile qui se pose dans un grand nombre d'applications de traitement d'images comme l'interaction homme-machine, la surveillance civile et militaire, la réalité virtuelle, l'analyse du mouvement humain ou encore la compression d'images. Cette difficulté est accentuée dans les environnements sans contraintes où le système de suivi devra s'adapter à la variabilité importante des objets, aux variations de luminosité, aux occlusions (partielles ou totales) ainsi qu'aux problèmes de détection de mouvement.

Il existe dans la littérature un nombre important d'algorithmes de suivi parmi lesquels on peut citer les méthodes heuristiques simples à mettre en œuvre [6], le filtrage particulaire [8] et son extension à plusieurs pistes [7], les méthodes itératives utilisant la prédiction de la position des objets (JPDAF : Joint Probabilistic Data Association Filter) [2], le MHT (Multiple Hypothesis Tracker) qui formule de manière récursive toutes les possibilités d'association des régions aux pistes [12], ou encore le Mean Shift [3]. Pour tous ces algorithmes, différentes sources d'information peuvent être utilisées pour la modélisation et le suivi des objets, les plus courantes étant la cinématique [1], la forme (silhouettes[4], modèles articulés 2D ou 3D [14] [9]) et les modèles d'apparence [13] [11]. Ces informations peuvent être utilisées simultanément pour accroître la robustesse par rapport aux différents bruits (segmentation, luminosité, occultation...). La méthode présentée ici s'inscrit dans cette lignée.

L'algorithme de suivi que nous proposons dans cet article est entièrement non supervisé, il ne nécessite aucune initialisation ni sur les modèles de pistes, ni sur leur nombre

qui peut évoluer dans le temps. Il est réalisé grâce à une méthode heuristique utilisant à la fois la cinématique, la forme et un modèle d'apparence des objets basé sur la couleur. L'originalité de la méthode consiste à introduire la notion de pistes élémentaires. Celles-ci joueront un rôle important dans le suivi puisqu'elles permettront, d'une part de faciliter le suivi et d'autre part de détecter les sorties d'occlusion. Cet algorithme, d'exécution temps réel, utilise les résultats d'une segmentation en région au sens du mouvement. La méthode d'association des régions aux pistes, décrite dans la section 2, permet de gérer les problèmes de segmentation et les occlusions partielles ou totales, comme nous le montrerons dans les résultats de la section 3, sur des séquences réelles avec vérité de terrain (séquences proposées lors de la conférence PETS2004).

## 2. L'algorithme de suivi

L'algorithme, dont le synoptique est présenté ci-dessous, débute par une détection des zones en mouvement réalisée par différence de l'image courante et d'une image de fond, suivie par une relaxation markovienne [5].

Le suivi consiste alors à associer les régions obtenues aux différentes pistes, la brique de base pour l'association étant la piste élémentaire que nous définissons maintenant :

Soient  $R_i^t$  et  $R_j^{t+1}$  deux régions en mouvement appartenant respectivement aux images  $I_t$  et  $I_{t+1}$ . Ces deux régions sont voisines si leur taux de recouvrement (lorsqu'elles sont projetées dans la même image) n'est pas nul.

Pour appartenir à une même piste élémentaire,  $R_i^t$  doit avoir un seul voisin au temps  $t+1$  ( $R_j^{t+1}$ ) et  $R_j^{t+1}$  doit avoir un seul voisin au temps  $t$  ( $R_i^t$ ). Les deux régions sont alors liées par une arête stricte.

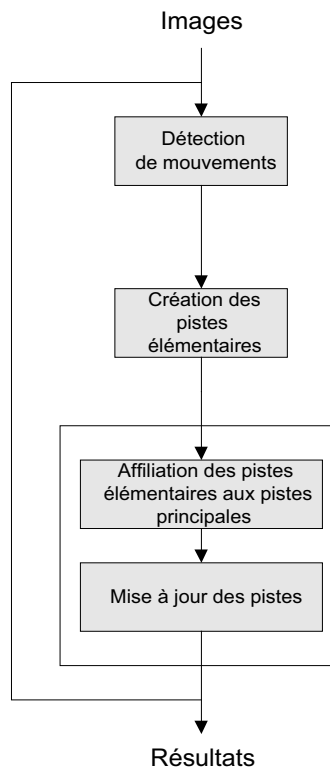


FIG. 1 : Synoptique

Sur le graphe ci-dessous où les nœuds représentent des régions et les arcs la relation de voisinage, la région  $R_1^4$  est voisine avec deux régions au temps  $t-1$ , ces trois régions ne peuvent donc pas faire parti de la même piste élémentaire. Les régions présentes dans le graphe vont ainsi amener à la construction de 5 pistes élémentaires.

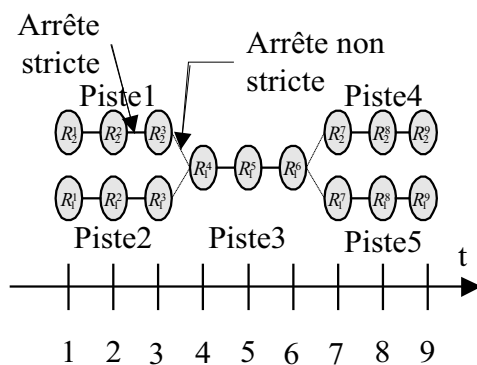


FIG. 2 : Graphe des pistes élémentaires

L'association des régions aux pistes élémentaires est qualifiée de sûre, elle ne sera pas remise en cause ultérieurement. Elle permet d'introduire des ensembles cohérents de régions qui pourront être modélisées comme des pistes avec:

- des paramètres cinématiques : centre de gravité, poids (probabilité de la piste, fonction de sa durée dans le temps) et vélocité.
- des paramètres de forme : ellipse d'axes  $2\sigma_x$  et  $2\sigma_y$  où  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  sont les écarts types en x et y.
- un modèle d'apparence : il est constitué par un modèle couleur et un vecteur de probabilités d'apparence. Le modèle couleur utilisé ici dérive de celui introduit dans [10]. Le principe est de projeter sur l'axe vertical la moyenne des couleurs des pixels appartenant à la piste et ce pour chaque plan R, V et B (voir figure 3). Nous utilisons une projection plutôt qu'un vrai modèle d'apparence 2D car celui-ci est plus robuste aux changements de forme des personnes en mouvement et, de plus, l'ajustement du modèle à la forme est simplifié (corrélation 1D). Le vecteur des probabilités d'apparence représente, pour chacune de ses lignes, le nombre d'occurrences pour lesquelles un mouvement a été détecté sur cette ligne. Il servira de pondération lors du calcul de la distance entre les modèles d'apparence.

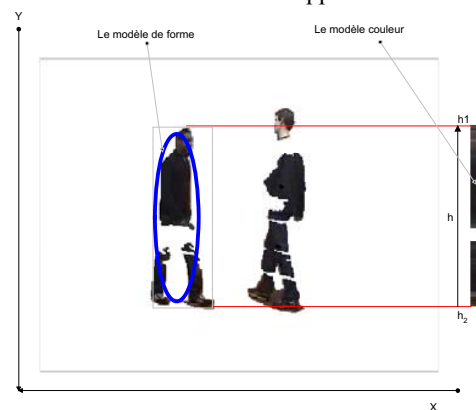


FIG. 3 : Modèle de forme et de couleur

L'algorithme de suivi va maintenant consister à regrouper les pistes élémentaires liées en pistes, chaque piste représentant idéalement la trajectoire d'une personne. Deux pistes élémentaires  $Pe_1$  et  $Pe_2$  sont dites liées s'il existe un chemin constitué d'arrêtes non-strictes (voir graphe ci-dessus) permettant d'aller de la piste  $Pe_1$  à la piste  $Pe_2$ . Chaque piste sera alors composée d'un ensemble de pistes élémentaires liées. Notons que plusieurs régions de la même image peuvent appartenir à la même piste.

L'algorithme de suivi utilisé est le suivant :

Soient  $P_i^{t-1}$   $i=(1..N)$  les pistes présentes au temps  $t-1$  et  $Pe_k^t$  ( $k=1..M$ ) les pistes élémentaires aux temps  $t$ . Il faut associer chaque piste élémentaire à une piste (ou à une nouvelle piste). Soit  $S_i^t$  l'ensemble des pistes élémentaires liées à la piste  $P_i^{t-1}$  (et donc susceptible d'appartenir à cette piste).

Plusieurs cas peuvent se produire :

- a) Si  $S_i^t$  est vide alors la piste  $P_i^{t-1}$  s'arrête.
- b) Si  $S_i^t$  contient une piste élémentaire qui n'est pas liée à une autre piste alors la piste  $P_i^{t-1}$  est mise à jour au temps  $t$ .
- c) Si  $S_i^t$  contient une ou plusieurs pistes élémentaires liées à d'autres pistes ( $P_j^{t-1}$  par exemple), il faut opter pour la présence d'une occlusion ou d'une erreur de segmentation. Pour cela, nous étudions les vecteurs vitesses des pistes concernées ( $P_i^{t-1}$  et  $P_j^{t-1}$ ).
  - Si ceux-ci ont eu la même évolution au cours du temps, un problème de segmentation a été détecté et la piste ayant le poids le plus faible est détruite tandis que l'autre est mise à jour.
  - Si ce n'est pas le cas, une occlusion est détectée et une nouvelle piste dite d'« occlusion » constituée par les pistes  $P_i^{t-1}$  et  $P_j^{t-1}$  est alors créée (les pistes  $P_i^{t-1}$  et  $P_j^{t-1}$  ne sont évidemment pas détruites).
- d) Si  $S_i^t$  contient plusieurs pistes élémentaires qui ne sont pas liées à une autre piste, on peut être en présence d'un seul objet ou de deux objets qui se séparent. La décision va de nouveau être prise en étudiant la cinématique des pistes élémentaires concernées (une sur-segmentation est détectée en cas de cinématiques semblables, tandis que pour des cinématiques différentes, on optera pour la présence de deux objets). Distinguons les cas suivants :
  - Dans le cas d'une sur-segmentation, la piste  $P_i^{t-1}$  est mise à jour.
  - Dans le cas de la séparation de deux objets (détectés comme une seule piste), les pistes élémentaires liées à cette piste sont divisées en deux classes, en utilisant la cinématique des pistes élémentaires et l'algorithme des k-means. Parmi ces deux ensembles de pistes, celui qui est le plus proche de  $P_i^{t-1}$  au sens du modèle d'apparence est affecté à cette piste. Le deuxième ensemble sera affecté à une nouvelle piste qui correspondra à la nouvelle trajectoire issue de la fission.
  - Si la séparation des objets est détectée et que la piste étudiée est une piste d'occlusion, les pistes élémentaires vont être divisées en deux ensembles, de la même manière que précédemment. Un modèle d'apparence va être créé pour chacun de ces deux ensembles et comparé aux modèles d'apparence des pistes ayant créé l'occlusion. Si les deux ensembles n'appartiennent pas au même modèle de piste avant occlusion et qu'il y a cohérence du point de vue de la forme des pistes, alors les deux pistes avant occlusion sont mises à jour et la piste d'occlusion est détruite (fin de l'occlusion) sinon, l'occlusion n'est pas rompue.

### 3. Résultats et évaluation

Notre méthode a été testée sur un grand nombre de séquences. Nous présentons ici les résultats obtenus sur une dizaine de séquences de test proposées lors de la conférence pets2004. Les scénarios sont variés allant de la simple personne qui marche seule avec divers comportements (Browse2, Browse4 et Bww2, Rsf, Rff) à plusieurs personnes qui interagissent (Mwt1, Mws : deux ou plusieurs personnes

qui se croisent et marchent côte à côte, Mc : quatre personnes marchant groupées qui se séparent et se croisent entre elles, Fra1, Fomd : deux personnes qui se battent et se séparent), ou encore une personne qui vient déposer un objet à terre avant de repartir (Lbox).

L'avantage certain de ces séquences réside dans le fait d'avoir pour chacune d'entre elles, une « Vérité de terrain » (Nombre de personnes, localisation des personnes...etc). Afin de comparer nos résultats à la vérité de terrain, nous proposons l'évaluation de notre méthode comme suit : considérons une arrête (stricte ou non) qui lie deux régions. Soient  $E_{vt}^1$  et  $E_{vt}^2$  les étiquettes (numéro des pistes) de ces régions données par la vérité de terrain et  $E_r^1$  et  $E_r^2$  les étiquettes résultantes de notre méthode. L'arrête est **positive** si : ( $E_{vt}^1 = E_{vt}^2$  et  $E_r^1 = E_r^2$ ) ou ( $E_{vt}^1 \neq E_{vt}^2$  et  $E_r^1 \neq E_r^2$ ) sinon elle est **négative**. Le tableau ci-dessous résume les résultats obtenus sur toutes les séquences. En plus de l'évaluation des arrêtes (nombre d'arrêtes positives « NAP » et négatives « NAN »), nous comparons le nombre totale de personnes trouvées sur toute la séquence (NPr) à celui de la vérité de terrain (NPvt). Un certain nombre de statistiques sur ces séquences sont aussi données dans le tableau (NI : nombre d'images, NR : nombre de régions détectées en mouvement, NPvtI : nombre moyen de personnes par images, NRI : nombre moyen de régions par images). Ces statistiques permettent notamment de donner, pour chaque séquence, une idée globale des problèmes de sur ou sous-segmentations ainsi que d'occlusions. Ainsi, en comparant le nombre moyen de personnes par image de la vérité de terrain (NPvtI), au nombre moyen de région détecté par image (NRI), on remarque le nombre important de sur-segmentations. Celui-ci est dû aux fortes variations d'éclairage présentes tout au long de la séquence et gênant fortement l'algorithme de segmentation.

Pour toutes ces séquences, aucune initialisation n'a été réalisée manuellement et aucun seuil n'a été changé (l'algorithme possède un seul seuil utilisé pour l'étude de la cinématique des pistes). D'autre part, aucune information a priori n'a été introduite sur les objets à suivre. Les résultats ci-dessous montrent que notre algorithme est capable de suivre plusieurs personnes, et donc, de détecter et de gérer les interactions entre ses dernières (occlusions, sous-segmentation). Nous pouvons néanmoins constater un taux d'erreurs plus élevé pour certaines séquences (Mwt1 et Mc). Ces erreurs sont le plus souvent dues au fait que les personnes qui interagissent ont un comportement cinématique quasi identique ce qui rend difficile la détection des occlusions et des fissions. De plus pour la séquence Mws, les deux personnes qui se croisent ont des caractéristiques colorimétriques identiques, ce qui a provoqué une erreur d'étiquetage lors de la sortie de l'occlusion. Généralement, sur ces séquences difficiles, l'algorithme a un fonctionnement correct avec un nombre d'arrêtes négatives (NAN) très petit devant le nombre d'arrêtes positives (NAP)

TAB. 1 : Résultats expérimentaux

	Bro wse2	Bro wse4	Rsf	Lbox	Mwt l	Mws	Mc	Fra1	Fom d
NI	875	1138	910	862	706	622	490	550	959
NR	3176	3654	3106	3515	1902	2005	995	3823	3056
NPvt	2	3	3	4	5	9	4	7	9
NPr	2	3	4	5	5	12	4	10	10
NPvt I	1.10	0.77	3.17	3.4	1.8	2.7	2.3	4.9	2.76
NRI	3.62	3.21	3.38	4.07	2.69	3.23	2.02	6.9	3.18
NAP	3169	3662	3108	3521	1885	1995	876	3815	3073
NAN	26	20	25	15	56	37	135	28	31

## Conclusion

Nous avons présenté une méthode de suivi d'objets en mouvements temps réel et robuste utilisant simultanément la cinématique, la forme et un modèle d'apparence. Afin de gérer correctement les problèmes d'occlusions et de sur-segmentations, nous avons introduit un nouveau concept : les pistes élémentaires. Celles-ci regroupent de manière sûre (arrête stricte) des régions de la séquence, ce qui permet d'accéder à des modèles temporels (modèle de forme, de vitesse, colorimétriques) qui ne pouvaient pas être définis sur des régions isolées. Des résultats expérimentaux réalisés sur diverses séquences avec vérité de terrain issues de la conférence pets2004 ont été présentés et ont permis d'évaluer les performances de notre système. Celui-ci produit de bons résultats sur ces séquences particulièrement difficiles. La suite de ce travail va consister à incorporer le système de suivi dans une application réelle de comptage de personnes en introduisant des connaissances a priori sur les objets à suivre, de manière à accroître la robustesse du système.

## Références

- [1] C.Achard, G.Mostafaoui, M.Milgram, *Object tracking based on kinematics with spatio-temporal blob*, MVA2005
- [2] Y. Bar-Shalom, XR Li, *Multitarget-Multisensor tracking*, Publisher: Yaakov Bar-Shalom, 1995.
- [3] D.Comaniciu, P.Meer, *Mean Shift Analysis and Application*, ICCV 1999
- [4] L.S.Davis,D.Harwood, I.Haritagolu, *Ghost: A Human Body Part Labeling System Using Silhouettes*, ICPR98
- [5] J.Denoulet, G.Mostafaoui, L.Lacassagne, A.Merigot, *Robust Embbeded Hardware implementation of Motion Markov Detection and hysteresis thresholding in colors sequences*, CAMP2005
- [6] I. Haritaoglu, D. Harwood, L.S. Davis, *W4S : a real time system for detecting and tracking people in 2,5D*, European Conference Computer Vision, 1998, Maryland.
- [7] C. Hue, J.P. Le cadre, P. Perez, *Tracking multiple objects with particle filtering*, RR INRIA n° 4033, 2000
- [8] M. Isard, A. Blake, *Condensation | conditional density propagation for visual tracking*, Int. J. Computer Vision, 29, 1, 5--28, 1998.
- [9] H.Moon, R.Chellappa, A.Rosenfeld, *T racking of Human Activities Using Shape-encoded Particle Propagation*, ICIP2001

[10] A.Mittal, L.S.Davis, M<sub>2</sub> Tracker : *A Multi-View Approach to Segmenting and tracking people in a Cluttered Scene*, IJCV2003

[11] S.Park, J.K.Aggarwal, *Segmentation and tracking of interacting human body parts under occlusion and shadowing*, Motion2002

[12] D.B. Reid, *An algorithm for Tracking Multiple Targets*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-24, N° 6, pp 843-854, 1979.

[13] A.Senior, *Tracking People with Probabilistic Appearance Models*, Pets2002

[14] L.Wang, H.Ning, T.Tan, W.Hu, *Fusion of static and dynamic body biometrics for gait recognition*, ICCV2003

# Identification par analyse en paquets d'ondelettes de l'iris et tests de robustesse

F. ROSSANT, T. EA, F. AMIEL, M. TORRES ESLAVA, A. AMARA

ISEP, 28 rue Notre-Dame des Champs, 75006 Paris

[Florence.Rossant@isep.fr](mailto:Florence.Rossant@isep.fr), [Thomas.Ea@isep.fr](mailto:Thomas.Ea@isep.fr), [Frederic.Amiel@isep.fr](mailto:Frederic.Amiel@isep.fr), [mtorrese@isep.fr](mailto:mtorrese@isep.fr), [Amara.Amara@isep.fr](mailto:Amara.Amara@isep.fr)

**Résumé** – Cet article présente un système de reconnaissance par l'iris, fondé sur l'analyse en paquets d'ondelettes orthogonales. Une mesure d'énergie permet de choisir les paquets qui extraient l'information discriminante sur la texture de l'iris. Les tests, conduits sur une base de 149 images de très bonne qualité, provenant de 69 yeux différents, montrent une bonne robustesse aux conditions de prises de vues, notamment aux variations d'éclairement, au flou, à une déviation de l'axe optique, et à des défauts locaux dans l'image.

**Abstract** – This paper presents an iris recognition system, based on a wavelet packet analysis using orthogonal wavelets. The identification of the different packets that carry discriminating information about the iris texture is carried out through an energy measure. Tests, conducted on a database of 149 high quality iris images, from 69 different eyes, show good robustness in relation to changes in illumination, blurring, optical axis deviation or local defects in the images.

## 1. Introduction

Les techniques d'identification des individus par analyse biométrique (iris, empreintes digitales, etc.) remplacent progressivement les méthodes traditionnelles d'identification (mot de passe, clés, etc.) dans les zones de haute sécurité. La reconnaissance par l'iris a été un sujet d'étude depuis 15 ans. Le premier système a été breveté par Daugman en 1994 [1]. Ce système est fondé sur l'analyse par ondelettes de Gabor [2]. Depuis lors, plusieurs groupes de recherche ont travaillé sur ce sujet, comme Tan et al. [3,4], Tisse et al. [5], Wildes [6], Sanchez et al. [7]. Lim et al. [8] utilisent comme signature de l'iris les coefficients diagonaux de la transformée en ondelettes orthogonales (Haar). La décomposition en paquets d'ondelettes est néanmoins une bonne alternative à la transformée en ondelettes. En effet, elle permet une analyse plus fine car elle réalise une partition récursive en basses et hautes fréquences. Cette méthode a été déjà testée avec succès dans le cas d'images prises dans le visible [9,10].

Dans cet article, nous présentons une méthode fondée sur la décomposition en paquets d'ondelettes en mettant l'accent sur certaines améliorations réalisées depuis [9]. Nous montrons également que l'algorithme est robuste par rapport aux conditions d'acquisition des images, en simulant des variations d'éclairement, du flou, des déviations de l'axe optique et en ajoutant des défauts locaux. Cette démarche nous permet d'évaluer précisément dans quelle mesure la qualité des images peut être dégradée, sans nuire au taux d'identification, et de calibrer le système d'acquisition d'images.

## 2. Extraction de l'iris

Les images de notre base ont été prises par Miles Research [11], grâce à un équipement spécialisé qui permet d'obtenir une excellente qualité : très bonne définition, pas de reflet, peu d'occlusion par les paupières ou les cils (Fig. 1a). Ces

images ont été redimensionnées à 600x400 pixels. L'algorithme de segmentation extrait les contours interne et externe de l'iris, qui est ensuite déroulé et égalisé (Fig. 1b).

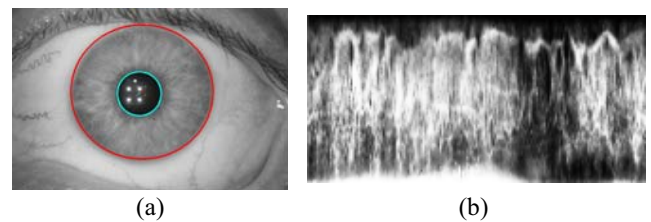


FIG. 1: (a) localisation de l'iris, (b) iris déroulé et égalisé

### 2.1 Localisation et égalisation

L'algorithme d'extraction de l'iris a été amélioré par rapport à [9]. Il est maintenant fondé sur la modélisation des contours interne et externe de l'iris, par un cercle et une ellipse respectivement, et sur le contraste plus ou moins marqué qui existe entre l'iris et la pupille ou l'iris et la sclérotique. Plus précisément, la méthode d'extraction comporte quatre phases (Fig. 2). Tout d'abord, un prétraitement inhérent au système d'acquisition élimine les quatre spots lumineux situés dans ou près de la pupille (Fig. 2a, 2b). Dans la seconde phase, une analyse d'histogramme permet de détecter la zone la plus sombre au centre de l'image, et ainsi de localiser approximativement la pupille (Fig. 2c). Ceci nous permet de définir une grille des centres possibles du cercle délimitant celle-ci. Dans la troisième étape, on recherche le centre et le rayon du cercle qui maximise le gradient moyen orthogonal à la courbe (Fig. 2d). Le même procédé est appliqué durant la quatrième phase pour trouver l'ellipse. La différence réside dans la limitation de la zone angulaire sur laquelle est estimé le gradient (Fig. 2e), afin de pallier aux perturbations éventuelles dues à la présence de paupière ou de cils. On a alors obtenu une localisation précise de l'iris (Fig. 2f).

Cet algorithme donne de très bons résultats, même en cas de faibles contrastes, grâce à l'effet moyennage, et parce qu'il ne nécessite pas d'ajustement de paramètres puisqu'il est basé sur une maximisation.

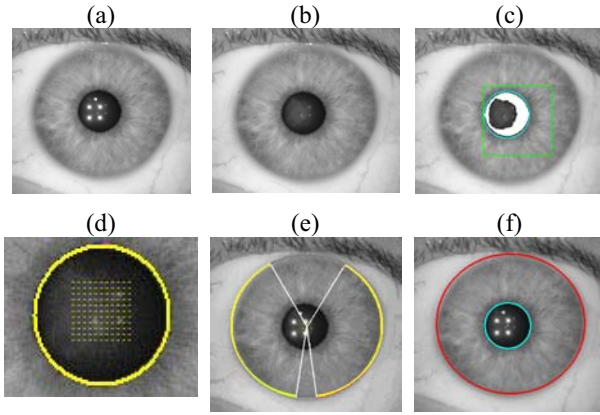


FIG. 2: Principe de l'algorithme de localisation de l'iris

## 2.2 Déroulement

L'iris localisé est déroulé suivant la transformation polaire proposée par Daugman [2] :

$$\begin{aligned} x(r, \theta) &= rx_i(\theta) + (1-r)rx_p(\theta) \\ y(r, \theta) &= ry_i(\theta) + (1-r)ry_p(\theta) \end{aligned} \quad (1)$$

avec  $(x_p, y_p)$  et  $(x_i, y_i)$  les coordonnées sur les bords interne et externe de l'iris, l'angle  $\theta$  et le rayon  $r$  définis comme indiqué sur la figure à gauche de l'équation.

Les dimensions de l'image déroulées sont fixées à 256\*128 pixels. Cette image est ensuite égalisée, pour augmenter le contraste de la texture (Fig. 1b).

## 3. Algorithme d'identification

Cet algorithme comporte deux phases : l'extraction d'une signature basée sur la décomposition en paquets d'ondelettes, et une mesure de distance qui permet de décider si deux signatures proviennent d'un même iris ou de deux iris différents. Pour identifier une personne, il suffit donc de comparer la signature extraite de son iris avec les signatures stockées dans une base de référence.

### 3.1 Extraction de la signature

On utilise une décomposition en paquets d'ondelettes (ondelette orthogonale bior 1.3, [9]) sur 3 niveaux de résolution, aboutissant à 64 imagerie (paquets d'ondelettes), numérotées 0 à 63, chacune extrayant des informations fréquentielles et spatiales sur la texture de l'iris. Nous avons calculé, sur toute notre base (149 images sources, 69 iris différents), l'énergie moyenne  $E_i$  de chaque paquet  $w_i$ , afin de déterminer lesquels sont les plus informatifs, et donc à priori les plus discriminants:

$$E_i = \sum_{j,k} w_i(j,k)^2, \quad i=0, \dots, 63 \quad (2)$$

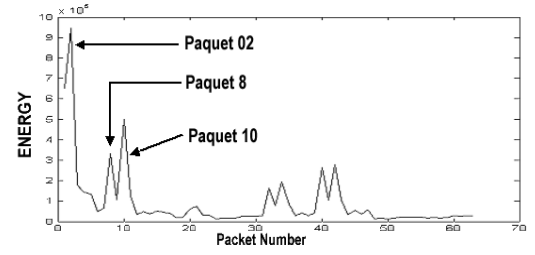


FIG. 3 : Distribution de l'énergie moyenne des paquets

La distribution d'énergie obtenue (Fig.3) indique que les paquets 2, 10, et éventuellement 8, sont les plus appropriés pour créer la signature. Le paquet 0 n'est pas utilisé car il ne contient pas d'information autre que l'énergie moyenne.

Les paquets 2, 8, et 10, notés  $w_i$  pour  $i=2, 8$  et  $10$ , sont alors encodés, non plus juste sur leur signe [9], mais par :

$$\begin{aligned} s_i(j,k) &= \text{sign}(w_i(j,k)) \quad \text{si} \quad |w_i(j,k)| > S \\ s_i(j,k) &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned} \quad (3)$$

En débruitage d'une image par transformée en ondelettes, on met à zéro les coefficients de faible amplitude, avant d'appliquer la transformée inverse [12]. Ici nous suivons un raisonnement analogue : nous considérons que les coefficients de faible amplitude représentent davantage du bruit que de l'information sur la texture de l'iris, et nous les mettons à zéros, afin qu'ils impactent moins la décision que les coefficients de forte amplitude. Le seuil  $S$  a été défini expérimentalement. Finalement, on obtient pour chaque paquet une signature compacte  $s_i$  de  $N=16*32$  coefficients égaux à  $-1, 0$ , ou  $1$ .

### 3.2 Mesure de distance et résultats

La mesure de la distance entre deux signatures permet de décider si deux signatures proviennent du même iris ou de deux iris différents. Elle est calculée selon l'expression suivante,  $s_i^{(1)}$  et  $s_i^{(2)}$  étant deux signatures obtenues du paquet  $i$  :

$$HD_i = \frac{1}{2N} \sum_{j,k} |s_i^{(1)}(j,k) - s_i^{(2)}(j,k)| \quad (4)$$

Afin d'évaluer notre méthode, nous calculons la distance entre chaque signature et toutes les autres. Nous définissons la séparation comme la différence entre la plus petite distance entre deux signatures provenant d'iris différents (imposteurs) et la plus grande distance obtenue pour deux signatures provenant d'un même iris (authentiques). Cette séparation doit nécessairement être positive pour pouvoir obtenir 100% d'identification correcte, et la discrimination sera d'autant mieux réalisée que la séparation est importante. Les tests ont été réalisés sur toute notre base de données. La figure 4 montre les résultats pour le paquet 2. La séparation est positive (0.082) et a été améliorée de 8% par rapport aux résultats présentés dans [9]. Cette méthode nous permettra de déterminer le seuil de décision qui sera appliqué dans le système final : il suffira de le choisir au milieu de la zone de séparation obtenue sur une base d'apprentissage. L'estimation du taux d'identification sera calculée sur une base de généralisation.



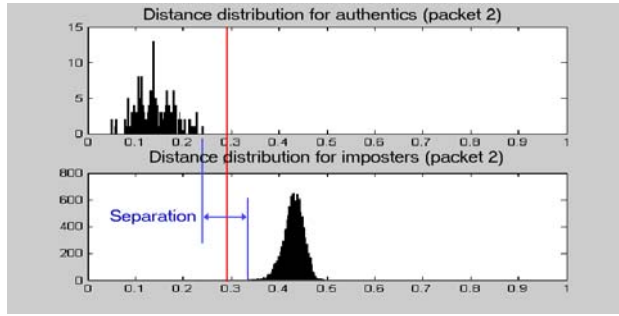


FIG. 4 : Séparation pour le paquet 2 (0.082)

### 3.3 Combinaison de paquets

Les paquets 2, 8 et 10 permettent chacun d'obtenir une séparation positive. Comme ils extraient des détails différents, on peut supposer qu'ils sont indépendants, et que l'on aboutira à une meilleure séparation, donc discrimination, en les combinant. Pour combiner les paquets 2 et 10, nous avons défini une nouvelle distance :

$$HD_C = \frac{1}{N} \sum_{j,k} |s_2^{(1)}(j,k) - s_2^{(2)}(j,k)| |s_{10}^{(1)}(j,k) - s_{10}^{(2)}(j,k)| \quad (5)$$

Comme nous supposons l'indépendance des signatures extraites des paquets 2 et 10, la distance combinée, qui peut être interprétée comme la probabilité que les coefficients diffèrent à la fois dans les deux signatures, est en fait le produit des distances obtenues pour chaque paquet séparément. On multiplie par 2 pour des questions de normalisation. Ainsi on obtient par exemple  $0.46 \cdot 0.45 \cdot 2 = 0.41$  (imposteurs) et  $0.20 \cdot 0.18 \cdot 2 = 0.07$  (authentiques), donc une séparation qui passe de 0.26, ou 0.27 à 0.34. La figure 5 confirme que la séparation a bien été augmentée (de 0.082 à 0.160). L'introduction du paquet 8 n'a pas vraiment amélioré les résultats.

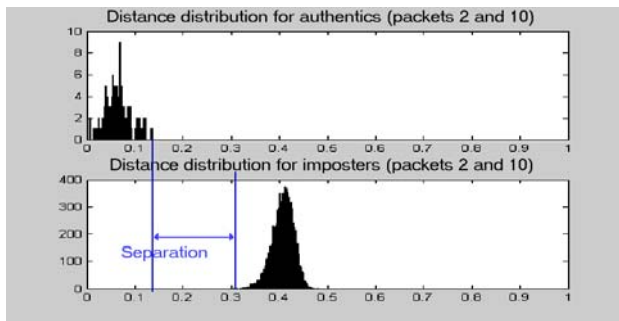


FIG. 5 : Séparation, paquets 2 et 10 combinés (0.160)

## 4. Robustesse de l'algorithme

Pour tester la robustesse de notre méthode, nous avons simulé des variations d'éclairage, du flou, des déviations de l'axe optique, ajouté des défauts locaux. La figure 6 montre quelques exemples de dégradations, à comparer avec l'image originale (a) : en (b), l'éclairage a été diminué de 20%, en (c), l'image a été rendue floue par un filtre moyennneur de taille 15, et en (d), un petit spot noir de diamètre 15 pixels a été ajouté. L'objectif est de vérifier que la séparation reste positive malgré ces dégradations, et ceci

pour chaque paquet indépendamment des autres. En effet, si la séparation est positive pour les signatures extraites des paquets 2, 8, et 10, elle le sera aussi pour toute combinaison. Les paramètres de la segmentation trouvés sur l'image originale sont réappliqués sur les images dégradées.

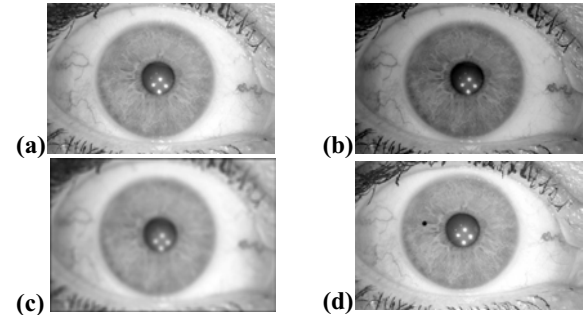


FIG. 6 : Image originale (a) et images dégradées (b)(c)(d)

### 4.1 Flou

Le flou a été simulé avec un filtre moyennneur dont on a augmenté la taille du masque. La figure 7 montre que les résultats sont satisfaisants jusqu'à un masque de 17x17. La méthode est donc très robuste au flou.

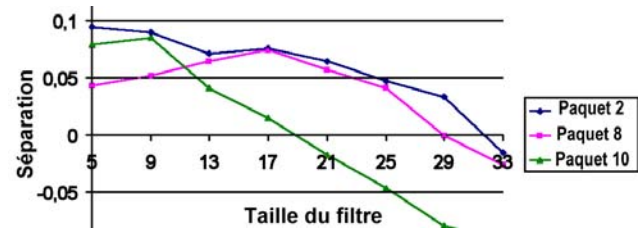


FIG. 7 : Séparation en fonction du flou

### 4.2 Eclairage

L'éclairage a été modifié de façon linéaire, comme l'indique la figure 8 :

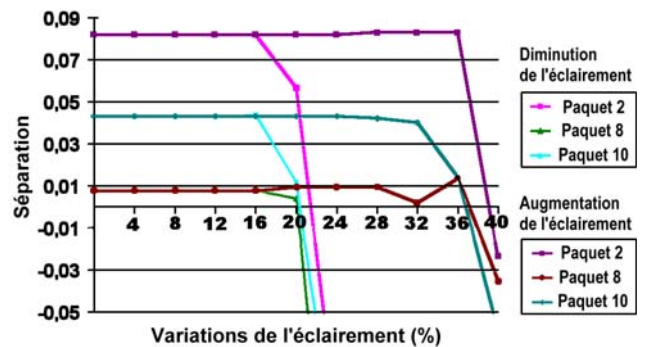


FIG. 8 : Séparation en fonction de l'éclairage

La figure 8 montre une bonne robustesse aux variations d'éclairage, la séparation restant positive jusqu'à une diminution de l'éclairage de 20% et une augmentation de l'éclairage de 36%. Ces résultats ne sont pas surprenants car la signature résulte du codage du signe des coefficients des paquets d'ondelettes. La chute des performances est due à un effet de saturation des niveaux de gris dans l'image initiale.

### 4.3 Déviation de l'axe optique

Lors de la prise de vue, il est possible que l'axe optique ne soit pas parfaitement orthogonal à l'œil. Le tableau 1 présente les résultats obtenus pour différentes variations de l'angle de prise de vue, dans les deux directions.

On obtient une bonne robustesse, jusqu'à 10° de déviation dans les directions horizontale et verticale.

TAB. 1 : Séparation en fonction de la déviation de l'axe optique

Déviation de l'axe optique (degrés)		Séparation		
Axe X	Axe Y	Paquet 2	Paquet 8	Paquet 10
0	0	0,08	0,01	0,04
2,5	10	0,11	0,01	0,01
5	5	0,07	0,01	0,08
7,5	7,5	0,09	0,01	0,05
7,5	10	0,11	0,00	0,04
10	7,5	0,09	0,00	0,04
10	10	0,08	0,01	0,03
12,5	12,5	0,06	-0,02	0,01
15	15	0,04	0,00	-0,04
17,5	17,5	0,00	-0,05	-0,07

### 4.4 Défaut local

Les tests ont été effectués sur 18 images. Un spot, blanc ou noir, a été placé aléatoirement dans l'image, pour simuler un défaut local, par exemple un reflet de lumière. La figure 9 montre que la séparation reste positive pour un spot noir de diamètre inférieur ou égal à 15 pixels.

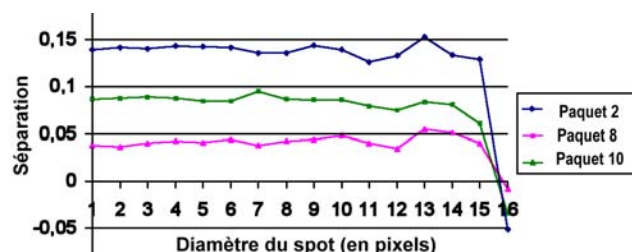


FIG. 9 : Séparation en fonction de la taille du spot noir

La méthode semble être plus sensible aux spots blancs, car le diamètre maximal toléré est dans ce cas de 9 pixels.

On constate donc que la robustesse aux défauts locaux n'est pas très bonne, et ces résultats nous amènent à reconsidérer le calcul de la distance entre deux signatures. En effet, on peut envisager de combiner des distances locales, plutôt que de calculer une distance globale, ce qui nous permettrait de détecter la présence d'un défaut local (distance localement grande), et de ne pas prendre en compte la partie de la signature correspondante dans la mesure finale.

## 5. Conclusion et perspectives

Nous avons présenté une méthode d'identification par l'iris, fondée sur une décomposition en paquets d'ondelettes de l'iris déroulé, un encodage des coefficients des paquets les plus informatifs, et une mesure de distance. Les trois paquets qui contiennent le plus d'information discriminante sur la texture de l'iris ont été identifiés grâce à une mesure

d'énergie. Sur notre base de 149 images, contenant 69 iris différents, nous obtenons une séparation positive entre la distribution des distances obtenues pour les authentiques et celle obtenue pour les imposteurs, et cela pour chacun des trois paquets retenus. La discrimination a été améliorée par rapport à [9], grâce au nouvel algorithme de segmentation qui offre une meilleure précision sur les contours de l'iris, et à l'encodage des coefficients sur 3 niveaux. De plus, une combinaison simple de deux signatures permet d'augmenter nettement la discrimination et donc la fiabilité du système. Nous avons de plus montré que la méthode est robuste par rapport aux conditions d'acquisition, en particulier au flou, aux variations d'éclairement, à une variation modérée de l'angle de prise de vue, et, dans une moindre mesure, à de petits défauts locaux. Notre objectif est maintenant de constituer une large base de données, comprenant un grand nombre d'individus et davantage d'images par individu: cette base nous permettra, d'une part d'améliorer la distance utilisée et les méthodes de combinaisons de paquets, d'autre part, de réaliser et d'évaluer un système d'identification complet, dont le seuil de décision aura été calculé par apprentissage sur une partie de la base.

## Références

- [1] Biometric Personal Identification System Based on Iris Analysis., U.S. Patent No. 5,291,560 issued March 1, 1994 (J. Daugman)
- [2] J. Daugman, High confidence visual recognition of persons by a test of statistical independence, *IEEE Trans. PAMI*, vol. PAMI-15, pp. 1148-1161, 1993
- [3] Y. Zhu, T. Tan and Y. Wang, Biometric personal identification based on iris patterns, *Proc. 15th Int. Conf. on Pattern Recognition*, Barcelona, Spain, 2000.
- [4] Z. Sun, Y. Wang, T. Tan, J. Cui, Cascading Statistical and Structural Classifiers for Iris Recognition, *IEEE International Conference on Image Processing*, 2004.
- [5] Tisse et al., "Person Identification technique using human iris recognition", *Proc. 15th Int. Conf. on Vision Interface*, Calgary, Canada, 2002
- [6] R. P. Wildes, "Iris recognition: an emerging biometric technology", *Proc. IEEE 85*, Vol 9, pp. 1348-1363, 1997
- [7] C. Sanchez-Avila, R. Sanchez-Reillo, "Two different approaches for iris recognition using Gabor filters and multiscale zero-crossing representation", *Pattern Recognition Letters* Vol 3, pp. 231-241, 2005
- [8] S. Lim et al., "Efficient iris recognition through improvement of feature vector and classifier", *ETRI J.*, Vol 23, pp. 61-70, 2001
- [9] E. Rydgren, T. Ea, F. Amiel, F. Rossant and A. Amara, Iris Features extraction using wavelet packets, *IEEE International Conference on Image Processing*, Singapore, 2004
- [10] E. Krichen et al., Iris Identification Using Wavelet Packet for Images in Visible Light Illumination, *Conference, ICBA*, Hong Kong, China, July 15-17, 2004
- [11] Miles Research, [www.milesresearch.com](http://www.milesresearch.com)
- [12] M. Misiti et al., Les ondelettes et leurs applications Ed. Hermès, 2003



# Diagonalisation de matrices polynômiales quaternioniques : application à la séparation de mélanges convolutifs d'ondes polarisées

Nicolas Le Bihan  
Laboratoire des Images et des Signaux,  
UMR 5083 CNRS,  
ENSIEG, 961 Rue de la Houille Blanche,  
BP 46, 38402 Saint Martin d'Hères Cedex, France  
Nicolas.Le-Bihan@lis.inpg.fr

**Résumé** – L'utilisation des quaternions et des biquaternions permet une formulation simple et compacte des mélanges convolutifs de signaux polarisés. Une technique de séparation à l'ordre 2 des signaux est alors possible à l'aide d'une étape de diagonalisation d'une matrice polynômiale quaternionique. Nous présentons un algorithme de type Jacobi permettant cette diagonalisation et montrons les avantages de l'approche proposée vis-à-vis des techniques matricielles classiques de type *long-vecteur*. Particulièrement, l'approche quaternionique autorise une estimation des paramètres de polarisation plus robuste au bruit que les techniques *long-vecteur*.

**Abstract** – The use of quaternions and biquaternions allows a simple and compact formulation of convolutive mixtures of polarized signals. With this formulation, it is then possible to use a quaternion valued matrix polynomial diagonalization step to perform a second order separation of polarized signals. We introduce a new Jacobi like quaternionic algorithm for this purpose and show the advantages of the quaternionic approach over classical *long-vector* techniques. Polarization parameters estimation is more robust to noise using the quaternion approach than the *long-vector* approach.

## 1 Introduction

Nous nous intéressons au problème de la séparation à l'ordre 2 de mélanges convolutifs de signaux polarisés. De tels signaux sont classiquement rencontrés dans de nombreuses applications (sismologie, sismique, télécom, etc).

Après avoir traversé le milieu de propagation ces signaux sont enregistrés sur des capteurs vectoriels ( $n$ -uplets de capteurs directionnels co-localisés enregistrant les vibrations du champ d'ondes dans des directions différentes). Dans un souci d'identification ou d'interprétation, il peut être pertinent d'estimer la polarisation des signaux reçus. Également, la diversité de polarisation peut permettre de discriminer différentes sources dans un but de séparation des champs d'ondes reçus.

Afin de tenir compte de cette information, d'en tirer avantage dans la séparation et de permettre une estimation des paramètres de polarisation après séparation, nous proposons d'utiliser une modélisation *quaternionique* des signaux polarisés (également appelés *vectoriels*).

Dans le cas de mélanges convolutifs de tels signaux, ce modèle permet de proposer une méthode de séparation à l'ordre 2 par diagonalisation d'une matrice polynômiale quaternionique, extension directe des techniques de séparation connues dans le cas de signaux à échantillons réels ou complexes [1, 2, 3]. Le modèle quaternionique utilisé assure la prise en compte de la polarisation dans la séparation, ce qui a pour effet d'améliorer les performances. Nous proposons un algorithme de type Jacobi pour achever la diagonalisation de matrices

polynômiales quaternioniques. Nous montrons sur un exemple synthétique l'avantage de l'utilisation du modèle quaternionique vis à vis d'un traitement classique matriciel (arrangement des données sous forme *long-vecteur*).

## 2 Modèle quaternionique pour les signaux polarisés

Après une brève introduction sur les quaternions et les biquaternions (quaternions à coefficients complexes), nous présentons le modèle de signaux à valeurs quaternioniques en temps et fréquence.

### 2.1 Quaternions et biquaternions

Les quaternions sont une extension des complexes à l'espace 4D, découverts en 1843 par Sir W.R. Hamilton [4]. Les quaternions forment une algèbre sur  $\mathbb{R}$ , notée  $\mathbb{H}$ , et de base  $\{1, i, j, k\}$ . Un quaternion  $q \in \mathbb{H}$  est composé d'une partie réelle et de trois parties imaginaires :

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \quad (1)$$

avec  $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$  et les nombres imaginaires  $i, j$  et  $k$  vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \\ ij = -ji = k \end{aligned} \quad (2)$$

Le conjugué de  $q$  est  $\bar{q} = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$ , sa norme est  $|q|^2 = q\bar{q}$ . Un quaternion dont la partie réelle est nulle est dit *pur*.  $\mathbb{H}$  est un corps non-commutatif, de sorte

que :  $pq \neq qp$  en général pour  $p, q \in \mathbb{H}$ . Un certain nombre d'ouvrages traite des propriétés élémentaires des quaternions, voir par exemple [5].

Les *quaternions complexes* (ou *biquaternions*) ont été également introduits par Hamilton [6]. Un biquaternion  $Q \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$  est défini comme :

$$Q = Q_0 + Q_1 \mathbf{i} + Q_2 \mathbf{j} + Q_3 \mathbf{k} \quad (3)$$

avec  $Q_\alpha = Q'_\alpha + \mathbf{i}Q''_\alpha \in \mathbb{C}^{\mathbf{I}}$  ( $\alpha = 0, 1, 2, 3$ ) et  $\mathbf{I}^2 = -1$ . Les nombres  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  et  $\mathbf{k}$  suivent les mêmes règles que dans le cas des quaternions à coefficients réels (2). L'opérateur  $\mathbf{I}$  commute avec  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  et  $\mathbf{k}$ , et n'interagit pas avec eux :

$$\mathbf{i}\mathbf{I} = \mathbf{I}\mathbf{i}, \mathbf{j}\mathbf{I} = \mathbf{I}\mathbf{j}, \mathbf{k}\mathbf{I} = \mathbf{I}\mathbf{k} \quad (4)$$

Nous ne détaillons pas ici l'étude des biquaternions, leurs propriétés sont décrites dans [5].

## 2.2 Signaux polarisés à valeurs sur $\mathbb{H}$

Suivant le modèle décrit dans [7], un signal à échantillons vectoriels enregistré sur un capteur vectoriel à trois composantes ( $c_1, c_2, c_3$ ) peut être considéré comme un signal quaternionique pur,  $x(n) \in \mathbb{H}^N$ , donné comme :

$$x(n) = x_{c_1}(n)\mathbf{i} + x_{c_2}(n)\mathbf{j} + x_{c_3}(n)\mathbf{k} \quad (5)$$

où les trois signaux  $x_{c_1}(n)$ ,  $x_{c_2}(n)$  et  $x_{c_3}(n)$  sont liés entre eux par des relations de phase et d'amplitude, *c.à.d.* de polarisation. La polarisation est ici supposée constante en temps et en fréquence.

Afin d'étudier les mélanges convolutifs de signaux polarisés, nous définissons une représentation en  $Z$  des signaux donnés en (5) basée sur les *biquaternions*.

Nous définissons la transformée en  $Z$  pour les signaux donnés en (5) comme suit. Soit un signal  $x(n)$  à valeurs sur  $\mathbb{H}$ , alors sa transformée en  $Z$ , notée  $x[z]$ , est :

$$x[z] = x_{c_1}[z]\mathbf{i} + x_{c_2}[z]\mathbf{j} + x_{c_3}[z]\mathbf{k} \quad (6)$$

où les  $x_{c_\alpha}[z]$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) sont les transformées en  $Z$  des signaux pris séparément, avec  $z \in \mathbb{C}^{\mathbf{I}}$ , *c.à.d.*  $z = \Re(z) + \mathbf{I}\Im(z)$ . La transformée en  $Z$  de  $x(n)$  ainsi définie est donc à valeurs quaternioniques complexes, *c.à.d.*  $x[z] \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^N$ . Cette approche diffère de [8] où la TF Quaternionique est utilisée pour les signaux vectoriels.

Dans [8], la transformée  $\mathcal{F}$  opère sur des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{H}$  tel que :  $u \in \mathbb{H} \xrightarrow{\mathcal{F}} U \in \mathbb{H}$ . Dans notre cas, la transformation  $\mathcal{F}'$  agit sur des signaux à valeurs sur  $\mathbb{H}$  et leur associe une représentation sur une algèbre de dimension deux fois plus grande :  $u \in \mathbb{H} \xrightarrow{\mathcal{F}'} U \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ .

## 3 Modèle de mélange convolutif

Considérons une antenne de capteurs vectoriels à trois composantes ( $c_1, c_2, c_3$ ) recevant la contribution de plusieurs sources polarisées. Nous considérons que le mélange reçu est une superposition linéaire des échantillons retardés des sources. Dans le cas simple de deux capteurs/deux sources et en l'absence de bruit, le mélange s'écrit :

$$\begin{cases} x_1(n) = h_{11} * s_1(n) + h_{12} * s_2(n) \\ x_2(n) = h_{21} * s_1(n) + h_{22} * s_2(n) \end{cases} \quad (7)$$

où  $x_\beta(n), h_{\beta\gamma}(n) \in \mathbb{H}^N$ ,  $s_\beta(n) \in \mathbb{R}^N$  ( $\beta, \gamma = 1, 2$ ), et  $*$  représente la convolution appliquée séparément sur les composantes :

$$h * s(n) = (h * s_{c_1}(n))\mathbf{i} + (h * s_{c_2}(n))\mathbf{j} + (h * s_{c_3}(n))\mathbf{k} \quad (8)$$

avec  $h * s_{c_\alpha} = \sum_{p=0}^l h(p) * s_{c_\alpha}(n-p)$  et  $l$  la taille du filtre  $h$ . Les signaux sont considérés causaux. Les représentations polynômiales en  $z$  sont données par :

$$H[z] = \sum_{r=0}^l H(r)z^{-r}, x[z] = \sum_{r=0}^{\infty} x(r)z^{-r}, s[z] = \sum_{r=0}^{\infty} s(r)z^{-r} \quad (9)$$

où  $z \in \mathbb{C}^{\mathbf{I}}$ ,  $x[z]$  et  $H[z]$  sont à valeurs biquaternioniques tandis que  $s[z]$  est à valeurs complexes ( $\mathbb{C}^{\mathbf{I}}$ ).

Ainsi, l'effet du canal de propagation (retards identiques pour toutes les composantes et termes d'atténuation éventuellement différents pour chaque composante en milieu anisotrope), se formalise sous forme matricielle, après transformée en  $Z$ , comme :

$$\mathbf{x}[z] = \begin{bmatrix} x_1[z] \\ x_2[z] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}[z] & H_{12}[z] \\ H_{21}[z] & H_{22}[z] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1[z] \\ s_2[z] \end{bmatrix} = \mathbf{H}[z]\mathbf{s}[z] \quad (10)$$

où  $\mathbf{H}[z]$  est une matrice polynômiale quaternionique en  $z$ , *c.à.d.* un élément de  $\mathbb{H}[z]^{2 \times 2}$ . Les éléments  $H_{ij}[z]$  sont donc des filtres RIF à coefficients sur  $\mathbb{H}$ . Les sources  $s_1$  et  $s_2$  sont supposées décorréliées à tous les retards. Avant de proposer un algorithme permettant d'estimer les sources  $s_\alpha$ , nous présentons quelques résultats sur les matrices polynômiales quaternioniques.

## 4 Matrices polynômiales quaternioniques

Les matrices polynômiales à coefficients réels et complexes ont été utilisées dans l'étude des systèmes MIMO, et particulièrement en identification de fonctions de transfert [9], séparation de mélanges convolutifs [2, 3] et en déconvolution [1, 10]. Le cas des matrices polynômiales quaternioniques n'a pas été traité dans la littérature. Nous présentons dans cet article quelques définitions concernant ces matrices.

Une matrice polynômiale quaternionique  $\mathbf{A}[z] \in \mathbb{H}[z]^{N \times N}$  de degré  $p$  est donnée par :

$$\mathbf{A}[z] = \sum_{l=0}^{p-1} \mathbf{A}_l z^l = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 z + \mathbf{A}_2 z^2 + \dots + \mathbf{A}_{p-1} z^{p-1} \quad (11)$$

avec  $\mathbf{A}_\alpha \in \mathbb{H}^{N \times N}$ . Les  $\mathbf{A}_\alpha$  commutent avec tout  $z \in \mathbb{C}^{\mathbf{I}}$ , de telle sorte que  $\mathbf{A}_\alpha z^\beta = z^\beta \mathbf{A}_\alpha$ ,  $\forall \alpha, \beta$ . Les monômes de type  $\mathbf{A}_\alpha z^\beta$  sont des éléments de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{N \times M}$ . Étant donnée une matrice  $\mathbf{A}[z]$ , sa para-conjuguée, notée  $\tilde{\mathbf{A}}[z]$ , est donnée par :  $\tilde{\mathbf{A}}[z] = \mathbf{A}^\dagger[1/z]$  où l'opérateur  $^\dagger$  représente la transposition-conjugaison quaternionique. Une matrice polynômiale quaternionique carrée  $\mathbf{A}[z] \in \mathbb{H}[z]^{N \times N}$  est dite para-unitaire si  $\mathbf{A}[z]\tilde{\mathbf{A}}[z] = \mathbf{I}$  et para-hermitienne si  $\tilde{\mathbf{A}}[z] = \mathbf{A}[z]$ .

## 5 Diagonalisation de matrices polynômiales quaternioniques

Nous décrivons à présent un algorithme de diagonalisation pour les matrices polynômiales quaternioniques para-hermitiennes. Notre algorithme est basé sur les transformations de Jacobi. Nous détaillons tout d'abord l'extension de ces transformations au cas quaternionique avant de détailler l'algorithme de diagonalisation pour les éléments de  $\mathbb{H}[z]^{N \times N}$ .

### 5.1 Transformations de Jacobi sur $\mathbb{H}$

Considérons tout d'abord le cas d'une matrice quaternionique hermitienne  $\mathbf{A}$  de  $\mathbb{H}^{2 \times 2}$ . La procédure de Jacobi consiste à trouver une matrice unitaire  $\mathbf{R}$  telle que :

$$\mathbf{R}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \bar{c} & s \\ -\bar{s} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -\bar{s} \\ s & \bar{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

avec  $c, s, a_{11}, a_{22}, a_{12} \in \mathbb{H}$ ,  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  et  $a_{12} = \bar{a}_{21}$ . Par calcul direct et en faisant les hypothèses classiques (connues dans le cas des transformations de Jacobi sur  $\mathbb{C}$  [11]), il vient que  $c = \cos \theta$  et  $s = \sin \theta \frac{a_{12}}{|a_{12}|}$ . Les valeurs de  $c$  et  $s$  sont alors données par :

$$\tau = \frac{(a_{22} - a_{11})}{2|a_{12}|} \quad \mu = \frac{\text{sign}(\tau)}{|\tau| + \sqrt{1 + \tau^2}} \quad (13)$$

et :

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad s = c\mu \frac{a_{12}}{|a_{12}|} \quad (14)$$

La procédure de Jacobi ainsi présentée s'étend trivialement sur des matrices carrées de dimension supérieure 2. La convergence de la procédure se démontre également aisément par extension des démonstrations connues sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ .

### 5.2 Algorithme de diagonalisation

Nous cherchons à diagonaliser une matrice polynômiale quaternionique para-hermitienne  $\mathbf{A}[z] \in \mathbb{H}[z]^{N \times N}$ . Pour cela, il est possible d'utiliser une version quaternionique de l'algorithme présenté dans [3]. La matrice para-unitaire  $\mathbf{Q}[z]$  permettant de diagonaliser  $\mathbf{A}[z]$  est construite comme :

$$\mathbf{Q}[z] = \mathbf{R}_L \Delta^{d_L} \mathbf{R}_{L-1} \Delta^{d_{L-1}} \dots \mathbf{R}_1 \Delta^{d_1} \quad (15)$$

avec  $\Delta^{d_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{d_i} \end{bmatrix}$ ,  $d_i \in \mathbb{Z}$  et  $\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} c_i & -\bar{s}_i \\ s_i & \bar{c}_i \end{bmatrix}$ .  $L$  est le nombre de matrices élémentaires nécessaires à la construction de la  $\mathbf{Q}[z]$  et où  $d_i$  est choisi (pour chaque  $i$ ) afin de maximiser la décorrélation à tous les retards [3]. L'algorithme est appliqué par bloc  $2 \times 2$  sur toute la matrice, comme classiquement dans les algorithmes de Jacobi [11]. La diagonalisation est alors obtenue par :

$$\mathbf{Q}[z] \mathbf{A}[z] \tilde{\mathbf{Q}}[z] = \mathbf{\Sigma}[z] \quad (16)$$

où  $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}[z]^{N \times N}$  (dans le cas où  $\mathbf{A}[z]$  est para-hermitienne) est diagonale. Comme pour les matrices sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ , l'algorithme de type Jacobi permet une bonne estimation des termes diagonaux mais est très coûteux en temps de calcul.

## 6 Méthode de séparation

Afin de retrouver les sources polarisées du mélange donné en (10), nous proposons d'utiliser une technique basée sur l'algorithme de diagonalisation présenté en 5.2. Nous présentons le cas simple de  $N = 2$  (2 sources/2 capteurs), qui se généralise naturellement à  $N > 2$ . Dans le cas de deux capteurs, les signaux  $s_1(n)$  et  $s_2(n)$  sont supposés décorrélés à tous les retards possibles. En supposant que les espérances mathématiques sont estimées par moyenne temporelle non-normalisée<sup>1</sup>, on a :

$$\mathbb{E}[s_1(n)\bar{s}_2(n-k)] = \sum_{n=1}^N s_1(n)\bar{s}_2(n-k) = 0, \quad \forall k \quad (17)$$

Ceci autorise une notation vectorielle par la suite. La décorrélation à tous les retards donnée par (17) peut s'écrire dans le domaine en  $Z$  comme :  $s_1[z]\bar{s}_2[1/z] = 0$ . Ainsi, si les sources  $s_1$  et  $s_2$  sont décorrélées à tous les retards, cela revient en termes de matrice polynômiale à :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbf{s}}[z] &= \mathbf{s}[z]\mathbf{s}[1/z] = \begin{bmatrix} s_1[z] \\ s_2[z] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{s}_1[1/z] & \bar{s}_2[1/z] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_1[z] & 0 \\ 0 & \sigma_2[z] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

Considérant la sortie  $\mathbf{x}[z]$  des capteurs vectoriels du mélange donné en (10), l'étape de séparation proposée consiste à trouver une matrice para-unitaire  $\mathbf{Q}[z] \in \mathbb{H}[z]^{2 \times 2}$  telle que  $\mathbf{w}[z] = \mathbf{Q}[z]\mathbf{x}[z]$ , vérifie :

$$\mathbf{w}[z]\tilde{\mathbf{w}}[z] = \mathbf{Q}[z]\mathbf{x}[z]\tilde{\mathbf{x}}[z]\tilde{\mathbf{Q}}[z] \approx \begin{bmatrix} \delta_1[z] & 0 \\ 0 & \delta_2[z] \end{bmatrix} \quad (19)$$

Estimer  $\mathbf{w}[z]$  revient donc à diagonaliser une matrice polynômiale quaternionique ( $\Gamma_{\mathbf{x}}[z] = \mathbf{x}[z]\tilde{\mathbf{x}}[1/z]$ ). Les termes de  $\mathbf{w}[z] = \mathbf{Q}[z]\mathbf{x}[z]$  sont les estimées des sources, à plusieurs indéterminées (classiques) près : amplitude (signe), phase, retard, mais aussi rotation de la figure de polarisation. Cette dernière indétermination est due aux classes d'équivalence entre les signaux à valeurs sur  $\mathbb{H}$ . En effet, pour tout  $s(n) \in \mathbb{H}^N$ , le signal  $s_q(n) = qs(n)q^{-1}$ , avec  $q \in \mathbb{H}$  lui est équivalent (voir [12] pour plus de détails).

## 7 Résultats

Nous nous plaçons dans un cas simple afin d'illustrer l'intérêt de la technique proposée vis à vis des techniques *long-vecteur*<sup>2</sup> et *composante par composante*<sup>3</sup>. Nous présentons un exemple sur données sismiques synthétiques : une onde plane polarisée elliptiquement enregistrée sur un réseau de cinq capteurs vectoriels à trois composantes ( $c_1, c_2, c_3$ ) additionnée à du bruit (Gaussien, Blanc et non polarisé). La polarisation elliptique engendre que les signaux sur  $c_2$  et  $c_3$  sont des versions *amplifiées* et *déphasées* de celui enregistré sur  $c_1$ . Les trois composantes du signal

<sup>1</sup>Cette hypothèse s'avère utile quand une seule réalisation des sources est disponible, comme par exemple en sismique/sismologie.

<sup>2</sup>Le traitement est effectué sur un grand vecteur formé par la concaténation des composantes :  $\mathbf{x}_{lv} = [\mathbf{x}_{c_1}^T \mathbf{x}_{c_2}^T \mathbf{x}_{c_3}^T]^T$

<sup>3</sup>Le traitement est effectué sur  $c_1, c_2$  et  $c_3$  séparément

source sont présentées sur le figure 1. Nous présentons les résultats des trois approches : 1) Q, quaternionique (algo. de la section 6); 2) Lv, long-vecteur  $\mathbf{x}_{lv} = [\mathbf{x}_{c1}^T \mathbf{x}_{c2}^T \mathbf{x}_{c3}^T]^T$ ; 3) CpC,  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  traitées séparément. Dans les cas CpC et Lv, l'algorithme utilisé (pour des signaux à valeurs réelles) est celui donné dans [3]. Les résultats de séparation sont présentés pour un RSB<sup>4</sup> de -15 dB sur la figure 2.

L'intérêt de l'approche Q par rapport à CpC se conçoit aisément, car CpC n'utilise pas la redondance du signal sur les trois composantes. Q et Lv ont des résultats de séparation à peu près équivalents en terme de résistance au bruit, mais l'avantage de Q vient du fait qu'il permet une estimation de la polarisation, alors que Lv ne le permet pas (les trois composantes sont vues comme une seule et même source dans le mélange mis sous forme de grande matrice et l'information polarisation ne peut être récupérée, ce qui n'autorise pas à tracer une figure de Lissajou). Ceci montre l'intérêt d'utiliser l'approche quaternionique plutôt que long-vecteur dans l'optique d'une estimation des paramètres de polarisation après la séparation.

## 8 Conclusion

Nous avons proposé de modéliser les mélanges convolutifs de signaux polarisés à l'aide de matrices polynômiales quaternioniques. Dans le cas de sources décorrélées, un algorithme de diagonalisation de telles matrices permet une estimation des sources et permet d'envisager une estimation de la polarisation. Une étude plus détaillée des performances de la méthode proposée reste à faire, entre autres pour caractériser la qualité d'estimation de la polarisation après la séparation proposée. Également, une étude systématique des propriétés des matrices polynômiales sur  $\mathbb{H}$  reste à être menée.

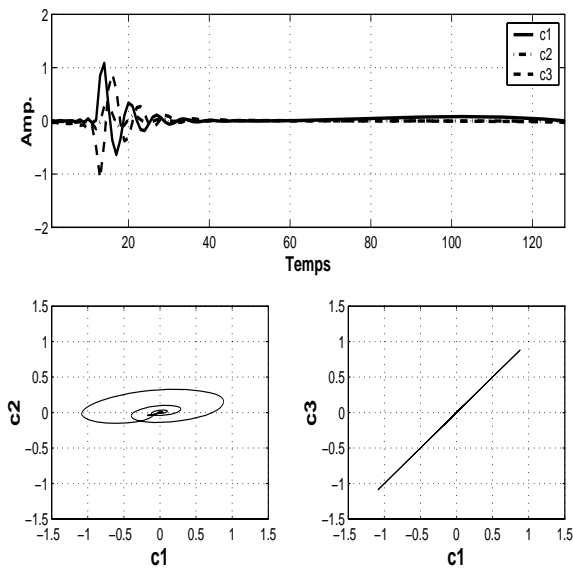


FIG. 1: Signal source polarisé et figures de Lissajou

<sup>4</sup>Le RSB est calculé sur une fenêtre temporelle (de taille  $N_T$ ) où le signal est non-nul et vaut :  $SNR = 10 \log \left( \frac{\sum_{\alpha=1}^3 \sum_{n=1}^{N_T} |x_{c\alpha}(n)|^2}{\sum_{\alpha=1}^3 \sum_{n=1}^{N_T} |x_{c\alpha}(n)|^2} \right)$

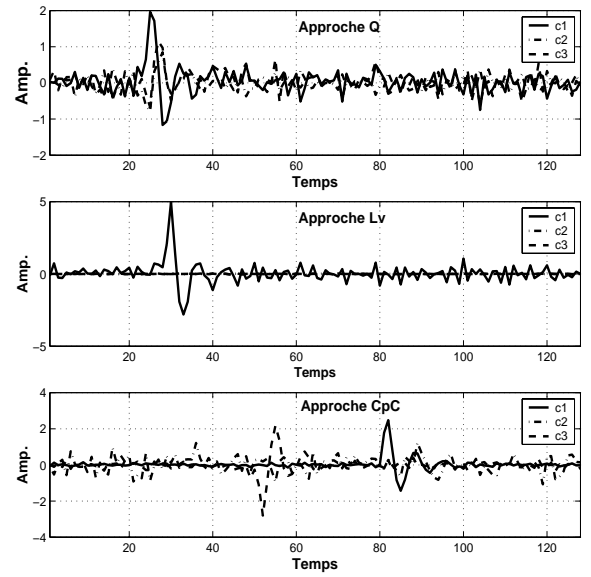


FIG. 2: Sources estimées par les méthodes Q, Lv et CpC

## References

- [1] R. Lambert and C. Nikias. Polynomial matrix whitening and application to the blind deconvolution problem. MILCOM Conference on Military Communications, San Diego, 1995.
- [2] P. Comon and L. Rota. Blind separation of independent sources from convolutive mixtures. *IEICE Trans. fundamentals*, E86-A(3), 2003.
- [3] J.G. McWhirter and P.D. Baxter. A novel technique for broadband SVD. Proceedings of the 12th ASAP Workshop, MIT, 2004.
- [4] W.R. Hamilton. On quaternions. *Proceeding of the Royal Irish Academy*, 1843.
- [5] J.P. Ward. *Quaternions and Cayley Numbers, Algebra and applications*. Kluwer Academic, 1997.
- [6] W.R. Hamilton. On the geometrical interpretation of some results obtained by calculation with biquaternions. *Proceeding of the Royal Irish Academy*, V:388-390, 1853.
- [7] N. Le Bihan and J. Mars. Singular value decomposition of quaternion matrices: A new tool for vector-sensor signal processing. *Signal Processing*, 84(7):1177-1199, 2004.
- [8] S.J. Sangwine. Fourier transforms of colour images using quaternions, or hypercomplex, numbers. *Electronics letters*, 32(21):1979-1980, 1996.
- [9] K. Abed-Meraim, P. Loubaton, and E. Moulines. A subspace algorithm for certain blind identification problems. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 43(2):499-511, 1997.
- [10] P. Comon and E. Moreau. Blind MIMO equalization and joint-diagonalization criteria. International conference on Acoust. Speech and Signal Processing (ICASSP), Salt Lake City, 2001.
- [11] G.H. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins, 1989.
- [12] L.H. Zetterberg and H. Brändström. Codes for combined phase and amplitude modulated signals in a four-dimensional space. *IEEE Trans. on Communications*, COM-25(9), 1977.

# Vers une classification non supervisée basée sur un nouvel indice de connectivité

Frédéric BLANCHARD, Michel HERBIN, Philippe VAUTROT

CReSTIC-LERI

IUT, rue des Crayères, BP 1035,  
F-51687 Reims Cedex 2, France

frederic.blanchard@univ-reims.fr,  
michel.herbin@univ-reims.fr,  
philippe.vautrot@univ-reims.fr

**Résumé** – Cet article présente une nouvelle approche pour la classification non-supervisée de données. Cette nouvelle méthode repose sur la construction d'un indice de connectivité et ne fait aucune hypothèse sur la forme des classes ni sur leurs effectifs. L'approche présentée constitue une alternative aux méthodes basées sur l'estimation de densité de probabilité.

**Abstract** – This paper expose a new approach for data clustering. This new method leads on the definition of a new connectivity index. This approach is an alternative technique of density estimation based methods.

## 1 Introduction

La classification non supervisée est un domaine important de l'analyse exploratoire des données. Les développements des méthodes de classification doivent beaucoup à l'évolution des capacités informatiques. L'objectif général de la classification est de déterminer une partition des données (ou une répartition des données en groupements) de sorte que deux données sont soit regroupées, si elles sont très semblables, soit séparées si elles sont assez différentes. Dans l'approche non supervisée, l'interprétation dépend naturellement du domaine d'application, et ces domaines sont nombreux : biologie, médecine, reconnaissance de formes etc... On peut distinguer deux types de méthodes de classification : les méthodes hiérarchiques et les méthodes de partitionnement.[CDG<sup>+</sup>89]

Parmi les méthodes de partitionnement, de nombreuses techniques reposent sur l'estimation de densité de probabilité (par exemple [CM99][EK96][HBV96]). Dans [HBV96], Herbin et al. proposent une méthode proche de celle présentée par Hinneburg et Keim. dans [HK98]. Comme toutes les méthodes basées sur ce principe, on y suppose que les classes sont définies à l'aide des zones ayant localement une densité qui présente un maximum. Les maxima locaux de l'estimation de la fonction de densité de probabilité (ou *modes*) jouent un rôle similaire aux *centres* dans les algorithmes de type "centres mobiles" mais contrairement à ce genre de méthodes, aucune hypothèse sur les formes des classes n'est émise. Malheureusement, en dépit de leur efficacité globale, il existe des situations dans lesquelles ces méthodes échouent. En effet, l'estimation de la densité de probabilité requiert l'utilisation d'un paramètre de lissage. Si ce paramètre de lissage (fenêtre de lissage ou *bandwidth*) est trop petit, l'estimation de la densité de probabilité est bruitée, particulièrement dans les queues de distribution [Sil86]. Ceci conduit à une surestimation du

nombre de modes de la densité [HBV01], tandis qu'un lissage trop fort masquera certaines classes. La nécessité d'utiliser une alternative à cette fonction de densité de probabilité nous a donc amené à construire un indice de connectivité palliant les faiblesses sus-citées, tout en conservant l'avantage de non-hypothèse sur les formes des classes.

Notre indice de connectivité est une nouvelle fonction dont l'"esprit" est proche de la fonction de densité de probabilité. Le principe est le suivant : après avoir déterminé les  $k$  plus proches voisins de chaque donnée, on attribue à chaque individu de l'échantillon, le nombre de données pour lesquelles il est un des  $k$  plus proches voisins. Autrement dit, les  $k - ppv$  déterminent des voisinages pour chaque donnée de l'échantillon, et l'indice de connectivité d'une donnée est le nombre de voisinages auxquels elle appartient. On peut alors utiliser cet indice dans un processus de classification, à l'instar de la fonction de densité de probabilité. Cette nouvelle fonction est plus robuste (peu sensible à des points isolés très éloignés) mais ne néglige pas les classes de faible densité. Elle présente donc un grand intérêt dans les situations où l'estimation de la densité conduit à des résultats décevants.

Dans la section 2 nous présenterons dans le détail la méthode de construction de l'indice de connectivité. Nous présentons ensuite, dans la partie 3, l'estimation de la densité de probabilité dans un contexte de classification. Dans la partie 4, nous comparons l'indice de connectivité avec la densité de probabilité. Enfin, dans la section 5, une discussion est proposée avant de conclure.

## 2 Indice de connectivité

Définissons maintenant l'indice de connectivité. Nos données sont dans un espace métrique  $F^p$  de dimension  $p$ . On définit

nit le voisinage d'une donnée  $x_i$  de l'échantillon  $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  comme l'ensemble des  $k$  plus proches voisins dans  $\Omega$  de  $x_i$ , en utilisant une distance quelconque dans  $F^p$ . On le note  $V_k(x_j)$ . On définit alors l'indice de connectivité d'une donnée dans l'échantillon comme une fonction "quantifie" son appartenance aux voisinages des autres données de l'échantillon. L'indice de connectivité d'une donnée dans l'échantillon est d'autant plus élevé que cette donnée appartient à un nombre important de voisinages des autres données. Son calcul en une donnée  $x_i \in \Omega$  dépend donc directement de l'appartenance de  $x_i$  aux voisinages des  $x_j$  ( $j = 1..n$ ).

On définit donc l'indice de connectivité dans  $\Omega$ , d'une donnée  $x_i$  de  $\Omega$  comme :

$$IC(x_i) = \sum_{j=1}^n M(x_i, V_k(x_j)) \quad (1)$$

où  $M(x_i, V_k(x_j))$  est une fonction d'appartenance à  $V_k(x_j)$  évaluée au point  $x_i$ . Dans le cadre de ce travail, on choisit  $M$  de sorte que :  $M(x_i, V_k(x_j))$  vaut 1 si  $x_i \in V_k(x_j)$  et 0 sinon. Autrement dit, la connectivité d'une donnée  $x_i$  correspond dans ce cas au nombre de données auxquelles  $x_i$  est connectée.

La fonction ainsi construite nous permet de quantifier la liaison d'une donnée dans l'échantillon et révéler ainsi les structures de classes de cet échantillon. Cette notion se substitue alors à celle de densité de probabilité.

### 3 Estimation de la densité de probabilité

Rappelons tout d'abord le principe de l'estimation de densité de probabilité par la méthode de Parzen. Considérons un échantillon  $\{x_i\}_{i=1..n}$  de taille  $n$ , d'un espace  $F^p$  de dimension  $p$  (i.e.  $\forall i, x_i = (x_i^1, \dots, x_i^p)$ ). L'estimation de la densité de probabilité, selon la méthode de Parzen, au point  $x \in F^d$  est donné par :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{h^p} K \left( \frac{x - X_i}{h} \right) \right) \quad (2)$$

où  $K$  est la fonction noyau et  $h$  le paramètre de lissage. Dans un contexte de classification peut par exemple utiliser un noyau gaussien :

$$K \left( \frac{x - X_i}{h} \right) = (2\pi)^{-p/2} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{d(x, X_i)}{h} \right)^2 \right) \quad (3)$$

où ( $d$  est une distance sur  $F^p$ ).

L'observation de l'estimation de densité de probabilité et la détection de ses modes (maxima locaux) permet ensuite de déterminer des classes dans l'échantillon de données. On peut par exemple utiliser des algorithmes de "lignes de partage des eaux" [HBV01] ou des méthodes de "mean shift" [CM99].

Les principaux inconvénients de la fonction de densité de probabilité utilisée en classification proviennent du paramètre de lissage et de la dimensionnalité du problème. En effet, si l'on choisit un paramètre de lissage trop petit, la fonction obtenue contient trop de maxima locaux et donc de modes. A l'inverse

un paramètre de lissage trop fort risque de masquer des classes de faible densité. Par ailleurs, lorsque le nombre de données est faible (sous-échantillonnage) il est nécessaire d'effectuer un lissage plus large. Et lorsque la dimensionnalité du problème augmente, le phénomène d'espace creux ("curse of dimensionality") conduit à devoir effectuer un lissage plus important détériorant ainsi la qualité de l'estimation et modifiant la forme des classes obtenues. Ces éléments sont illustrés par les Figures 3 et 4 (calculées à partir de l'échantillon de la Figure 1).

### 4 Densité de probabilité Vs. Indice de connectivité

La valeur de la densité n'est pas informative sur l'appartenance d'une donnée à une classe. Comme on peut le voir sur la Figure 3, seules les variations locales de densité permettent d'informer sur l'appartenance de cette donnée à une classe. Or l'estimation de la densité est généralement bruitée -parfois fortement- [Sil86], il est donc difficile d'extraire une information pertinente sur les variations locales de densité (Figures 3 et 4). La plupart des auteurs utilisent alors des estimations de la densité à différentes échelles (i.e. différents lissages) pour essayer de classer les données.

Notre critère de connectivité est directement informatif sur l'appartenance d'une donnée à une classe. Sur la Figure 2, on constate en effet que notre indice fait apparaître parfaitement la troisième classe, de densité beaucoup plus faible que les deux autres, contrairement à la densité de probabilité (Figures 3 et 4). Cet indice nous paraît donc plus informatif que la densité pour classer les données. La classification utilisant cet indice conserve les avantages des méthodes basées sur la densité (pas d'hypothèse sur la forme et le nombre des classes) mais il permet de plus de différencier sans difficulté des classes de faible densité et/ou de forte densité.

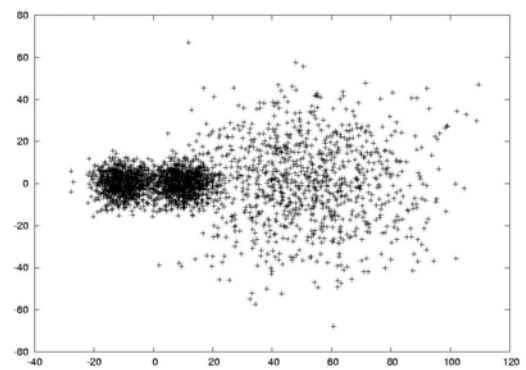


FIG. 1 – Echantillon de données initial (3 ensembles de 1000 données chacun)

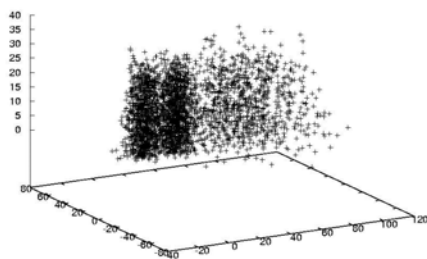


FIG. 2 – Indice de connectivité, révélant la présence des classes

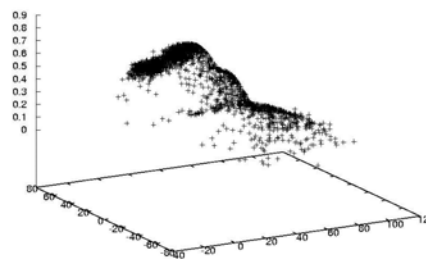


FIG. 4 – Lissage de la densité de probabilité entraînant l'impossibilité de faire apparaître les classes

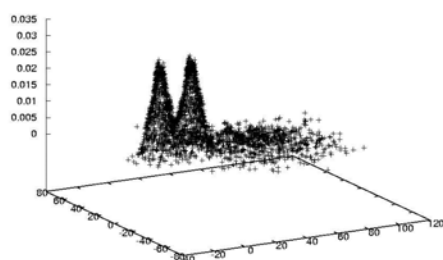


FIG. 3 – Estimation de la densité de probabilité masquant par du bruit les classes de faible densité

## 5 Discussion et conclusion

Notre indice de connectivité présente de nombreux avantages sur la fonction de densité de probabilité. Il permet une meilleure prise en compte des classes ayant des densités différentes dans un échantillon de données et palie les faiblesses de la fonction de densité qui masque les classes de faible densité. Sa mise en place est aisée et son calcul peu coûteux. Cependant notre fonction n'est pas exempte d'inconvénients. Tout d'abord, le choix du paramètre  $k$  lors de la détermination des  $k - ppv$  peut augmenter les temps de calcul, tout comme l'estimation du  $k$  optimal  $\hat{k}$  par diverses techniques (maximisation de la variance interclasse, bootstrap etc...). Par ailleurs l'efficacité d'une méthode utilisant l'indice de connectivité repose naturellement sur le choix de l'algorithme de clustering utilisé. Nos travaux et développements actuels consistent à concevoir un nouvel algorithme de classification basé sur notre indice et utilisant des représentations floues afin d'obtenir un outil plus flexible et plus efficace.

## Références

- [CDG<sup>+</sup>89] G. Celeux, E. Diday, G. Govaert, Y. Lechevallier, and H. Ralambondrainy. *Classification automatique des données*. Paris, 1989.
- [CM99] D. Comaniciu and P. Meer. Mean shift analysis and applications. In *IEEE Int. Conf. Computer Vision (ICCV'99)*, pages 1197–1203, Kerkira, Greece, 1999.
- [EK SX96] M. Ester, H. P. Kriegel, J. Sander, and X. Xiaowei. A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise. In *Proc. 2nd Int. Conf. on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD 96)*, pages 226–231, Portland, 1996. AAAI Press.
- [HBV96] M. Herbin, N. Bonnet, and P. Vautrot. A clustering method based on the estimation of the probability density function and on the skeleton by influence zones, application to image processing. *Pattern Recognition Letters*, (17) :1141–1150, 1996.
- [HBV01] M. Herbin, N. Bonnet, and P. Vautrot. Estimation of the number of clusters and influence zones. *Pattern Recognition Letters*, (22) :1557–1568, 2001.
- [HK98] A. Hinneburg and D. A. Keim. An efficient approach to clustering in multimedia databases with noise. In *Proc. 4th Int. Conf. on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD98)*, pages 58–65, New York, 1998. AAAI Press.
- [Kow95] F. Kowalewski. A gradient procedure for determining clusters of relatively high point density. *Pattern Recognition*, (28) :1973–1984, 1995.
- [Sil86] B. W. Silverman. *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. Monographs on Statistics and Applied Probability, 1986.





# Lissage et segmentation d'images multiparamétriques ultrasonores par une approche « *mean shift* »

F. DAVIGNON<sup>1</sup>, T. GRENIER<sup>1</sup>, C. REVOL-MULLER<sup>1</sup>, G. GIMENEZ<sup>1</sup>, O. BASSET<sup>1</sup>

<sup>1</sup>CREATIS, CNRS UMR 5515, Inserm U 630, Bât. B. Pascal, 69621 Villeurbanne, France

{davignon, grenier, muller, gimenez, basset}@creatis.insa-lyon.fr

**Résumé** – Les approches multi-paramétriques permettent d'améliorer la segmentation des données ultrasonores. Dans cet article, nous proposons une méthode « *Mean Shift* » appliquée à des images Multi-Paramétriques (MSMP). Deux traitements réalisés dans le domaine joint spatial-amplitude sont décrits : d'une part, un lissage MSMP qui applique aux données un filtrage multidimensionnel et d'autre part, une segmentation MSMP basée sur l'ensemble des composantes filtrées. Cette approche de segmentation est particulièrement intéressante par son caractère non supervisé. Les méthodes développées ont été testées avec succès sur trois jeux de données simulés illustrant des caractéristiques acoustiques différentes en terme de densité de diffuseurs et d'échogénéité.

**Abstract** – Segmentation of ultrasound data is improved when using multi-parametric approach. In this paper we propose the use of Multi-Parametric Mean Shift procedure (MPMS). Two derived processes are described: MPMS smoothing which achieves a multi-parametric filtering in the spatial-range domain and MPMS segmentation which takes benefit of this filtering for segmenting the multidimensional data. MPMS segmentation is particularly attractive, since it achieves an unsupervised segmentation. These methods were positively tested on three sets of simulated ultrasonic data, representative of various scatterers densities and also various scattering conditions.

## 1. Introduction

De nombreuses méthodes ont été proposées pour la segmentation de données ultrasonores. La plupart d'entre elles mettent en œuvre un contour actif [1] ou un contexte bayésien [2] s'appuyant sur l'intensité des pixels pour définir une fonction d'énergie qui caractérise un contour ou une région homogène. La qualité médiocre des images ultrasonores conventionnelles et le faible contraste qui existe entre les différents tissus rendent difficile une segmentation automatique. Dans cette étude, nous proposons une méthode de segmentation qui s'appuie sur plusieurs images paramétriques calculées à partir des signaux ultrasonores enveloppe ou Radio-Fréquence (RF). Tout d'abord, un filtrage multidimensionnel basé sur la technique des « *mean shift* » est réalisé conjointement dans le domaine spatial et le domaine des amplitudes. Cette technique consiste à attribuer à chaque pixel un mode local de la distribution sous-jacente. Ces modes sont identifiés par le déplacement itératif d'un noyau dans le domaine joint spatial-amplitude. La segmentation finale s'obtient à partir des images filtrées en fusionnant en régions les pixels convergeant vers des modes voisins. Nous avons testé avec succès notre méthode sur un jeu de données ultrasonores simulé, représentant diverses conditions de diffusion et diverses densités de diffuseurs.

## 2. Données ultrasonores et images paramétriques

L'image conventionnelle est construite à partir de l'enveloppe du signal RF. D'autres paramètres liés aux propriétés acoustiques des tissus peuvent être extraits à partir du signal RF. Ils peuvent apporter des informations sur la répartition spatiale ou sur les propriétés échogènes des diffuseurs. Dans notre application, nous avons considéré l'enveloppe du signal RF ainsi que deux paramètres

acoustiques. Le premier paramètre,  $\alpha_2$ , estime la densité de diffuseurs alors que le second,  $\Omega$ , relié à la distribution de Nakagami, reflète les conditions de diffusion dans le tissu. La méthode proposée est testée sur des données ultrasonores simulées avec le logiciel Field [3].  $\alpha_2$  et  $\Omega$  sont estimés localement sur les données enveloppe et permettent de construire des images paramétriques. Les amplitudes de ces trois images sont normalisées entre 0 et 255.

### 2.1 Estimateur de densité $\hat{\alpha}_2$

L'organisation spatiale des diffuseurs peut être estimée à partir de l'image enveloppe [4] et peut être caractérisée par un estimateur de densité. [5]. Nous utilisons l'estimateur de densité  $\hat{\alpha}_2$  proposé par Ossant et al. [6] qui est basé sur les moments de l'image d'ordres peu élevés.

### 2.2 Distribution de Nakagami

Relativement à la densité de diffuseurs, la distribution de Nakagami [7] englobe les différents modèles de distribution statistique de l'image enveloppe : Rayleigh, pré-Rayleigh (K-distribution) et post-Rayleigh (Rice). Sa densité de probabilité est définie par la fonction suivante :

$$f(A) = \frac{2m^m A^{2m-1}}{\Gamma(m)\Omega^m} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} A^2\right) U(A) \quad (1)$$

$U(A)$  étant la fonction échelon unité.  $m$  et  $\Omega$  sont estimés par les expressions :

$$m = \frac{\Omega^2}{E[A^2 - \Omega]^2} \quad \text{et} \quad \Omega = E[A^2] \quad (2)$$

$\Omega$  est un paramètre d'échelle ;  $m$  est un paramètre de forme de la distribution de Nakagami.

### 2.3 Fantômes numériques

Nous avons créé trois fantômes numériques, ce qui nous donne trois jeux de données ultrasonores. Ils simulent la présence de lésions au sein d'un tissu. Le premier fantôme est une lésion hypo-échogène à faible densité de diffuseurs (*jeu 1*), le deuxième consiste en une lésion hyper-échogène à forte densité (*jeu 2*) et le troisième montre une lésion à faible densité (*jeu 3*).

### 3. « Mean shift » multidimensionnel

La méthode « *mean shift* » est un estimateur du gradient de densité non paramétrique développé par Fukunaga et Hostetler en 1975 [8] et exploité récemment par Comaniciu et Meer [9, 10] pour le traitement d'image. Le cadre « *mean shift* » est intéressant car il prend en compte simultanément des informations spatiales (position des pixels dans le domaine spatial  $R^s$ ) et d'amplitude (niveau de gris, couleur ou information spectrale dans le domaine d'amplitude  $R^r$ ). Le domaine résultant est représenté par un espace euclidien  $R^d$  de dimension  $d$ , avec  $d = s + r$ . La méthode « *mean shift* » a l'avantage de ne reposer sur aucun a priori sur la distribution des intensités des pixels. Dans cet article, nous proposons un algorithme de « *Mean Shift* » multidimensionnel pour prendre en compte les données Multi-Paramétriques calculées à partir de l'image enveloppe du signal RF ultrasonore. Nous nommons cet algorithme MSMP.

#### 3.1 Principe de la méthode « *mean shift* »

La méthode « *mean shift* » est décrite dans [10]. C'est une technique d'estimation non paramétrique basée sur l'utilisation d'un noyau. Elle consiste à détecter les modes de la fonction de densité sous-jacente. L'algorithme « *mean shift* » est basé sur l'estimateur multidimensionnel de densité pour un ensemble de  $n$  points  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1,\dots,n}$  dans  $R^d$  :

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{\mathbf{H}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (3)$$

Le noyau  $K$  est une fonction symétrique, positive ou nulle, centrée sur 0 et dont l'intégrale vaut 1.  $\mathbf{H}$  est une matrice de largeurs de bande, symétrique, définie positive qui normalise le support du noyau :

$$K_{\mathbf{H}}(\mathbf{u}) = (\det[\mathbf{H}])^{-\frac{1}{2}} K\left(\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{u}\right) \quad (4)$$

Dans notre application,  $\mathbf{H}$  se restreint à une matrice diagonale. Chaque élément  $h_m$  ( $m = 1, \dots, d$ ) de la matrice est le paramètre d'échelle de la  $m^{\text{ième}}$  dimension de l'espace euclidien  $R^d$  de dimension  $d$ . Le vecteur « *mean shift* »  $M(\mathbf{x})$  est défini par :

$$M(\mathbf{x}) = \left( \sum_{i=1}^n g(d[\mathbf{x}, \mathbf{x}_i, \mathbf{H}]^p) \right)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i g(d[\mathbf{x}, \mathbf{x}_i, \mathbf{H}]^p) - \mathbf{x} \quad (5)$$

où  $g(u) = -k'(u)$ ,  $k$  étant le profil associé à  $K$  et  $d[\mathbf{x}, \mathbf{x}_i, \mathbf{H}]^2$  représente le carré de la distance de Mahalanobis entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}_i$ .

Il a été montré que  $M(\mathbf{x})$  est une estimation du gradient normalisé de la distribution sous-jacente. La principale propriété de cet estimateur réside dans sa convergence lorsqu'il est appliqué itérativement. L'algorithme « *mean*

*shift* » consiste donc en un calcul itératif du vecteur  $M(\mathbf{x})$  suivi de la translation du noyau par  $M(\mathbf{x})$ . On peut montrer que ce processus converge vers le point de gradient nul, soit  $\|M(\mathbf{x})\| \approx 0$ .

Partant d'un point  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{[0]}$ , les emplacements successifs du noyau se retrouvent dans la séquence  $\{\mathbf{x}^{[l]}\}$  donnée dans l'expression suivante :

$$\mathbf{x}^{[l+1]} = \left( \sum_{i=1}^n g(d[\mathbf{x}^{[l]}, \mathbf{x}_i, \mathbf{H}]^p) \right)^{-1} \cdot \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i g(d[\mathbf{x}^{[l]}, \mathbf{x}_i, \mathbf{H}]^p) \right) \quad (6)$$

A chaque itération,  $\|M(\mathbf{x}^{[l+1]})\| = \|\mathbf{x}^{[l+1]} - \mathbf{x}^{[l]}\|$  est évaluée. Le calcul s'arrête lorsque la norme de  $M(\mathbf{x})$  est inférieure à un seuil de tolérance. Le point de convergence  $\mathbf{x}_{\text{conv}}$  correspond au mode de la distribution associé au point de départ  $\mathbf{x}^{[0]}$ .

#### 3.2 Lissage MSMP

Dans notre application, les données ultrasonores multi paramétriques regroupent trois images paramétriques 2D : l'image enveloppe, une image de la densité locale de diffuseurs et une image du paramètre  $\Omega$  calculé à partir de la distribution de Nakagami (cf. partie 2). Chaque point  $\mathbf{x}_i$  est décrit par cinq coordonnées  $x_i^j$  ( $j=1, \dots, 5$ ) :  $x_i^1$  et  $x_i^2$  représentent les coordonnées spatiales et les trois autres indiquent les niveaux de gris des images paramétriques. Le lissage MSMP prend en compte ces 5 dimensions. Le filtrage des données s'obtient en appliquant la technique « *mean shift* » à chaque pixel  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1,\dots,n}$  des données originales et en attribuant à chaque élément des données filtrées  $\{\mathbf{y}_i\}_{i=1,\dots,n}$  les composantes du point de convergence  $\mathbf{x}_{\text{conv}}$  associé à  $\mathbf{x}_i$ . Les paramètres requis par MSMP sont les éléments diagonaux de la matrice  $\mathbf{H}$ .  $h^1$  et  $h^2$  représentent les paramètres d'échelle spatiaux ;  $h^3$ ,  $h^4$  et  $h^5$  représentent les paramètres d'échelle en amplitude. Comme les amplitudes des images paramétriques sont normalisées, nous pouvons utiliser un noyau sphérique pour le domaine spatial ( $h^1 = h^2 = h_s$ ) et un autre pour le domaine d'amplitude ( $h^3 = h^4 = h^5 = h_r$ ). Dans ce cas, les deux paramètres  $h_s$  et  $h_r$  suffisent.

#### 3.3 Segmentation MSMP

La segmentation finale est déduite de l'image filtrée multidimensionnelle en fusionnant les régions associées à des modes voisins. Les classes sont construites en regroupant les données filtrées dont les distances de Mahalanobis dans le domaine spatial-amplitude n'excèdent pas un seuil fixé. Pour séparer correctement les différentes classes et ainsi améliorer la segmentation, le filtrage MSMP peut être répété plusieurs fois avant cette étape de fusion, la convergence des coordonnées spatiales n'étant pas prise en compte d'une exécution à l'autre.

### 4. Résultats et discussion

Nous avons testé le lissage MSMP sur les trois jeux de données décrits dans la partie 2 avec  $(h_s, h_r) = (10, 70)$ . L'image de référence utilisée pour la simulation est montrée dans la figure 2a. Dans les figures 1g, 1h et 1i, on peut observer les effets du filtrage MSMP sur chaque composante d'amplitude du *jeu 1* séparément, ce qui permet d'apprécier la contribution de chaque image paramétrique. Précisons que pour l'appréciation visuelle des résultats, les images filtrées

ci-dessous représentent la valeur d'une des composantes d'amplitude du mode de convergence de chacun des pixels de l'image originale.

On constate que chacune des trois composantes est correctement filtrée et que le MSMP a notamment réduit le « speckle » tout en préservant les discontinuités. A des fins de comparaison, les figures 1d, 1e et 1f montrent les résultats d'un filtrage « *mean shift* » (MS) classique sur chacune des trois images séparément.

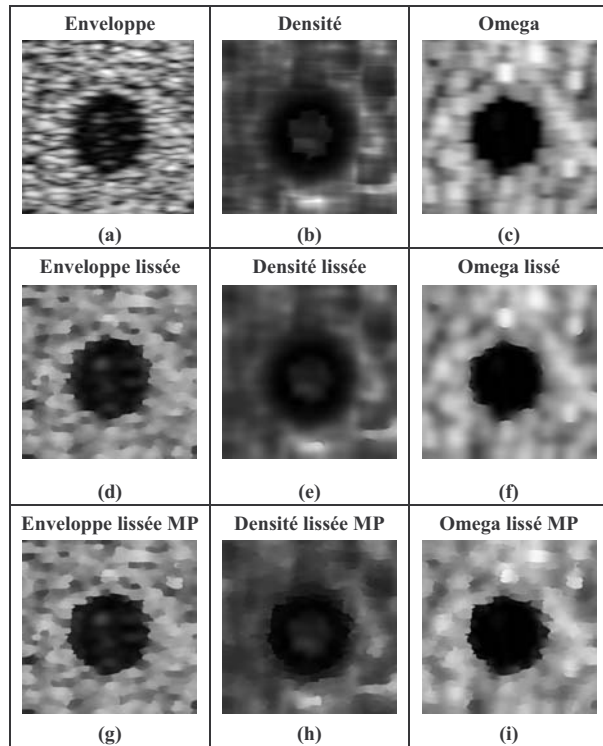


Figure 1 : a), b), c) Composantes d'amplitude du jeu 1 ; d), e), f) lissage obtenu par MS ( $h_s=10$ ,  $h_r=70$ ) et g), h), i) lissage obtenu par MSMP ( $h_s=10$ ,  $h_r=70$ ).

Pour plus de clarté, les informations multi paramétriques sont regroupées dans une image unique appelée « image fusionnée ». La valeur de chaque pixel de cette image est déduite du calcul d'une norme particulière appliquée aux composantes d'amplitude :

$$\text{niveau\_de\_gris}_i = \sqrt{(x_i^3)^2 + (x_i^4)^2 + (x_i^5)^2} \quad (7)$$

Dans la figure 2, nous comparons visuellement une image fusionnée directement d'après les données du jeu 1 avec une image fusionnée obtenue après un filtrage MSMP sur les mêmes données. On observe une plus grande homogénéité dans la seconde image ainsi qu'une zone sombre plus proche du modèle. Le lissage MSMP a donc corrigé en partie la sous-estimation de la lésion due au système d'imagerie ultrasonore.

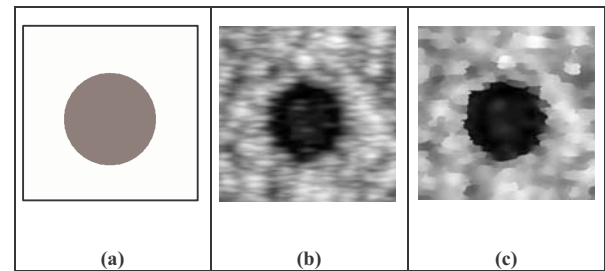


Figure 2 : Comparaison des images fusionnées b) avant et c) après le filtrage MSMP à partir du jeu 1 ; a) image de référence.

Afin de quantifier les effets du lissage MSMP, nous avons appliqué un seuillage automatique d'Otsu [11] sur chaque composante des trois jeux de données, avant et après filtrage. Pour mesurer la précision du seuillage, nous avons calculé un paramètre classique (*cdr*) correspondant au nombre de pixels correctement classifiés. Les résultats en pourcentage sont donnés dans la figure 3. Celle-ci donne pour chaque image la valeur du *cdr*. Le nombre de pixels mal classés après filtrage MSMP est réduit en moyenne de 24%.

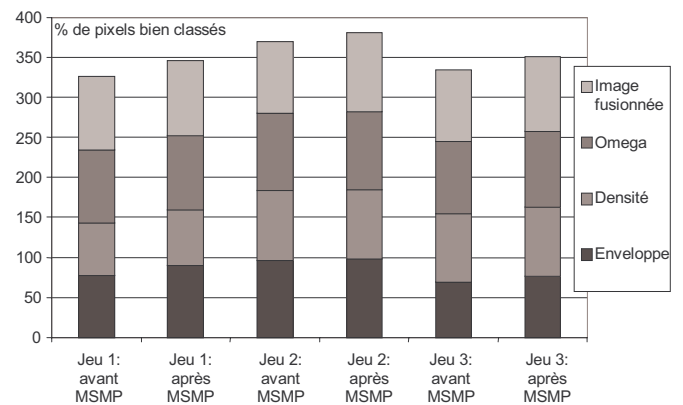


Figure 3 : Paramètre *cdr* calculé sur les seuillages de Otsu effectués sur chaque composante d'amplitude et sur l'image fusionnée avant et après filtrage MSMP.

La segmentation MSMP est effectuée à partir des données filtrées. Dans le cas présent, le filtrage préliminaire a été itéré 10 fois de manière à accentuer son effet. A chaque itération, une image multidimensionnelle est construite en affectant à chaque pixel les composantes d'amplitude des points de convergence. Dans la figure 4, la segmentation réalisée par MSMP sépare correctement l'objet sombre du fond, sans aucune spécification du nombre de classes. Les valeurs du paramètre *cdr* sur les 3 jeux de données sont supérieures à 94%, ce qui confirme l'efficacité de notre méthode et sa supériorité par rapport au seuillage automatique des images non filtrées.




	Jeu 1	Jeu 2	Jeu 3
MSMP			
cdr	94,7	98,3	97,7

Figure 4 : Résultats de la segmentation MSMP réalisée sur les 3 jeux de données et évaluation de la précision de la segmentation.

Afin de quantifier les effets de l'approche multiparamétrique, nous avons procédé au seuillage des images obtenues par « *mean shift* » classique sur les données du jeu 1. Dans la Figure 5, on peut constater que les valeurs du paramètre *cdr* sur les 3 images séparées sont toutes inférieures à la valeur obtenue grâce à l'approche MSMP. On voit ainsi l'intérêt d'une approche globale de lissage et de segmentation par rapport à une approche composante par composante.

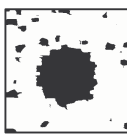


	Enveloppe	Densité	Omega
MS			
cdr	91,4	68,0	91,6

Figure 5 : Résultats d'un seuillage automatique sur les 3 composantes du jeu 1, filtrées séparément par MS classique et évaluation de la précision de la segmentation.

## 5. Conclusion

Un algorithme « *mean shift* » multidimensionnel (MSMP) a été testé avec succès pour améliorer la segmentation d'images multiparamétriques calculées à partir de données ultrasonores simulées. Dans notre application, l'aspect multidimensionnel repose sur la combinaison de trois images (enveloppe, densité, paramètre de la distribution de Nakagami). Deux traitements sont décrits : le filtrage MSMP qui réalise un lissage multiparamétrique et la segmentation MSMP qui s'effectue sur l'image filtrée. Nous avons montré l'efficacité du filtrage MSMP en évaluant la qualité d'un seuillage automatique après l'étape de filtrage. De même, la segmentation MSMP, qui prend en compte les cinq composantes filtrées dans le domaine joint spatial-amplitude, dépasse largement les performances du seuillage automatique.

Par ailleurs, l'approche multiparamétrique montre tout son intérêt par rapport à une approche traitant les paramètres séparément.

Cependant, il reste à étudier l'influence du choix des paramètres  $h_s$  et  $h_r$  sur les performances. Leur détermination optimale fera l'objet de travaux futurs.

## Références

- [1] O. Gerard, A. C. Billon, J. M. Rouet, M. Jacob, M. Fradkin et C. Allouche. *Efficient model-based quantification of left ventricular function in 3-D echocardiography*. IEEE Trans Med Imaging, vol. 21, pp. 1059-68, 2002.
- [2] D. Boukerroui, O. Basset, A. Noble et A. Baskurt. *Segmentation of ultrasound images - Multiresolution 2D and 3D algorithm based on global and local statistics*. Pattern Recognition Letters, vol. 24, pp. 779-790, 2003.
- [3] J. A. Jensen et P. Munk. *Computer Fantoms for Simulation Ultrasound B-mode and CFL Images*. présenté à la conférence 23rd Acoust. Imag. Symp., Boston, MA, 1997.
- [4] B. J. Oosterveld, J. M. Thijssen et W. A. Verhoef. *Texture of B-mode echograms: 3-D simulations and experiments of the effects of diffraction and scatterer density*. Ultrason Imaging, vol. 7, pp. 142-60, 1985.
- [5] E. Jakeman et R. J. A. Tough. *Generalized K-distribution : A statistical model for weak scattering*. J. Opt. Soc. Am., vol. 4, pp. 1764-1772, 1987.
- [6] F. Ossant, F. Patat, M. Lebertre, M.-L. Terrierooterai et L. Pourcelot. *Effective Density Estimators based on the K-distribution: Interest of Low and Fractional Order Moments*. Ultrasonic Imaging, vol. 20, pp. 243-259, 1998.
- [7] P. M. Shankar, V. A. Dumane, J. M. Reid, V. Genis, F. Forsberg, C. W. Piccoli et B. B. Goldberg. *Classification of Ultrasonic B-mode Images of Breast Masses using Nakagami Distribution*. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, vol. 48, pp. 569-580, 2001.
- [8] K. Fukunaga et L. D. Hostetler. *Estimation of the gradient of a density function with applications in pattern recognition*, vol. IT-21, pp. 32-40, 1975.
- [9] D. Comaniciu et P. Meer. *Mean shift analysis and applications*. présenté à la conférence Proceedings of the 1999 7th IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV'99), Sep 20-Sep 27 1999, Kerkyra, Greece, 1999.
- [10] D. Comaniciu et P. Meer. *Mean shift: A robust approach toward feature space analysis*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 24, pp. 603-619, 2002.
- [11] N. Otsu. *Threshold Selection Method From Gray-Level Histograms*. vol. SMC-9, pp. 62-66, 1979.



# Représentation éparsée d'images par ondelettes fovéales : principes et applications

Julien ROS, Christophe LAURENT

France Telecom R&D - TECH/IRIS/CIM

4, rue du Clos Courtel, 35512 Cesson Sévigné Cedex, FRANCE

{julien.ros | christophe2.laurent}@francetelecom.com

**Résumé** – Aujourd'hui, les méthodes de représentation locale d'images ont montré leur efficacité dans de nombreux problèmes de vision par ordinateur (indexation d'images, reconnaissance de visages, catégorisation d'objets, etc.). Dans ces méthodes, les images ne sont plus considérées dans leur globalité mais seules quelques zones saillantes (i.e. perceptuellement importantes) sont prises en compte pour représenter le contenu visuel. L'extraction de caractéristiques pertinentes et discriminantes au sein de ces zones est alors essentielle. Dans le cas particulier où ces zones sont assimilées à des points d'intérêt et en observant que ces points d'intérêt sont situés sur les singularités de l'image, il peut être intéressant de décrire de façon fiable et robuste ces singularités. Dans ce papier, nous présentons un nouveau descripteur local utilisant la décomposition sur une base d'ondelettes fovéales permettant de caractériser l'orientation et la régularité des singularités présentes dans une zone saillante. Nous montrons, par le biais de deux applications phares (classification supervisée d'images naturelles et reconnaissance de visages) que ce descripteur obtient des résultats encourageants et est même capable de supplanter les descripteurs de l'état de l'art généralement utilisés pour caractériser les singularités.

**Abstract** – Nowadays, methods based on a local image representation have shown their efficiency in many computer vision tasks such as image indexing, face recognition or object categorization. In these methods, the images are no more considered as a whole but only a limited set of salient zones are used to represent the visual content. Feature extraction in these regions are then a key step in order to provide a robust and discriminative image signature. In the particular case where the salient zones are represented by points of interest and by observing that these points are located on image singularities, it can be interesting to describe these singularities. In this paper, we propose a new local descriptor that uses the decomposition of the signal on a foveal wavelet basis allowing to describe the orientation and regularity of singularities appearing in a salient region. We then show, by implementing two key applications (natural image classification and face recognition) that the proposed descriptor reaches good results and is even able to outperform classical descriptors generally used to describe singularities.

## 1 Introduction

Les travaux psychovisuels de Biederman [1] ont montré que le système visuel humain n'utilise pas toute l'information contenue dans une image pour l'analyser. S'inspirant de ces observations, de nombreux problèmes de vision par ordinateur (indexation d'images, reconnaissance d'objets et de visages, etc.) ont été traités en représentant les images de façon éparsée c'est-à-dire en se concentrant uniquement sur quelques zones considérées comme perceptuellement importantes [5, 8, 9, 15]. Contrairement aux approches globales pour lesquelles une signature unique est calculée en considérant tous les pixels de l'image avec la même importance, ces approches, qualifiées d'*approches locales*, représentent le contenu de l'image par un ensemble de signatures locales calculées au voisinage de points saillants (i.e. perceptuellement importants). La détection de ces points a fait l'objet de nombreuses recherches et de nombreuses solutions existent [2, 6, 8]. Comme le montre la figure 1, les points saillants détectés ont la particularité d'être généralement localisés dans les zones de fort contraste et donc sur les singularités de l'image.

A partir de cette observation, il semble alors intéressant de décrire et d'utiliser l'information portée par ces singularités dans le cadre d'un système de reconnaissance basé sur les points saillants. En effet, l'information essentielle d'un signal mono-

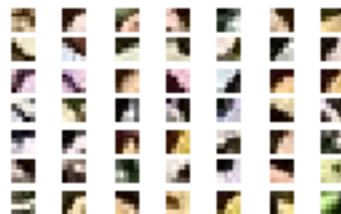


FIG. 1 – Régions de taille 7x7 centrées sur les points saillants

dimensionnel ou bidimensionnel se trouve souvent contenue dans les structures singulières et la description de celles-ci a déjà été envisagée dans [12, 13]. De plus, les ondelettes de Gabor [4], les jets locaux [15] ainsi que le descripteur SIFT [10] s'intéressent également à la caractérisation des singularités.

Dans cet article, nous proposons d'utiliser la théorie des ondelettes fovéales développée dans [11] afin de caractériser l'orientation et la régularité des singularités présentes dans une région d'intérêt centrée sur un point saillant. Cette description sera ensuite utilisée dans deux types d'applications : la classification supervisée d'images naturelles et la reconnaissance de visages.

## 2 Description fovéale des singularités

### 2.1 Rappels sur les singularités

L'étude de la régularité d'une fonction est très importante puisque c'est souvent les singularités de celle-ci qui portent l'information essentielle (les contours dans une image par exemple). Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite singulière en  $x_0 \in \mathbb{R}$  si elle n'est pas dérivable en  $x_0$ . Afin de mesurer précisément la régularité d'une fonction en tout point de son domaine de définition, on mesure sa régularité Lipschitzienne en chacun de ces points. Cette notion est rappelée dans la définition suivante :

**Définition 1**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est Lipschitzienne  $\alpha > 0$  en  $x_0 \in [a, b]$  si  $\exists K > 0, \delta > 0$  et un polynôme  $P$  de degré  $m = \lfloor \alpha \rfloor$  tel que :

$$\forall x, x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, |f(x) - P(x - x_0)| \leq K|x - x_0|^\alpha$$

**Définition 2** L'exposant de Lipschitz  $h_f(x_0)$  de  $f$  en  $x_0$  est la borne supérieure des  $\alpha$  ( $h_f(x_0) = \sup\{\alpha, f \text{ est Lipschitzienne } \alpha \text{ en } x_0\}$ ).

La régularité locale d'une fonction en un point  $x_0$  est donc caractérisé par son exposant de Lipschitz noté  $h_f(x_0)$ . De plus,  $f$  est dite singulière en  $x_0$  si  $f$  n'est pas Lipschitzienne d'ordre 1 en  $x_0$ .

### 2.2 Les ondelettes fovéales

Les ondelettes fovéales ont été introduites récemment par Mallat dans [11] et sont constituées des dilatations dyadiques d'une ondelette symétrique  $\psi_{x_0}^1$  et d'une ondelette antisymétrique  $\psi_{x_0}^2$  centrées sur un point  $x_0$  que l'on appelle la *fovéa*. Elles fournissent une base orthonormale aux espaces fovéaux qui sont constitués de fonctions dont la résolution décroît linéairement lorsque l'on s'éloigne de la fovéa. Leur théorie s'inspire du fait que la vision humaine est plus précise au niveau de la fovea. Ces bases d'ondelettes fovéales peuvent être obtenues à partir de fonctions splines comme illustré sur la figure 2.

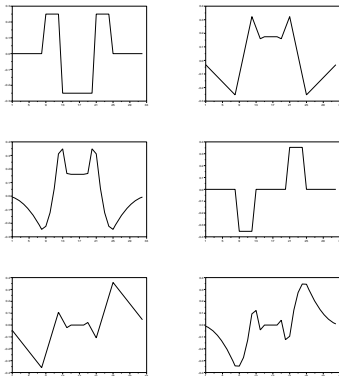


FIG. 2 – Bases d'ondelettes fovéales obtenues à partir de splines d'ordre 0, d'ordre 1 et d'ordre 2.

Il a été montré dans [11] que ces ondelettes sont particulièrement bien adaptées pour reconstruire et caractériser les singularités d'une fonction monodimensionnelle. En effet, le théorème suivant a été démontré dans [11] :

**Théorème 1** La fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est Lipschitzienne  $\alpha$  en  $x_0 \in [a, b]$  si et seulement si  $|\langle f, \psi_{j,x_0}^k \rangle| = O(2^{j(\alpha+1/2)})$  où  $\psi_{j,x_0}^k$  désigne l'ondelette  $\psi^k$  ( $k \in \{1, 2\}$ ) dilatée d'un facteur  $j$  et translatée en  $x_0$  ( $\psi_{j,x_0}^k(x) = 2^{-j/2} \psi^k(2^{-j}(x - x_0))$ ).

La régularité Lipschitzienne  $\alpha$  de  $f$  en  $x_0$  est alors obtenue par régression linéaire sur  $j$  de :

$$\frac{1}{2} \log_2(|\langle f, \psi_{j,x_0}^1 \rangle|^2 + |\langle f, \psi_{j,x_0}^2 \rangle|^2) \quad (1)$$

L'évolution de la quantité  $|\langle f, \psi_{j,x_0}^1 \rangle|^2 + |\langle f, \psi_{j,x_0}^2 \rangle|^2$  avec les échelles donne donc une information importante sur la régularité Lipschitzienne locale d'une fonction  $f$  en  $x_0$ . Nous avons donc choisi d'utiliser cette quantité afin de caractériser une région d'intérêt. Toutefois, la théorie des ondelettes fovéales étant applicable dans le cadre d'un signal monodimensionnel, il convient de l'adapter pour l'utiliser dans le cadre de la caractérisation de l'orientation et de la régularité des singularités présentes dans une région d'intérêt, qui est par construction bi-dimensionnelle.

### 2.3 Le descripteur fovéal

Le descripteur fovéal élaboré dans ce papier permet de caractériser l'orientation et la régularité des singularités présentes dans le voisinage d'un point saillant. Pour ce faire,  $N$  signaux 1D  $f_\theta^i$  ( $i \in \{1, \dots, N\}$ ) d'orientation  $\theta$  sont extraits au voisinage de chaque point saillant grâce à l'algorithme de Bresenham [3]. Cette procédure est illustrée sur la figure 3.

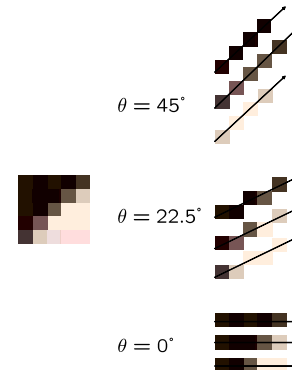


FIG. 3 – Extraction de lignes d'orientation  $\theta$  par l'algorithme de Bresenham.

Chaque point  $x_0$  de ce voisinage est alors représenté par un ensemble d'énergies fovéales  $E_{\theta,j}^i(x_0)$  obtenues en translatant les ondelettes fovéales en  $x_0$  et en les dilatant d'un facteur  $j$ . Ces énergies sont définies par :

$$E_{\theta,j}^i(x_0) = |\langle f_\theta^i, \psi_{j,x_0}^1 \rangle|^2 + |\langle f_\theta^i, \psi_{j,x_0}^2 \rangle|^2 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (2)$$

Le processus décrit ci-dessus est répété pour  $\tau$  orientations  $\theta_i$  ( $i \in \{1, \dots, \tau\}$ ) et  $\nu$  échelles  $j_k$  ( $k \in \{1, \dots, \nu\}$ ). On obtient alors  $\tau \cdot \nu$  imagettes d'énergie fovéale centrées sur chaque point saillant.

Chaque région support (i.e. région centrée sur un point saillant)

comprenant  $P$  pixels est alors représentée par la moyenne  $\mu$  et l'écart type  $\sigma$  de ses énergies foveales :

$$\mu_{\theta,j} = \frac{\sum_x E_{\theta,j}^i(x)}{P} \quad (3)$$

$$\sigma_{\theta,j} = \sqrt{\frac{\sum_x (E_{\theta,j}^i(x) - \mu_{\theta,j})^2}{P}}. \quad (4)$$

On obtient alors une signature  $S$  de taille  $\tau, \nu$  par région support définie par :

$$S = [\mu_{0,0}, \sigma_{0,0}, \dots, \mu_{\tau,\nu}, \sigma_{\tau,\nu}]. \quad (5)$$

Il est intéressant de constater que la construction de ce descripteur est proche de celle proposée dans [14] pour la caractérisation des textures. Toutefois, il utilise de nouvelles bases d'ondelettes qui s'avèrent être plus précises que les ondelettes de Gabor comme nous le verrons dans la prochaine section.

### 3 Expérimentations

Dans cette section, nous proposons d'étudier le pouvoir descriptif et discriminant de notre descripteur fovéal dans le cadre de deux applications : la classification supervisée d'images naturelles et la reconnaissance de visages.

#### 3.1 Classification supervisée d'images naturelles

Dans cette application, nous avons choisi d'utiliser le détecteur de points saillants mis en place dans nos précédents travaux [8] afin de détecter les zones sur lesquelles le descripteur fovéal doit être calculé. Comme mentionné dans [8], ce détecteur de points saillants est basé sur une décomposition en ondelettes et place donc les points sur les contours abrupts (i.e. les singularités marquées) des images.

En ce qui concerne le paramétrage du descripteur fovéal, nous avons choisi  $\tau = 8$  orientations  $\nu = 3$  échelles, nous donnant ainsi une signature locale de taille 48 par point saillant. La distance  $L_2$  a été utilisée pour comparer deux signatures fovéales. Pour tester notre approche, nous avons choisi d'utiliser un échantillon de la base d'images SIMPLICITY<sup>1</sup> comprenant cinq classes représentant des catégories sémantiques proches (plages, bus, éléphants, bâtiments, fleurs). Quelques images issues de cette base sont présentées en figure 4.

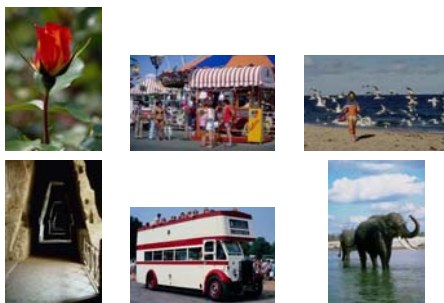


FIG. 4 – Images issues de la base SIMPLICITY

Les résultats présentés dans cette section ont été obtenues en utilisant 250 images d'apprentissage (i.e. 50 images par classe) et 250 images de tests. La classification a été effectuée au  $k$  plus proches voisins avec  $k = 5$ .

Les paramètres variables du descripteur concernent :

- la taille des régions support (i.e. du voisinage des points saillants utilisé pour calculer la signature fovéale) ;
- l'ordre des splines utilisées pour déterminer la base d'ondelettes (cf. section 2).

La figure 5(a) montre que la taille des régions supports influence peu le taux de classification et la figure 5(b) montre des résultats de classification équivalents quelque soit l'ordre des splines utilisées.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, les ondelettes de Gabor sont souvent utilisées dans la littérature pour caractériser les singularités. De même, des ondelettes orientées ont récemment été proposées [7] pour caractériser efficacement les textures. La figure 5(c) compare notre descripteur fovéal à ces deux autres types de descripteurs et montre que quelque soit le nombre de points saillants utilisés pour représenter l'image, le descripteur fovéal donne de bien meilleurs taux de classification.

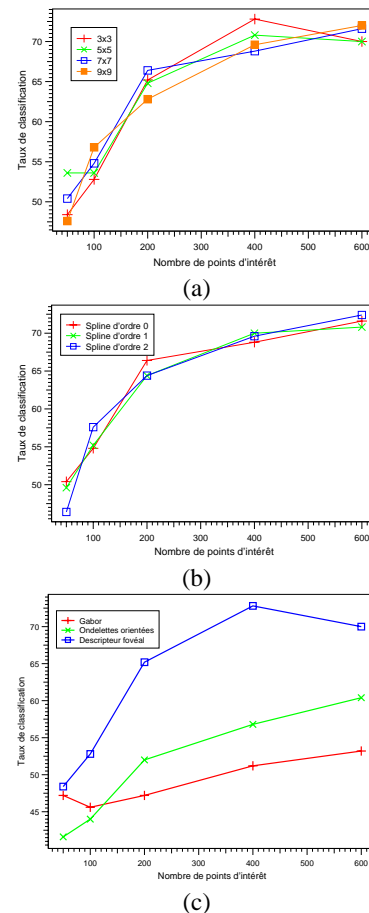


FIG. 5 – Taux de classification en fonction du nombre de points saillants détectés. Variation de la taille des régions support (a), variation de l'ordre des splines (b) et comparaison avec le descripteur de Gabor et les ondelettes orientées (c).

<sup>1</sup><http://wang.ist.psu.edu/~jwang/test1.tar>

### 3.2 Reconnaissance de visages

Dans cette seconde application, nous avons choisi de tester le pouvoir discriminant de notre descripteur fovéal sur une application de reconnaissance de visages. Pour ce faire, nous avons créé un modèle de visage dans lequel nous avons positionné manuellement 20 points fociaux localisés sur des singularités faciales. Chaque visage sera donc représenté par 20 signatures fovéales de taille 48 (en utilisant 8 orientations et 3 échelles), chacune d'elles étant calculée dans un voisinage de taille  $7 \times 7$  autour d'un des 20 points. Pour comparer deux signatures fovéales dans cette application, nous avons utilisé la distance cosinus.

Cette approche fait partie des techniques analytiques de reconnaissance de visages, par opposition aux approches holistiques considérant le visage dans sa globalité.

Pour tester notre approche, nous avons utilisé la base de visage FERET. Pour construire la galerie (i.e. la base de connaissance), nous avons choisi le corpus *fa* de la base FERET, comprenant 1196 visages (un exemple par individu) photographiés sous illumination normale et expression faciale neutre. Les requêtes ont, quant à elle, été choisies dans le corpus *fb* représentant des variations d'expressions faciales. Nous avons utilisé la totalité du corpus *fb*, soit 1196 requêtes.

La figure 6 illustre les résultats obtenus par le descripteur fovéal pour l'application de reconnaissance de visage. Comme on peut le voir, notre descripteur permet d'obtenir un taux de reconnaissance d'environ 70% en ne considérant que le premier visage retourné par le système.

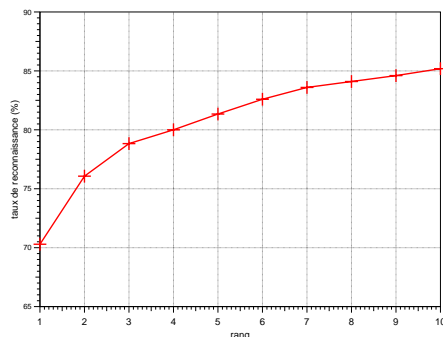


FIG. 6 – Taux de reconnaissance de visage en fonction du rang des visages retournés par le système.

## 4 Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté un descripteur utilisant la théorie des ondelettes fovéales pour caractériser l'orientation et la régularité des singularités d'une image. Nous avons montré son aptitude à discriminer le contenu des images dans le cadre de deux applications différentes et nous travaillons sur d'autres expérimentations, notamment pour améliorer la reconnaissance des visages. Par exemple, l'utilisation d'autres bases d'ondelettes fovéales (comme les ondelettes fovéales régulières à support minimum présentées dans [11]) semble être une piste à suivre.

De plus, nous nous intéressons actuellement à l'implémentation d'un détecteur décrivant uniquement la répartition des orien-

tations et des coefficients de Lipschitz autour de chaque point d'intérêt. Enfin, le calcul de l'échelle caractéristique associée à chaque point d'intérêt semble inévitable pour améliorer les résultats.

## Références

- [1] Biederman I. Recognition-by-Component : A Theory of Human Image Understanding. *Psychological Review*, 94(2) :115–147, 1987.
- [2] Bres S. and Jolion J.-M. Detection of interest points for image indexation. In *VISUAL '99 : Proceedings of the Third International Conference on Visual Information and Information Systems*, pages 427–434. Springer-Verlag, 1999.
- [3] Bresenham J. Algorithm for computer control of a digital plotter. *IBM Systems Journal*, 4(1) :25–30, 1965.
- [4] Daugman J.G. Complete Discrete 2D Gabor Transforms by Neural Networks for Image Analysis and Compression. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 36(7) :1169–1179, Juillet 1988.
- [5] Gouet V. and Boujeema N. Object-based queries using color points of interest. In *IEEE Workshop on Content-Based Access of Image and Video Libraries*, pages 30–36, Hawaii, Décembre 2001.
- [6] Harris C. and Stephens M. A combined corner and edge detector. In *Proceedings of The 4<sup>th</sup> Alvey Vision Conference*, pages 147–151, 1988.
- [7] Kim N.D. and Udupa S. Texture Classification Using Rotated Wavelet Filters. *IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics - Part A : Systems and Humans*, 30(6) :847–852, Novembre 2000.
- [8] Laurent C., Laurent N., and Visani M. Color Image Retrieval Based on Wavelet Salient Features Detection. In *Proceedings of The 3<sup>rd</sup> Int. Workshop on Content-Based Multimedia Indexing*, pages 327–334, Rennes, France, Septembre 2003.
- [9] Loupiau E., Sebe N., Bres S., and Jolion J.-M. Wavelet-based salient points for image retrieval. In *Proceedings of the International Conference on Image Processing*, volume 2, pages 518–521, Octobre 2000.
- [10] Lowe D.G. Distinctive image features from scale-invariant keypoints. *International Journal of Computer Vision*, 60(2) :91–110, 2004.
- [11] Mallat S. Foveal Approximations for Singularities. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 14(2) :133–180, 2003.
- [12] Mallat S. and Hwang W.L. Singularity detection and processing with wavelets. *IEEE Transactions on Information Theory*, 32(2) :617–643, 1992.
- [13] Mallat S. and Zhong S. Characterization of Signals from Multiscale Edges. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(7) :710–732, 1992.
- [14] Manjunath B.S. and Ma W.Y. Texture features for browsing and retrieval of image data. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(8) :837–842, Août 1996.
- [15] Schmid C. and Mohr R. Local Grayvalue Invariants for Image Retrieval. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 19(5) :530–535, 1997.



# Filtrage Perceptuel Pyramidal

Azeddine BEGHDAI<sup>1</sup>, Razvan IORDACHE<sup>2</sup> et Abdel-Ouahab BOUDRAA<sup>3</sup>

<sup>1</sup>L2TI

Institut Galilée, Université Paris 13, 93430 Villetaneuse, France

<sup>2</sup>GE Healthcare Technologies, France

<sup>3</sup>IRENav

Ecole Navale, Lanvéoc-Poulmic, BP600, 29240 Brest-Armées, France

azeddine.beghdadi@galilee.univ-paris13.fr, razvan.iordache@med.ge.com  
boudra@ecole-navale.fr

**Résumé** — Dans cet article, un schéma multirésolution perceptuel basé sur le système visuel humain est proposé. L'idée principale est la détection des structures les plus pertinentes de l'image à chaque échelle de la pyramide Gaussienne en utilisant comme critère le seuil de détection en contraste, JNC (pour Just noticeable contrast) et la notion d'adaptation de luminance. Nous appliquons le filtrage perceptuel à des images de niveaux de gris.

**Abstract** — In this paper a perceptual multiresolution scheme based on human visual system model is proposed. The main idea is to detect and remove the perceptual irrelevant structures at different scales using the JNC (Just noticeable contrast) and the notion of luminance adaptation. This processing is based on the Laplacian and Gaussian pyramid decompositions of the image as proposed by Burt and Adelson. The effectiveness of the developed method is evaluated on gray-level images.

## 1 Introduction

L'exploitation de quelques connaissances sur les mécanismes de la vision chez certains mammifères [1] et notamment la sensibilité au contraste [2] et l'architecture fonctionnelle du cortex [3], a ouvert de nouvelles perspectives en traitement d'images numériques [4]. Il est bien établi que les limitations du système visuel chez certains mammifères rendent certaines structures invisibles et donc sans importance sur le plan visuel. Ainsi, le phénomène de masquage et la sensibilité fréquentielle du SVH (Système Visuel Humain) permettent de mettre en évidence les structures qui échappent à l'observateur humain. Dans ce travail on se limite au contraste des luminances et plus particulièrement au JNC (pour Just Noticeable Contrast). Cette mesure est utilisée comme critère de non pertinence de l'information visuelle [1]. L'étude de la sensibilité du SVH au contraste des luminances a suscité beaucoup d'intérêt depuis la fameuse expérience psycho-visuelle de Weber-Fechner. Cependant, malgré le nombre considérable d'études sur ce phénomène, il n'existe pas de définition universelle du contraste de luminance. Une mesure de contraste qui s'est révélé efficace notamment pour la mise au point de mesure de qualité d'image est celle due à Peli [5]. En se basant sur la sensibilité fréquentielle du SVH, Peli définit un contraste par bande de fréquences spatiales. Ici, comme solution alternative nous avons choisi un contraste local basé sur celui de Moon et Spencer [6]. Pour tenir compte des étages primaires du SVH, on a choisi un schéma multirésolution. Le contraste est évalué à chaque niveau de la pyramide Gaussienne. Nous nous limitons ici aux images en niveaux de gris.

## 2 Filtrage Perceptuel

Le principe de base de la méthode repose sur l'approche multi-résolution du filtrage des images basée sur quelques mécanismes du SVH. L'idée principale est la détection des structures les plus pertinentes de l'image à chaque échelle de la pyramide Gaussienne en utilisant comme critère le seuil de détection en contraste. L'image est filtrée par une fonction de sensibilité au contraste CSF (pour Contrast sensitivity function) normalisée. La CSF permet de tenir compte de la sélectivité fréquentielle du SVH. L'image filtrée est représentée à des niveaux de résolution décroissants par une pyramide Gaussienne. A chaque niveau de cette pyramide la visibilité des pixels est évaluée et une image appelée carte de visibilité est construite. Cette carte est une représentation binaire de la visibilité où les pixels visibles sont codés par "1" et ceux qui ne le sont pas par le bit "0". Comme mesure de visibilité nous utilisons une mesure de contraste inspirée du modèle de Moon et Spencer [4]. La carte de visibilité est construite pixel par pixel et ce en comparant le contraste en chaque pixel à celui de la valeur du JNC en ce même pixel. Donc, il y a autant de cartes de visibilité que de niveaux de résolution. Finalement l'image filtrée est obtenue par la méthode de reconstruction pyramidale selon le schéma de Burt et Adelson [7].

### 2.1 Pyramide Gaussienne

Une pyramide Gaussienne est un ensemble d'images filtrées (filtre passe-bas)  $G_0, G_1, \dots, G_K$  où  $G_0$  est l'image initiale

et  $G_{k+1}$  est la version réduite de  $G_k$  [7]:

$$G_{k+1} = REDUCE[G_k], \quad k = 0, 1, 2, \dots, K-1 \quad (1)$$

L'opérateur *REDUCE* est un filtre passe-bas suivi par une opération de sous-échantillonnage de facteur 2, suivant les directions horizontale et verticale. Comme filtre passe-bas on utilise un filtre séparable dont le masque 1D est [0.05 0.25 0.4 0.25 0.05] [7].

## 2.2 Pyramide Laplacienne

Une pyramide Laplacienne est une séquence d'images d'erreurs  $L_0, L_1, \dots, L_K$  où  $L_k$  ( $k$  étant le niveau de résolution). Chaque image représente la différence entre un niveau de la pyramide Gaussienne et sa version estimée par expansion du niveau supérieur. Ce principe est décrit par

$$L_k = \begin{cases} G_k - EXPAND[G_{k+1}], & k = 0, 1, 2, \dots, K-1 \\ G_k, & k = K \end{cases} \quad (2)$$

où *EXPAND* est l'opérateur inverse de *REDUCE*. On sur-échantillonne par un facteur de 2 suivant les directions horizontale et verticale suivi d'une opération d'interpolation par le même filtre passe-bas utilisé par l'opérateur *REDUCE*. La pyramide Laplacienne est un codage exact de l'image initiale [7]:

$$G_0 = \sum_{k=0}^K EXPAND[L_k] \quad (3)$$

## 2.3 Carte de Visibilité

Comme mesure de visibilité nous utilisons une mesure de contraste inspirée du modèle de contraste de Moon et Spencer [6]. La carte est construite en comparant le contraste en chaque pixel à un seuil local de visibilité de contraste. Soit  $B$  l'image à analyser au moyen d'une fenêtre glissante de taille  $3 \times 3$ . Le contraste local associé au pixel  $(i, j)$  est donné par

$$C(i, j) = \frac{B(i, j)}{B_s(i, j)} \quad (4)$$

où  $B(i, j)$  est l'intensité du pixel  $(i, j)$  et  $B_s(i, j)$  est le niveau de gris moyen calculé dans le voisinage immédiat du pixel  $(i, j)$ .

$$B_s(i, j) = \frac{1}{8} \sum_{k,l=-1, k,l \neq 0}^{+1} B(i+k, j+l) \quad (5)$$

Nous utilisons comme valeur de seuil du contraste de visibilité, le JNC proposé par Kretz [8] et adapté aux images numériques [10] :

$$JNC(i, j) = \begin{cases} \frac{C_w (A + \sqrt{B_a(i, j)})^2}{B_s(i, j)}, & B_a(i, j) \leq B_s(i, j) \\ \frac{C_w \left( A + \sqrt{\frac{B_s^2(i, j)}{B_a(i, j)}} \right)^2}{B_s(i, j)}, & B_a(i, j) > B_s(i, j) \end{cases} \quad (6)$$

où  $C_w$  est le JNC de Weber-Fechner ( $C_w = 0.02$  en général) et  $A$  est une constante déterminée expérimentalement à partir de tests psycho-visuels et de la loi de Hecht [6] et vaut 0.808. L'expression de la luminance du champ lointain rétinien  $B_a$  est conditionnée par les luminances de la couronne  $B_s$  (luminance moyenne autour du point étudié) et du fond lointain  $B_g$  [6],[9]. Dans cette étude  $B_g$  est la luminance globale égale à la moyenne de luminance de l'image. Dans le cas de Weber-Fechner, cette expression ne dépend que de la luminance de la couronne [9]. La luminance d'adaptation du champ rétinien  $B_a$  calculé au point (pixel)  $(i, j)$  est donné par :

$$B_a(i, j) = 0.923.B_s(i, j) + 0.077.B_g \quad (7)$$

La carte de visibilité (*CV*) de l'image  $B$ , notée par  $V = CV[B]$ , est donnée par:

$$V(i, j) = \begin{cases} 1 & C(i, j) \geq JNC(i, j) \\ 0 & C(i, j) < JNC(i, j) \end{cases} \quad (8)$$

## 2.4 Pyramide "Perceptuelle"

La pyramide Laplacienne perceptuelle  $L_0^v, L_1^v, \dots, L_K^v$  est une séquence d'images obtenues à partir de la relation (2) en tenant compte de l'information de visibilité obtenue en appliquant l'opérateur *CV* à chaque niveau de la pyramide Gaussienne (1):

$$L_k^v = L_k \odot CV[G_k], \quad k = 0, 1, 2, \dots, K-1 \quad (9)$$

où  $\odot$  est le produit d'Hadamard. L'image filtrée "perceptuelle"  $G_0^v$  est reconstruite à partir de la pyramide Laplacienne perceptuelle selon le schéma standard de Burt et Adelson [7].

## 3 Résultats

Le filtrage perceptuel est évalué sur une image en niveaux de gris (Figure 2,  $G_0$ ). Le schéma de principe du filtre perceptuel est représenté par la figure 1. Six niveaux de résolution ont été utilisés ( $k = 0, \dots, 5$ ). La figure 2 représente trois niveaux de résolution ( $k = 0, 1, 2$ ) de la pyramide Gaussienne et les images correspondantes de la pyramide Laplacienne. Les cartes de visibilité ( $CV_0, CV_1, CV_2$ ) de trois images de la pyramide Gaussienne ( $G_0, G_1, G_2$ ) sont représentées par la figure 3. Ces cartes ont été obtenues pour une valeur de  $C_w = 0.02$ . La carte de visibilité n'est pas toujours facile à interpréter comme le montre, par exemple, les cartes  $CV_1$  et  $CV_2$  de la figure 3. Pour les niveaux élevés de la pyramide ( $k = 0, 1$ ), la carte de visibilité met bien en évidence les structures telles que les contours (en blanc) et les points non visibles (en noir) dans les régions homogènes. La comparaison des images reconstruites par pyramide Laplacienne et par filtrage perceptuel montre que les images reconstruites sont visuellement identiques comparée à l'originale (Figure 4). La figure 5 montre la reconstruction de l'image par filtrage perceptuel avec différentes valeurs du JNC de Weber-Fechner  $C_w$ . L'image reconstruite est visuellement identique à l'originale pour de faibles valeurs de  $C_w$  et au fur et à

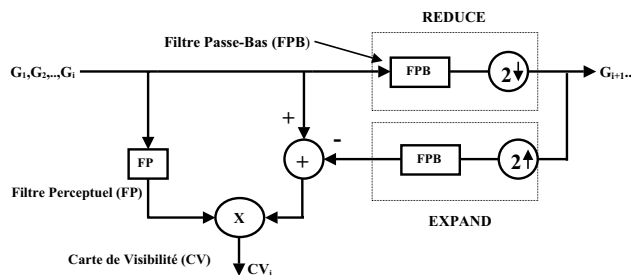


FIG. 1: Diagramme du filtre perceptuel.

mesure que  $C_w$  augmente les détails, bien contrastés disparaissent. Les structures les plus pertinentes ne sont pas trop affectées par ce processus. Seuls les détails sans trop d'importance visuelle sont lissés et noyés dans le fond immédiat. On constate un effet de lissage anisotrope qui a pour effet d'homogénéiser les régions et de rehausser les frontières. Ce résultat est similaire à celui obtenu par le filtrage nonlinéaire basé sur la diffusion anisotrope [11]. Le paramètre  $C_w$  permet de contrôler l'effet de lissage.

## 4 Conclusion

Nous avons présenté une méthode de filtrage non-linéaire appelée filtrage pyramidal perceptuel. Cette méthode s'inspire des mécanismes du système visuel humain. Ce filtrage nécessite la connaissance du nombre de niveaux de résolution de la pyramide ainsi que la valeur du JNC de Weber-Fechner. Les résultats montrent que si la valeur du JNC est correctement choisie, la reconstruction perceptuelle est visuellement indiscernable de l'image originale. Par conséquent le filtrage perceptuel pourrait être utilisé comme méthode de compression des images. En effet, les points non visibles peuvent être sacrifiés et remplacés à l'étape de reconstruction par le niveau de luminance d'adaptation. Une autre application possible est la mise au point d'une métrique de qualité d'image avec référence en exploitant la carte de visibilité de la distorsion. Ces aspects sont en cours d'étude.

## References

- [1] T.N. Cornsweet, "Visual perception," Academic Press, New York, 1970.
- [2] G.T. Fechner, "Elemente der psychophysic," Breitkopf und Härtel, Leipzig, vol. 2, Chap. XVI, 1860..
- [3] D. Hubel and T.N. Wiesel, "Brain mechanism of vision," *Scientific. Amer.*, vol. 241, pp. 150-162, 1979.
- [4] M.D. Levine, vision in man and machine, 1985, McGraw Hill.
- [5] E. Peli, "Contrast in complex image", *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 7, no. 10, pp. 2032-2040, 1990.
- [6] P. Moon and D. E. Spencer, "The visual effect of nonuniform surrounds," *J. Opt. Soc. Amer. A*, vol. 35, pp. 233-248, 1945.

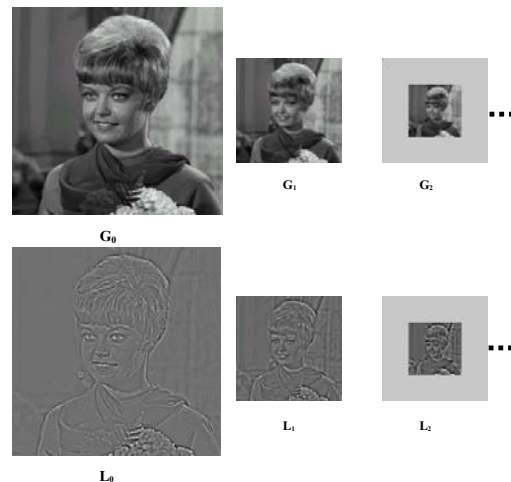


FIG. 2: Pyramides Gaussienne et Laplacienne d'une image en niveaux de gris.

- [7] P. Burt and E. Adelson, "The Laplacian Pyramid as a Compact Image Code," *IEEE Trans. on Comm.*, vol. 31, no. 4, pp. 532-540, 1983.
- [8] F. Kretz, "Subjectively optimal quantification of pictures," *IEEE Trans. Comm.*, vol. 25, pp. 1288-1292, 1975.
- [9] K. Belkacem-Boussaid, Exploitation des mécanismes rétino-corticaux pour l'élaboration d'outils de traitement d'images bas niveau. Thèse de Doctorat, Université Paris 6, 1997.
- [10] K. Belkacem-Boussaid and A. Beghdadi, "A new image smoothing method based on a simple model of spatial processing in the early stages of human vision," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 9, pp. 220-226, 2000.
- [11] P. Perona, J. Malik, "Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion", *Patt. Anal. Mach. Intell.*, vol. 12, no. 7, pp. 629-639, 1990.

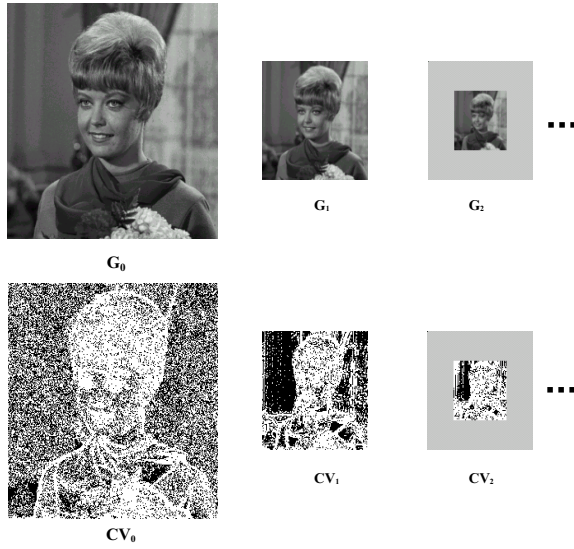


FIG. 3: Images de la pyramide Gaussienne et les cartes de visibilité correspondantes.



FIG. 5: Reconstruction de l'image par filtrage perceptuel avec différentes valeurs de  $C_w$ .

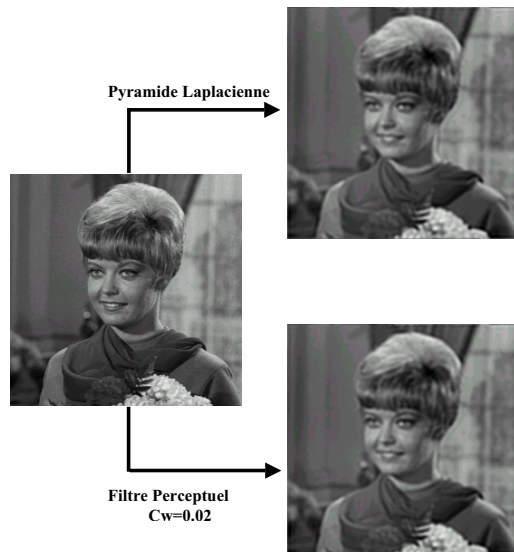


FIG. 4: Comparaison de la reconstruction par pyramide Laplacienne et par filtrage perceptuel ( $C_w = 0.02$ ).

# Suivi Tridimensionnel en Stéréovision

Simon CONSEIL<sup>1</sup>, Salah BOURENNANE<sup>1</sup>, Lionel MARTIN<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Groupe Signaux Multidimensionnels, Institut Fresnel, CNRS-UMR 6133  
D-U de St Jérôme, F-13397 Marseille Cedex 20

<sup>2</sup>ST Microelectronics  
ZI Rousset BP 2, F-13106 Rousset

simon.conseil@fresnel.fr, salah.bourennane@fresnel.fr, lionel.martin@st.com

**Résumé** – Cet article présente une méthode d'estimation en temps réel de la trajectoire d'une cible en trois dimensions, appliquée au suivi d'un doigt de la main dans un contexte de reconnaissance de gestes. Notre approche est basée sur la vision stéréoscopique, avec deux caméras standards, de type webcams. La main est segmentée par soustraction du fond, et le bout du doigt est détectée avec l'analyse de la courbure du contour. Le suivi du doigt est réalisé par un filtrage de Kalman tridimensionnel, ce qui permet d'améliorer la détection avec une recherche locale basée sur la prédiction de la position 3D et de filtrer la trajectoire pour réduire l'erreur d'estimation.

**Abstract** – This article presents a real time estimation method of the three dimensional trajectory of a target, applied to fingertip tracking in a gesture recognition context. Our approach is based on stereoscopic vision, with two standards webcams. The hand is segmented by background subtraction, and the fingertip is detected with the analysis of the curvature of finger boundary. The fingertip tracking is carried out by a three dimensional Kalman filter, in order to improve the detection with a local research centered on the prediction of the 3D position and to filter the trajectory to reduce the estimation error.

## 1 Introduction

Les données en trois dimensions représentent une quantité d'information importante et très intéressante dans de nombreux domaines (reconnaissance de gestes, réalité virtuelle ou augmentée, étude du comportement humain ...). L'acquisition de ces données peut se faire de différentes façons : gants équipés de capteurs, caméra unique associée à des informations géométriques sur la scène [1], ou vision stéréoscopique.

Les gestes de la main sont un vecteur de communication naturel chez l'homme. Ils peuvent être liés à la parole, servir à désigner des objets, et même représenter un langage à part entière (langue des signes). Nous nous intéressons aux gestes déictiques, consistant à désigner un objet avec la main ou le doigt. Le doigt représente en effet un dispositif de pointage naturel et très pratique pour des applications de la vision par ordinateur aux *Interfaces Homme-Machine*.

Parmi les nombreux travaux de ces dernières années, on peut citer le système EnhancedDesk [2] qui permet de suivre plusieurs doigts en deux dimensions, avec un filtre de Kalman pour chaque doigt. Les bouts de doigts sont détectés grâce à une caméra infrarouge et une corrélation normalisée, des gestes symboliques (cercle, carré, triangle) sont ensuite reconnus avec des Modèles de Markov Cachés (HMM). Segen et Kumar [3] utilisent des points de contours caractéristiques pour classifier quatre gestes de la main et déterminer la direction 3D pointée par le doigt, avec deux caméras.

Le système Digital Desk de Crowley *et al.* [4] montre l'intérêt du suivi du doigt pour la réalité augmentée. Le suivi est effectué par corrélation avec un modèle de bout de doigt. Les trajectoires de points ont été utilisées pour la reconnaissance

d'écriture 2D avec des HMM [5]. Une application classique dans ce domaine est le remplacement de la souris par la main [6], ce qui permet de valider la bonne localisation du doigt et de tester l'interactivité du système, la position du curseur sur l'écran fournissant un retour d'information à l'utilisateur. On trouvera une étude approfondie des techniques de reconnaissance de gestes dans [7].

Dans cet article, nous nous intéressons au suivi du bout du doigt pour des gestes de pointage. Deux caméras calibrées sont utilisées pour calculer les trajectoires 3D, mais les erreurs de localisation du doigt et l'absence de synchronisation rendent l'estimation de la trajectoire peu précise. L'originalité de notre approche est l'utilisation d'un filtre de Kalman pour réaliser un suivi tridimensionnel, afin d'améliorer la détection avec une recherche locale basée sur la prédiction de la position 3D et de filtrer la trajectoire pour réduire l'erreur d'estimation.

## 2 Vision Stéréoscopique

Dans le cas général d'un espace projectif, une caméra est caractérisée par sa matrice de projection perspective  $P$ , de dimension  $3 \times 4$ . Cette matrice détermine la projection d'un point de l'espace  $M(X, Y, Z, 1)$  en un point de l'image  $m(u, v, 1)$  :

$$\begin{pmatrix} u & v & 1 \end{pmatrix}^T = P \begin{pmatrix} X & Y & Z & 1 \end{pmatrix}^T \quad (1)$$

Les paramètres de cette matrice sont calculés par calibration, afin d'obtenir une reconstruction 3D euclidienne. Connaissant cette matrice pour les deux caméras, la reconstruction consiste en une triangulation. Il est donc nécessaire de déterminer le correspondant d'un point de l'image gauche dans l'image droite

et réciproquement. Ainsi pour un point  $M(X, Y, Z)$  de l'espace qui se projette en un point  $m_1(u, v)$  (resp.  $m_2(u', v')$ ) de l'image gauche (resp. droite), le point 3D reconstruit est celui qui minimise la distance entre les deux droites de vues  $O_1m_1$  et  $O_2m_2$ ,  $O_1$  et  $O_2$  étant les foyers des deux caméras.

La géométrie épipolaire d'un système stéréoscopique est représentée par la matrice fondamentale  $F$ , de dimension  $3 \times 3$  :

$$m_1^T F m_2 = 0 \quad (2)$$

La contrainte épipolaire exprime le fait que le correspondant d'un point d'une image se trouve sur une droite dans l'autre image : c'est l'image de la droite de vue du premier point.

### 3 Détection de la cible

Les interfaces utilisant la reconnaissance de gestes nécessitent une détection robuste et rapide de la main. Une bonne segmentation est essentielle au bon fonctionnement du système. Deux grandes approches sont couramment utilisées : la soustraction du fond [8] et la détection de la couleur de la peau [9]. Ces approches sont sensibles aux variations de luminosité et nécessitent donc un environnement contrôlé. Le seuillage de la disparité obtenue à partir d'une paire stéréoscopique a été étudié [10], mais le calcul d'une carte de disparité est coûteux car il nécessite une reconstruction dense de la scène, ce qui n'est pas utile dans notre cas.

#### 3.1 Détection de la main

Nous utilisons la technique classique de soustraction du fond, qui consiste à soustraire une image de référence, correspondant à la scène sans objets, à l'image courante. L'image de référence est prise à l'initialisation du système et peut être réinitialisée en cas de variation rapide de la luminosité. Afin d'éliminer le bruit du masque binaire obtenu, un filtre médian est appliqué, puis une fermeture morphologique et finalement un étiquetage en composantes connexes. L'intérêt de la soustraction du fond est de ne pas se restreindre au doigt, il est possible d'utiliser d'autres objets pour pointer, comme un stylo. Cette méthode est par contre très sensible à la présence d'ombres.

#### 3.2 Détection du bout du doigt

Lors de l'entrée du doigt dans le champ de vision des caméras, il faut détecter précisément la position du bout du doigt afin d'initialiser le suivi. A partir des images binaires de la main obtenues à l'étape précédente, différentes approches sont possibles pour détecter la position du bout du doigt. La corrélation avec un modèle de bout de doigt a été utilisée [4], mais n'est pas suffisamment robuste aux changements d'échelle et d'orientation.

Nous utilisons une distance euclidienne par rapport au centre de gravité de la région correspondant à la main. Le centre de gravité de la main est calculé à partir des moments géométriques de la région de la main. Le point du contour se situant à la plus grande distance du centre de gravité est choisi comme bout du doigt pour l'initialisation du suivi. Cette méthode est toutefois peu précise, aussi nous affinons la détection en utilisant la courbure du contour, avec la méthode décrite dans [3].

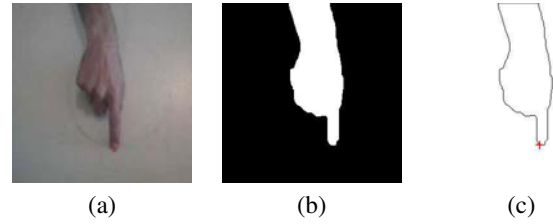


FIG. 1 – Segmentation de la main : (a) image originale, (b) masque binaire après soustraction du fond et (c) contour et détection du bout du doigt

## 4 Suivi Tridimensionnel

A partir de la position du bout du doigt dans chacune des deux images, il est possible de calculer sa position 3D. Toutefois les positions 3D ainsi calculées manquent de précision pour plusieurs raisons : détection imprécise du bout du doigt due à une mauvaise segmentation, discrétisation des images (une erreur d'un pixel sur la localisation du bout du doigt peut représenter plusieurs millimètres en 3D), décalage temporel entre l'acquisition des deux images (les deux caméras ne sont pas synchronisées).

Par ailleurs il n'est pas nécessaire de traiter l'image entière alors que nous connaissons la position du doigt. Ainsi la zone de recherche du bout du doigt peut être réduite grâce au suivi du doigt et à la prédiction de sa position à partir de la paire d'images précédente. L'objectif du suivi temporel est donc de faciliter la localisation du doigt et de lisser les trajectoires obtenues.

#### 4.1 Filtrage de Kalman

Notre approche est basée sur un filtre de Kalman [11] tridimensionnel avec un modèle de mouvement uniforme à vitesse constante. Le vecteur d'état  $\mathbf{x}_k$  est défini comme :

$$\mathbf{x}_k = (x(k), y(k), z(k), v_x(k), v_y(k), v_z(k))^T$$

avec  $(x(k), y(k), z(k))$  la position et  $(v_x(k), v_y(k), v_z(k))$  la vitesse du bout du doigt dans l'image  $k$ . Le vecteur d'état  $\mathbf{x}_k$  et le vecteur d'observation  $\mathbf{z}_k$  sont reliés par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{H} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (3)$$

avec  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{v}_k$  les bruits du processus et de mesure, supposés bruits blancs gaussiens,  $\mathbf{A}$  la matrice de transition de l'état et  $\mathbf{H}$  la matrice d'observation, avec  $\Delta T$  la période d'acquisition :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta T \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



En notant  $\mathbf{x}_k$  et  $\mathbf{x}_k^-$  les estimations *a posteriori* et *a priori*,  $P_k$  et  $P_k^-$  les covariances des erreurs d'estimation *a posteriori* et *a priori*,  $Q$  la covariance du bruit du processus,  $R$  la covariance du bruit de mesure et  $K_k$  le gain du filtre de Kalman, on obtient les équations suivantes :

Equations de prédiction :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k^- &= A\mathbf{x}_{k-1} \\ P_k^- &= AP_{k-1}A^T + Q\end{aligned}\quad (4)$$

Equations de mise à jour :

$$\begin{aligned}K_k &= P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1} \\ \mathbf{x}_k &= \mathbf{x}_k^- + K_k(\mathbf{z}_k - H\mathbf{x}_k^-) \\ P_k &= (I_6 - K_k H) P_k^-\end{aligned}\quad (5)$$

**Paramètres.** Les trois composantes sont supposées indépendantes, ainsi les matrices de covariance sont diagonales. Comme nous supposons la vitesse constante dans notre modèle, ce qui n'est pas forcément vrai, la covariance du bruit du processus est supposée importante sur la composante de vitesse tandis qu'elle est faible sur la position. Les variances du bruit de mesure sont calculées avec une séquence d'images où le doigt reste fixe. Nous obtenons  $Var(X, Y, Z) = (0.31, 2.39, 15.06)$ , ce qui montre que l'erreur de mesure est plus importante sur la composante Z que sur X et Y.

## 4.2 Algorithme développé

La figure 2 résume les différentes étapes du traitement : à partir du calcul de la position 3D avec une paire d'images, le filtre de Kalman permet de prédire la position 3D correspondant à la paire d'images suivante. La prédiction 3D prédite est projetée dans les deux images pour obtenir une prédiction de la position du bout du doigt dans chacune des deux images, ce qui permet de réduire la zone de recherche du bout du doigt. La taille utilisée pour la fenêtre de recherche est de  $80 \times 80$  pixels. La détection du doigt est alors réalisée avec la méthode décrite dans la section 3. Enfin la contrainte épipolaire est vérifiée pour s'assurer de la bonne détection du bout du doigt dans les deux images.

## 5 Résultats

Nous utilisons deux caméras de type webcams, au format  $352 \times 288$ . Les images sont transmises par une connexion USB avec une compression MJPEG, ce qui dégrade les images. De plus, les caméras ne sont pas synchronisées, ce qui peut induire une différence de position entre deux images, et peut résulter en une oscillation de la trajectoire du doigt : pendant l'intervalle de temps entre les acquisitions des deux images, le doigt peut avoir bougé plus ou moins en fonction de la vitesse de son mouvement. Par conséquent, la triangulation est biaisée, principalement au niveau de la profondeur (dans la direction correspondant à l'axe optique des caméras).

### 5.1 Exemple : cas d'un cercle

Afin de pouvoir mesurer les erreurs sur le calcul de la position 3D, il est nécessaire de connaître la vérité terrain, ce qui est

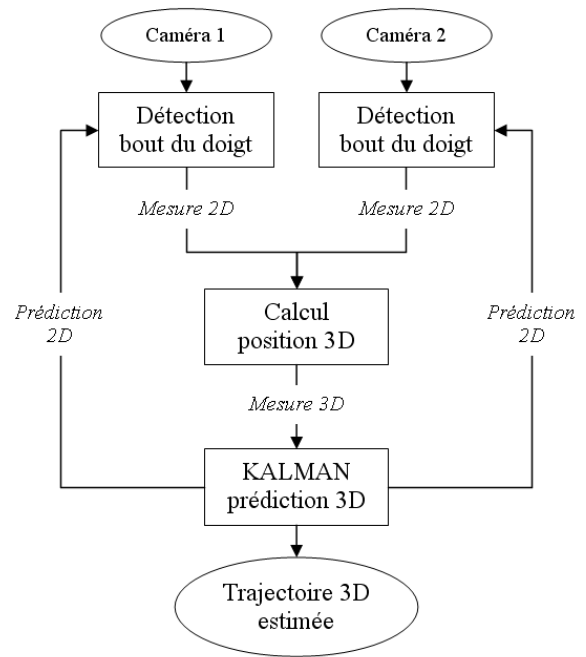


FIG. 2 – Schéma récapitulant les différentes étapes

souvent difficile en stéréoscopie. Dans notre configuration l'erreur de reconstruction se retrouve principalement sur la composante Z, correspondant à la profondeur (axes optiques), aussi nous nous intéressons à une trajectoire plane : un cercle tracé sur le bureau, correspondant au plan  $z = 0$  (Fig. 3).

Nous pouvons voir sur la figure 4 la trajectoire 3D estimée du cercle, ainsi que les points mesurés en pointillés. La figure 5 montre que le filtre de Kalman permet de lisser la trajectoire 3D, et de diminuer l'écart type sur la profondeur qui passe de 9.77 à 5.46.

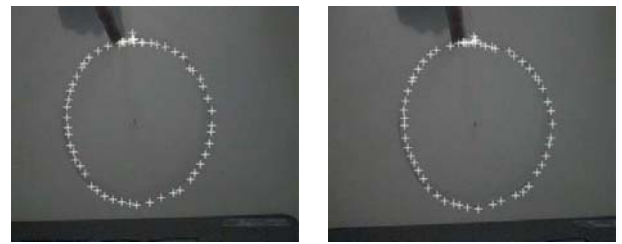


FIG. 3 – Images gauche et droite avec les points mesurés lors du tracé d'un cercle avec le doigt

### 5.2 Influence de la vitesse

La vitesse du mouvement influe sur l'erreur de reconstruction. En effet, plus le mouvement est rapide, plus le doigt peut avoir bougé entre l'acquisition des deux images, d'où une erreur plus importante.

Le tableau 1 illustre ceci avec l'étude de deux trajectoires planes (cercle et carré), traitée en temps réel (30 Hz). Ces trajectoires sont réalisées avec trois vitesses différentes, ainsi une trajectoire plus rapide est composée d'un nombre de points

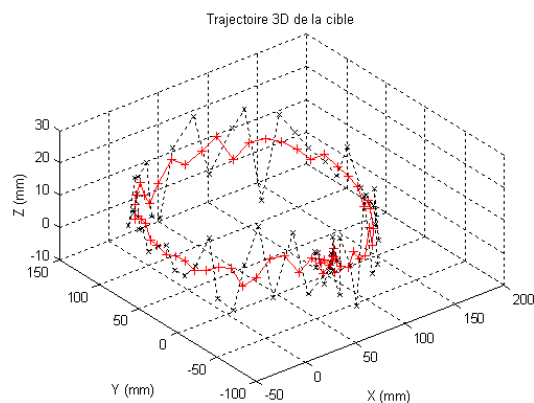


FIG. 4 – Trajectoire 3D (mesures en pointillés, estimations en trait plein)

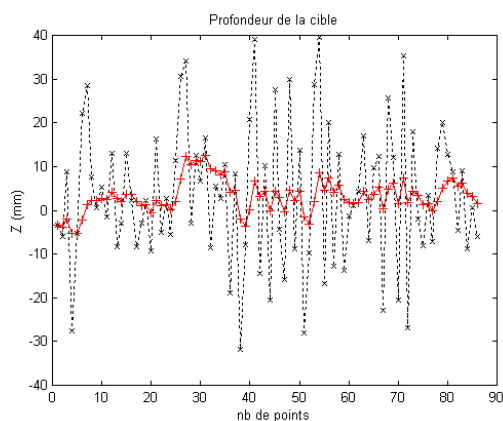


FIG. 5 – Composante Z, correspondant à la profondeur, en mm (mesures en pointillés, estimations en trait plein)

plus faible. L'écart-type sur la composante Z est ensuite calculé pour comparer les erreurs de reconstruction. Dans les deux cas l'écart-type augmente avec la vitesse, et l'écart-type est plus faible pour la trajectoire estimée par le filtre de Kalman que pour les mesures.

## Conclusion

Nous avons présenté un système de suivi tridimensionnel d'une cible, qui permet de rendre la détection plus robuste en réduisant la zone de recherche et de réduire l'erreur d'estimation en lissant les trajectoires 3D. Appliqué au suivi d'un doigt de la main, le système fonctionne en temps réel sur des données réelles, avec un PC à 2.6 GHz. Avec une méthode de détection adaptée, d'autres applications sont possibles comme le suivi de personnes ou de véhicules.

Pour améliorer le système, une réflexion est menée sur le calcul de la largeur de la fenêtre de recherche afin de l'adapter à la vitesse du mouvement, avant d'étendre le suivi au cas de plusieurs cibles et de traiter le problème des occultations.

TAB. 1 – Évolution de l'écart-type sur la profondeur en fonction de la vitesse de réalisation du mouvement

	Vitesse	Nombre de points	Écart-type Mesures	Écart-type Estimation
Cercle	lent	306	9.7673	5.4587
	moyen	189	11.3158	8.3916
	rapide	108	14.7552	10.8265
Carré	lent	290	10.4771	4.8718
	moyen	185	11.1463	4.4337
	rapide	106	12.2786	6.0401

## Références

- [1] A. Wu, M. Shah, N. da Vitoria Lobo. *A Virtual 3D Blackboard : 3D Finger Tracking using a Single Camera*. Proc. of the IEEE Int. Conf. on Automatic Face and Gesture Recognition, 2000.
- [2] K. Oka, Y. Sato, H. Koike. *Real-time fingertip tracking and gesture recognition*. IEEE Computer Graphics and Applications, Vol. 22, No. 6, pp. 64-71, 2002.
- [3] J. Segen, S. Kumar. *Human-Computer Interaction using Gesture Recognition and 3D Hand Tracking*. International Conference on Image Processing, 1998.
- [4] J. Crowley, F. Berard, J. Coutaz. *Finger Tracking as an Input Device for Augmented Reality*. International Workshop on Gesture and Face Recognition, Zurich, June 1995.
- [5] J. Martin, J.B. Durand. *Automatic Handwriting Gestures Recognition using Hidden Markov Models*. Proc. of the IEEE Int. Conf. on Automatic Face and Gesture Recognition, 2000.
- [6] Y. Hung and al. *Free-hand pointer by use of an active stereo vision system*. Proc. of the IEEE Int. Conf. on Pattern Recognition, 1998.
- [7] V. Pavlovic and R. Sharma and T. Huang. *Visual Interpretation of Hand Gestures for Human-Computer Interaction : A Review*. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 19, No. 7, July 1997
- [8] P. Bertolino, G. Foret, D. Pellerin. *Détection de personnes dans les vidéos pour leur immersion dans un espace virtuel*. GRETSI 2001, 18ème Colloque sur le Traitement du Signal et de l'Image, Toulouse (France), 2001.
- [9] S.L. Phung and A. Bouzerdoum and D. Chai. *Skin segmentation using color pixel classification : analysis and comparison*. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 27, Jan. 2005
- [10] N. Jojic, T. Huang, B. Brumitt, B. Meyers, S. Harris. *Detection and Estimation of Pointing Gestures in Dense Disparity Maps*. Proc. of the IEEE Int. Conf. on Automatic Face and Gesture Recognition, 2000.
- [11] G. Welch, G. Bishop. *An introduction to the Kalman filter*. 1995.



# Les représentations « steerables » pour la compression et l'extraction de caractéristiques de bas niveau.

François TONNIN, Patrick GROS, Christine GUILLEMOT

Irisa, Avenue du Général Leclerc, 35042 Rennes, France  
ftonnin@irisa.fr

**Résumé** – L'extraction de caractéristiques de bas niveau s'effectue à partir de la représentation des images dans l'espace-échelle Gaussien. C'est l'unique représentation satisfaisant à certaines conditions permettant d'obtenir des descripteurs invariants aux similitudes du plan. Toutefois, sa forte redondance et sa nature non creuse empêchent toute compression. Le calcul de nouveaux descripteurs nécessite donc de décompresser la base d'images puis de la transformer dans l'espace-échelle Gaussien. Dans ce papier, nous proposons un descripteur local dans le domaine compressé donné par les coefficients quantifiés des transformées « steerables ». La robustesse et le pouvoir discriminant sont comparés à ceux existants dans l'espace-échelle Gaussien et évalués en fonction de l'entropie de la représentation.

**Abstract** – Low-level features are extracted in the Gaussian scale-space of images. It is the unique representation satisfying some conditions aiming at extracting features invariant to translations, rotations and scale changes. Yet, it is highly redundant and non sparse so that compression schemes can not be designed in this representation. In this paper, we propose to extract local features directly in the compressed domain provided by quantized coefficients of steerable transforms. The robustness and discriminative power of the features are compared to state-of-the-art features, and given in function of the entropy of the representation.

## 1 Introduction

La transformée de Fourier et la transformée de Gabor constituaient jusqu'à une époque récente les seules alternatives à la représentation en niveaux de gris des images. Il existe aujourd'hui de nombreuses autres représentations, comme la transformée en pyramide Laplacienne, les transformées en ondelettes, en curvelets, en bandelets. Ces nouvelles représentations ont permis des progrès considérables en compression et débruitage. Étant à échantillonnage critique ou de faible redondance, elles sont en revanche inadaptées à l'extraction robuste de caractéristiques de bas niveau comme des points, des contours, ou des descripteurs visuels locaux. Une telle extraction constitue un pré-traitement pour de nombreuses tâches visuelles, comme la segmentation, la détection de mouvement, le suivi ou la reconnaissance d'objet, ou la recherche d'images par le contenu. L'espace-échelle Gaussien est l'unique représentation utilisée pour effectuer ces traitements [2, 3, 6, 8, 7]. La gestion de grandes bases d'images est fortement pénalisée, en termes de flexibilité et de temps de calcul, par la nécessité de d'abord décompresser les images, puis de les convertir dans l'espace-échelle Gaussien, avant d'extraire les caractéristiques de bas niveau requises. Un problème d'intérêt consiste donc à trouver des représentations d'images adaptées à la compression et à la description locale des images. Toutefois, compression et

description peuvent paraître antagonistes.

Dans un but de description, la représentation doit être robuste à un ensemble de transformations admissibles, idéalement constitué de l'ensemble des changements de perspective. Réduisant cet ensemble au groupe des similitudes du plan (groupe des translations, rotations et homothéties), et ajoutant la contrainte de causalité, la représentation est déterminée. Il s'agit de l'espace-échelle Gaussien [11].

En revanche, dans un souci de compression, l'image doit pouvoir être reconstruite à partir d'une quantité minimale d'information fournie par les coefficients quantifiés de sa transformée. La représentation doit donc être creuse, à échantillonnage critique (ou de redondance minimale), et idéalement à coefficients indépendants. Une représentation creuse est obtenue en adaptant les fonctions de projection sur l'espace transformé aux statistiques des images naturelles. L'indépendance entre coefficients est impossible, aussi préfère-t-on des fonctions de projection orthogonales, de manière à obtenir des coefficients décorrélés. Une représentation multirésolution à échantillonnage critique n'est pas souhaitable. En effet ce type de représentation est variant aux translations, donc inadapté à l'extraction robuste de caractéristiques de bas niveau. Certaines représentations multirésolution [4, 10] ont été spécialement conçues pour préserver la covariance aux translations et rotations. Le prix à payer est une certaine redondance dans la représentation. Dans

certains cas, il existe des techniques [1, 12] pour réduire le coût de codage dû à cette redondance.

Dans ce papier, nous proposons un descripteur local dans le domaine compressé donné par les coefficients quantifiés des transformées « steerables ». La section 2 définit le protocole expérimental permettant d'évaluer la robustesse des points extraits, et la discrimination des descripteurs visuels. L'extracteur de points est décrit dans la section 3, et les descripteurs locaux dans la section 4. Un test de recherche d'images dans une base de 16000 images est discuté en conclusion, ainsi que la qualité des caractéristiques extraites en fonction de l'entropie de la représentation.

## 2 Protocole expérimental

L'extraction robuste de points est un traitement requis par de nombreuses tâches visuelles. Ces points sont robustes à un ensemble  $\mathcal{T}$  de transformations admissibles, usuellement réduits à l'ensemble des similitudes du plan. De tels points sont appelés points d'intérêt.

Se donnant une image naturelle  $I_0 \in \mathcal{I}^2(\mathbb{Z}^2)$  (l'ensemble des suites à valeur dans  $\mathbb{Z}^2$  et de carré sommable), les points d'intérêt sont extraits à partir de la représentation  $R_0$  de l'image  $I_0$ . Cette représentation  $R_0$  devant être covariante aux translations et changements d'échelle, elle est nécessairement donnée par la convolution entre l'image  $I_0$  et un filtre paramétré en échelle:

$$R_0(x, y; s) = I_0(x, y) \star h_s(x, y), \quad (1)$$

où l'échelle  $s$  est à valeur dans  $\mathbb{R}_+$ . Les représentations multirésolution avec decimation ne sont pas compatibles avec cette définition. Elles seront néanmoins considérées, et dans le cadre de leur évaluation, les coordonnées des points extraits seront *ramenées* sur la grille de l'image originale. L'ensemble  $P^0$  des  $n_0$  points d'intérêt extraits à partir de  $R_0$  est noté

$$P^0 = \{(x_i^0, y_i^0; s_i^0), 1 \leq i \leq n_0\}, \quad (2)$$

où  $(x_i^0, y_i^0)$  sont les coordonnées spatiales du  $i^{\text{ème}}$  point extrait et  $s_i^0$  son échelle. En vue d'évaluer la robustesse de ces points à une transformation admissible  $T \in \mathcal{T}$ , l'image synthétique  $I_1 = T \circ I_0$  et sa représentation  $R_1$  sont créées. L'ensemble  $P^1$  des  $n_1$  points d'intérêt extraits à partir de la représentation n'est pas défini comme  $P_0$ , mais de la manière suivante:

$$P^1 = \{(T^{-1}(x_i^1, y_i^1); s_i^{1 \rightarrow 0}), 1 \leq i \leq n_1\}, \quad (3)$$

où l'échelle  $s_i^{1 \rightarrow 0}$  est égal à l'échelle  $s_i^1$  divisée par le facteur d'échelle de la transformation  $T$ . La robustesse des points d'intérêt à une transformation admissible  $T \in \mathcal{T}$  est évaluée à travers la notion de répétabilité, introduite dans [9], et définie par la proportion de points qui se correspondent:

$$r = \frac{\max(|C^{01}|, |C^{10}|)}{\min(n_0, n_1)}, \quad (4)$$

où  $|C^{01}|$  est le cardinal de  $C^{01}$ , et  $C^{01}$  (resp.  $C^{10}$ ) est le sous ensemble des points de  $P^1$  (resp. de  $P^0$ ) qui ont un correspondant dans  $P^0$  (resp. dans  $P^1$ ). Dans [9], ce sous ensemble est défini relativement à une précision  $\varepsilon$ :

$$C^{01} = \{(x^1, y^1; s^1) \in P^1 :$$

$$\exists (x^0, y^0; s^0) \in P^0 \mid d((x^0, y^0), (x^1, y^1)) \leq \varepsilon\}, \quad (5)$$

où  $d$  est la distance euclidienne. Ainsi définie, la répétabilité a tendance à croître avec le nombre de points extraits, et à décroître avec la taille de l'image. Plus précisément, l'espérance de répétabilité de  $n$  points aléatoirement extraits à partir d'une image composée de  $N$  pixels est  $r(\varepsilon) = \frac{n\varepsilon^2}{N}$ . Dans la suite, le nombre de points extraits est fixé à 400, et la taille des images est  $480 \times 320$  pixels.

Les points d'intérêt peuvent servir à calculer des descripteurs visuels locaux. Un descripteur local est calculé à partir du voisinage d'un point extrait. Idéalement, il caractérise de façon unique l'ensemble des voisinages déformés par les transformations admissibles  $T \in \mathcal{T}$ . En pratique, se donnant un point d'intérêt  $(x_i^k, y_i^k; s_i^k)$ , on cherche un descripteur discriminant  $m_i^k$ , ( $k \in \{0, 1\}$ ) invariant aux transformations admissibles. Habituellement, l'invariance et le pouvoir discriminant sont simultanément évalués en mesurant la performance d'un système de recherche d'images par le contenu. Dans la suite, ces deux caractéristiques seront évaluées par la répétabilité obtenue en appariant les points dont les descripteurs sont les plus proches au sens de la distance euclidienne. Le sous ensemble  $C^{01}$  des points de  $P^1$  appariés de cette manière à la précision  $\varepsilon$ , est définie par

$$C^{01} = \{(x^1, y^1; s^1) \in P^1 : d((x_j^0, y_j^0), (x^1, y^1)) \leq \varepsilon, \\ j = \arg \min_{1 \leq p \leq n_0} \|m^1 - m_p^0\|\}. \quad (6)$$

Cette répétabilité est majorée par la répétabilité définie par Eqn. 5. Le ratio entre ces deux répétabilités est dans la suite appelé *répétabilité par descripteurs*.

## 3 Détection de points

Cette transformée, présentée dans [10], satisfait à plusieurs propriétés la rendant intéressante pour le problème conjoint de compression et de description. Elle est quasi invariante aux translations, permet une fine analyse angulaire, et enfin il existe des techniques permettant de réduire le coût de codage dû à sa redondance.

Elle est conçue dans le domaine de Fourier, où le noyau  $h_s$  défini dans Eqn.1 est séparable, i.e. sa transformée de Fourier est de la forme  $\hat{h}_s(\rho, \theta) = U_s(\rho)V(\theta)$ . Le noyau  $U_s(\rho)$  est passe bande et assure que l'énergie globale de chaque bande est invariante aux translations. Le noyau  $V(\theta)$  est « steerable », i.e. il existe un ensemble d'angles d'analyse

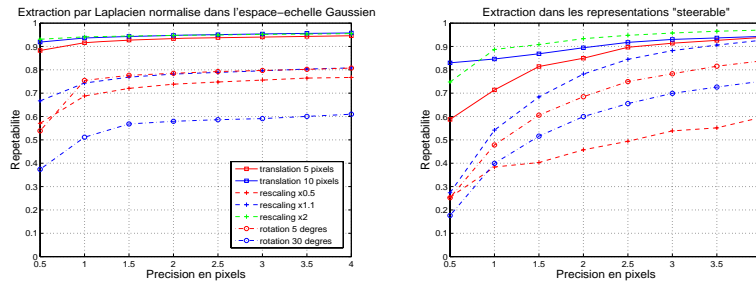


FIG. 1: Répétabilité des points extraits en espace-échelle Gaussien par l'extracteur de Lowe (à gauche), et dans les représentations "steerables" (à droite).

$\{\alpha_k\}_k$ , et un ensemble de fonctions d'interpolation  $\{f_k\}_k$  tels que:

$$\forall \theta \in [0, \pi], V(\theta) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k(\theta) V(\alpha_k) \quad (7)$$

Cela signifie qu'à une position et une échelle fixées, les  $N$  coefficients calculés pour chacun des angles d'analyse sont suffisants pour reconstruire la transformée en tout angle. A travers les échelles, la représentation est pyramidale avec un facteur quatre de décimation entre deux échelles, la première octave n'étant pas décimée. Choissant  $N = 4$  angles de base, la redondance de cette représentation est de l'ordre de  $\frac{16}{3}$ . Les points extraits sont les plus forts maxima locaux en position et orientation, mais non pas en échelle, à cause de la trop grossière discrétisation en échelle. Fig. 1 montre que les points extraits sont plus répétables mais moins précis que dans [7]. Une localisation sous-pixellique et l'élimination des points de courbure trop faible permettraient d'améliorer la précision. Les représentations « steerables » offrent donc un bon compromis entre redondance et répétabilité. De plus, la fine analyse angulaire effectuée par ce type de transformée permet la conception des descripteurs visuels locaux présentés dans la prochaine section.

## 4 Description locale

Considérant que la représentation d'images utilisée est covariante à toute similitude du plan, et que les points extraits sont parfaitement répétables, le voisinage des points extraits n'est affecté que par la rotation et dans une moindre mesure par le changement d'échelle. En effet, dans ce cas idéal, l'impact de changements d'échelle de facteur proportionnel au pas de discrétisation en échelle de la grille  $\theta$  est même nul. Le problème principal lors de la conception de descripteurs locaux est donc l'invariance aux rotations. Une première solution est représentée par les invariants différentiels [5] qui sont des quantités invariantes aux rotations. Une seconde solution consiste à affecter à tout point extrait un angle robuste, puis de calculer le descripteur relativement à cette orientation principale. Le descripteur SIFT [7] en est un exemple. Il se transpose ai-

sément dans les représentations « steerables ». L'extraction de l'orientation principale s'effectue à partir des pixels  $\{x_i, y_j\}_{i,j}$  du voisinage  $16 \times 16$  du point extrait  $(x, y)$ . En chacun de ces points est calculée l'orientation maximisant l'énergie définie par Eqn. 1 et Eqn. 7:

$$\theta_{i,j} = \arg \max_{0 \leq p \leq 35} R(x_i, y_j, s; \frac{p\pi}{18}), \quad (8)$$

et son poids associé est donné par

$$m_{i,j} = R(x_i, y_j, s; \theta_{i,j}) \quad (9)$$

L'orientation principale affectée au point d'intérêt est celle où l'histogramme des orientations locales pondérées est maximale. Cette orientation est utilisée pour partitionner le voisinage  $16 \times 16$  en  $4 \times 4$  carré de taille  $4 \times 4$  pixels. Le descripteur SIFT finalement calculé est constitué de la concaténation de chacun des histogrammes des orientations pondérées calculées dans chacun de ces carrés. Le graphique de gauche de Fig. 2 montre que l'appariement de points par leur descripteur SIFT est presque parfait. Le graphique du milieu montre une nette dégradation lorsque cet appariement s'effectue à partir des moment différentiels, et celui de droite donne un résultat intermédiaire pour notre transposition de SIFT aux représentations « steerables ». La dégradation s'explique par la redondance beaucoup plus faible de ces représentations par rapport à celle utilisée dans la version originale de SIFT. En particulier, l'image n'est pas interpolée sur une grille quatre fois plus fine lors du traitement de la première octave. Comme le montrent les résultats présentés en conclusion, un compromis est à trouver entre la redondance de la représentation et la robustesse des caractéristiques extraites.

## 5 Conclusion

L'espace-échelle Gaussien est l'unique représentation utilisée pour l'extraction de caractéristiques locales de bas niveau. Son unicité provient des contraintes de covariance aux similitudes et de causalité. Si l'on relâche cette dernière contrainte, de nombreuses représentations sont possibles, parmi lesquelles les représentations « steerables ». Elles ont l'avantage d'être creuses et de faible redondance,

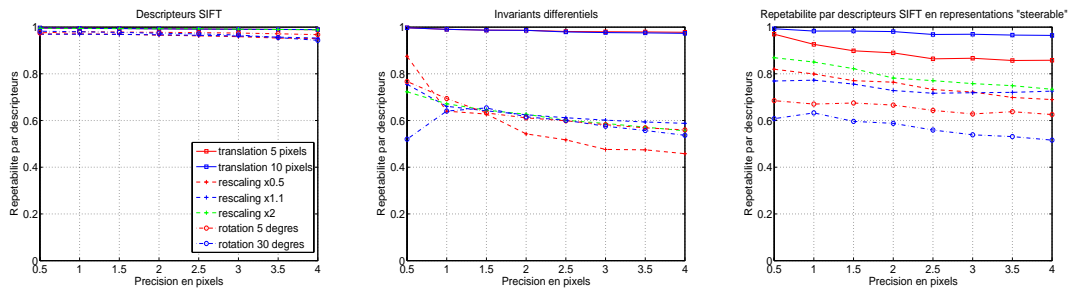


FIG. 2: Répétabilité par descripteurs des descripteurs locaux SIFT, des invariants différentiels, et du descripteur SIFT transposé dans les représentations "steerable".

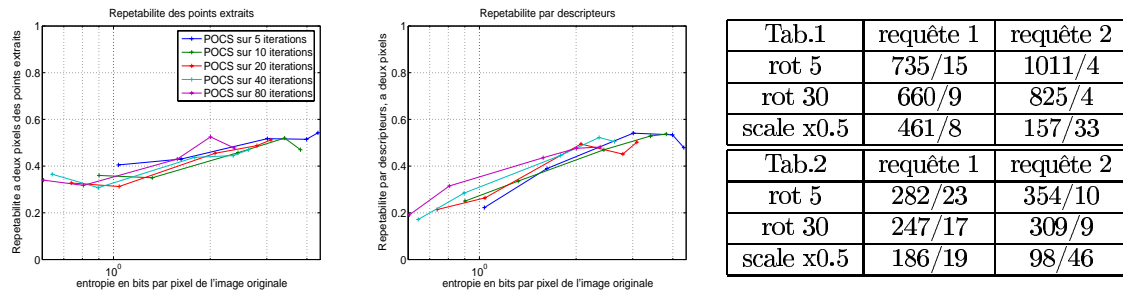


FIG. 3: Figures de répétabilité des points et par descripteurs en fonction de l'entropie de la représentation, et tableau des votes de recherche de copie (cf. conclusion)

permettant ainsi de concevoir des schémas de compression. Compressant par POCS [12] avec différents seuils, et quantifiant uniformément sur 5 bits, Fig. 3 donne les répétabilités à deux pixels en fonction de l'entropie de la représentation, pour une rotation de 10 degrés. La dégradation est importante, mais pas suffisamment pour empêcher l'extraction des caractéristiques locales directement dans le domaine compressé. La capacité de retrouver l'image originale à partir de l'image transformée reste très bonne. Ce test est décrit par le tableau de Fig. 3. Tab.1 donne, pour une base de 16000 images de taille  $480 \times 320$ , le nombre de votes de la "bonne" image et le nombre de votes le plus élevé parmi les "mauvaises" images. Tab.2 donne la même information pour une base de 3000 images compressées et quantifiée à 2 bits par pixels de l'image originale.

## Références

- [1] B. Beferull-Lozano and A. Ortega. Coding techniques for oversampled steerable transforms. In *Proc. of thirty-third Intl. Asilomar Conf. on Signals, Systems and Computers*, 1999.
- [2] J. Canny. A computational approach to edge detection. *Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(6):679–698, November 1986.
- [3] C. Harris and M. Stephens. A combined corner and edge detector. In *Proceedings of Fourth Alvey Vision Conf.*, pages 147–151, 1988.
- [4] N. Kingsbury. The dual-tee complex wavelet transform: a new efficient tool for image restoration and enhancement. In *European Signal Processing Conf.*, pages 319–322, 1998.
- [5] J.J. Koenderinck and A.J. Van Doorn. Representation of local geometry in the visual system. *Biological Cybernetics*, 55(6):367–375, March 1987.
- [6] T. Lindeberg. *Scale-space theory in computer vision*. Kluwer Academic Publisher, 1994.
- [7] D.G. Lowe. Object recognition from local scale-invariant features. In *Intl. Conf. on Computer Vision*, pages 1150–1157, 1999.
- [8] C. Schmid and R. Mohr. Local grayvalue invariants for image retrieval. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 19(5):530–534, May 1997.
- [9] C. Schmid, R. Mohr, and C. Bauckhage. Comparing and evaluating interest points. In *Intl. Conf. on Computer Vision*, pages 230–235, 1998.
- [10] E.P. Simoncelli, W.T. Freeman E.H. Adelson, and D.J. Heeger. Shiftable multiscale transforms. *IEEE Trans. on Information Theory*, 38(2):587–607, March 1992.
- [11] A.P. Witkin. Scale space filtering. In *Intl. Joint Conf. on Artificial Intelligence*, pages 1019–1022, 1983.
- [12] D.C. Youla. Generalized image restoration by the method of alternating orthogonal projections. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, 25(9):694–702, September 1978.

# Filtrage adaptatif non-linéaire par méthodes de gradient stochastique court-terme à noyau

Cédric RICHARD

ISTIT (FRE CNRS 2732) - Équipe Modélisation et Sécurité des Systèmes  
Université de Technologie de Troyes, 12 rue Marie Curie, BP 2060, 10010 Troyes cedex, France  
cedric.richard@utt.fr

## Résumé –

Les algorithmes à noyau tels que les Support Vector Machines suscitent un intérêt sans cesse grandissant depuis près de dix ans, essentiellement dans le cadre de tâches de classification et de régression. Ils reposent pour la plupart sur le coup du noyau, selon l'appellation consacrée, et le théorème de représentation. Ces deux éléments permettent de créer des versions non-linéaires de méthodes de traitement de données originellement linéaires, avec un surcoût calculatoire modique et sans qu'il soit nécessaire de modifier l'architecture générale des algorithmes. Dans cet article, on montre que les noyaux reproduisants offrent des perspectives intéressantes pour l'élaboration de filtres adaptatifs non-linéaires de type gradient stochastique. Les avantages liés au caractère linéaire de la structure par rapport aux paramètres à estimer perdurent.

## Abstract –

Kernel-based algorithms such as Support Vector Machines have been a topic of considerable interest over the last ten years, most notably for classification and regression. The use of kernels, through the kernel trick and the representer theorem, is an attractive computational shortcut to create nonlinear versions of conventional linear algorithms. Here we demonstrate the versatility and utility of this family of methods to develop nonlinear adaptive filtering algorithms, especially of the least-mean square type. The advantage of linear-in-the parameters estimation remains.

## 1 Introduction

Le thème du filtrage adaptatif a suscité un intérêt considérable au cours des trente dernières années car il vise à apporter des éléments de réponse à deux problèmes récurrents et souvent associés en traitement du signal, la modélisation de systèmes non-stationnaires et la carence en information statistique *a priori* [1, 2]. Le caractère linéaire des modèles généralement retenus est inhérent à leur interprétabilité et leur identification aisées. Nul n'ignore toutefois que les modèles non-linéaires sont la promesse de performances accrues, hélas au prix de difficultés conceptuelles et de mise en œuvre [3]. Les filtres polynômiaux et réseaux de neurones, souvent retenus en filtrage adaptatif non-linéaire, n'échappent pas à la règle. Les premiers sont généralement dotés de paramètres à déterminer en nombre rédhibitoire [4], tandis que les seconds représentent le stade ultime du modèle de type boîte noire et pâtissent d'une optimisation assez périlleuse [5]. Confronté depuis toujours à des difficultés similaires, le domaine de la reconnaissance des formes a récemment apporté des éléments de solution convaincants au travers des méthodes à noyau [6]. Elles sont pour la plupart issues d'algorithmes originellement linéaires auxquels on a pu appliquer deux principes clés : le coup du noyau [7] et le théorème de représentation [8].

L'objectif de cet article est d'adapter la stratégie mise en œuvre par les méthodes à noyau à la problématique particulière du filtrage adaptatif. Si la forme retenue est celle d'une méthode de gradient stochastique à noyau, l'approche proposée se veut générique afin de ne pas tomber dans les travers d'un algorithme ad'hoc. Elle offre en revanche des perspectives vers d'autres stratégies telles que RLS, ou encore QR-LS et inverse QR-LS à noyau. L'article est organisé ainsi. Dans un premier

temps, nous présentons les principes de base communs à la majorité des méthodes à noyau. Nous illustrons ceux-ci sur le problème du filtrage optimal, point de départ de la solution adaptative présentée dans un second temps. Des simulations et quelques perspectives viennent conclure cette étude.

## 2 Méthodes à noyau reproduisant : les figures imposées

Le coup du noyau et le théorème de représentation sont des principes récurrents dans le domaine des méthodes à noyau. Leur présentation fait ici suite à celle de la notion de noyau.

### 2.1 Notions fondamentales de noyaux

Si les notions de noyau défini positif et de noyau reproduisant peuvent être envisagées dans une perspective plus large [9, 10], le sujet traité dans cet article conduit à restreindre l'espace  $\mathcal{U}$  des observations à  $\mathbb{R}^p$  ou tout sous-espace non-vide de celui-ci. Un noyau est une fonction symétrique  $\kappa(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$  de  $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$  dans  $\mathbb{R}$ . On rappelle la définition d'un noyau défini positif.

**Définition 1.** On dit d'un noyau  $\kappa$  qu'il est défini positif sur  $\mathcal{U}$  s'il vérifie

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \kappa(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) \geq 0 \quad (1)$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathcal{U}$  et  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ .

On note  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$  un espace de Hilbert de fonctions de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathbb{R}$ . Le caractère reproduisant d'un noyau au sein de  $\mathcal{H}$ , lorsqu'il a lieu, couvre les notions suivantes.

Noyaux projectifs		Noyaux radiaux	
sigmoïdal	$\tanh(\alpha_0 + \beta_0 \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle)$	multi-quadratique	$\sqrt{\alpha_0^2 + \ \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\ ^2}$
polynomial homogène	$(\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle)^q$	multi-quadratique inverse	$1/\sqrt{\alpha_0^2 + \ \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\ ^2}$
polynomial non-homogène	$(\alpha_0 + \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle)^q$	Thin plate spline	$\ \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\ ^{2\gamma_0} \ln \ \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\ $

Table 1: Exemples de noyaux reproduisants

**Définition 2.** Une fonction  $\kappa(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$  de  $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$  dans  $\mathbb{R}$  est le noyau reproduisant de  $\mathcal{H}$ , s'il en admet un, si et seulement si

- la fonction  $\kappa_{u_i} : \mathbf{u}_j \mapsto \kappa_{u_i}(\mathbf{u}_j) = \kappa(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$  appartient à  $\mathcal{H}$ , quel que soit  $\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$  fixé ;
- on a  $\psi(\mathbf{u}_i) = \langle \psi, \kappa_{u_i} \rangle_{\mathcal{H}}$  pour tout  $\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$  et  $\psi \in \mathcal{H}$ .

On peut montrer que tout noyau défini positif  $\kappa$  est le noyau reproduisant d'un espace de Hilbert de fonctions de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathbb{R}$  en exhibant directement celui-ci. On considère pour cela l'espace vectoriel  $\mathcal{H}_0$  engendré par les fonctions  $\{\kappa_u\}_{u \in \mathcal{U}}$ , auquel on associe le produit scalaire

$$\langle \psi, \phi \rangle_{\mathcal{H}_0} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \kappa(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j), \quad (2)$$

avec  $\psi = \sum_{i=1}^n a_i \kappa_{u_i}$  et  $\phi = \sum_{j=1}^m b_j \kappa_{u_j}$  appartenant à l'espace  $\mathcal{H}_0$ . Il s'agit donc là d'un espace pré-hilbertien, que l'on complète conformément à [9] de sorte que toute suite de Cauchy y converge. On aboutit ainsi à l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  à noyau reproduisant  $\kappa$  recherché. Réciproquement, on démontre que tout noyau reproduisant est défini positif en considérant l'élément  $\psi = \sum_{i=1}^n a_i \kappa_{u_i}$  de  $\mathcal{H}$ , et en notant que le membre de gauche de (1) correspond alors à  $\|\psi\|_{\mathcal{H}}^2$ . Le tableau 1 présente quelques noyaux reproduisants, d'autres exemples ainsi que des règles permettant de les combiner étant consultables dans [6, 11].

## 2.2 Coup du noyau, théorème de représentation

De la propriété  $\psi(\mathbf{u}_i) = \langle \psi, \kappa_{u_i} \rangle_{\mathcal{H}}$  issue de la définition 2 résulte une propriété fondamentale des espaces de Hilbert à noyau reproduisant. En remplaçant  $\psi$  par  $\kappa_{u_j}$ , on aboutit en effet à la relation

$$\kappa(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \langle \kappa_{u_j}, \kappa_{u_i} \rangle_{\mathcal{H}} \quad (3)$$

quels que soient  $\mathbf{u}_i$  et  $\mathbf{u}_j \in \mathcal{U}$ . Le noyau  $\kappa$  fournit donc le produit scalaire des images dans  $\mathcal{H}$  de toute paire d'éléments de  $\mathcal{U}$ , sans qu'il soit nécessaire de les expliciter. Ce *coup du noyau*, selon l'appellation consacrée, permet d'élaborer des méthodes non-linéaires de traitement de données à partir d'approches linéaires sous réserve que celles-ci puissent s'exprimer uniquement en fonction de produits scalaires des observations. Il suffit en effet de remplacer chacun d'eux par un noyau non-linéaire. La structure des algorithmes demeure alors inchangée et le surcoût calculatoire dû à l'évaluation des noyaux faible.

Pour qu'il soit opérationnel, le coup du noyau nécessite souvent d'être associé au théorème de représentation [8, 12]. Ce théorème établit que toute fonction  $\psi^*$  d'un espace de Hilbert à noyau reproduisant  $\mathcal{H}$  qui minimise un coût

$$J((\mathbf{u}_1, y_1, \psi(\mathbf{u}_1)), \dots, (\mathbf{u}_n, y_n, \psi(\mathbf{u}_n))) + g(\|\psi\|_{\mathcal{H}}^2), \quad (4)$$

impliquant  $n$  sorties  $\psi(\mathbf{u}_i)$  obtenues pour des entrées  $\mathbf{u}_i$  et éventuellement  $n$  sorties désirées  $y_i$ , avec  $g$  une fonction

monotone croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , peut s'écrire sous la forme

$$\psi^* = \sum_{i=1}^n a_i^* \kappa_{u_i}. \quad (5)$$

On démontre ceci en notant que toute fonction  $\psi$  de  $\mathcal{H}$  se décompose selon  $\psi = \sum_{i=1}^n a_i \kappa_{u_i} + \psi^\perp$ , avec  $\langle \psi^\perp, \kappa_{u_i} \rangle_{\mathcal{H}} = 0$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ . Puisque  $\psi(\mathbf{u}_j) = \langle \psi, \kappa_{u_j} \rangle_{\mathcal{H}}$ , la valeur de  $\psi(\mathbf{u}_j)$  n'est donc pas affectée par  $\psi^\perp$ , pour  $j = 1, \dots, n$ .

## 3 Applications au filtrage

Le coup du noyau et le théorème de représentation trouvent une application dans le problème du filtrage optimum. Elle est ici décrite avant de s'intéresser à une technique de filtrage adaptatif à noyau basée sur un algorithme de gradient stochastique.

### 3.1 Filtrage optimum à noyau

Soit  $\kappa$  un noyau reproduisant et  $\mathcal{H}$  l'espace de Hilbert qui lui est associé. On s'intéresse préalablement à la recherche d'une fonction  $\hat{\psi}$  de  $\mathcal{H}$  minimisant l'erreur quadratique

$$\hat{\psi} = \arg \min_{\psi \in \mathcal{H}} \sum_{i=1}^n |d(i) - \psi(\mathbf{u}_i)|^2 \quad (6)$$

entre  $n$  sorties désirées notées  $d(i)$  et celles fournies par un modèle non-linéaire  $y(i) = \psi(\mathbf{u}_i)$  excité par des entrées  $\mathbf{u}_i$ , pour  $i = 1, 2, \dots, n$ . En vertu du théorème de représentation, on sait que la fonction recherchée peut s'exprimer sous la forme d'une série de noyaux dépendant des données disponibles, soit  $\psi(\cdot) = \sum_{k=1}^n \alpha(k) \kappa(\cdot, \mathbf{u}_k)$ . On aboutit donc à la formulation duale

$$y(i) = \sum_{k=1}^n \alpha(k) \kappa(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k) = \boldsymbol{\alpha}^t \boldsymbol{\kappa}_i \quad (7)$$

où  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\boldsymbol{\kappa}_i = (\kappa(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_1) \dots \kappa(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_n))^t$  appartiennent à  $\mathbb{R}^n$ . La résolution du problème (6) se réduit donc à la minimisation de la fonction coût  $J(\boldsymbol{\alpha}) = \|\mathbf{d} - \mathbf{K} \boldsymbol{\alpha}\|^2$ , où  $\mathbf{K}$  est la matrice de Gram telle que  $\mathbf{K}(i, j) = \kappa(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$ . La solution  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$  est obtenue en résolvant le système linéaire de taille  $(n \times n)$

$$(\mathbf{K}^t \mathbf{K}) \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{K}^t \mathbf{d}. \quad (8)$$

Il est à noter qu'à un facteur  $\frac{1}{n}$  près, les deux membres de cette expression intègrent une estimation de la matrice de corrélation du vecteur  $\boldsymbol{\kappa}$ , et de l'intercorrélation de  $\boldsymbol{\kappa}$  et  $\mathbf{d}$ .

### 3.2 Filtrage adaptatif à noyau

Le filtrage adaptatif pose la question du traitement d'un flux de données et de la mise à jour itérative de la solution  $\hat{\psi}(\cdot)$  à l'arrivée de chaque nouvelle observation. La méthode optimale esquissée ci-dessus ne peut clairement être mise en œuvre

noyau	polynôme $q = 2$	polynôme $q = 3$	polynôme $q = 4$	gaussien $\sigma_0^2 = 0.1$	gaussien $\sigma_0^2 = 0.55$	gaussien $\sigma_0^2 = 1.0$	algorithme NLMS
$\hat{\sigma}_e^2$	<b>0.0436</b>	0.0565	0.0940	0.0394	<b>0.0385</b>	0.0392	<b>0.1637</b>

Table 2: Récapitulatif des résultats obtenus en simulation

dans ce contexte. Elle repose en effet sur l'inversion d'une matrice et une formulation duale de la solution dont les dimensions sont précisément le nombre de données parvenues à l'instant considéré. Afin de pallier cette difficulté, de précédents travaux ont suggéré de contrôler l'extension du modèle (7) avant de procéder à la détermination de  $\alpha$  [13, 14, 15]. Supposons qu'à l'instant  $n$ , le modèle s'écrive sous la forme  $\psi_n(\cdot) = \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \alpha(k) \kappa(\cdot, \mathbf{u}_k)$  où  $\mathcal{K}_n$  désigne un ensemble d'indices. A l'instant suivant, le noyau  $\kappa(\cdot, \mathbf{u}_{n+1})$  n'est introduit dans l'expression de  $\psi_{n+1}(\cdot)$  que s'il apporte une richesse jugée suffisante. Ceci se traduit dans [13] par la vérification de la condition  $\min_{\gamma} \|\kappa(\cdot, \mathbf{u}_{n+1}) - \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \gamma_k \kappa(\cdot, \mathbf{u}_k)\|_{\mathcal{H}}^2 > \nu$ , où  $\nu$  est un seuil fixé au préalable. Un critère équivalent, au facteur  $\hat{\alpha}(n+1)$  près, est considéré dans [14, 15] sous une forme différente. Les mises en œuvre diffèrent également puisque dans [14, 15], par exemple, chaque itération s'achève par la recherche puis la suppression éventuelle du noyau contribuant le moins à la décroissance de  $J(\alpha)$ . Dans [13] en revanche, les auteurs laissent croître librement l'ordre du modèle pour avoir démontré que l'ensemble  $\mathcal{K}_\infty$  est de cardinal fini. En environnement non-stationnaire, ceci pose toutefois la question de la pertinence et de la parcimonie d'un modèle dont le dictionnaire  $\{\kappa(\cdot, \mathbf{u}_k)\}_{k \in \mathcal{K}_\infty}$  est élaboré au cours des premières itérations, solution que nous avons par ailleurs adoptée dans de précédents travaux [16, 17]. Outre l'importante surcharge calculatoire occasionnée par la régulation de la taille du modèle, un reproche s'adressant à [13] et [14, 15] réside dans le fait que les algorithmes de mise à jour des coefficients du filtre sont uniquement de type "itératif sur l'ordre", privant par là-même l'utilisateur d'accéder à une plus grande variété de méthodes de filtrage adaptatif.

Afin de s'affranchir des trois inconvénients mentionnés ci-dessus, nous proposons d'adopter une approche court-terme en reformulant le critère (6) ainsi :

$$\hat{\psi}_n = \arg \min_{\psi \in \mathcal{H}_n} \sum_{i=1}^n |d(i) - \psi(\mathbf{u}_i)|^2 \quad (9)$$

où  $\mathcal{H}_n$  est le sous-espace de  $\mathcal{H}$  engendré par les  $m$  fonctions  $\kappa(\cdot, \mathbf{u}_k)$  les plus récentes, c'est-à-dire telles que  $k = n - m + 1, \dots, n$ . Parce que  $\mathcal{H}_n$  est lui-même un espace de Hilbert à noyau reproduisant  $\kappa$ , nous pouvons rechercher une solution au problème (9) sous la forme

$$\psi_n(\mathbf{u}_i) = \sum_{k=n-m+1}^n \alpha_n(k) \kappa(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k) = \alpha_n^t \boldsymbol{\kappa}_{i,n} \quad (10)$$

La fonction  $\hat{\psi}_n(\cdot)$  est finalement obtenue en considérant le système linéaire de taille  $(m \times m)$  suivant

$$(\mathbf{K}_n^t \mathbf{K}_n) \boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{K}_n^t \mathbf{d}_n, \quad (11)$$

où  $\mathbf{K}_n$  est la matrice de taille  $(n \times m)$  dont la ligne  $i$  correspond à  $\boldsymbol{\kappa}_{i,n}^t$ , et  $\mathbf{d}_n$  est le vecteur des sorties désirées disponibles de l'origine à l'instant  $n$ . Par rapport à l'approche (6)-(8), la

stratégie court-terme (9)-(11) ne nécessite pas l'inversion d'une matrice dont la taille croît avec le nombre de données reçues. S'il s'agit déjà là d'un avantage décisif dans un contexte de filtrage adaptatif, on évitera toutefois de répéter à chaque pas de temps la coûteuse résolution du système (11). Dans ce document, nous portons notre attention sur des méthodes de gradient stochastique même si la formulation proposée se prête également à d'autres stratégies classiques telles que RLS, ou encore QR-LS et inverse QR-LS. Les méthodes de gradient stochastique consistent à remplacer le gradient de la fonction coût par une approximation de celui-ci calculée à partir des données disponibles. En particulier, la méthode LMS repose sur l'approximation de  $\mathbf{K}_n^t \mathbf{K}_n$  et  $\mathbf{K}_n^t \mathbf{d}_n$  par les grandeurs instantanées respectives  $\boldsymbol{\kappa}_{n,n} \boldsymbol{\kappa}_{n,n}^t$  et  $d(n) \boldsymbol{\kappa}_{n,n}$ . La relation de mise à jour des paramètres de la solution est alors donnée par

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_n = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{n-1} + \eta_n \boldsymbol{\kappa}_{n,n} (d(n) - \boldsymbol{\kappa}_{n,n}^t \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{n-1}), \quad (12)$$

avec  $\eta^{(n)} > 0$ . Remarquons qu'en multipliant à gauche chacun des membres de cette expression par  $\boldsymbol{\kappa}_{n,n}^t$ , on trouve

$$\hat{\psi}_n(\mathbf{u}_n) = \hat{\psi}_{n-1}(\mathbf{u}_n) + \eta_n \|\boldsymbol{\kappa}_{n,n}\|^2 (d(n) - \hat{\psi}_{n-1}(\mathbf{u}_n)). \quad (13)$$

Les discussions sur la convergence et à la stabilité de cet algorithme demeurent inchangées par rapport à l'approche linéaire. Enfin, cette formulation peut être déclinée sans difficulté selon les classiques variantes  $\epsilon$ -NLMS, sign-error LMS et autre leaky-LMS.

### 3.3 Simulations

Nous nous intéressons au système non-linéaire suivant

$$z(n) = 0.5 z(n-1) + 0.3 z(n-1) u(n-1) + 0.2 u(n-1) + 0.05 z^2(n-1) + 0.6 u^2(n-1) \quad (14)$$

initialisée par  $z(1) = 1$ . On considère que l'entrée  $u(n)$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ , et que la sortie observée est donnée par  $d(n) = z(n) + b(n)$  où  $b(n)$  est un bruit blanc de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . La méthode NLMS court-terme à noyau, obtenue en posant  $\eta_n = 1/\|\boldsymbol{\kappa}_{n,n}\|^2$  dans la relation (12), a été mise en œuvre afin d'estimer un modèle de la forme  $d(n) = \psi(u(n-1), d(n-1))$ . La largeur  $m$  de l'horizon d'observation a été arbitrairement fixée à 2, signifiant que  $\boldsymbol{\alpha}_n \in \mathbb{R}^2$ , et les noyaux polynômiaux et gaussiens rappelés ci-dessous ont été successivement testés :

$$\kappa(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = (1 + \mathbf{u}_i^t \mathbf{u}_j)^q \quad (15)$$

$$\kappa(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \exp(-\|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\|^2 / 2\sigma_0^2), \quad (16)$$

où  $q \in \mathbb{N}^*$  et  $\sigma_0^2 \in \mathbb{R}^*$ . A titre de remarques, rappelons que le noyau polynômial confère au modèle estimé la structure d'un filtre de Volterra de degré  $q$ , et que l'espace  $\mathcal{H}$  associé au noyau gaussien est de dimension infinie. Ainsi ces noyaux permettent-ils d'accéder à des modèles d'une complexité certaine, au prix d'une charge calculatoire modeste. Le tableau 2 présente la variance  $\sigma_e^2$  de l'erreur de prédiction pour différents paramètres de noyaux. Celle-ci a été estimée à partir de 100

réalisations de signaux de 1000 échantillons. On remarque que le noyau gaussien de variance 0.55 a conduit aux meilleures performances, parmi tous les choix de  $\sigma_0^2$  testés entre 0.1 et 1.4, avec un pas de 0.05. Celles-ci sont supérieures à celles obtenues avec un noyau polynômial, plus sensible au bruit, ainsi qu'à celles de l'algorithme NLMS classique, linéaire donc inapproprié pour modéliser le système (14).

## 4 Conclusion

Dans cet article, nous avons montré que les espaces de Hilbert à noyau reproduisant offrent un cadre intéressant pour l'élaboration de filtres non-linéaires, optimaux ou adaptatifs. L'intérêt majeur de ces espaces, dans lesquels s'effectue la recherche d'une solution, est que cette dernière s'y exprime sous forme d'une décomposition en série de noyaux reproduisants. Le nombre de paramètres à estimer est alors indépendant de la complexité du filtre, que caractérise par exemple le degré du polynôme dans le cas particulier d'une série de Volterra. Les avantages liés au caractère linéaire de la structure par rapport aux paramètres à estimer perdurent. Dans ce contexte, nous nous sommes plus particulièrement intéressés à une approche adaptative court-terme de gradient stochastique à noyau. Nous avons montré sur un exemple qu'elle offre des performances supérieures à la méthode LMS dont elle s'inspire. La stratégie présentée offre de nombreuses perspectives d'extension non-linéaires d'autres méthodes de filtrage adaptatif conventionnelles.

## Références

- [1] A. H. Sayed, *Fundamentals of adaptive filtering*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2003.
- [2] S. Haykin, *Adaptive filter theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1991.
- [3] G. B. Giannakis et E. Serpedin, "A bibliography on nonlinear system identification," *Signal Processing*, vol. 81, pp. 553–580, 2001.
- [4] V. J. Mathews et G. L. Sicuranze, *Polynomial signal processing*. New York, NY: John Wiley & Sons, 2000.
- [5] J. Sjöberg, Q. Zhang, L. Ljung, A. Benveniste, B. Deylon, P.-Y. Glorennec, H. Hjalmarsson, et A. Juditsky, "Nonlinear black-box modeling in system identification: a unified overview," *Automatica*, vol. 31, no. 12, pp. 1691–1724, 1995.
- [6] V. N. Vapnik, *The nature of statistical learning theory*. New York, NY: Springer, 1995.
- [7] B. Boser, I. Guyon, et V. Vapnik, "A training algorithm for optimal margin classifiers," in *Proc. Fifth Annual Workshop on Computational Learning Theory*, pp. 144–152.
- [8] B. Schölkopf, R. Herbrich, et R. Williamson, "A generalized representer theorem," *NeuroCOLT*, Royal Holloway College, University of London, UK, Tech. Rep. NC2-TR-2000-81, 2000.
- [9] N. Aronszajn, "Theory of reproducing kernels," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 68, pp. 337–404, 1950.
- [10] F. Cucker et S. Smale, "On the mathematical foundations of learning," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 39, no. 1, pp. 1–49, 2002.
- [11] R. Herbrich, *Learning kernel classifiers. Theory and algorithms*. Cambridge, MA: The MIT Press, 2002.
- [12] G. Kimeldorf et G. Wahba, "Some results on Tchebycheffian spline functions," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 33, pp. 82–95, 1971.
- [13] Y. Engel, S. Mannor, et R. Meir, "Kernel recursive least squares," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 52, no. 8, pp. 2275–2285, 2004.
- [14] T. J. Dodd, V. Kadirkamanathan, et R. F. Harrison, "Function estimation in Hilbert space using sequential projections," in *Proc. IFAC Conference on Intelligent Control Systems and Signal Processing*, 2003, pp. 113–118.
- [15] T. J. Dodd, B. Mitchinson, et R. F. Harrison, "Sparse stochastic gradient descent learning in kernel models," in *Proc. Second International Conference on Computational Intelligence, Robotics and Autonomous Systems*, 2003.
- [16] C. Richard, R. Lengellé, I. Constantin, et L. Soufflet, "Structures à noyau reproduisant pour le filtrage adaptatif," in *Proc. Colloque Grets, 2003*.
- [17] I. Constantin, C. Richard, R. Lengellé, et L. Soufflet, "Regularized kernel-based Wiener filtering. application to magnetoencephalographic signals denoising," in *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 2005.



## Algorithmes du module constant en filtrage adaptatif : impact des progrès récents

M.BELLANGER

CNAM, 292 rue Saint-Martin, 75141 Paris cedex 03

[bellang@cnam.fr](mailto:bellang@cnam.fr)

**Résumé** - Les avancées importantes obtenues récemment sur les algorithmes du module constant permettent de mieux cerner leur fonctionnement et leurs performances. Ces résultats sont rappelés et leur impact est analysé sur deux problèmes critiques pour les applications que sont les minima locaux et l'initialisation. Une approche est proposée pour l'initialisation, en relation avec le choix du retard appliqué au signal de référence dans l'algorithme de minimisation de l'erreur quadratique moyenne.

**Abstract** - Important results have been obtained recently concerning the constant modulus criteria for adaptive filtering and their relationships to the minimum mean square error criterion. These results are reviewed and their impact on the behaviour and performance of the corresponding algorithms is assessed, with emphasis on two critical issues, namely local minima and initialization. The scheme proposed for initialization is related to the selection of the reference signal delay in the MMSE technique.

### 1. Introduction

Les algorithmes du module constants ont été proposés il y a plus de vingt ans pour l'égalisation adaptative en transmission numérique et en radiodiffusion à modulation de fréquence. Bien qu'énormément de travaux leur aient été consacrés, ils sont à ce jour pas, ou peu, utilisés dans les matériels. En effet, les résultats obtenus ont été soit très théoriques et peu utilisables, soit empiriques et insuffisants pour donner confiance aux concepteurs de systèmes.

Un ensemble de progrès récents, qui permettent de mieux comprendre leur fonctionnement et de prévoir avec davantage d'assurance leurs performances, pourraient changer cette situation.

Le présent article a pour objectif d'apporter des éclaircissements sur deux problèmes importants des algorithmes du module constant. En effet, en utilisant les relations entre les critères de l'erreur quadratique moyenne minimale (EQMM) et du module constant, on peut déterminer la position des minima locaux les plus significatifs et en déduire une stratégie d'initialisation de l'algorithme.

### 2. Les résultats récents

Les critères du module constant sont généralement désignés par  $CM(p,q)$ , où  $p$  représente l'exposant du module du signal en sortie du filtre et  $q$  l'exposant de

l'écart dans l'expression de la fonction coût. Les signaux correspondants sont les signaux complexes, car ils peuvent posséder la propriété de module constant, alors que les signaux réels, mise à part la séquence binaire, ne peuvent avoir cette propriété qu'en moyenne.

En filtrage adaptatif, seules les valeurs  $q = 2$  et  $p = 1$  ou  $p = 2$  sont à considérer en vue d'applications. En effet, la valeur  $q = 1$  conduit à un algorithme du signe, avec un effet de seuil généralement inacceptable. Les fonctions coût correspondantes s'écrivent :

$$\begin{aligned} J_{CM12} &= E[(1 - |y_n|)^2] \quad ; \\ J_{CM22} &= E[(1 - |y_n|^2)^2] \end{aligned} \quad (1)$$

en désignant par  $y_n$  le signal complexe en sortie du filtre. Entre ces deux fonctions, par un développement direct, la relation suivante peut être établie :

$$\begin{aligned} J_{CM12} &= \frac{1}{4} J_{CM22} + E[(1 - |y_n|)^3] \\ &\quad - \frac{1}{4} E[(1 - |y_n|)^4] \end{aligned} \quad (2)$$

En désignant par  $H$  le vecteur des coefficients du filtre, tel que  $y_n = H^T X_n$  où  $X_n$  est le vecteur des données d'entrée, il est clair que  $J_{CM22}$  est une fonction des coefficients comprenant des termes du

deuxième et du quatrième degré. Par contre  $J_{CM12}$  contient des termes du premier et du troisième degré par rapport à  $|y_n| = \sqrt{y_n y_n^*}$  et c'est une fonction non rationnelle des coefficients. Dans ces conditions, les travaux sur les algorithmes basés sur le critère du module constant se sont concentrés presque exclusivement sur le critère  $J_{CM22}$ .

Les algorithmes du module constant peuvent être évalués par comparaison avec l'algorithme basé sur le critère de la minimisation de l'erreur quadratique moyenne qui correspond à la fonction coût :

$$J_{EQMM} = E[|s_n - y_n|^2] \quad (3)$$

où  $s_n$  est le signal de référence. Si  $E_0$  désigne la valeur minimale de cette fonction à l'optimum des coefficients, un premier résultat a été de montrer que les coefficients qui minimisent  $J_{CM22}$  apportent un supplément d'erreur borné par  $E_0^2$  [1]. C'est à dire que si l'erreur est petite, le supplément d'erreur est très petit. Un deuxième résultat est l'approximation de Suyama-Attux [2]. Cette approximation exploite la symétrie de  $J_{CM22}$  par rapport aux coefficients et fournit, quand l'erreur de sortie est faible, une relation entre les fonctions coût :

$$J_{CM22} \approx \frac{1}{2} J_{EQMM}(H) J_{EQMM}(-H) \quad (4)$$

Cette relation permet de montrer que les coefficients du filtre obtenus par le critère du module constant sont en moyenne approximativement colinéaires avec ceux du critère EQMM et avec le facteur inférieur à l'unité suivant :

$$\frac{H_{CM2}}{H_{EQMM}} \approx 1 - \frac{1}{2} E_0 \left(1 - \frac{7}{4} E_0\right) \quad (5)$$

Le critère CM(2,2) conduit alors à la valeur suivante de l'erreur de sortie :

$$E_{CM2} \approx E_0 + \frac{1}{4} E_0^2 \left(1 - \frac{9}{2} E_0\right) \quad (6)$$

Cette approximation reste valable tant que l'inégalité suivante est vérifiée :  $E_0 < 2/9 = 0.222$ . Dans le domaine correspondant, le supplément d'erreur est inférieur à  $E_0^2/4$ , et, donc, nettement inférieur à la borne.

Ensuite, une relation a été établie entre les deux critères du module constant [3]. Elle montre que les coefficients obtenus avec  $J_{CM12}$  sont également en moyenne approximativement colinéaires avec ceux du critère EQMM, mais avec un facteur supérieur à l'unité donné par :

$$\frac{H_{CM1}}{H_{EQMM}} \approx 1 + \frac{E_0}{4} \quad (7)$$

L'erreur de sortie s'exprime alors par :

$$E_{CM1} \approx E_0 + \frac{1}{16} E_0^2 \quad (8)$$

C'est à dire que  $J_{CM22}$  contracte les coefficients du filtre, alors que  $J_{CM12}$  les dilate. Ces résultats sont remarquablement vérifiés par les simulations et ils confirment les observations de certains auteurs qui exprimaient une préférence pour les algorithmes basés sur le critère CM(1,2) [4].

### 3. Les minima des algorithmes du module constant

Avec le critère de l'EQMM, les minima de la fonction coût sont associés aux retards introduits sur le signal de référence. Par exemple, le système correspondant à l'égalisation est représenté à la figure 1.

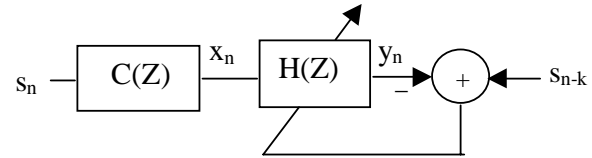


Fig.1. Filtre adaptatif en égalisation

Le signal reçu  $x_n$  s'exprime en fonction du signal source  $s_n$  et des coefficients  $c_i$  du canal par la convolution :

$$x_n = \sum_{i=0}^{L-1} c_i s_{n-i} \quad (9)$$

où  $L$  désigne la longueur du canal. La valeur optimale des coefficients de l'égaliseur s'écrit :

$$H_{opt}(k) = R_{X^*X}^{-1} P_{sX^*}(k) \quad (10)$$

où  $R_{X^*X}$  est la matrice d'autocorrélation du signal d'entrée et  $P_{sX^*}(k)$  le vecteur d'intercorrélation entre la référence et l'entrée :

$$P_{sX^*}(k) = E[s_{n-k} X_n^*] \quad (11)$$

avec  $k$  le retard de la référence et  $X_n^T = [x_n, \dots, x_{n+1-N}]$ , l'égaliseur comportant  $N$  coefficients. Le vecteur d'intercorrélation est non nul pour  $0 \leq k \leq L+N-2$  et il existe donc  $L+N-1$  valeurs du vecteur des coefficients  $H_{opt}(k)$ .

Le critère du module constant CM(2,2) conduit, par dérivation, à l'équation suivante pour déterminer les valeurs optimales des coefficients :

$$E[(1 - |y_n|^2) y_n X_n^*] = 0 \quad (12)$$

ou encore :

$$E[(1 - |y_n|^2) X_n^* X_n^t] H_{CM2} = 0 \quad (13)$$

Cette équation fait apparaître une indétermination sur la phase du vecteur des coefficients, qui est levée si l'on impose, par exemple, qu'un élément particulier du vecteur soit réel.

En fonction des éléments du vecteur des coefficients, l'équation (13) est du troisième degré et le système possède donc au maximum  $3^N$  zéros [5]. L'origine est l'un de ces zéros et il correspond à un maximum de la fonction coût. Les autres zéros apparaissent par couples puisqu'un changement de signe des coefficients ne modifie pas le système d'équations (13).

Soit  $2M$  le nombre de minima de la fonction coût. Deux minima quelconques sont nécessairement séparés par un point-selle. Il existe donc au moins  $2M(2M-1)/2$  points-selles. En fait, l'origine étant commune à tous les couples de minima, il faut retirer  $M-1$  à cette valeur. Le nombre de valeurs extrémales du système est alors au moins égal à  $2M^2 - 2M + 1 + 2M$  soit  $2M^2 + 1$ , ce qui conduit à l'inégalité suivante :

$$2M^2 + 1 \leq 3^N \quad (14)$$

Il vient ainsi pour les premières valeurs de  $M$  :

$$N = 2 ; 2M^2 + 1 \leq 9 ; M \leq 2$$

$$N = 3 ; 2M^2 + 1 \leq 27 ; M \leq 3$$

$$N = 4 ; 2M^2 + 1 \leq 81 ; M \leq 6$$

Comme illustration, soit le canal de fonction de transfert :  $C(Z) = 1 + 0,5 j Z^{-1}$  et un égaliseur à  $N=3$  coefficients. Le critère de l'EQMM conduit à 4 minima, avec les erreurs résiduelles suivantes :  $E_0 = [0,0118 \ 0,0471 \ 0,1882 \ 0,7529]$ . Les trois premières de ces valeurs sont inférieures à la borne indiquée précédemment dans la comparaison entre les critères EQMM et CM(2,2). On peut donc considérer qu'à chacun de ces trois minima de la fonction coût  $J_{EQMM}$  est associé un minimum voisin de la fonction coût  $J_{CM22}$  et qu'il n'y a pas d'autres minima puisque  $M \leq 3$ . En désignant par  $H_{opt}(i)$  avec  $0 \leq i \leq 3$  les vecteurs de coefficients associés aux 4 minima, on vérifie que, si l'algorithme du module constant est initialisé par les coefficients  $H_{opt}(3)$ , le vecteur des coefficients converge vers la valeur qu'il atteint quand il est initialisé par  $H_{opt}(2)$ . La même observation est faite avec le critère CM(1,2).

#### 4. Initialisation de l'algorithme du module constant

Le critère CM(2,2) conduit à la mise à jour suivante pour le vecteur des coefficients du filtre adaptatif :

$$H_{n+1} = H_n + \delta (1 - |y_{n+1}|^2) y_{n+1} X_{n+1}^* \quad (15)$$

où  $\delta$  est le pas d'adaptation de l'algorithme du gradient.

Comme  $y_{n+1} = X_{n+1}^t H_n$ , cette équation s'écrit aussi :

$$H_{n+1} = [I_N + \delta (1 - |y_{n+1}|^2) X_{n+1}^* X_{n+1}^t] H_n \quad (16)$$

et, par suite :

$$H_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} [I_N + \delta (1 - |y_i|^2) X_i^* X_i^t] H_0 \quad (17)$$

D'où la nécessité de l'initialisation. Comme indiqué précédemment, on remarque qu'une rotation de phase sur le vecteur  $H_0$  est conservée dans la suite de l'algorithme. En l'absence d'information particulière, le vecteur initial est choisi réel.

Pour le critère de l'EQMM, l'initialisation consiste à choisir la valeur du retard  $k$  appliqué au signal de référence. Le vecteur des coefficients correspondant s'exprime en fonction des coefficients de prédiction linéaire du signal d'entrée et des coefficients du canal. La question se pose ensuite de choisir le vecteur d'initialisation pour le critère du module constant. Compte tenu des relations entre les critères EQMM et CM(2,2), il apparaît judicieux de choisir un vecteur qui s'approche du vecteur de l'EQMM, pour le retard choisi, de manière à atteindre le minimum correspondant après convergence.

Les vecteurs de l'EQMM s'expriment en fonction de l'inverse de la matrice d'autocorrélation qui se factorise comme suit en fonction des paramètres de la prédiction linéaire avant [6]:

$$R_{X^*X}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots\dots\dots \\ & 1 & \dots\dots\dots \\ & -A_{N-1} & -A_{N-2} & \dots\dots\dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{aN-1}^{-1} & \dots\dots\dots 0 \\ 0 & E_{aN-2}^{-1} & \dots\dots\dots \\ 0 & \dots\dots\dots 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -A_{N-1}^* \\ 0 & 1 & -A_{N-2}^* \\ 0 & \dots\dots\dots 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Le terme  $A_{N-1}$  désigne le vecteur des coefficients de prédiction avant à l'ordre  $N-1$  et  $E_{aN-1}$  est la puissance

de l'erreur de prédiction avant correspondante. Pour le retard  $k=0$ , il vient :

$$H_{opt}(0) = R_{XX}^{-1} \begin{bmatrix} c_0^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = c_0^* E_{aN-1}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -A_{N-1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

c'est à dire que l'égalisation correspond à la prédiction linéaire avant d'ordre  $N-1$ , avec un facteur d'échelle. De même, pour  $k=1$ , on obtient :

$$H_{opt}(1) = [c_1^* - a_{1N-1}^* c_0^*] E_{aN-1}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -A_{N-1} \end{bmatrix} + c_0^* E_{aN-2}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -A_{N-2} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Ces expressions montrent que, si le signal reçu  $x(n)$  est faiblement corrélé, l'élément dominant dans le vecteur des coefficients de l'EQMM est celui dont l'indice correspond au retard. Dans ces conditions, la stratégie d'initialisation consiste à retenir pour vecteur d'initialisation le vecteur ayant tous ses éléments nuls, sauf l'élément dont l'indice est égal au retard  $k$ , qui est pris égal à l'unité :  $H_0 = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ . Le choix de l'unité est lié au fait que c'est le choix optimal si le canal introduit simplement un retard égal à  $k$ . Pour tenir compte de la puissance du signal reçu,  $\sigma_x^2$ , on peut aussi prendre la valeur  $1/\sigma_x$ .

## 5. Conclusion

Le choix du vecteur initial des coefficients est une des difficultés de la mise en œuvre des algorithmes du module constant. La stratégie qui a été proposée est liée à l'initialisation de l'EQMM. Dans le domaine de l'égalisation, en l'absence d'information sur le canal, on prend généralement un retard égal à la demi longueur de l'égaliseur pour l'EQMM, ce qui conduit à placer le « 1 »

au milieu du vecteur initial pour le module constant. Pour un signal reçu peu corrélé, c'est à dire un canal avec peu de distorsion, le vecteur des coefficients converge alors vers la solution de l'EQMM correspondante. Les conditions dans lesquelles il s'écarte de cette solution restent à étudier.

Les développements ont été menés pour le critère CM(2,2) et ils devraient s'appliquer également au critère CM(1,2). Cependant, une étude spécifique serait sans doute nécessaire pour tenir compte des particularités de ce critère et en particulier des positions des minima autres que les minima principaux.

## Bibliographie

- [1] P.Schniter and C.R.Johnson, « Bounds for the MSE performance of Constant Modulus Estimators », IEEE Trans. on Information Theory, vol.46, N°7, Nov.2000, pp.2544-2560.
- [2] R.Suyama, R.Attux et al., « Relations entre les Critères du Module Constant et de Wiener », Actes du colloque GRETSI'03, Paris, 8-11 septembre 2003.
- [3] M.Bellanger, « A Simple Comparison of Constant Modulus and Wiener Criteria for Equalization with Complex Signals », Digital Signal Processing, N°14, 2004, pp.429-437.
- [4] O.W.Kwon, C.K.Un and J.C.Lee, « Performance of Constant Modulus Adaptive Filters for Interference Cancellation », Signal Processing, Vol.26, N°2, Feb.1992, pp.185-196.
- [5] H.Jamali and T.Ogunfunmi, « Stationary Points of Finite Length Constant Modulus Optimization », Signal Processing 82, 2002, pp.625-641.
- [6] M.Bellanger, « Adaptive Digital Filters », Marcel Dekker Inc., 2<sup>nd</sup> edition, 2001.

# Evaluation de la précision des Algorithmes de Projection Affine en virgule Fixe

Romuald ROCHER, Daniel MENARD, Olivier SENTIEYS, Pascal SCALART  
ENSSAT/IRISA, Université de Rennes I  
6 rue de Kérampont, BP 80518, 22305 Lannion Cedex  
name@enssat.fr

**Résumé** – Le but de ce papier est de déterminer de manière analytique la puissance du bruit généré par une implémentation virgule fixe des Algorithmes de Projection Affine (APA). Ces algorithmes ont été développés dans les années 80 mais aucune étude de ce type n'a encore été menée. Dans cet article, nous définissons une expression analytique de la puissance du bruit puis celle-ci est appliquée à l'algorithme NLMS-OCF, un type d'Algorithme de Projection Affine. La validité du modèle est ensuite vérifiée par des simulations.

**Abstract** – The aim of this paper is to determine an analytical expression of the noise power generated by a fixed-point implementation of Affine Projection Algorithms (APA). These algorithms were developed 20 years ago but no study has been made about its fixed-point implementation. In this paper, an analytical expression of the noise power is defined and applied to the NLMS-OCF algorithm (an Affine Projection Algorithm). The model accuracy is verified by simulations.

## 1 Introduction

Les filtres adaptatifs sont employés dans de nombreux domaines tels que la réduction de bruit, l'égalisation, la prédiction linéaire et l'évaluation de canal. Les algorithmes développés pour le filtrage adaptatif sont principalement classifiés dans deux catégories. Ils sont basés soit sur les Moindres Carrés Récurrents (type RLS) soit sur les Algorithmes du Gradient (type LMS). Néanmoins, l'algorithme LMS est le plus souvent utilisé pour les applications temps réel embarquées car son implémentation est plus simple que celle de l'algorithme RLS. Cependant, les Algorithmes de Projection Affine (APA) ont été développés [6] pour avoir une convergence plus rapide comparée au LMS et pour réduire la complexité comparée au RLS. La convergence de cet algorithme a été étudiée dans [7] et [8] mais aucune étude n'est disponible sur son comportement avec l'arithmétique virgule fixe. Pour les systèmes embarqués, l'utilisation de l'arithmétique virgule fixe est exigée car elle permet de réduire la consommation d'énergie et le coût par rapport à l'arithmétique virgule flottante. Mais, l'arithmétique virgule fixe se traduit par une erreur non négligeable appelée bruit de quantification. Les différentes sources de bruit de quantification liées à la réduction de la largeur des données sont propagées dans le système et conduisent à un bruit global en sortie de celui-ci. Ces bruits sont modélisés par des bruits blancs uniformément répartis sur leur intervalle de définition et non-corrélés avec les autres signaux et autres bruits [9]. Il est nécessaire de s'assurer que ce bruit ne modifie pas le bon fonctionnement du système. Ainsi, la puissance de bruit doit être évaluée. Celle-ci peut être mesurée par des simulations (mais leur temps d'exécution est important) ou déterminée par une méthode analytique. Des méthodes analytiques ont été développées pour le LMS [2], [5] et pour le RLS [1]. Dans ce papier, un modèle est proposé pour l'APA. La puissance du bruit de quantification est déterminée pour calculer le Rapport Signal à Bruit de Quantification (RSBQ). Ce type d'expression est nécessaire pour réaliser des IP (propriétés intellectuelles)

paramétrables. Ces IP sont utilisées dans le cadre de l'implantation matérielle sur FPGA ou ASIC. L'utilisateur fournit une contrainte de précision à respecter en sortie du filtre. L'objectif est d'optimiser la largeur des données sous contrainte de précision des calculs, afin de minimiser la surface du circuit. Cette approche permet d'aboutir à une bonne adéquation algorithme architecture et à des temps de développement réduits.

L'objectif de ce papier est de déterminer l'expression analytique de la puissance du bruit dans l'algorithme APA pour tous les types de quantification (arrondi, arrondi convergent, troncature). La troncature est la plus utilisée car la plus simple d'implémentation, d'où l'intérêt de développer un modèle prenant en compte cette loi de quantification.

Dans le cas de la quantification d'un signal en arrondi convergent, la moyenne du bruit généré est nulle. Si la quantification est faite par troncature, la moyenne  $\mu_{b_y}$  du bruit généré est obtenue à l'aide de l'expression suivante [3]

$$\mu_{b_y} = \frac{q}{2}(1 - 2^{-k}) \quad (1)$$

où  $q$  désigne la pas de quantification et  $k$  le nombre de bits éliminés. Ainsi, dans le modèle développé, il est important de prendre en compte la moyenne des bruits et de ne pas la considérer comme nulle.

L'APA est décrit dans la section 2 et l'expression du bruit de sortie est déterminée analytiquement dans la section 3. Dans la section 4, le modèle est appliqué à l'algorithme NLMS-OCF. Enfin, en section 5, la validité du modèle est testée.

## 2 Implantation Virgule Fixe

En précision infinie, l'APA est défini par les équations suivantes

$$e_n = y_n - \underbrace{X_n^t w_n}_{\hat{y}_n} \quad (2)$$

$$w_{n+1} = w_n + \mu X_n [X_n^t X_n + \delta I_K]^{-1} e_n \quad (3)$$

où  $x_n$  représente le vecteur de taille  $N$  des données d'entrée  $[x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)]^t$ .  $X_n$  est la matrice de taille  $N \times K$  des  $K$  derniers vecteurs d'observation  $X_n = [x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-K+1}]$ . Les termes  $y_n$  et  $e_n$  représentent respectivement, le signal désiré et l'erreur commise et correspondent à des vecteurs de taille  $K$  et  $I_K$  est la matrice identité de taille  $K$ .  $\delta$  est une constante permettant de rendre régulière la matrice  $X_n^t X_n$  et est supposée être une somme de puissance de 2.

Le filtre en virgule fixe est représenté sur la figure 1. Les équations de l'APA deviennent

$$e'_n = y'_n - \underbrace{X_n'^t w'_n}_{\hat{y}'_n} - \eta_n \quad (4)$$

$$w'_{n+1} = w'_n + \mu X_n' [X_n'^t X_n' + \delta I_K]^{-1} e'_n + \gamma_n \quad (5)$$

où les primes dénotent les valeurs quantifiées.

$\gamma_n$  est un vecteur bruit de taille  $N$  dû au calcul de  $X_n' [X_n'^t X_n' + \delta I_K]^{-1} e'_n$ .  $\eta_n$  est un vecteur bruit de taille  $K$  généré par le filtre. Les autres bruits de quantification sont exprimés à l'aide des équations suivantes :

$$X'_n = X_n + \alpha_n \quad (6)$$

$$y'_n = y_n + \beta_n \quad (7)$$

$$[X_n'^t X_n' + \delta I_K]^{-1} = [X_n^t X_n + \delta I_K]^{-1} + \nu_n \quad (8)$$

$$w'_n = w_n + \rho_n \quad (9)$$

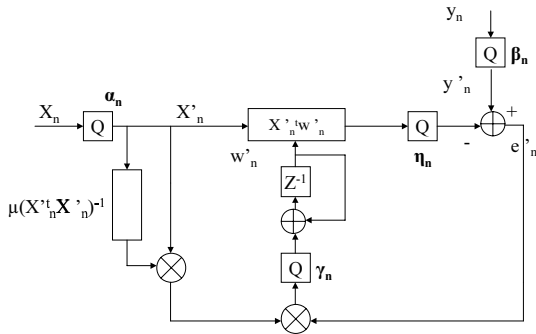


FIG. 1: Schéma de l'APA en virgule fixe

Le terme  $\rho_n$  n'est pas un bruit de quantification mais un écart entre les valeurs des coefficients quantifiés et leurs valeurs non quantifiés. Tel que démontré en [4],  $\nu_n$  est égal à

$$\nu_n = [X_n^t X_n + \delta I_K]^{-2} (\alpha_n^t X_n + X_n^t \alpha_n) + v_n \quad (10)$$

où  $v_n$  est une matrice d'erreur de taille  $N \times K$  due au calcul en virgule fixe de  $[X_n'^t X_n']^{-1}$ .

### 3 Puissance du bruit

L'objectif de cette partie est d'estimer analytiquement la puissance du bruit généré dans le système. L'expression du bruit en sortie du système est la suivante :

$$\begin{aligned} b_{y_n} &= \hat{y}'_n - \hat{y}_n \\ &= X_n'^t w'_n + \eta_n - X_n^t w_n \\ &= \alpha_n^t w_n + \eta_n + X_n^t \rho_n \end{aligned}$$

Le bruit en sortie du système est donc composé de trois termes. Ceux-ci étant considérés comme non-corrélés, la puissance du bruit en sortie est égale à la somme des puissances de chacun des trois termes.

$$\begin{aligned} Tr(E(b_y b_y^t)) &= Tr(E((\alpha_n^t w_n)(\alpha_n^t w_n)^t)) + Tr(E(\eta_n \eta_n^t)) \\ &\quad + Tr(E((X_n^t \rho_n)(X_n^t \rho_n)^t)) \end{aligned}$$

Ces 3 termes vont être développés dans les parties suivantes.

#### 3.1 Bruit d'entrée

En utilisant les mêmes hypothèses que dans [5], la puissance du bruit lié aux données d'entrée est déterminée par l'expression suivante

$$Tr(E((\alpha_n^t w_n)(\alpha_n^t w_n)^t)) = K \sigma_\alpha^2 w_{opt}^t w_{opt} + K m_\alpha^2 w_{opt}^t 1_N w_{opt} \quad (11)$$

avec  $m_\alpha$  et  $\sigma_\alpha^2$  la moyenne et la variance de  $\alpha_n$ ,  $1_N$  la matrice unitaire de taille  $N$  et  $w_{opt}$  les coefficients optimaux.

#### 3.2 Bruit lié aux coefficients

Le bruit lié aux coefficients correspond au deuxième terme de l'équation (11) et est égal à

$$b_{w_n} = X_n^t \rho_n \quad (12)$$

En écrivant  $P_n = E(\rho_n \rho_n^t)$ , la puissance de ce terme est donnée par

$$Tr(E(b_{w_n} b_{w_n}^t)) = Tr(E(X_n X_n^t P_n)) \quad (13)$$

Or, d'après les équations (4), (6) et l'équation (3), la récursion suivante peut être écrite

$$\rho_{n+1} = F_n \rho_n + b_n \quad (14)$$

où

$$F_n = I_N - \mu X_n [X_n^t X_n]^{-1} X_n^t \quad (15)$$

et

$$\begin{aligned} b_n &= \underbrace{\gamma_n}_{b_{1_n}} + \underbrace{\mu X_n [X_n^t X_n]^{-1} (\beta_n - \eta_n)}_{b_{2_n}} \\ &\quad + \underbrace{\mu \alpha_n [X_n^t X_n]^{-1} e_n}_{b_{3_n}} + \underbrace{\mu X_n \nu_n e_n}_{b_{4_n}} \\ &\quad - \underbrace{\mu X_n [X_n^t X_n]^{-1} \alpha_n^t w_n}_{b_{5_n}} \end{aligned} \quad (16)$$

et avec les hypothèses de non-corrélation entre  $\rho_n$ ,  $F_n$  et  $b_n$ . En supposant qu'à l'état stable,  $P_{n+1} = P_n$ , et avec  $B_n = E(b_n b_n^t)$ , l'équation (14) conduit à

$$\begin{aligned} Tr(E(X_n X_n^t P_n)) &= Tr(E(X_n X_n^t) (I_N - E(F_n F_n^t))^{-1} \\ &\quad [B_n + 2E(F_n)(I_N - E(F_n))^{-1} E(b_n) E(b_n^t)]) \end{aligned} \quad (17)$$

Les termes  $E(F_n F_n^t)$ ,  $E(F_n)$  et  $E(X_n X_n^t)$  peuvent être estimés facilement par une simulation en virgule flottante. Les autres termes peuvent être développés en séparant les termes de bruits et les signaux comme en [5].

### 3.3 Bruit généré par le filtre

Le bruit  $\eta_n$  généré par le filtre est un vecteur de taille  $K$ . En notant  $m_\eta$  sa moyenne,  $\sigma_\eta^2$  sa variance, la trace de sa matrice d'autocorrélation est égale à

$$Tr(E(\eta_n \eta_n^t)) = K(m_\eta^2 + \sigma_\eta^2) \quad (18)$$

### 3.4 Puissance du bruit

En utilisant les équations (11), (17) et (18), la puissance du bruit global en sortie du système est définie de façon analytique par

$$\begin{aligned} B_y = & K(\sigma_\alpha^2 \sum_{i=0}^{N-1} w_{opt_i}^2 + m_\alpha^2 (\sum_{i=0}^{N-1} w_{opt_i})^2 + m_\eta^2 + \sigma_\eta^2) \\ & + Tr\{E(X_n X_n^t)(I_N - E(F_n F_n^t))^{-1} \\ & [B_n + 2E(F_n)(I_N - E(F_n))^{-1}E(b_n)E(b_n^t)]\} \end{aligned} \quad (19)$$

Un modèle analytique de la puissance du bruit en sortie du système a donc été présenté. Dans les parties suivantes, celui-ci sera appliqué au NLMS-OCF puis testé par simulations pour vérifier sa validité.

## 4 Application au NLMS-OCF

L'objectif de cette partie est d'appliquer le modèle précédent à l'algorithme NLMS-OCF. Cet algorithme est un algorithme de projection affine dans lequel les  $K$  dernières observations sont orthogonales. Dans un souci de simplification,  $x_n$  est supposé centré.

Le terme  $E(X_n(X_n^t X_n)^{-1} X_n^t)$  peut être approché par

$$E(X_n(X_n^t X_n)^{-1} X_n^t) \approx \frac{K}{N} I_N \quad (20)$$

### 4.1 Bruit lié aux coefficients dans le NLMS-OCF

Chaque terme de l'équation (17) peut être simplifié

$$(I_N - E(F_n F_n^t)) \approx (2\mu - \mu^2) \frac{K}{N} I_N \quad (21)$$

$$E(X_n X_n^t) \approx K \sigma_x^2 I_N \quad (22)$$

$$(I_N - E(F_n)) \approx \mu \frac{K}{N} I_N \quad (23)$$

En utilisant l'équation (17), le bruit dû aux coefficients est

$$\begin{aligned} & Tr(E(X_n X_n^t) P_n) \\ &= \frac{N \sigma_x^2}{(2\mu - \mu^2)} [Tr(B_n) + 2 \frac{N(1 - \mu \frac{K}{N})}{K\mu} Tr(E(b_n)E(b_n^t))] \end{aligned} \quad (24)$$

Les termes  $Tr(B_n)$  et  $Tr(E(b_n)E(b_n^t))$  doivent être calculés pour déterminer complètement le bruit dû aux coefficients.

En notant  $B_{i_n}$  la matrice d'autocorrélation de chacun des 5 termes  $b_{i_n}$  de l'expression (16), et en supposant qu'ils sont non corrélés entre eux, nous arrivons à

$$Tr(B_n) = \sum_{i=1}^5 Tr(B_{i_n}) \quad (25)$$

Par la suite, chaque terme  $B_{i_n}$  est développé.

$$Tr(B_{1_n}) = Tr(E(\gamma_n \gamma_n^t)) = K^2 N m_\gamma^2 + K N \sigma_\gamma^2 \quad (26)$$

Ici,  $b_{1_n}$  peut être considéré comme la somme de  $K$  bruits non-corrélés avec la même densité de probabilité.

$$\begin{aligned} Tr(B_{2_n}) = & \mu^2 Tr[(\sigma_\beta^2 + \sigma_\eta^2) I_N + (m_\beta^2 + m_\eta^2) 1_N] \times \\ & (E(X_n(X_n^t X_n)^{-2} X_n^t)) \\ &= K \mu^2 (E(\beta^2) + E(\eta^2)) \frac{1}{N \phi_x + N(N-1) \sigma_x^4} \end{aligned} \quad (27)$$

où  $\phi_x$  est le kurtosis du signal d'entrée  $x_n$ .  $b_{2_n}$  peut être exprimé comme la somme de  $K$  bruits.

$$\begin{aligned} Tr(B_{3_n}) = & \mu^2 Tr[(\sigma_\alpha^2 I_N + m_\alpha^2 1_N) \\ & (E((X_n^t X_n)^{-1} e_n e_n^t (X_n^t X_n)^{-1}))] \\ &= K \mu^2 (\sigma_\alpha^2 + m_\alpha^2) \frac{\xi}{N \phi_x + N(N-1) \sigma_x^4} \end{aligned} \quad (28)$$

$b_{3_n}$  est également la somme de  $K$  bruits de moyenne nulle car  $e_n$  est centré. Les deux derniers termes  $B_{4_n}$  et  $B_{5_n}$  peuvent être développés de la même façon.

Ensuite,  $Tr(E(b_n)E(b_n^t))$  doit être développé. Le terme  $E(b_n)$  est égal à

$$E(b_n) = [K m_\gamma, K m_\gamma, \dots, K m_\gamma]^t \quad (29)$$

Donc  $Tr(E(b_n)E(b_n^t))$  vaut

$$Tr(E(b_n)E(b_n^t)) = N K^2 m_\gamma^2 \quad (30)$$

Ce terme peut être interprété comme la somme de  $K$  sources de bruit. Ainsi, chaque terme du NLMS-OCF ( $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ ,  $b_4$  et  $b_5$ ) est la somme de  $K$  bruits.

### 4.2 Bruit lié aux données dans le NLMS-OCF

Dans le NLMS-OCF, comme dans l'équation (11), le bruit lié aux données vaut

$$Tr(E(\alpha_n \alpha_n^t) W_n) = K \sigma_\alpha^2 \sum_{i=0}^{N-1} w_{opt_i}^2 + K m_\alpha^2 (\sum_{i=0}^{N-1} w_{opt_i})^2 \quad (31)$$

### 4.3 Bruit lié au filtre dans le NLMS-OCF

Comme dans l'équation (18), la puissance du bruit lié au calcul du filtre est

$$Tr(E(\eta_n \eta_n^t)) = K(m_\eta^2 + \sigma_\eta^2) \quad (32)$$

Dans cette partie, le bruit généré dans l'algorithme NLMS-OCF a été calculé. En analysant les résultats et en comparant au NLMS [5], la puissance du bruit généré dans le NLMS-OCF est égal à  $K$  fois la puissance du bruit généré dans le NLMS.

## 5 Expérimentations

Dans cette partie, la qualité de notre modèle pour estimer le terme  $Tr(E(b_y b_y^t))$  est évaluée. Pour ces expérimentations, des simulations sont faites sur Matlab/Simulink pour les quantifications par troncature et par arrondi. L'erreur relative entre la puissance de bruit obtenue avec une simulation virgule fixe (correspondant à la référence) et la puissance de bruit estimée avec notre modèle décrit à l'équation (19) est calculée. Le signal d'entrée choisi est un processus auto-régressif dans lequel le coefficient de corrélation  $\beta$  entre les données d'entrée varie entre 0 (bruit blanc) et 1 (très corrélé).

### 5.1 APA avec une quantification par troncature

La figure 2 montre la validité du modèle pour  $N$  variant entre 1 et 20,  $K$  variant entre 1 et  $N$  et pour les données d'entrée très corrélées ( $\beta = 0.9$ ). L'erreur relative obtenue est inférieure à 30% ce qui est un bon résultat puisque cela représente une différence de seulement de 2 dB entre la puissance de bruit estimée par la simulation et celle donnée par notre modèle. Cet écart provient des hypothèses simplifiées faites lors du développement du calcul. Ainsi, ce nouveau modèle développé est valide pour les entrées très corrélées. Pour des entrées peu corrélées, une erreur relative inférieure à 25% est obtenue.

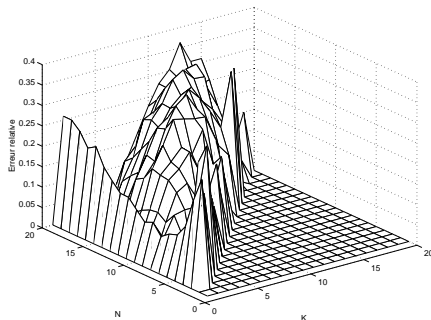


FIG. 2: Erreur relative pour des entrées très corrélées dans le cadre d'une quantification par troncature

### 5.2 NLMS-OCF avec une quantification par arrondi

Les simulations sont faites pour des données d'entrée orthogonales dans le cadre d'une quantification par arrondi. Les résultats sont présentés sur la figure 3. Les paramètres sont les mêmes que ceux définis dans la section 5.1. Comme dans le cas d'une quantification par troncature, notre modèle conduit à une estimation correcte de la puissance du bruit généré puisque l'erreur relative est inférieure à 30%.

## 6 CONCLUSION

Dans cet article, un modèle pour déterminer analytiquement la puissance de bruit en sortie de l'algorithme APA a été présenté. Le modèle est développé pour l'algorithme général et validé par des simulations. L'avantage de ce modèle est sa validité à tous les types de quantification (arrondi ou troncature). Cette

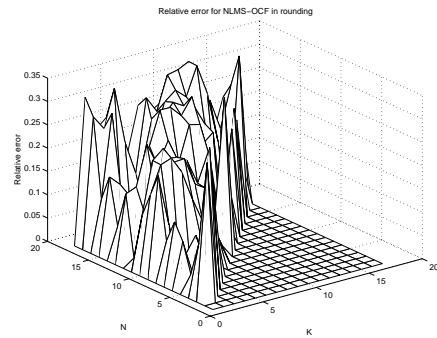


FIG. 3: Erreur relative pour le NLMS-OCF dans le cadre d'une quantification par arrondi

méthodologie, qui a été développée pour les algorithmes LMS et NLMS, est ainsi étendue aux algorithmes APA. Néanmoins, d'autres études doivent être effectuées afin de généraliser cette approche pour tous les types de systèmes et en particulier, les systèmes non linéaires.

## Références

- [1] S.H. Ardalan and S.T. Alexander, "Fixed-Point Roundoff Error Analysis of the Exponentially Windowed RLS Algorithm for Time-Varying Systems", *IEEE Transactions on Acoustic, Speech, Signal Processing*, vol 6, no.1, pp:770-783, 1987.
- [2] C. Caraiscos, B. Liu, "A Roundoff Error Analysis of the LMS Adaptive Algorithm", *IEEE Transactions on Acoustic, Speech, Signal Processing*, vol:32, no.1, pp:34-41, February 1984.
- [3] G. Constantinides, P. Cheung and W. Luk "Truncation Noise in Fixed-Point SFGs", *IEE Electronic Letters*, vol 35, no. 23, pp: 2012-2014, November 1999.
- [4] D. Menard, R. Rocher, P. Scalart and O. Sentieys, "Automatic SQNR determination in non-linear and non-recursive fixed-point systems", *EUSIPCO*, pp:1349-1352, September 2004.
- [5] R. Rocher, D. Menard, O. Sentieys and P. Scalart, "Accuracy Evaluation of Fixed-Point LMS", *ICASSP*, vol: 5, pp: 237 - 240 May 2004.
- [6] K. Ozeki and T. Umeda, "An adaptive filtering algorithm using an orthogonal projection to an affine subspace and its properties", *Electr. Commun. Jpn.*, vol. 67, pp: 19-27, 1984.
- [7] S.D. Sankaran and A.A. Beex, "Convergence Behavior of Affine Projection Algorithms", *IEEE Transactions on Acoustic, Speech, Signal Processing*, vol 48, no.4, pp: 1086-1096, April 2000.
- [8] A.H. Sayed and H.C. Shin "Transient behavior of Affine Projections Algorithms", *ICASSP*, vol 5, pp:90 - 102, January 2004
- [9] B. Widrow and I. Kollár and M.-C. Liu, "Statistical Theory of Quantization", *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol 45, no.2, pp:353-361, April 1996.



# « Mean shift » adaptatif pour le lissage d'images ultrasonores

T. GRENIER<sup>1</sup>, F. DAVIGNON<sup>1</sup>, C. REVOL-MULLER<sup>1</sup>, O. BASSET<sup>1</sup>, G. GIMENEZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup>CREATIS, CNRS UMR 5515, Inserm U 630, Bât. B. Pascal, 69621 Villeurbanne, France

{grenier, davignon, muller, basset, gimenez}@creatis.insa-lyon.fr

**Résumé** – Dans les images ultrasonores le contraste est faible : la variance des données d'un tissu homogène peut être importante alors que les statistiques de tissus différents peuvent être très similaires. Dans cet article, nous proposons une nouvelle méthode de filtrage visant à améliorer le contraste dans les images ultrasonores. Cette méthode est basée sur les « mean shift » à largeur de bande variable et adaptée aux spécificités des données ultrasonores. Une détermination entièrement automatique des largeurs de bande, à la fois dans le domaine spatial et dans le domaine des amplitudes, est décrite. La méthode proposée, comparée au filtrage *mean shift* adaptatif où la largeur de bande dans le domaine spatial reste fixe, permet d'obtenir de meilleurs résultats.

**Abstract** – As the variance of the statistics of ultrasonic data in a homogeneous tissue may be rather large and the statistics of different tissues may be very similar, a new filtering approach is proposed to enhance the contrast in ultrasonic images. It is based on the Variable Bandwidth Mean Shift algorithm adapted to the specificities of ultrasonic data. A fully automatic adaptive bandwidth selection in both range and spatial domains is described. Our method was compared to a Variable Bandwidth Mean Shift algorithm based on an adaptive range scale selection and a fixed spatial scale parameter. The results show the superiority of our method.

## 1. Introduction

Les images ultrasonores se caractérisent par une qualité médiocre et de ce fait, les traitements tels que la segmentation automatique sont des problèmes difficiles [1]. La dégradation de l'image est due principalement au bruit de « speckle », à la faible résolution latérale et à l'atténuation qui varie avec la profondeur. De plus, le principe de la formation d'image utilise la focalisation du faisceau ultrasonore, par conséquent la taille de la cellule de résolution n'est pas constante le long de la direction de propagation. La variance des statistiques dans un tissu homogène pouvant être relativement importante et les statistiques de tissus différents pouvant être très semblables, plusieurs techniques sont proposées dans la littérature pour augmenter le contraste des données ultrasonores. Parmi celles-ci, on trouve la composition spatiale ou fréquentielle, différentes approches de filtrage [2], des techniques de diffusion anisotropique [3]. Dans cette étude une nouvelle approche de filtrage est proposée. Elle est basée sur l'algorithme des « Mean Shift » et adaptée aux spécificités des données ultrasonores. En effet, notre technique associe à chaque pixel un paramètre d'échelle en amplitude, calculé à partir des données images, et un paramètre d'échelle spatial, obtenu à partir de la connaissance a priori de la résolution de la sonde ultrasonore. Nous montrons l'apport de ce filtrage adaptatif à la fois en amplitude et en spatial (MSA A+S), sur la méthode existante mais adaptative seulement en amplitude (MSA A).

## 2. Images ultrasonores

Afin d'évaluer l'efficacité de notre méthode, un fantôme numérique a été synthétisé avec le logiciel Field [4]. Le fantôme réalisé contient 100 000 diffuseurs disposés aléatoirement et dont les valeurs d'échogénéité suivent une loi normale. Dans un cylindre de 10 mm de diamètre, placé au

centre du fantôme, les valeurs d'échogénéité des diffuseurs sont divisées par 10. La Figure 1 illustre la géométrie du fantôme.

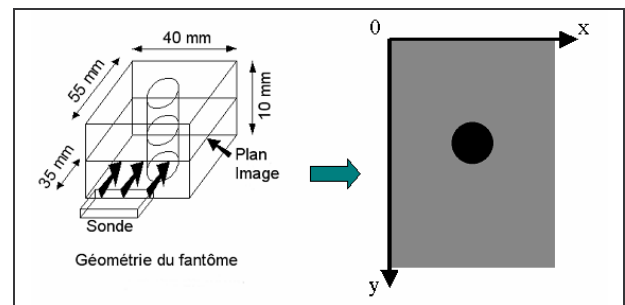


Figure 1: Géométrie du fantôme.

La fréquence de la sonde est de 3.5 MHz. Sa zone focale est centrée sur l'inclusion. Les 50 lignes RF obtenues sont échantillonnées à 100 MHz. L'enveloppe du signal est ensuite détectée afin de générer une image échographique de dimension 50×358 pixels.

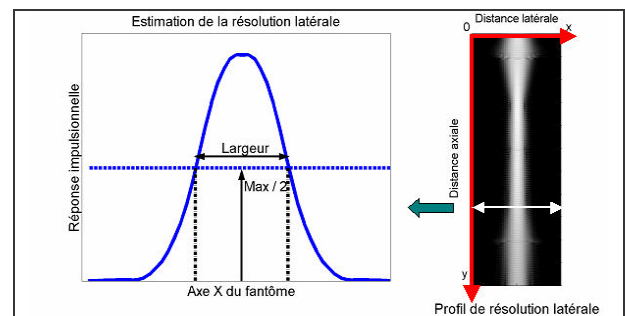


Figure 2: Profil de résolution latérale de la sonde.

La résolution latérale, qui varie avec la profondeur (axe y) est liée à la réponse impulsionnelle du système d'imagerie. La

réponse impulsionnelle latérale, illustrée par la Figure 2 à droite, peut être estimée comme la largeur à mi-hauteur du profil latéral de la réponse impulsionnelle (Figure 2 – gauche).

### 3. Mean shift adaptatif (MSA A+S)

La méthode *mean shift* est un estimateur non paramétrique du gradient de densité basé sur l'utilisation de noyau. Elle a été introduite en 1975 par Fukunaga et Hostetler [5]. Récemment, Comaniciu et Meer [6] [7] l'ont exploitée pour le traitement d'image. Les *mean shift* se distinguent des autres méthodes de filtrage par la prise en compte simultanée de l'information spatiale (position des pixels dans le domaine spatial  $R^s$ ) et de l'information d'amplitude (niveaux de gris, couleur ou information spectrale dans le domaine d'amplitude  $R^r$ ). Ainsi, l'espace utilisé est un espace euclidien de dimension  $d$ , noté  $R^d$ , avec  $d = s + r$ , nommé domaine spatial-amplitude. La méthode *mean shift* étant un estimateur non paramétrique, elle ne nécessite aucun a priori sur les densités de probabilité des différentes informations. Cependant, sa principale limite réside dans le choix du paramètre d'échelle (aussi appelé largeur de bande) du noyau sur lequel est réalisé l'estimation. Une version des *mean shift* avec une largeur de bande Adaptative en Amplitude (MSA A) a été proposée dans [8] et a conduit à une amélioration nette des résultats par rapport à la méthode classique non adaptative.

Nous proposons dans ce papier un filtrage *mean shift* où la largeur de bande s'adapte dans les deux domaines (MSA A+S). Une innovation de notre méthode consiste à prendre en compte de l'information a priori sur l'imagerie ultrasonore, en particulier la variation de la résolution latérale de la sonde ultrasonore.

#### 3.1 Principe des *mean shift* adaptatifs

La méthode *mean shift* adaptative est largement décrite dans [8]. Elle permet détecter les modes d'une fonction de densité. L'algorithme des *mean shift* adaptatif est basé sur l'estimateur de densité défini dans l'équation 1. Pour un ensemble  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1..n}$  de  $n$  points de  $R^d$ , on a :

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{\mathbf{H}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (1)$$

Le noyau  $K$  est une fonction symétrique, positive ou nulle, centrée sur 0 et dont l'intégrale vaut 1. Les matrices  $\mathbf{H}_i$ , symétriques et définies positives, sont les largeurs de bande associées à chaque point  $\mathbf{x}_i$ ,

$$K_{\mathbf{H}_i}(\mathbf{u}) = (\det[\mathbf{H}_i])^{-\frac{1}{2}} \cdot K\left(\mathbf{H}_i^{-\frac{1}{2}} \mathbf{u}\right) \quad (2)$$

Le vecteur de *mean shift*  $M(\mathbf{x})$  est défini dans l'équation 3 :

$$M(\mathbf{x}) = \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{Q}_i(\mathbf{x}) \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{Q}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{x} \quad (3)$$

où  $\mathbf{Q}_i(\mathbf{x}) = (\det[\mathbf{H}_i])^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{H}_i^{-1} \cdot g(d[\mathbf{x}, \mathbf{x}_i, \mathbf{H}_i])$ , (4) avec  $g(u) = -k'(u)$ ,  $k$  étant le profil associé à  $K$ , et  $d[\mathbf{x}, \mathbf{x}_i, \mathbf{H}_i]$  représentant la distance de Mahalanobis entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}_i$ .

Il a été démontré que  $M(\mathbf{x})$  est proportionnel à l'estimation du gradient de la densité. Appliqué itérativement, il permet de faire converger  $\mathbf{x}$  vers le mode local de cette densité, *i.e.* vers le point de gradient nul :  $\|M(\mathbf{x})\| \approx 0$ .

Partant d'un point  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{[0]}$ , les emplacements successifs de  $\mathbf{x}$ , notés  $\mathbf{x}^{[l]}$ , sont obtenus grâce à l'équation 5.

$$\mathbf{x}^{[l+1]} = \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{Q}_i(\mathbf{x}^{[l]}) \right)^{-1} \cdot \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{Q}_i(\mathbf{x}^{[l]}) \right) \quad (5)$$

A chaque itération,  $\|M(\mathbf{x})^{[l+1]}\| = \|\mathbf{x}^{[l+1]} - \mathbf{x}^{[l]}\|$  est évaluée. Le calcul s'arrête lorsque la norme de  $M(\mathbf{x})$  est inférieure à un seuil de tolérance. Le point de convergence  $\mathbf{x}_{conv}$  correspond au mode de la densité associé au point de départ  $\mathbf{x}^{[0]}$ .

#### 3.2 Choix adaptatif de la largeur de bande

Une matrice de largeur de bande  $\mathbf{H}_i$  est calculée pour chacun des points  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1..n}$ . Dans notre application, nous avons utilisé des images 2D en niveaux de gris. Le nombre de dimensions spatiales  $s$  est donc 2, et le nombre de dimension d'amplitude  $r$  vaut 1. De plus, les matrices de largeurs de bande variables utilisées sont diagonales. Leur contenu est détaillé dans l'équation 6.

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} h_{i,s1} & 0 & 0 \\ 0 & h_{i,s2} & 0 \\ 0 & 0 & h_{i,r} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Comme la nature des deux espaces est différente, la méthode de détermination des largeurs de bande est différente pour chaque espace :

- a) Les paramètres d'échelle  $h_{i,s1}$  et  $h_{i,s2}$  sont choisis de manière à s'adapter à la résolution locale de l'image.
- b) Le paramètre d'amplitude  $h_{i,r}$  est déduit de propriétés des estimateurs adaptatifs.

##### 3.2.1 Largeurs de bande spatiales adaptatives $h_{i,s1}$ et $h_{i,s2}$

L'utilisation de largeurs de bande spatiales adaptatives est proche d'une analyse multi échelles des données. Pour déterminer  $h_{i,s1}$  et  $h_{i,s2}$ , nous nous basons sur la résolution spatiale de la sonde ultrasonore. Pour chaque pixel,  $h_{i,s1}$  est égal à la résolution spatiale latérale, évaluée à la position considérée (cf. partie 2),  $h_{i,s2}$  est obtenu par le produit de  $h_{i,s1}$  par une constante reflétant l'anisotropie de l'image :

$$h_{i,s2} = 5,2 \cdot h_{i,s1} \quad (7)$$

##### 3.2.2 Largeur de bande d'amplitude adaptative $h_{i,r}$

La largeur de bande d'amplitude adaptative  $h_{i,r}$  est déterminée à partir des mêmes règles que celles données dans [8] :

$$h_{i,r} = h_0 \cdot \left[ \frac{\lambda}{\tilde{f}(\mathbf{x}_i)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

Cet expression implique une autre estimation de  $f(\mathbf{x}_i)$  nommée densité pilote  $\tilde{f}(\mathbf{x}_i)$ , ainsi que le choix des valeurs de deux constantes  $h_0$  et  $\lambda$ .  $h_0$  est une largeur de bande fixe calculée à partir de la règle proposée dans [9]. La densité pilote  $\tilde{f}(\mathbf{x}_i)$  est obtenue pour chaque pixel à partir d'une estimation locale de densité. Cette estimation est basée sur l'utilisation d'un noyau ayant pour largeur de bande en amplitude la valeur fixe  $h_0$  et utilisant les largeurs de bandes spatiales  $h_{i,s1}$  et  $h_{i,s2}$  déterminées préalablement.  $\lambda$  est la moyenne géométrique de  $\{\tilde{f}(\mathbf{x}_i)\}_{i=1..n}$ . Enfin,  $h_{i,r}$  est déduit de l'équation 8.

### 3.3 Lissage adaptatif

Soit  $\{x_i\}_{i=1..n}$  les données originales à  $d$  dimensions et  $\{y_i\}_{i=1..n}$  les points filtrés dans le domaine joint  $R^d$ . Le filtrage adaptatif *mean shift* s'obtient en appliquant l'algorithme (MSA A+S) pour chaque pixel  $\{x_i\}_{i=1..n}$  de l'image originale et en attribuant à chaque élément  $\{y_i\}_{i=1..n}$  les composantes spatiales du point de départ  $x_i$  et la composante en amplitude du point de convergence  $x_{conv i}$  associé à  $x_i$ .

## 4. Résultats et discussion

Nous avons appliqué notre méthode (MSA A+S) à des données ultrasonores simulées. Les figures 3a et 3c montrent l'image originale et sa distribution de niveaux de gris. La distribution ne permet pas de distinguer les classes sombres des claires. Nous avons comparé (MSA A+S) à un algorithme (MSA A) basé sur un paramètre d'échelle en amplitude adaptatif mais sur des paramètres spatiaux fixes. Les deux méthodes utilisent la même expression donnée par l'équation 8 pour le calcul de  $h_{ir}$ . Cependant, dans notre méthode (MSA A+S),  $h_{ir}$  est estimée à partir d'un noyau dont les largeurs de bandes spatiales sont adaptatives ( $h_{is1}$  et  $h_{is2}$ ). Pour le filtrage (MSA A),  $h_{s1}$  est égale à la résolution latérale moyenne de la sonde et  $h_{s2}$  est calculée en utilisant le même facteur d'anisotropie que précédemment ( $h_{s2} = 5,2 \cdot h_{s1}$ ). Les images filtrées résultantes se trouvent dans les figures 3d pour (MSA A) et 3g pour (MSA A+S). Les figures 3f et 3i montrent leur distribution de niveaux de gris. Dans la figure 3f, on voit que (MSA A) a légèrement groupé les données autour de plusieurs modes, mais ils restent très nombreux. (MSA A+S) donne de meilleurs résultats que (MSA A), la zone sombre étant nettement isolée dans la distribution de l'image filtrée. Les points ont été regroupés vers un nombre plus limité de modes. L'homogénéité des images est évaluée par un seuillage. Tandis qu'un seuillage manuel est nécessaire pour les images originales et filtrées par (MSA A), un seuillage automatique peut séparer correctement les classes sombres et claires dans l'image filtrée par (MSA A+S). La figure 3h montre un résultat visuellement très satisfaisant.

Celui-ci est comparé en Figure 4 aux résultats issus de deux autres méthodes classiques de segmentation d'images ultrasonores : la méthode des K-moyennes et la segmentation bayésienne.

L'algorithme des K-moyennes est une méthode de partitionnement basée sur les moindres carrés. Elle permet de diviser un ensemble de pixels en K classes. L'algorithme itère sur les deux étapes suivantes : 1) il calcule la moyenne de chaque classe et 2) il calcule la distance de chaque pixel à la moyenne de la classe et affecte le pixel à la classe la plus proche. La partition initiale est effectuée aléatoirement.

La seconde méthode utilisée est une segmentation adaptative, basée sur une estimation bayésienne (MAP) de l'image des classes. Les régions sont modélisées par un champ aléatoire de Markov. La distribution des niveaux de gris des données originales est supposée gaussienne. La minimisation de la fonction d'énergie est réalisée à l'aide d'un algorithme déterministe (*Iterated Conditional Mode*). Cette méthode a été testée également avec une version multi résolution de l'algorithme ([10], [11]).

La Figure 4b montre que la segmentation par les K-moyennes échoue sur des données ultrasonores bruitées. De même, l'approche bayésienne adaptative, du fait de l'atténuation des ultrasons dans le milieu qui se traduit par une décroissance des niveaux de gris avec la profondeur de l'image, ne conduit pas à une segmentation satisfaisante (Figure 4c). L'algorithme multi résolution amène un résultat moins bruité mais ne parvient pas non plus à unifier les pixels du fond de l'image en une seule classe (Figure 4d). Le résultat obtenu par un simple seuillage de l'image filtrée par la méthode décrite ici est reporté en Figure 4e.

## 5. Conclusion

Nous avons développé un filtrage *mean shift* adaptatif aussi bien dans le domaine spatial que dans le domaine d'amplitude. Pour chaque point, le paramètre d'échelle en amplitude est calculé à partir des données et les paramètres d'échelle spatiaux sont évalués à partir de la résolution latérale de la sonde ultrasonore. Notre méthode s'avère plus performante qu'un filtrage *mean shift* adaptatif basé sur des paramètres spatiaux fixes. De plus, les images filtrées par notre méthode conduisent, par simple seuillage automatique, à une segmentation meilleure que celles obtenues avec des méthodes de classification plus élaborées, comme l'approche bayésienne multi résolution.

La méthode proposée présente plusieurs avantages : d'une part, l'utilisateur ne fixe aucune valeur de paramètre arbitrairement et d'autre part, l'algorithme s'adapte à la résolution variable de la sonde ultrasonore.

Nos travaux futurs consisteront à appliquer et à valider cette méthode sur des données réelles acquises sur fantôme.

## Références

- [1] E. A. Ashton et K. J. Parker. *Multiple resolution bayesian segmentation of ultrasound imaging*. Ultrasonic Imaging, vol. 17, pp. 291-304, 1995.
- [2] K. Z. Abd-Elmoniem, A.-B. M. Youssef et Y. M. Kadah. *Real time speckle reduction and coherence enhancement in Ultrasound imaging via nonlinear anisotropic diffusion*. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 49, pp. 997-1014, 2002.
- [3] Yongjian Yu et S. T. Acton. *Speckle reducing anisotropic diffusion*. IEEE Transaction on Image Processing, vol. 11, pp. 1260-1270, 2002.
- [4] J. A. Jensen et P. Munk. *Computer Fantoms for Simulation Ultrasound B-mode and CFL Images*. présenté à la conférence 23rd Acoust. Imag. Symp., Boston, MA, 1997.
- [5] K. Fukunaga et L. D. Hostetler. *Estimation of the gradient of a density function with applications in pattern recognition.*, vol. IT-21, pp. 32-40, 1975.
- [6] D. Comaniciu et P. Meer. *Mean shift analysis and applications*. présenté à la conférence Proceedings of the 1999 7th IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV'99), Sep 20-Sep 27 1999, Kerkira, Greece, 1999.
- [7] D. Comaniciu et P. Meer. *Mean shift: A robust approach toward feature space analysis*. IEEE Transactions on

- Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 24, pp. 603-619, 2002.
- [8] D. Comaniciu, V. Ramesh et P. Meer. *The variable bandwidth mean shift and data-driven scale selection*. présenté à la conférence 8th International Conference on Computer Vision, Jul 9-12 2001, Vancouver, BC, 2001.
- [9] S. J. Sheather et M. C. Jones. *A reliable data-based bandwidth selection method for kernel estimation*. J.R. Statist. Soc. B, vol. 53(3), pp. 683-690, 1991.
- [10] D. Boukerroui, O. Basset, A. Noble et A. Baskurt. *Segmentation of ultrasound images - Multiresolution 2D and 3D algorithm based on global and local statistics*. Pattern Recognition Letters, vol. 24, pp. 779-790, 2003.
- [11] D. Boukerroui, O. Basset, A. Baskurt et G. Gimenez. *A Multiparametric and Multiresolution Segmentation Algorithm of 3-D Ultrasound Data*. IEEE Trans. on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, vol. 48, pp. 64-77, 2001.

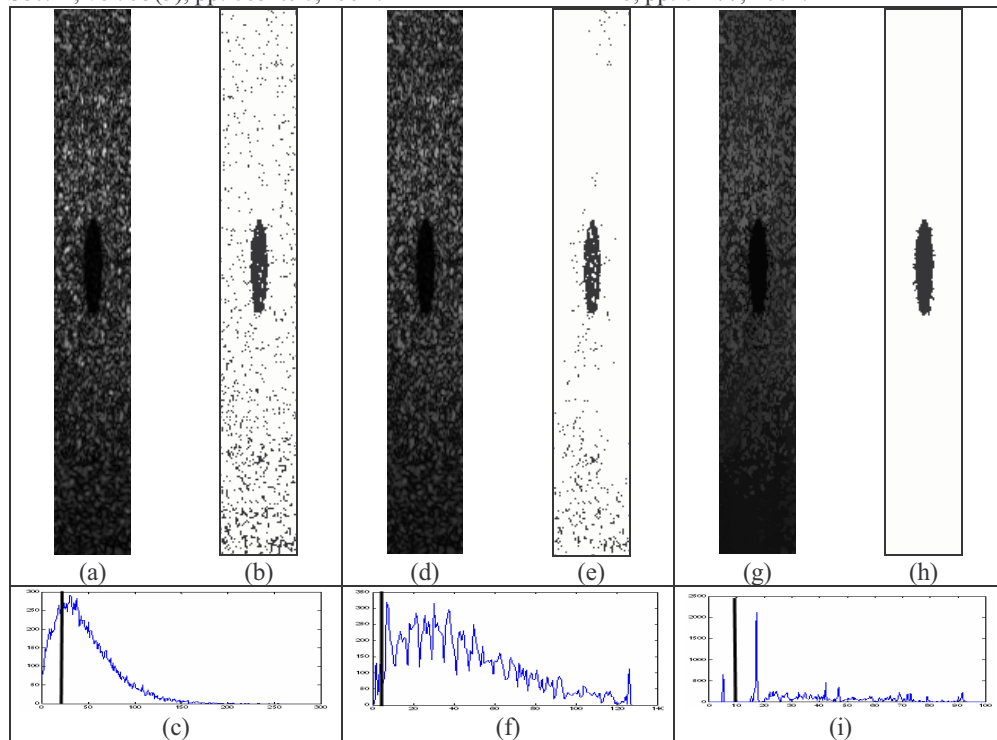


Figure 3: a), b) données originales et seuillage manuel correspondant ; d), e) image filtrée par (MSA A) et seuillage manuel correspondant; g), h) image filtrée par (MSA A+S) et seuillage automatique correspondant; c), f), i) distributions de niveaux de gris des images a), d) et g). Les traits verticaux indiquent les seuils utilisés.

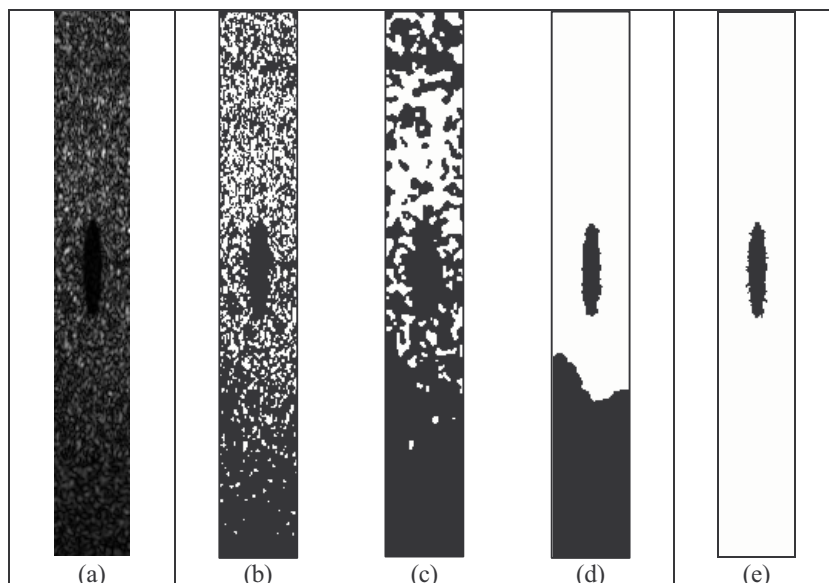


Figure 4: Comparaison visuelle de 3 méthodes de segmentation de l'image originale a) : par l'algorithme des k-means en b), par l'approche bayésienne en c) et par l'approche bayésienne multi résolution en d) ; en e) : seuillage automatique de l'image filtrée par la méthode (MSA A+S).

# Decision Directed Algorithms for Blind Equalization Based on Constant Modulus Criteria

Carlos Alexandre R. FERNANDES<sup>1\*</sup>, Joao Cesar M. MOTA<sup>2</sup>, Gérard FAVIER<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire I3S

Les Algorithmes/Euclide B - 2000 route des Lucioles, BP 121, 06903 Sophia-Antipolis Cedex, France.

<sup>2</sup>GTEL/DETI/CT/UFC

Campus do Pici, 60.755-640, 6007 Fortaleza, Brazil

acarlos@i3s.unice.fr, mota@deti.ufc.br

favier@i3s.unice.fr

**Résumé** — Le but de cet article est de proposer une famille de techniques d'égalisation aveugle de signaux du type QAM. Les algorithmes proposés sont dirigés par la décision et basés sur des fonctions de coût du type Module Constante modifiées. Deux approches sont considérées: l'approche du Gradient Stochastique et l'approche du *Normalized Constant Modulus Algorithm* (NCMA). Les simulations numériques confirment les résultats attendus et montrent que les techniques proposées améliorent les performances des algorithmes classiques basés sur la fonction de coût CM.

**Abstract** — A family of techniques aiming to perform blind equalization for Quadrature Amplitude Modulation (QAM) signals is presented. The proposed algorithms are decision directed and based on modified Constant Modulus (CM) criteria. Two approaches are used to develop the algorithms: the Stochastic Gradient Descent approach and the Normalized Constant Modulus Algorithm (NCMA) approach. Computer simulations confirm the expected results and show that the proposed algorithms outperform the conventional CM based algorithms.

## 1 Introduction

The Constant Modulus Algorithm (CMA), developed independently by Godard [1] and Treichler [2], is one of the most used techniques to perform blind equalization and it works very well for modulations in which all points of the signal constellation have the same radius, like Phase Shift Keying (PSK) modulations. However, when the constellation points are characterized by multiple radii, the estimation error obtained with algorithms based on the CM criterion does not reach zero, even if the channel is perfectly equalized. This is one of the reasons for the unsatisfactory performance of conventional CM algorithms with QAM signals. It can only achieve a moderate level of Steady-State Error (SSE). Moreover, we can say that the speed of convergence is another important drawback of the CM-type algorithms.

The main contribution of this work is to propose two new classes of algorithms inspired on the CMA to improve its performance for high level QAM signals. The considered cost functions can be viewed as modifications of the CM criterion. In fact, one of the proposed modified CM cost functions can be viewed as a generalization of the CM criterion for constellations with multiple radii. The others can be seen as generalizations of the Modified CM (MCM) criterion, which allows to jointly perform blind equalization and carrier recovery.

It is well-known that the NLMS algorithm outperforms the LMS algorithm. Thus, we will develop normalized versions of the algorithms trying to improve their performance, specially in the case of high level QAM signals. Actually, each family is composed of four algorithms with very desirable properties and advantages over the original CM algorithms (CMA and NCMA). Dual-mode versions of the algorithms are also studied. They start with a robust algorithm, i. e. not decision directed, and after switch to a novel one, aiming to avoid an excessive number of incorrect decisions during initial iterations.

## 2 Description of the Algorithms

Let us assume that: the transmitted i.i.d. sequence  $\{a(n)\}$  can take the value of any constellation symbol with equal probability; the output sequence of the equalizer  $\{y(n)\}$  is given by (1), where  $\mathbf{h} = [h(0) \ h(1) \ \dots \ h(N-1)]$  is the impulse response of the Moving-Average (MA) channel,  $N$  is the length of the channel and  $v(n)$  is an additive white Gaussian noise (AWGN). The number of taps of the transversal equalizer is  $M$  and  $\mathbf{w}(n)$  is its tap-weight vector.  $\hat{a}(n)$  is the output of the decision device (estimated symbol).

$$y(n) = \sum_{i=1}^M w(i)x(n-i), \text{ where } x(n) = \sum_{i=0}^N h(i)a(n-i) + v(n). \quad (1)$$

\*Supported by the Program Alban, the European Union Program of high Level Scholarships for Latin America, scholarship n. E04M049616BR.



## 2.1 CMA-type Algorithms

In [3] we proposed a technique inspired by the CMA for blind equalization of QAM signals: the Decision-Directed Modulus Algorithm (DDMA). The DDMA can be seen as a generalization of the CM cost function for multiple radii constellations and it uses the squared magnitude of the decided symbol. The DDM cost function is expressed in Table 1(line 2). Taking the stochastic gradient of the DDM cost function, we obtain the tap-weight vector update equation of the Decision-Directed Modulus Algorithm (DDMA):

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu e(n) \mathbf{x}^*(n). \quad (2)$$

where  $e(n)$  is given in Table 1 (line 2). The derivative of  $\hat{a}(n)$  relative to  $\mathbf{w}(n)$  was assumed to be zero. As we can see, the DDM cost function is able to reach to zero for any symbol of the constellation. We may say that the DDM is a "constellation matched" cost function. For PSK modulations, the DDM and the CM cost functions are equivalent. The main advantage of the DDMA algorithm is its great performance with QAM constellations, in terms of convergence speed and steady-state error (SSE). When perfect equalization is achieved, the second term of the DDMA update equation (2) goes to zero while in CMA it never does so.

In [4] we did an analysis of the minima of the DDM cost function based on the CMA analysis in [6]. It was demonstrated, for the case of real signals, that the Wiener solution is, approximately, a solution of the DDM criterion minimization. It was also shown that the DDMA has convergence properties that are very similar to that of the CMA. However, the DDMA uses information of last decided symbol, which makes the performance of the DDMA worst if the number of incorrect decisions is too large. To solve this problem, the initial adjustment of the tap weight vector can be done by the CMA and when some switching criterion is achieved, the equalization algorithm switches to DDMA. In [3], this algorithm was called *dual-mode DDMA* (or CMA-DDMA). The dual-mode DDMA has a better performance than the DDMA, in terms of convergence speed and SSE.

In [5] it was proposed a very interesting algorithm based on a decomposition of the CM cost function: the Modified Constant Modulus Algorithm (MCMA). The MCM cost function has real and imaginary references instead of one modulus of reference in the CM cost function. These in-phase and in-quadrature references make the MCMA more adapted to QAM signals than the CMA. The MCM cost function is the CM one decomposed into the real and imaginary parts (Table 1 - line 3). The MCMA is able to remove ISI and perform the carrier recovery jointly. It implicitly corrects phase errors and may outperform the conventional CMA with almost the same computational cost.

It is possible to unify the modifications done in the CM cost function to create a new cost function that incorporates the improvements of the DDMA and MCMA together. This cost function will be similar to the MCM cost function, but with variable references to the real and

imaginary parts of the signal. We will call this cost function of Modified DDM (MDDM) cost function (Table 1 - line 4). Taking the stochastic gradient of the MDDM cost function, we obtain the tap-weight vector update equation of the Modified DDMA (MDDMA) (eq. 2 and Table 1 - line 4). The MDDMA is also able to perform jointly blind equalization and carrier recovery and it has the advantages of both CMA and DDMA. However, the MDDMA is also decision directed, so it also suffers if the number of incorrect decisions is too large. In this case, we can use the same approach as before: a robust algorithm performs the initial adjustments (MCMA in this case) of the equalizer and after we switch the algorithm.

## 2.2 NCMA-type Algorithms

The Normalized CMA (NCMA), proposed by a number of authors, e.g. [7], is based on a particular choice of the step-size and does not work very well with high QAM constellations. At each iteration a step-size is chosen such that the updated filter coefficients achieve the desired modulus when applied to current data vector.

Based on the idea behind the DDMA, we can change the NCMA constraint (Table 2 - line 2) to develop an algorithm with good performances for blind equalization with high QAM signals. The solution to this optimization problem can be obtained in a similar way of the development of the NCMA and leads to the Normalized DDMA (NDDMA):

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{\mu}{\|\mathbf{x}(n)\|^2} e(n) \mathbf{x}^*(n). \quad (3)$$

where  $e(n)$  is shown in Table 2 (line 2). This new algorithm can be seen as a generalization of the NCMA for multiple radii constellations. The squared magnitude of the NDDMA constraint can assume any of the squared magnitude values of the constellation symbols, allowing more flexibility to the algorithm. So the NDDMA should provide a significant performance improvement in relation to the NCMA, when applied to high level QAM constellations. The NDDMA can also be used as a dual-mode algorithm, but, in this case, the initial algorithm is the NCMA (to have less computational complexity).

A next step in the improvement of this family of algorithms is to employ the idea behind the MCMA. For this we can break the NCMA constraint into two (Table 2 - line 3), and develop the Normalized MCMA (NMCMA) in a similar way of NCMA (eq. 3 and Tab. 2 - line3). It is important to remark that the NMCMA has almost identical complexity than the NCMA. The NMCMA implicitly corrects phase errors and is not decision directed, which means that it is not prejudiced by an incorrect decision.

One can think in using the modifications done in the NCMA by the NDDMA and NMCMA to create a new algorithm that incorporates these improvements together. But if we try to do this (eq. 3 and Table 2 - line 4), the resulting algorithm is equivalent to the well-known Normalized Least Mean Square - Decision Directed (NLMSDD) algorithm. So, we can conclude that the NMCMA is more robust and has a worst performance than the NLMSDD.

TAB. 1: The family of the CMA-type Algorithms

Algorithms	Cost Functions	Estimation Errors - $e(n)$
CMA	$E\{ y(n) ^2 - R\}^2$	$y(n)( y(n) ^2 - R)$
DDMA	$E\{( y(n) ^2 -  \hat{a}(n) ^2)^2\}$	$y(n)( y(n) ^2 -  \hat{a}(n) ^2)$
MCMA	$E\{(y_R^2(n) - R_R)^2 + (y_I^2(n) - R_I)^2\}$	$y_R(n)(y_R^2(n) - R_R) + jy_I(n)(y_I^2(n) - R_I)$
MDDMA	$E\{(y_R^2(n) - \hat{a}_R^2(n))^2 + (y_I^2(n) - \hat{a}_I^2(n))^2\}$	$y_R(n)(y_R^2(n) - \hat{a}_R^2(n)) + jy_I(n)(y_I^2(n) - \hat{a}_I^2(n))$

TAB. 2: The family of the NCMA-type Algorithms

Algorithms	Constraints	Estimation Errors - $e(n)$
NCMA	$ \mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n) ^2 = R$	$y(n)(\frac{R}{ y(n) } - 1)$
NDDMA	$ \mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n) ^2 =  \hat{a}(n) ^2$	$y(n)(\frac{ \hat{a}(n) }{ y(n) } - 1)$
NMCMA	$Re\{\mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n)\}^2 = R_R$ $Im\{\mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n)\}^2 = R_I$	$y_R(n)(1 - \frac{\sqrt{R_R}}{ y_R(n) }) + jy_I(n)(1 - \frac{\sqrt{R_I}}{ y_I(n) })$
NLMSDD	$Re\{\mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n)\}^2 = \hat{a}_R^2(n)$ $Im\{\mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n)\}^2 = \hat{a}_I^2(n)$	$y_R(n)(1 - \frac{ \hat{a}_R(n) }{ y_R(n) }) + jy_I(n)(1 - \frac{ \hat{a}_I(n) }{ y_I(n) })$

In this case, we can use the same dual-mode approach as before. To make the complexity lower, we can start with the NMCMA and make the switch to the NLMS-DD by only switching the "reference radii":  $\sqrt{R_R}$  to  $|\hat{a}_R|$  and  $\sqrt{R_I}$  to  $|\hat{a}_I|$ .

### 3 Simulation results

The proposed family of algorithms was tested by means of computational simulations. The simulation scenario consists in a transmitted signal with a 16QAM or 64QAM modulation, an equalizer with 9 taps, a 30dB SNR and a discrete-time channel with impulse response given by:  $h(n) = 0.2798\delta(n) + 1\delta(n-1) + 0.2798\delta(n-2)$ . A PLL is used to correct phase shift at the output of the equalizer, except for the algorithms of the "Modified" type, which perform the carrier recovery by themselves. All the Mean Squared Error (MSE) curves were obtained via Monte Carlo simulations using 50 independent data realizations and the horizontal line shows the optimum Wiener MSE.

Fig. (1) shows the learning curve of the CMA-type family of algorithms for a 16QAM signal. First, we remark that the DDMA has a SSE approximately 7dB smaller than the CMA. As regards the modified algorithms, it is clear from fig. (1) that they have provided improvements on the CMA and on the DDMA (MDDMA converges after 1800 iterations and DDMA after 4500 iterations approximately). In this case, again it was not necessary to employ the dual-mode algorithms. However, for a 64QAM signal the dual-mode approach provides very good improvements. We can see in fig. (2) that the MCMA has the better performance among all the single-mode algorithms, since decision directed algorithms were penalized by a high modulation level. Moreover, the DDMA has a higher convergence speed than the MDDMA and the

Decision Directed Algorithm (DDA), which does not have an acceptable level of MSE even after 40000 iterations. However, working in a dual-mode version, the MDDMA has a very good improvement of its performance, outperforming even the dual-mode DDMA and the dual-mode DDA (MCMA-MDDMA converges after 1500 iterations, CMA-DDMA after 3200 iterations and the CMA-DDA after 2700 iteration, approximately).

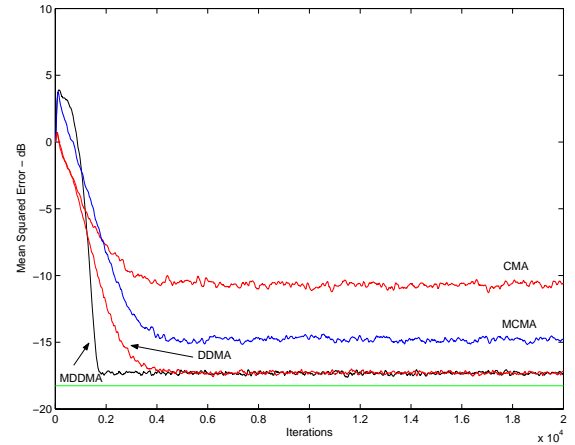


FIG. 1: MSE curves for the LMS-type algorithms - 16QAM.

As regards the normalized algorithms, fig. (3) shows the MSE for NCMA class of algorithms for a 16QAM signal. One can see that the NMCMA has a worst performance than the conventional NCMA. However the NDDMA has improved the performance a lot of the NCMA and the NLMSDD even more. Once again, it was not necessary to employ the dual-mode algorithms. However, for a 64QAM signal (figure (4)), we see that the NDDMA, the NCMA and the NLMSDD have not achieved yet a reasonable MSE

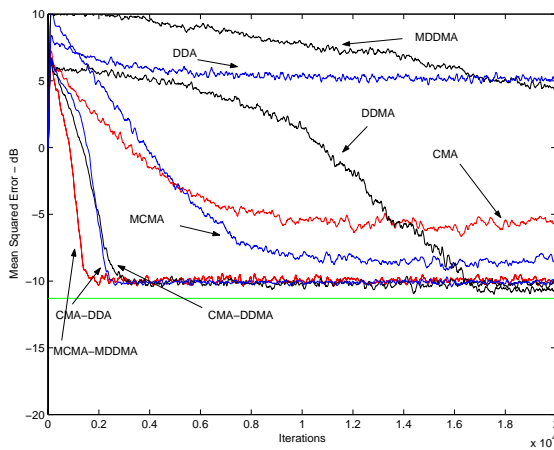


FIG. 2: MSE curves for the LMS-type algorithms - 64QAM.

after 40000 iterations. Moreover the NMCMA does not suffer so much in this case, as it is not decision directed. Moreover, by working in a dual-mode version, the NDDMA and the NLMSDD have a very good improvement in their performance. It should be highlighted that the NLMSDD had a better performance when working with the NMCMA than with the NCMA.

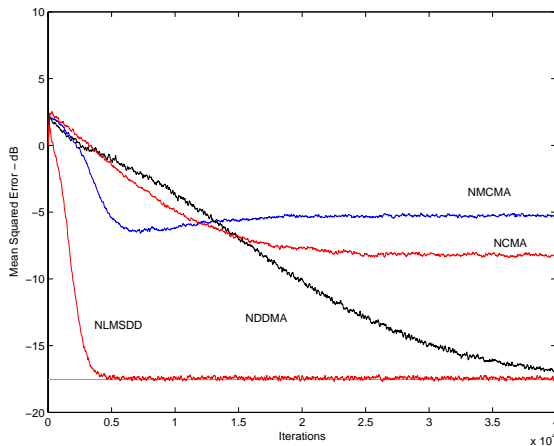


FIG. 3: MSE curves for the NLMS-type algorithms - 16QAM.

## 4 Conclusions

In this paper, we have presented a new family of algorithms characterized by some very desirable properties when performing blind equalization for QAM signals. Simulation results confirms the behavior expected, showing a great improvement of the proposed algorithms in relation to the conventional ones. Their gain in performance is very significative, with a very reasonable computational cost (in relation to the original CM algorithms). The SSE of the proposed algorithms are, in general, very close to the Wiener MSE. The MDDM based algorithms can perform jointly blind equalization and carrier recovery, and

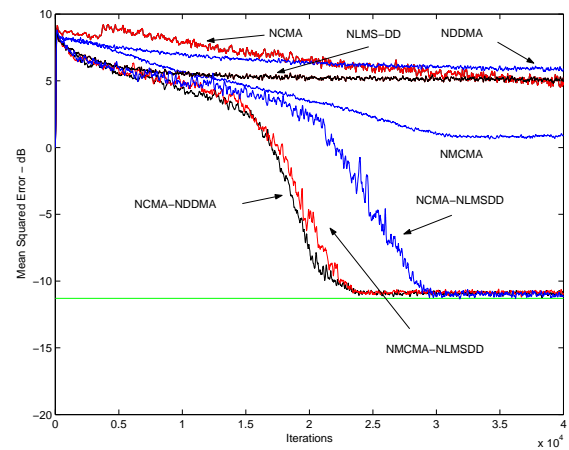


FIG. 4: MSE curves for the NLMS-type algorithms - 64QAM.

have shown to outperform the DDM based algorithms. Perspectives of this work include a study of convergence and generalization to nonlinear filter structures.

## References

- [1] D. N. Godard. *Self-recovering equalization and carrier tracking in two dimensional data communication system*. IEEE Trans. on Commun., V. 28, pp. 1867–1875, 1980.
- [2] J.R. Treichler and B. Agee. *A new approach to multipath correction of constant modulus signals*. IEEE Transactions on ASSP, V. 31, n. 4, pp. 459–472, 1983.
- [3] C. A. R. Fernandes and J. C. M. Mota. *New Blind Algorithms Based on Modified Constant Modulus Criteria for QAM Constellations*. Lecture Notes in Comp. Science (LNCS), V. 3124, pp. 498 – 503, aug 2004.
- [4] C. A. R. Fernandes and J. C. M. Mota. *Novos Algoritmos Baseados em Estatísticas de Ordem Superior de Decisões Dirigidas para Equalização Autodidata*. Proc. of the 21 Simp. Brasileiro de Telecom., Bélem - Brazil, sep 2004.
- [5] K. N. Oh and Y. O. Chin. *Modified Constant Modulus Algorithm: Blind Equalization and Carrier Phase Recovery Algorithm*. Proc. of the 1995 Int. Conf. Commun., V. 1, pp. 498–502, 1995.
- [6] Z. Ding, R. A. Kennedy, B. D. O. Anderson and C. R. Johnson Jr. *Ill-Convergence of Godard Blind Equalizers in Data Communications Systems*. IEEE Trans. on Comm., V. 39, pp. 1313 – 1327, 1991.
- [7] K. Hilal and P. Duhamel. *A convergence study of the constant modulus algorithm leading to normalized-CMA and a block-normalized-CMA*. EUSIPCO, pp. 135 – 138, 1992.



# Étude des performances du modèle quaternionique en traitement d'antenne vectorielle

Sebastian MIRON, Nicolas LE BIHAN, Jérôme I. MARS

Laboratoire des Images et des Signaux  
961 rue de la Houille Blanche, BP 46, 38402 St. Martin d'Hères cedex, France  
Sebastian.Miron@lis.inpg.fr, Nicolas.Le-Bihan@lis.inpg.fr  
Jerome.Mars@lis.inpg.fr

**Résumé** – Nous analysons dans cette communication les performances du *modèle quaternionique* pour une onde polarisée captée par une antenne de capteurs vectoriels à deux composantes. La borne du Cramer-Rao est dérivée pour le modèle proposé et une comparaison avec le *modèle long-vecteur* est réalisée. Nous montrons que l'utilisation des quaternions permet de réduire le temps de calcul et améliore la résolution des algorithmes de type MUSIC.

**Abstract** – This paper analysis the performances of the *quaternion model* for a polarized wave recorded on a two-component vector-sensor array. The Cramer-Rao bound for the proposed model is derived and comparison with *long vector model* is presented. We show that the use of quaternions reduces memory requirements for data covariance representation and improves the resolution for MUSIC-like algorithms.

## 1 Introduction

Le remplacement des capteurs scalaires par des capteurs vectoriels dans divers domaines d'applications (sismique, télécommunication, médecine, etc.) rend possible l'estimation de la polarisation de la source. Des algorithmes de traitement d'antenne vectorielle ont été proposés dans la littérature ([4, 12]) et les performances de tels réseaux de capteurs ont été analysées dans [11, 6]. Néanmoins, toutes ces différentes techniques sont fondées sur la concaténation des signaux enregistrés, dans un vecteur de grande taille (long-vecteur), permettant l'utilisation des algorithmes classiques de traitement d'antenne scalaire basés sur des techniques matricielles. L'avantage d'une telle approche est la mise en œuvre facile, mais le passage d'une représentation 2D (distance-composante) à une représentation 1D (long vecteur) n'exploite pas d'une manière optimale l'information de polarisation.

Dans cet article nous proposons un modèle basé sur l'algèbre quaternionique, permettant de conserver la nature bimodale (*distance - composante*) des signaux enregistrés sur une antenne à deux composantes (2C). Les performances du modèle quaternionique sont comparées avec celles du modèle long vecteur dans le cadre d'un algorithme de type MUSIC permettant l'estimation des paramètres de polarisation et de la DDA d'une onde. Nous montrons que l'utilisation des quaternions améliore la résolution et rend l'algorithme moins sensible aux erreurs d'estimation du nombre de sources. Nous dérivons ensuite la borne de Cramer-Rao (BCR) pour le modèle quaternionique proposé dans le cas déterministe.

## 2 Quaternions

Un quaternion est un nombre hypercomplexe d'ordre quatre qui peut être écrit :

$$q = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}, \quad (1)$$

où  $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$  et :

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k} = -1. \quad (2)$$

Le conjugué de  $q$  est donné par :  $\bar{q} = q_0 - q_1 \mathbf{i} - q_2 \mathbf{j} - q_3 \mathbf{k}$  et son module  $|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$ . Un quaternion est appelé *pur* si  $q_0 = 0$  et *unitaire* si  $|q| = 1$ . L'ensemble des quaternions, noté  $\mathbb{H}$ , forme un corps non-commutatif. Pour deux quaternions  $p, q \in \mathbb{H}$ ,  $\overline{pq} = \bar{q}\bar{p}$  et en général  $pq \neq qp$ .

Un quaternion peut s'écrire sous la forme dite de Cayley-Dickson comme :

$$q = q^{(1)} + \mathbf{i}q^{(2)}, \quad (3)$$

avec :

$$q^{(1)} = q_0 + \mathbf{j}q_2 \quad (4)$$

$$q^{(2)} = q_1 + \mathbf{j}q_3 \quad (5)$$

$q^{(1)}, q^{(2)} \in \mathbb{C}^j$  (des nombres complexes en  $j$ ). La formule d'Euler s'étend aussi aux quaternions:  $q = |q| \exp \mu \theta$ , où  $\mu$  est un quaternion pur, unitaire avec  $\mu$  l'axe de  $q$  et  $\theta$  son angle. Une revue plus ample des propriétés des quaternions peut être trouvée dans [10].

## 3 Le modèle quaternionique de la polarisation

Considérons une antenne linéaire formée de  $N$  capteurs 2C équidistants. Dans le domaine fréquentiel, chaque composante peut être représentée sous la forme d'un vecteur complexe d'observation  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{C}^N$ . En utilisant la représentation de Cayley-Dickson, on code les deux vecteurs complexes dans un vecteur quaternionique d'observation  $\mathbf{y} \in \mathbb{H}^N$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{i}\mathbf{y}_2$  où

$\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{C}^{jN}$ . Si on utilise une représentation de type long-vecteur,  $\mathbf{y}_1$  et  $\mathbf{y}_2$  sont concaténés dans un grand vecteur complexe  $\tilde{\mathbf{y}} \in \mathbb{C}^{2N}$ ,  $\tilde{\mathbf{y}} = [\mathbf{y}_1^T | \mathbf{y}_2^T]^T$ .

Pour analyser le problème d'estimation des paramètres d'une source sur une antenne vectorielle, nous considérerons que la DDA d'une source  $k$  est donnée par son déphasage inter-capteurs  $\theta_k$  et l'ellipse de polarisation est caractérisée par le rapport d'amplitude entre les deux composantes  $\rho_k$  et le déphasage inter-composantes  $\varphi_k$ . Avec ces notations, le comportement global d'une onde plane  $k$  sur le réseau de capteurs est illustré par le vecteur quaternionique :

$$\mathbf{a}_k(\theta_k, \rho_k, \varphi_k) = \frac{p_k(\rho_k, \varphi_k) \mathbf{s}_k(\theta_k)}{|p_k(\rho_k, \varphi_k) \mathbf{s}_k(\theta_k)|} \quad (6)$$

où  $p_k$  est un quaternion donné comme:

$$p_k(\rho_k, \varphi_k) = 1 + \mathbf{i} \rho_k e^{j\varphi_k}$$

et le vecteur directionnel :

$$\mathbf{s}_k(\theta_k) = [1, e^{-j\theta_k}, \dots, e^{-j(N-1)\theta_k}]^T \quad (7)$$

L'expression d'une observation quaternionique  $\mathbf{y}$ , en présence de  $K$  sources est :

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}_k x_k + \mathbf{b} \quad (8)$$

où  $\mathbf{b}$  est un vecteur de quaternions représentant la contribution du bruit additif sur les deux composantes et  $x_k$  est l'amplitude complexe de la source  $k$  sur la première composante. Notons

$$\Omega = \mathbb{E}[\mathbf{y}\mathbf{y}^\dagger] \in \mathbb{H}^{N \times N} \quad (9)$$

la matrice de covariance correspondant au modèle quaternionique, et  $\tilde{\Omega} = \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}^\dagger] \in \mathbb{C}^{2N \times 2N}$ , celle du long vecteur. En termes de coût de calcul,  $\tilde{\Omega}$  contient  $8 \times N^2$  réels tandis que  $\Omega$  a  $4 \times N^2$  entrées réelles ce qui représente une réduction de la moitié de la place mémoire et un gain important en temps de calcul. Compte-tenu de (8) et en faisant l'hypothèse de décorrélation entre les sources et entre les sources et le bruit,  $\Omega$  peut s'exprimer en fonction des vecteurs source  $\mathbf{a}_k$ , comme :

$$\Omega = \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^\dagger + \mathbf{B}, \quad (10)$$

avec  $\sigma_k^2 = \mathbb{E}[x_k x_k^*]$  (\* l'opérateur de conjugaison) et  $\mathbf{B} = \mathbb{E}[\mathbf{b}\mathbf{b}^\dagger]$ , la matrice de covariance du bruit sur les capteurs.

## 4 L'orthogonalité des vecteurs des quaternions

La contrainte d'orthogonalité des vecteurs propres quaternioniques (issus de la décomposition en valeurs propres de  $\Omega$ ) n'est pas la même que l'orthogonalité de type long-vecteur. Considérons deux vecteurs à valeurs quaternioniques  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}^{N \times N}$ , donnés par  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{i} \mathbf{p}_2$  et  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{i} \mathbf{q}_2$ , et les long-vecteurs associés  $\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{C}^{2N}$  :  $\tilde{\mathbf{p}} = [\mathbf{p}_1^T | \mathbf{p}_2^T]^T$  et  $\tilde{\mathbf{q}} = [\mathbf{q}_1^T | \mathbf{q}_2^T]^T$ . Si on impose l'orthogonalité aux vecteurs de quaternions  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ , on obtient les relations suivantes :

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1 \rangle_{\mathbb{C}} + \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2 \rangle_{\mathbb{C}} = 0 \quad (11)$$

$$\text{et } \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1^* \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_2^* \rangle_{\mathbb{C}} \quad (12)$$

où  $\langle, \rangle_{\mathbb{C}}$  représente le produit scalaire des vecteurs complexes et  $*$  est l'opérateur de conjugaison, tandis que la contrainte d'orthogonalité des vecteurs  $\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{C}^{2N}$  est équivalente à la relation (11) seulement. Pour illustrer l'effet de cette contrainte supplémentaire sur la décomposition en sous-espaces propres, nous avons calculé les erreurs d'approximation par troncature de rang pour ces deux approches, sur une matrice aléatoire  $\mathbf{M}$  de rang plein. Une moyenne sur 100 réalisations aléatoires de cette matrice a été effectuée pour le calcul des erreurs. L'erreur d'approximation<sup>1</sup> pour la représentation long-vecteur est plus importante que pour l'approche quaternionique comme on peut la voir sur la Fig. 1. En utilisant le modèle quaternionique, on obtient une meilleure approximation de rang de la matrice  $\mathbf{M}$ . Ce résultat est utile en traitement

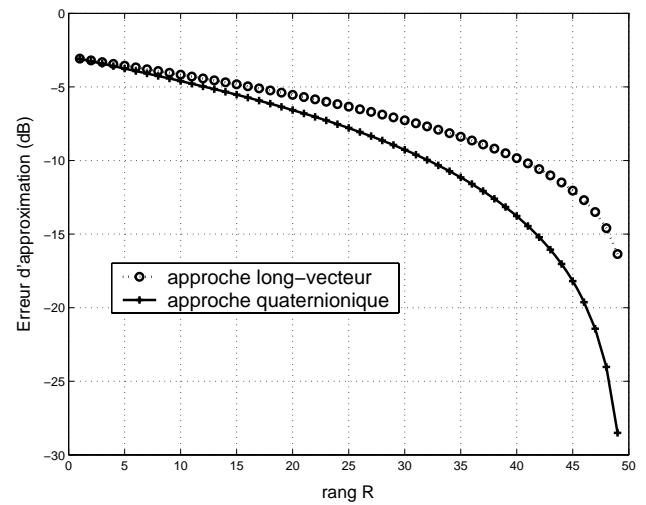


Figure 1: L'approximation de rang

d'antenne à haute résolution, lorsqu'on est amené à estimer les sous-espaces signal et bruit par troncature de rang de la matrice de covariance des observations. Nous illustrons dans la suite l'utilisation du modèle quaternionique dans le cadre d'un algorithme de type MUSIC basé sur la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance des observations.

## 5 MUSIC quaternionique

En traitement du signal, des algorithmes quaternioniques ont déjà été proposés pour les images couleur [2, 7], signaux sismiques [3, 5] ou pour étendre la notion de signal analytique aux signaux multidimensionnels [1].

Nous présentons dans cette section un algorithme de traitement d'antenne vectorielle permettant d'estimer la direction d'arrivée (DDA)  $\theta$  et les paramètres de polarisation  $\rho$  et  $\varphi$  du modèle quaternionique (présenté dans la section 3) d'une onde. L'algorithme est basé sur la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance des observations quaternioniques, définie par (9). Soit

$$\Omega = \sum_{k=1}^N \lambda_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^\dagger \quad (13)$$

<sup>1</sup>L'erreur d'approximation par troncature de rang  $R$  d'une matrice  $\mathbf{M}$ , est calculée suivant la formule  $err(R) = \frac{\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_R\|}{\|\mathbf{M}\|}$ , avec  $\mathbf{M}_R$  la troncature de rang  $R$  de la matrice  $\mathbf{M}$  et  $\|\cdot\|$  la norme de Frobenius d'une matrice.

la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance des observations ( $\lambda_k \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{u}_k \in \mathbb{H}^N$ ). Par identification avec (10), nous associons les premières  $K$  valeurs propres à la partie signal des observations et les  $N - K$  valeurs qui restent à la partie bruit. Nous construisons ensuite le projecteur sur le sous-espace bruit :

$$\mathbf{\Pi}_B = [\mathbf{u}_{K+1}, \dots, \mathbf{u}_N] [\mathbf{u}_{K+1}, \dots, \mathbf{u}_N]^\dagger \quad (14)$$

La fonctionnelle MUSIC quaternionique est ensuite calculée par projection du *vecteur directionnel quaternionique*  $\mathbf{d} \in \mathbb{H}^N$  :

$$\mathbf{d}(\theta, \rho, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 + i\rho e^{j\varphi} \\ e^{-j\theta} + i\rho e^{j(\varphi-\theta)} \\ \vdots \\ e^{-j(N-1)\theta} + i\rho e^{j(\varphi-(N-1)\theta)} \end{pmatrix} \quad (15)$$

sur le sous-espace bruit :

$$Q(\theta, \rho, \varphi) = \frac{1}{\mathbf{d}^\dagger(\theta, \rho, \varphi) \mathbf{\Pi}_B \mathbf{d}(\theta, \rho, \varphi)} \quad (16)$$

La fonctionnelle (16) présente des maxima locaux pour des valeurs  $(\theta, \rho, \varphi)$  correspondant aux sources présentes dans le signal. Nous présentons dans la suite une comparaison entre les estimateurs MUSIC long-vecteur et MUSIC quaternionique pour le cas d'une seule source polarisée présente dans le signal. Sur la figure 2 nous avons représenté les courbes de détection en  $\theta$ , supposant les paramètres de polarisation de la source connus :  $\rho = 2$ ,  $\varphi = 20^\circ$ . Les courbes pour les deux algorithmes

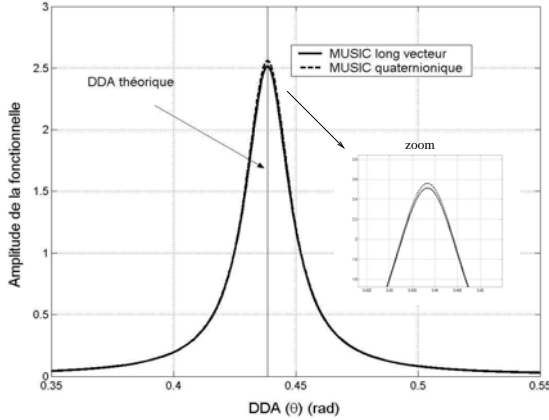


Figure 2: Une seule source (nombre de sources correctement estimé)

sont quasi-superposées, l'amplitude du pic de détection étant légèrement plus importante pour MUSIC quaternionique. Cela signifie un meilleur pouvoir de résolution pour cette approche. Pour la figure 3, nous avons considéré, sous les mêmes hypothèses, que le nombre de sources a été mal estimé (le nombre estimé de sources est égal à deux). Dans ce cas, la différence d'amplitude entre les pics de détection de deux algorithmes est encore plus accentuée. D'une façon générale, l'utilisation du modèle quaternionique améliore la résolution de l'algorithme, et le rend moins sensible à l'estimation du nombre de sources par rapport au modèle long vecteur. L'explication est la contrainte d'orthogonalité quaternionique, différente de celle long-vecteur (voir section 4), utilisée lors de la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance des observations.

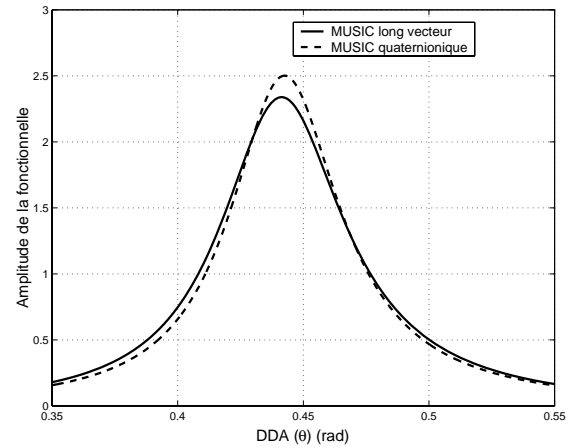


Figure 3: Une seule source (nombre de sources mal estimé)

## 6 La borne de Cramer-Rao du modèle quaternionique

Le modèle (8) peut se réécrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\theta, \rho, \varphi) \mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (17)$$

où  $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{N \times K}$ , ses colonnes sont les vecteurs  $\mathbf{a}_k$  (6), et  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_K]^T$ . Considérons  $\Omega$  réalisations indépendantes du vecteur des observations  $\mathbf{y}(\nu)$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, \Omega$ . Pour simplifier la dérivation, nous allons considérer le vecteur  $\mathbf{x}$  comme certain, connu. Cela n'empêche pas  $\mathbf{x}(1) \dots \mathbf{x}(\Omega)$  d'être des réalisations particulières d'un processus aléatoire. Nous faisons également l'hypothèse que le bruit et le signal sont décorrélés. Le bruit reste donc le seul mécanisme aléatoire et il sera soumis aux hypothèses suivantes:  $\mathbf{b}$  présente une distribution Gaussienne de moyenne nulle,  $E[\mathbf{b}(\nu) \mathbf{b}^\dagger(\xi)] = 2\sigma \mathbf{I}_N$  pour  $\nu = \xi$ , 0 pour  $\nu \neq \xi$  et  $E[\mathbf{b}(\nu) \mathbf{b}^T(\xi)] = 0$  pour tout  $\nu, \xi$ . La puissance du bruit sur une composante d'un capteur  $\sigma$  est considérée connue. Ces hypothèses ont déjà été utilisées pour ce type de problème (voir [8, 11]). Dans la suite nous dérivons la borne de Cramer-Rao pour le vecteur des paramètres  $\mathbf{p} = [\theta^T, \rho^T, \varphi^T]$ , avec  $\theta^T = [\theta_1, \dots, \theta_K]$ ,  $\rho^T = [\rho_1, \dots, \rho_K]$  et  $\varphi^T = [\varphi_1, \dots, \varphi_K]$ .

Avec ces hypothèses, pour une observation  $\nu$  la fonction de vraisemblance est :

$$V(\mathbf{y}(\nu)) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \det(\Gamma_{\mathbf{y}})^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}[\mathbf{y}(\nu) - \mathbf{A}(\theta, \rho, \varphi) \mathbf{x}]^\dagger \Gamma_{\mathbf{y}}^{-1} [\mathbf{y}(\nu) - \mathbf{A}(\theta, \rho, \varphi) \mathbf{x}]\right) \quad (18)$$

Compte tenu de l'hypothèse sur le caractère déterministe des sources, la matrice de covariance des observations  $\Gamma_{\mathbf{y}} = \Gamma_{\mathbf{b}} = 2\sigma \mathbf{I}_N$  et son déterminant  $\det(\Gamma_{\mathbf{y}}) = 2^N \sigma^N$ . Si on prend en compte les  $\Omega$  réalisations, la fonction de vraisemblance des observations devient :

$$V(\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(\Omega)) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{N\Omega}{2}} \sigma^{\frac{N\Omega}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{4\sigma} \sum_{\nu=1}^{\Omega} ([\mathbf{y}(\nu) - \mathbf{A}(\theta, \rho, \varphi) \mathbf{x}]^\dagger [\mathbf{y}(\nu) - \mathbf{A}(\theta, \rho, \varphi) \mathbf{x}])\right) \quad (19)$$

La log-vraisemblance de  $\mathbf{y}$  prend alors la forme suivante :

$$\ln(V(\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(\Omega))) = \ln(V(\mathbf{y})) = C - \frac{N\Omega}{2} -$$

$$\frac{1}{4\sigma} \sum_{\nu=1}^{\Omega} [\mathbf{y}(\nu) - \mathbf{A}(\theta, \rho, \varphi) \mathbf{x}]^{\dagger} [\mathbf{y}(\nu) - \mathbf{A}(\theta, \rho, \varphi) \mathbf{x}] \quad (20)$$

où  $C$  est une constante.

Avec ces notations la matrice d'information de Fisher (MIF) [9] est donnée par :

$$f_{kl} = \mathbb{E} \left[ \frac{\partial \ln(\mathbf{V}(\mathbf{y}))}{\partial p_k} \frac{\partial \ln(\mathbf{V}(\mathbf{y}))}{\partial p_l} \right] \quad (21)$$

où  $p_k, p_l$  sont deux éléments du vecteur des paramètres. En remplaçant (20) dans (21) et après simplifications, l'expression de la MIF devient :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\theta\theta} & \mathbf{F}_{\theta\rho} & \mathbf{F}_{\theta\varphi} \\ \mathbf{F}_{\rho\theta} & \mathbf{F}_{\rho\rho} & \mathbf{F}_{\rho\varphi} \\ \mathbf{F}_{\varphi\theta} & \mathbf{F}_{\varphi\rho} & \mathbf{F}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (22)$$

où  $\mathbf{F}_{\theta\theta} = \frac{\Omega}{4\sigma} \text{Re} [\mathbf{X}^{\dagger} \mathbf{A}_{\theta}^{\dagger} \mathbf{A}_{\theta} \mathbf{X}]$ ,  $\mathbf{F}_{\theta\rho} = \frac{\Omega}{4\sigma} \text{Re} [\mathbf{X}^{\dagger} \mathbf{A}_{\theta}^{\dagger} \mathbf{A}_{\rho} \mathbf{X}]$ ,  $\mathbf{X} = \text{diag}\{x_1, x_2, \dots, x_K\}$  et  $\mathbf{A}_{\theta} = \sum_{k=1}^K \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_k}$ . La BCR de tout estimateur non-biaisé du  $l$ ème paramètre  $p_l$  du vecteur des paramètres  $\mathbf{p}$  est :

$$E[(\hat{p}_l - p_l)^2] \geq (\mathbf{F}^{-1})_{ll} \quad (23)$$

où  $(\mathbf{F}^{-1})_{ll}$  est le  $l$ ème élément sur la diagonale principale de la matrice inverse de  $\mathbf{F}$ .

Pour illustrer ce résultat théorique, nous présentons un exemple numérique. Considérons deux sources polarisées enregistrées sur une antenne formée de six capteurs à deux composantes. La première source est le signal utile et la deuxième est vue comme une interférence. Les paramètres des sources sont:  $\theta_1 = 0^\circ$ ,  $\rho_1 = 1$ ,  $\varphi_1 = 60^\circ$  pour le signal d'intérêt et  $\rho_2 = 2$ ,  $\varphi_2 = -30^\circ$  pour l'interférence. La DDA de la deuxième source  $\theta_2$  varie autour de  $\theta_1$ . Les autres paramètres  $\Omega, \sigma$  sont considérés unitaires et  $\mathbf{X}$  est normalisé. Dans la Fig. 4

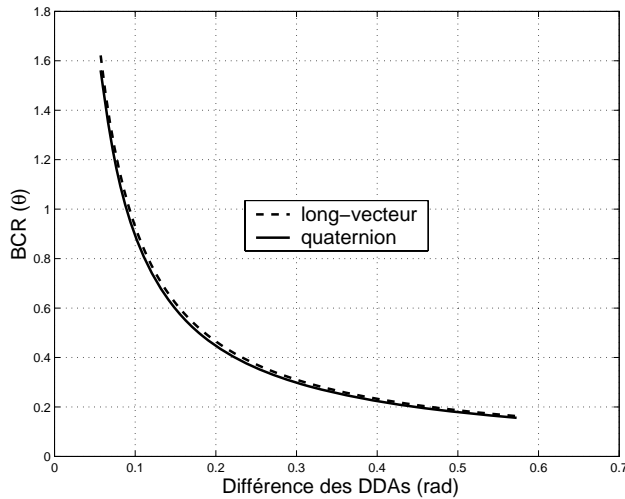


Figure 4: La borne de Cramer-Rao

nous avons représenté  $\sqrt{BCR(\theta_1)}$  (calculé à l'aide de la relation (23)) en fonction de la différence des DDAs ( $\theta_2 - \theta_1$ ) pour le modèle quaternionique et pour le long-vecteur. Pour le modèle long-vecteur nous avons utilisé la formule de la BCR calculée par Nehorai [6] qui a été adaptée aux paramètres du modèle. Les deux courbes sont très proches signifiant que les performances statistiques de deux approches sont équivalentes.

## 7 Conclusions

Nous avons proposé un modèle quaternionique pour le traitement d'antenne à deux composantes. Ce modèle permet de gérer l'information de polarisation tout en gardant l'organisation bimodale des données. L'approche quaternionique réduit le coût du calcul et permet une meilleure séparation des sous-espaces signal et bruit lors de la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance associée. Dans le cadre d'un algorithme de type MUSIC, l'utilisation d'un modèle quaternionique permet d'améliorer le pouvoir de résolution par rapport au modèle long-vecteur. Pour des performances statistiques équivalentes, l'approche quaternionique permet un gain important en termes de place mémoire et temps de calcul.

## References

- [1] T. Bülow and G. Sommer. Hypercomplex signals - a novel extension of the analytic signal to the multidimensional case. *IEEE Trans. Signal Processing*, 49(11):2844–2852, 2001.
- [2] T. A. Ell. *Hypercomplex spectral transformation*. PhD thesis, University of Minnesota, 1992.
- [3] N. Le Bihan and J. Mars. Singular value decomposition of matrices of quaternions: A new tool for vector-sensor signal processing. *Signal Processing*, 84(7):1177–1199, 2004.
- [4] J. Li and Jr. R.T. Compton. Angle and polarization estimation using ESPRIT with a polarization sensitive array. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 39(9):1376–1383, Sept. 1991.
- [5] S. Miron, M. Guillon, N. Le Bihan, and J. Mars. Multidimensional signal processing using quaternions. *3rd Workshop on Physics in Signal and Image Processing, Grenoble, France*, pages 57–60, Jan. 2003.
- [6] A. Nehorai and E. Paldi. Vector-sensor array processing for electromagnetic source localisation. *IEEE Trans. Signal Processing*, 42(2):376–398, Feb. 1994.
- [7] S. J. Sangwine. Fourier transforms of color images using quaternions, or hypercomplex numbers. *Electronics letters*, 32(21):1979–1980, 1996.
- [8] P. Stoica and A. Nehorai. MUSIC, maximum likelihood, and Cramér-Rao bound. *IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing*, 37(5):720–741, 1989.
- [9] H. L. Van Trees. *Detection, Estimation and Modulation Theory*, volume 1. John Wiley & Sons, 1968.
- [10] J. P. Ward. *Quaternions and Cayley Numbers, Algebra and applications*. Kluwer Academic, 1997.
- [11] A. J. Weiss and B. Friedlander. Performance analysis of diversely polarized antenna arrays. *IEEE Trans. Signal Processing*, 39(7):1589–1603, July 1991.
- [12] K. T. Wong and M. D. Zoltowski. Self-initiating MUSIC direction finding and polarization estimation in spatio-polarizational beamspace. *IEEE Trans. Antennas Propagation*, 48(8):1235–1245, Sept. 2000.

# Estimation des paramètres de propagation d'un canal MIMO par l'algorithme ESPRIT-Unitaire multidimensionnel

Steve BARTELMAOS<sup>1</sup>, Karim ABED-MERAÏM<sup>1</sup>, Jean-Marie CHAUFRAY<sup>2</sup>, valery GUILLET<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Département TSI, ENST-Paris, 46 rue Barrault 75634, Paris Cedex 13, France

<sup>2</sup>France télécom FTRD/DMR/BEL, Belfort, France

bartelma, abed@tsi.enst.fr

valery.guillet, jean-marie.chaufray@francetelecom.com

**Résumé** – Dans ce travail, nous proposons une extension de l'algorithme ESPRIT-Unitaire au cas multidimensionnel (6D) afin d'estimer les différents paramètres du canal radio régi par un modèle de propagation en rayons. Cette méthode nous permet d'estimer pour un système MIMO (Multi-Input Multi-Output) tous les paramètres utiles des rayons, i.e. les angles d'émission et de réception (azimut et élévation), les retards, les dopplers et les amplitudes complexes. On établit aussi la robustesse de cette méthode vis à vis d'une surestimation du nombre de trajets 'effectifs' du canal. Cette robustesse nous permet, en particulier, de nous affranchir de l'étape 'délicate' de l'estimation du nombre de trajets. Nous présentons quelques résultats de simulation permettant d'évaluer l'efficacité de cette nouvelle méthode et d'illustrer sa robustesse vis à vis de la méconnaissance du nombre de trajets.

**Abstract** – In this work, we propose an extension of the ESPRIT-Unitaire algorithm in the multidimensional case (6D) in order to estimate the various parameters of the radio channel governed by a propagation ray model. This method enables us to estimate for a MIMO system (Multi-Input Multi-Output) all the useful parameters of the rays, i.e. the angles of emission and reception (azimuth and elevation), the delays, the dopplers and the complex amplitudes. In addition we establish the robustness of this method with respect to an over-estimation of the number of 'effectives' rays of the channel. This robustness enables us, in particular, to avoid the 'delicate' stage of the estimation of the number of rays. We present at the end some simulation results to evaluate the effectiveness and robustness of this new method.

## 1 Introduction

On appelle "canal de propagation" l'ensemble des distorsions subies par un signal avant d'atteindre son récepteur destinataire. Ces distorsions sont dues au milieu dans lequel s'effectue la propagation et sont de natures diverses : retards, atténuations, déphasages, etc. Une connaissance précise de ces déformations permet de réaliser, à la réception du signal, des traitements adaptés visant à les corriger. Aussi, une telle connaissance permet d'optimiser l'allocation de ressource et le dimensionnement d'un système cellulaire [1]. De nombreuses études théoriques [2] ou expérimentales [3] ont été réalisées pour tenter de caractériser de manière fidèle les phénomènes physiques intervenant pendant la propagation afin d'élaborer des modèles réalistes pouvant être utilisés en simulation. De l'adéquation de ces modèles avec la réalité dépend la pertinence des traitements en réception. Dans notre cas on utilise le modèle de propagation en rayons, chacun des rayons auxquels nous nous intéressons quitte l'émetteur avec certains angles de départ, et atteint le récepteur avec certains angles d'arrivée (voir figure 1). En outre, en fonction de la distance parcourue, il arrive atténué et retardé ; les réflexions sur les obstacles introduisent un déphasage. Enfin, le rayon peut subir un effet Doppler lorsque le récepteur (ou son environnement) est mobile.

Nous proposons ici une méthode basée sur l'algorithme ESPRIT que l'on nomme "ESPRIT-Unitaire multidimensionnel" et qui s'applique au modèle de propagation en rayons pour estimer les différents paramètres du canal. Ci-dessous, nous décrivons brièvement les principales idées de cette méthode.

## 2 Le modèle de propagation en rayons

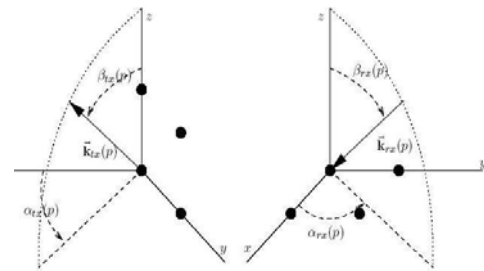


FIG. 1 – Antennes à l'émission et à la réception

Nous considérons un émetteur constitué d'une antenne munie de  $M$  capteurs, repérés par leur vecteur position  $\vec{r}_{tx}(m)$ ,  $m = 1, \dots, M$  dans un repère lié à l'antenne et un récepteur mobile se déplaçant dans la direction  $\vec{v}$  constitué de  $R$  capteurs ayant  $\vec{r}_{rx}(r)$  comme vecteur position,  $r = 1, \dots, R$ . Un signal électro-magnétique est généré par l'émetteur et diffusé dans toutes les directions de l'espace. Une façon de considérer ce signal est de le décomposer en un ensemble de "rayons", émis chacun dans une direction particulière. La direction de départ d'un rayon  $p$ ,  $p = 1, \dots, P$ , est caractérisée par son vecteur directeur  $\vec{k}_{tx}(p)$ , celle d'arrivée est caractérisée alors par

$\vec{k}_{rx}(p)$ . Pour chaque couple de capteurs (émission/réception)  $(m, r)$ , l'expression du signal reçu après l'émission d'une suite de symboles  $s_k$  filtrés par une fenêtre  $g$  ( $g$  est le filtre d'émission), et échantillonnés à une fréquence  $f_e = 1/T_e$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{mr}(nT_e) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_{n-k} h_{mr}(n, k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_{n-k} \left( \sum_{p=1}^P \lambda_p a_{mr}^{(p)} e^{2j\pi \delta f_p n T_e} g(kT_e - \tau_p) \right) \end{aligned}$$

où  $a_{mr}^{(p)} = e^{-2j\pi f_p / c \vec{k}_{rx}(p) \cdot \vec{r}_{rx}(r)} e^{2j\pi f_0 / c \vec{k}_{tx}(p) \cdot \vec{r}_{tx}(m)}$  avec  $f_p = f_0 + \delta f_p$  où  $f_0$  est la fréquence porteuse et  $\delta f_p$  représente l'effet Doppler qui est proportionnel au produit scalaire du vecteur directeur de l'onde avec le vecteur vitesse de l'antenne :

$$\delta f_p = \frac{f_0}{c} \vec{v} \cdot \vec{k}_{rx}(p).$$

$c$  étant la célérité de la lumière. Le canal estimé<sup>1</sup> se présente sous la forme d'une suite de matrices de taille  $M \times R$ , chacune correspondant à un échantillon de la réponse impulsionnelle :

$$\hat{\mathbf{H}}_n(kT_e) = \begin{bmatrix} \hat{h}_{11}(kT_e) & \cdots & \hat{h}_{1R}(kT_e) \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{h}_{M1}(kT_e) & \cdots & \hat{h}_{MR}(kT_e) \end{bmatrix}$$

Nous appelons  $M_y$  le nombre de capteurs de l'antenne d'émission suivant l'axe  $Oy$ , et  $M_z$  suivant l'axe  $Oz$ . De même,  $R_x$  et  $R_y$  désignent le nombre de capteurs suivant les axes  $Ox$  et  $Oy$  de l'antenne de réception<sup>2</sup>.

Suite à un bon arrangement des capteurs (la numérotation des capteurs de l'antenne d'émission est du bas vers le haut suivant l'axe  $Oz$  tout au long de l'axe  $Oy$  alors que celle des capteurs de réception est du bas en haut suivant l'axe  $Oy$  tout au long de l'axe  $Ox$ ), la matrice  $\hat{\mathbf{H}}_n(kT_e)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}_n(k) &= \sum_{p=1}^P \lambda_p g(kT_e - \tau_p) e^{jn\theta(p)} (\mathbf{u}_{\mu_y(p)} \otimes \mathbf{u}_{\mu_z(p)}) \\ &\quad (\mathbf{u}_{\nu_x(p)} \otimes \mathbf{u}_{\nu_y(p)})^T + \mathbf{B}(k), \end{aligned} \quad (1)$$

où  $\theta(p) = 2\pi \delta f_p T_e$  et les vecteurs  $\mathbf{u}_{\mu_z(p)}$ ,  $\mathbf{u}_{\mu_y(p)}$ ,  $\mathbf{u}_{\nu_x(p)}$  et  $\mathbf{u}_{\nu_y(p)}$ , de tailles respectives  $M_z$ ,  $M_y$ ,  $R_x$  et  $R_y$  sont les paramètres du  $p^{\text{ème}}$  trajet fonctions des angles (élévation et azimuth) d'émission et des angles de réception, respectivement, avec :

$$\begin{aligned} \mu_y(p) &= 2\pi f_0 / c \sin(\alpha_{tx}(p)) \sin(\beta_{tx}(p)) \delta_{y,tx} \\ \mu_z(p) &= 2\pi f_0 / c \cos(\beta_{tx}(p)) \delta_{z,tx} \\ \nu_x(p) &= 2\pi f_p / c \cos(\alpha_{rx}(p)) \sin(\beta_{rx}(p)) \delta_{x,rx} \\ \nu_y(p) &= 2\pi f_p / c \sin(\alpha_{rx}(p)) \sin(\beta_{rx}(p)) \delta_{y,rx}, \end{aligned}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  représentent les angles azimuth et élévation, respectivement et  $\delta_{y,tx}$ ,  $\delta_{z,tx}$ ,  $\delta_{x,rx}$  et  $\delta_{y,rx}$  représentent les espaces entre les capteurs des antennes d'émission et de réception.  $\mathbf{B}(k)$  représente un vecteur bruit modélisant les erreurs

d'estimation du canal que l'on supposera blanc et gaussien. Les vecteurs  $\mathbf{u}$  dans l'équation (1) sont tous de la forme :

$$\mathbf{u}_d(p) = \begin{bmatrix} 1 & e^{j\mu_d(p)} & \cdots & e^{j(N_d-1)\mu_d(p)} \end{bmatrix}^T.$$

$N_d$  représente la taille de la  $d^{\text{ème}}$  dimension,  $\otimes$  désigne le produit de Kronecker et  $[]^T$  l'opérateur de transposition.

### 3 Estimation des paramètres du canal

#### 3.1 Angles d'émission et de réception

Nous construisons maintenant les vecteurs  $\hat{\mathbf{h}}_n(kT_e)$  en empilant successivement les  $R$  colonnes de chaque matrice  $\hat{\mathbf{H}}_n(kT_e)$ . En l'absence de bruit, ces vecteurs appartiennent à l'espace engendré par les vecteurs  $\mathbf{u}(p) = (\mathbf{u}_{\nu_x(p)} \otimes \mathbf{u}_{\nu_y(p)} \otimes \mathbf{u}_{\mu_y(p)} \otimes \mathbf{u}_{\mu_z(p)})$ ,  $p = 1, \dots, P$ . Cette mise en forme nous permet d'appliquer l'algorithme ESPRIT-Unitaire multidimensionnel afin de retrouver les paramètres  $\mu_y(p)$ ,  $\mu_z(p)$ ,  $\nu_y(p)$ ,  $\nu_x(p)$  et d'en déduire les angles d'émission et de réception des trajets.

#### 3.2 Retards et fréquences Doppler

Pour l'estimation des retards, nous allons utiliser le fait qu'un décalage temporel se transforme en déphasage dans le domaine de Fourier. Définissons une bande  $B = [-\frac{f_B}{2}, \frac{f_B}{2}]$  incluse dans  $[-\frac{1}{2T_e}, \frac{1}{2T_e}]$ , à l'intérieur de laquelle nous choisissons  $L$  fréquence équiréparties :  $f_l = \frac{L}{L} f_B$ ,  $l = -L_2, \dots, L_2$ ,  $L_2 = (L-1)/2$ . Nous construisons maintenant les  $L$  valeurs de la transformée de Fourier (TF) à temps discret de la suite  $\hat{\mathbf{h}}_n(kT_e)$  aux fréquences  $f_l$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{h}}_n(f_l) &= \sum_k \hat{\mathbf{h}}_n(kT_e) e^{-2j\pi \frac{k f_l T_e}{L}} \\ &= \sum_k \sum_{p=1}^P \lambda_p g(kT_e - \tau_p) e^{jn\theta(p)} \mathbf{u}(p) e^{-2j\pi k f_l T_e} \\ &= \bar{g}(f_l) \sum_{p=1}^P \lambda_p e^{jn\theta(p)} \mathbf{u}(p) e^{-2j\pi f_l \tau_p}. \end{aligned}$$

Le filtre  $g(t)$  étant connu ainsi que sa TF  $\bar{g}(f_l)$ , il est possible de diviser chaque vecteur  $\tilde{\mathbf{h}}_n(f_l)$  par  $\bar{g}(f_l)$  de sorte que l'on obtienne :

$$\bar{\mathbf{h}}_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{g}(f_{-L_2})} \tilde{\mathbf{h}}_n(f_{-L_2}) \\ \vdots \\ \frac{1}{\bar{g}(f_{L_2})} \tilde{\mathbf{h}}_n(f_{L_2}) \end{bmatrix} = \sum_{p=1}^P \lambda_p e^{jn\theta(p)} (\mathbf{u}_{\phi(p)} \otimes \mathbf{u}(p))$$

où

$$\mathbf{u}_{\phi(p)} = \begin{bmatrix} e^{-jL_2\phi(p)} \\ \vdots \\ e^{jL_2\phi(p)} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \phi(p) = -\frac{2\pi}{L} f_B \tau_p \quad (2)$$

Ainsi on retrouve la même structure que pour les autres paramètres angulaires. Il est donc possible de retrouver  $\phi(p)$  et d'en déduire les retards des trajets par ESPRIT comme sera expliqué ci-dessus.

<sup>1</sup>L'estimation du canal est réalisée par l'envoi de séquences pilotes appropriées.

<sup>2</sup>Soulignons que ce travail a été fait dans le cadre d'une étude avec FTR&D et que la configuration d'antenne choisie correspond à celle utilisée dans cette étude.

Pour estimer les  $\theta(p)$ , et donc les fréquences Doppler, nous construisons pour tout  $n$ , le vecteur

$$\tilde{\mathbf{h}}_n = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{h}}_n \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{h}}_{n+N-1} \end{bmatrix}$$

Où  $N$  est un paramètre de fenêtrage choisi. On peut alors écrire  $\tilde{\mathbf{h}}_n$  sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{h}} = \sum_{p=1}^P \lambda_p e^{jn\theta(p)} \mathbf{u}_{\theta(p)} \otimes \mathbf{u}_{\phi(p)} \otimes \mathbf{u}_{\mu_y(p)} \otimes \mathbf{u}_{\mu_z(p)} \otimes \mathbf{u}_{\nu_x(p)} \otimes \mathbf{u}_{\nu_y(p)}$$

où  $\mathbf{u}_{\theta(p)} = [1 \ e^{j\theta(p)} \ \dots \ e^{j(N-1)\theta(p)}]^T$ .

Ayant cette forme, on peut appliquer l'algorithme ESPRIT pour trouver  $\theta(p)$ .

## 4 Algorithme ESPRIT

On peut résumer l'idée de l'algorithme ESPRIT de la manière suivante : Supposons que l'on a une matrice  $\mathbf{U}$  de la forme

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ e^{j\mu(1)} & \dots & e^{j\mu(P)} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{j(N-1)\mu(1)} & \dots & e^{j(N-1)\mu(P)} \end{bmatrix}$$

Chaque ligne de cette matrice se déduit de la précédente par multiplication à droite par la matrice diagonale

$$\Delta_\mu = \begin{bmatrix} e^{j\mu(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\mu(P)} \end{bmatrix} = \text{diag}(e^{j\mu(1)} \dots e^{j\mu(P)})$$

Ainsi, si nous introduisons les matrices de sélection  $\mathbf{J}_1 = [\mathbf{I}_{N-1} \ 0]$  et  $\mathbf{J}_2 = [0 \ \mathbf{I}_{N-1}]$ , permettant de sélectionner par multiplication à gauche les  $N-1$  premières lignes et les  $N-1$  dernières lignes d'une matrice. Cette propriété se traduit par l'équation d'invariance :  $\mathbf{J}_2 \mathbf{U} = \mathbf{J}_1 \mathbf{U} \Delta_\mu$  dont la résolution permet d'obtenir  $\Delta_\mu$ .

L'algorithme ESPRIT va exploiter cette structure particulière de la matrice  $\mathbf{U}$  pour estimer les paramètres  $\mu_p$ . En pratique, on n'a pas accès à  $\mathbf{U}$  mais plutôt à une matrice  $\mathbf{E}_s$  générant le même sous-espace (dit sous-espace signal) que  $\mathbf{U}$ , i.e  $\mathbf{E}_s = \mathbf{U} \mathbf{T}$  où  $\mathbf{T}$  est une matrice  $P \times P$  inversible. L'équation d'invariance s'applique à la matrice  $\mathbf{E}_s$  :

$$\mathbf{J}_2 \mathbf{E}_s = \mathbf{J}_1 \mathbf{E}_s \mathbf{T}^{-1} \Delta_\mu \mathbf{T} = \mathbf{J}_1 \mathbf{E}_s \Psi_\mu$$

La résolution de cette équation au sens des moindres carrés ou des moindres carrés totaux permet d'accéder à  $\Psi_\mu$  et donc à ses valeurs propres données par la matrice  $\Delta_\mu$ .

Dans le cas D-dimensionnel, on aura des matrices de sélection pour chacune des dimensions données par :

$$\mathbf{J}_{d,1} = \mathbf{I}_{N_D} \otimes \dots \otimes \mathbf{I}_{N_{d+1}} \otimes [\mathbf{I}_{N_{d-1}} \ 0] \otimes \mathbf{I}_{N_{d-1}} \otimes \dots \otimes \mathbf{I}_{N_1}$$

$$\mathbf{J}_{d,2} = \mathbf{I}_{N_D} \otimes \dots \otimes \mathbf{I}_{N_{d+1}} \otimes [0 \ \mathbf{I}_{N_{d-1}}] \otimes \mathbf{I}_{N_{d-1}} \otimes \dots \otimes \mathbf{I}_{N_1}$$

et  $D$  matrices d'invariance à résoudre. Cela nous conduit finalement à l'estimation des valeurs propres de  $D$  matrices de la forme

$$\Psi_{\mu_d} = \mathbf{T}^{-1} \Delta_{\mu_d} \mathbf{T} \quad d = 1 \dots D$$

Plusieurs solutions existent pour l'estimation et l'association de ces valeurs propres [4]. Nous avons adapté ici une approche basée sur la décomposition de Schur conjointe [5] des matrices  $\Psi_{\mu_d}$  qui permet de réaliser les deux opérations (estimation et association) simultanément.

## 5 ESPRIT-Unitaire

L'algorithme ESPRIT-Unitaire est une méthode permettant, pour un certain type d'antenne (antenne centro-symétrique), d'améliorer les performances d'ESPRIT et de réduire la complexité de ce dernier, en remplaçant dans l'équation d'invariance toutes les matrices complexes par des matrices réelles. Cet algorithme est décrit en détail dans [6]. L'idée générale est la suivante :

L'algorithme ESPRIT-Unitaire peut se mettre en œuvre dans le cas particulier où l'antenne est "centro-symétrique", i.e. lorsque les colonnes  $\mathbf{u}_p$ ,  $p = 1, \dots, P$ , de la matrice  $\mathbf{U}$  vérifient l'égalité suivante :

$$\Pi_N \mathbf{u}_p^* = \gamma_p \mathbf{u}_p$$

où  $\gamma_p$  est un scalaire,  $\mathbf{u}_p^*$  est le conjugué de  $\mathbf{u}_p$  et  $\Pi_N$  est une matrice de taille  $N \times N$  ne comportant que des 1 sur l'anti-diagonale.

Une première étape consiste à transformer la matrice  $\mathbf{U}$  en une matrice réelle. Cela se fait en deux étapes : D'abord on transforme cette matrice en une matrice centro-hermitienne  $\tilde{\mathbf{U}} = [\mathbf{U} \ \Pi_N \mathbf{U}^* \Pi_P]$  vérifiant la condition "centro-hermitienne" :  $\Pi_N \tilde{\mathbf{U}}^* \Pi_{2P} = \tilde{\mathbf{U}}$ . On applique ensuite à  $\tilde{\mathbf{U}}$  la transformation  $\varphi(\tilde{\mathbf{U}}) = \mathbf{Q}_N^H \tilde{\mathbf{U}} \mathbf{Q}_{2P}$  ( $\mathbf{Q}_N$  et  $\mathbf{Q}_{2P}$  sont des matrices unitaires données dans [6]) qui réalise une bijection de l'espace des matrices centro-hermitiennes dans l'espace des matrices réelles.

Soit  $\mathbf{E}_s$  la matrice réelle générant le sous-espace image de  $\varphi(\tilde{\mathbf{U}})$ . Grâce à la propriété de centro-symétrie de  $\mathbf{U}$ ,  $\tilde{\mathbf{U}}$  a le même espace image (colonne) que  $\mathbf{U}$ . Par conséquent  $\mathbf{E}_s$  génère le même sous-espace que  $\mathbf{Q}_N^H \mathbf{U}$ , i.e  $\mathbf{E}_s = \mathbf{Q}_N^H \mathbf{U} \mathbf{T}$  où  $\mathbf{T}$  est une matrice inversible.

Ainsi l'équation d'invariance devient

$$\mathbf{J}_2 \mathbf{Q}_N \mathbf{E}_s = \mathbf{J}_1 \mathbf{Q}_N \mathbf{E}_s \Psi_\mu$$

ou, pour n'utiliser que des matrices réelles,

$$\mathbf{Q}_{N-1}^H \mathbf{J}_2 \mathbf{Q}_N \mathbf{E}_s = \mathbf{Q}_{N-1}^H \mathbf{J}_1 \mathbf{Q}_N \mathbf{E}_s \Psi_\mu$$

$$\iff \mathbf{J}_2' \mathbf{E}_s = \mathbf{J}_1' \mathbf{E}_s \Psi_\mu$$

où  $\mathbf{J}_i' \triangleq \mathbf{Q}_{N-1}^H \mathbf{J}_i \mathbf{Q}_N$   $i = 1, 2$ , sont des matrices réelles.

Notons que  $\Psi_\mu$  est à valeurs complexes. Pour continuer à ne manipuler que des matrices réelles, observons que

$$\Upsilon_\mu \triangleq (\mathbf{I}_P + \Psi_\mu)^{-1} j (\mathbf{I}_P - \Psi_\mu) = \mathbf{T}^{-1} \Delta_\mu' \mathbf{T}$$

avec  $\Delta_\mu' = \text{diag}(\tan(\mu(1)) \dots \tan(\mu(P)))$ . Pour obtenir cette matrice, nous utilisons l'équation d'invariance

$$\mathbf{K}_2 \mathbf{E}_s = \mathbf{K}_1 \mathbf{E}_s \Upsilon_\mu$$

avec

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{Q}_{N'}^H (\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2) \mathbf{Q}_N$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{Q}_{N'}^H j (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) \mathbf{Q}_N$$

Dans le cas multidimensionnel, il suffit de remplacer  $\mathbf{J}_1$  et  $\mathbf{J}_2$  par  $\mathbf{J}_{d,1}$  et  $\mathbf{J}_{d,2}$ .

## 6 Robustesse

Les critères statistiques d'estimation du nombre de trajets du canal (que l'on appelle aussi ordre du canal) tels que AIC et MDL [7] sont peu efficaces dans le cas de faibles RSBs

ou si la dynamique des amplitudes des trajets est forte [8]. Nous nous sommes intéressés à l'étude de l'influence de la surestimation du nombre de trajets effectifs sur l'estimation des paramètres de propagation désirés par l'algorithme ESPRIT-Unitaire. Nous avons fait le calcul théorique des performances asymptotiques (évaluation de la variance d'erreur d'estimation lorsque la taille d'observation est 'grande') pour un canal composé d'un certain nombre de trajets 'effectifs' et d'autres à très faibles amplitudes par rapport aux trajets principaux (ceci représente une situation de surestimation de l'ordre effectif du canal). Cette analyse de performance est très similaire à celle développée dans [6] mais n'est pas présentée ici dû à la limitation d'espace. Elle établit une certaine robustesse de la méthode proposée vis-à-vis de la surestimation du nombre de trajets comme l'illustre l'exemple de la figure 4.

## 7 Simulation

Des résultats de simulation sont présentés dans les figures ci dessous. La figure 2 représente les paramètres estimés (points  $\bullet$ ) des 20 trajets sans présence du bruit, dans le cas de deux antennes carrées de taille  $8 \times 8$  capteurs. Les (points  $\circ$ ) représentent les paramètres exacts des trajets réels. Ces résultats permettent de vérifier la validité de la méthode. Dans nos simulations le Doppler est nul et n'est pas donc estimé, à noter que l'amplitude est exprimée en dB, les angles en degré et les retards en secondes. La figure 3 représente le même cas que précédemment mais en présence d'un bruit Gaussien de 20 dB, les traits associent les rayons estimés aux rayons réels.

La figure 4 nous permet de comparer l'effet de la surestimation sur les paramètres des trajets effectifs. Pour cette simulation on a un canal avec 10 trajets effectifs et 5 trajets de faibles amplitudes, on estime une fois les paramètres en considérant le nombre des trajets effectifs i.e 10 (points  $\bullet$ ) et une deuxième fois en considérant le nombre de trajets total i.e 15 (points  $\circ$ ). Ceci a été évalué pour une antenne uni capteur à l'émission et une antenne à 9 capteurs horizontaux à la réception. Le rapport Signal sur Bruit est égal à 5 dB. On peut observer que malgré la surestimation du nombre de trajets, les paramètres des trajets effectifs sont bien estimés et que les amplitudes des trajets 'non-existants' introduits par la surestimation sont très faibles relativement à celles des trajets réels.

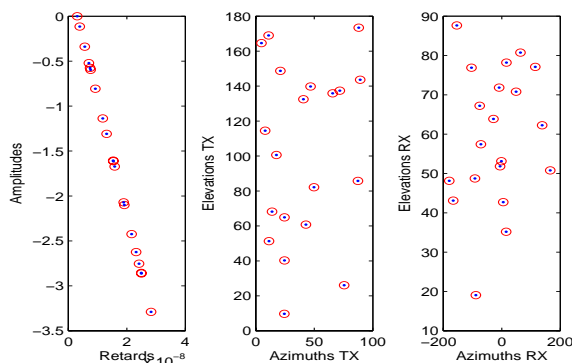


FIG. 2 – Les paramètres des trajets sans bruit

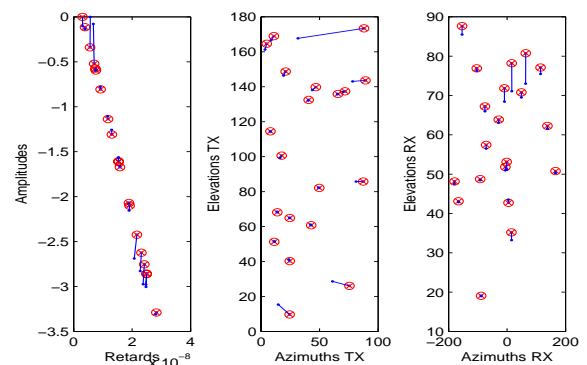


FIG. 3 – Les paramètres des trajets avec bruit

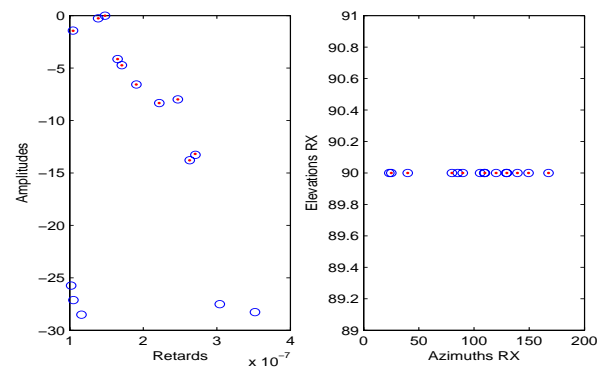


FIG. 4 – (Puissances (dB) et retards (s) des trajets); (Angles d'arrivée (degrés) des trajets)

## Références

- [1] M. Debbah et R. Muller. *MIMO Channel Modelling and the Principle of Maximum Entropy*. IEEE Transactions on Information Theory, à paraître 2005.
- [2] W.C. Jakes. *Microwave Mobile Communications*. Wiley, New-York, 1974.
- [3] P. Pajusco. *Experimental Characterization of D.O.A. at the Base Station in Rural and Urban Area*. IEEE Vehicular Technology Conference, 1998.
- [4] Y. Hua et K. Abed-Meraim. *Techniques of eigenvalues estimation and association*. DSP Review Journal, vol. 7, no. 4, pp. 253–259, Oct. 1997.
- [5] K. Abed-Meraim et Y. Hua et M. Haardt. *Joint Schur decomposition : algorithms and applications*. Proceedings of the US/Australia Joint Workshop on Defence Applications of Signal Processing, ELSEVIER, 2001.
- [6] M. Haardt. *Efficient One-, Two, and Multidimensional High-Resolution Array Signal Processing*. Shaker Verlag, Aachen, 1997.
- [7] M. Wax et T. Kailath. *Detection of signals by information theoretic criteria*. IEEE Transactions on Sig. Proc., vol. 33, no. 2, pp. 387 – 392, Avril 1985.
- [8] A.P. Liavas et P.A. Regalia et J.-P. Delmas. *On the robustness of the linear prediction method for blind channel identification with respect to effective channel undermodeling/overmodeling*. Digital Sig. Proc., vol. 48, 2000.



# Bornes de Cramer Rao de DOA pour signaux BPSK et QPSK en présence de bruit non uniforme

Habti ABEIDA, Jean Pierre DELMAS

GET/INT, Département CITI, UMR-CNRS 5157  
9 rue Charles Fourier, 91011 Evry Cedex, France

habti.abeida@int-evry.fr, jean-pierre.delmas@int-evry.fr

**Résumé** – Cet article est consacré au calcul de la borne de Cramer-Rao (CRB) stochastique des directions d'arrivée (DOA) de signaux de modulation BPSK et QPSK en présence de bruit additif gaussien circulaire de matrice de covariance spatiale diagonale arbitraire. Une expression analytique de cette borne est donnée dans le cas d'une seule source grâce au découplage entre les paramètres puissance et les paramètres de phase de la matrice d'information de Fisher (FIM). Cette borne est comparée à diverses bornes dérivées selon diverses connaissances a priori. Ces résultats et comparaisons sont ensuite étendus au cas de deux sources indépendantes où des expressions analytiques de CRB sont obtenues pour des grandes valeurs de rapport signal sur bruit (SNR). Nous avons mis en évidence de grandes différences de comportement par rapport à la borne standard obtenue dans le cas de signaux gaussiens circulaires, démontrant ainsi l'intérêt des approches EM dans le cas de connaissances a priori sur la distribution discrète des sources.

**Abstract** – This paper focuses on the stochastic Cramer-Rao bound (CRB) for the direction of arrival (DOA) for binary phase-shift keying (BPSK) and quaternary phase-shift keying (QPSK) modulated signals observed on the background of nonuniform white noise with an arbitrary diagonal covariance matrix. Explicit expressions of the CRB for the DOA parameter alone in the case of a single signal waveform is given thanks to the decoupling of the power and phase parameters in the Fisher information matrices (FIM) and compared with CRBs obtained with different a priori knowledge. Then, these results and comparisons are extended to the case of two independent sources where an explicit expression of the CRB of the DOA parameters alone is given for large SNR. They reveal large differences of behavior with respect to complex circular Gaussian signals. This proves the interest of the EM approaches when an a priori information on the discrete distribution of the sources is given.

## 1 Introduction

Il existe une abondante littérature sur les bornes de Cramer-Rao des DOA de sources de distributions gaussiennes. Dans le cas de distributions discrètes telles que celles rencontrées en communications numériques, le calcul de ses bornes semble délicat. Un premier calcul de celles-ci a été mené [1] pour des modulations BPSK et QPSK dans le cadre de bruit additif gaussien circulaire spatialement blanc uniforme. Mais ce modèle de bruit semble irréaliste quand il est d'origine externe, ce qui est le cas en particulier dans les applications radio-électriques car alors le bruit est spatialement coloré. Cependant, dans le cas particulier de réseaux lacunaires, ce modèle général de bruit spatialement corrélés peut être simplifié [2], [3] en supposant qu'il est simplement blanc non uniforme. Le but de cet article est d'étendre les résultats de [1] dans ce cadre.

## 2 Modèle et notations

Nous considérons une antenne arbitraire de  $M$  capteurs recevant un ou deux signaux indépendants de modulations BPSK ou QPSK issus de DOAs inconnues  $(\theta_k)_{k=1,2}$ . Nous supposons que l'antenne est parfaitement calibrée de telle sorte que les vecteurs directionnels sont des fonctions connues  $\mathbf{a}_k$  de  $\theta_k$  telles que  $\|\mathbf{a}_k\|^2 = M$ . Nous supposons également qu'il n'y a pas d'interférence entre symboles de sorte qu'après démodulation, les signaux bande de base en sortie de filtrage adapté du réseau d'antenne s'écrivent sous la forme :

$$\mathbf{y}_t = s_{1,t}\mathbf{a}_1 + s_{2,t}\mathbf{a}_2 + \mathbf{n}_t \quad t = 1, \dots, T \quad (1)$$

où  $s_{k,t} = \sigma_k e^{i\phi_k} \epsilon_{k,t}$  et où  $(\epsilon_{k,t})_{t=1,\dots,T}$  sont des symboles aléatoires indépendants, identiquement distribués (IID) prenant des valeurs  $\pm 1$  [resp.  $\pm\sqrt{2}/2 \pm i\sqrt{2}/2$ ] avec des probabilités égales associées à la modulation BPSK [resp. QPSK].  $(\mathbf{n}_t)_{t=1,\dots,T}$  sont des v.a. IID complexes circulaires centrées gaussiennes de matrice de covariance diagonale inconnue

$$\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(\mathbf{n}_t \mathbf{n}_t^H) = \text{Diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_M^2)$$

où  $\boldsymbol{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} (\sigma_1, \dots, \sigma_M)$ .  $\mathbf{n}_t$  et  $\epsilon_t$  sont supposés indépendants. En absence de connaissances a priori sur les symboles transmis, leur phase et leur puissance, notre modèle (1) est paramétré par  $\boldsymbol{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{s_1}, \phi_1, \theta_1)$  ou  $\boldsymbol{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{s_1}, \phi_1, \theta_1, \sigma_{s_2}, \phi_2, \theta_2)$  selon le nombre de sources, et les observations  $(\mathbf{y}_t)_{t=1,\dots,T}$  possèdent une densité de probabilité (PDF) comme mélange de distributions gaussiennes complexes circulaires :

$$p(\mathbf{y}_t; \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{L^K \pi^M \text{Det}(\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma}))} \sum_{j=1}^{L^K} e^{-(\mathbf{y}_t - \mathbf{A}\mathbf{s}_j)^H \mathbf{Q}_n^{-1}(\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{y}_t - \mathbf{A}\mathbf{s}_j)} \quad (2)$$

avec pour une source  $K = 1$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{s}_j = \sigma_{s_1} \eta_{j,1} e^{i\phi_1}$ ,  $(\eta_{j,1})_{j=1,L} = \pm 1$  ( $L = 2$ ) ou  $(\eta_{j,1})_{j=1,L} = \pm\sqrt{2}/2 \pm i\sqrt{2}/2$  ( $L = 4$ ) associée respectivement aux modulations BPSK et QPSK. Pour deux sources  $K = 2$ ,  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$  et  $\mathbf{s}_j = (\sigma_{s_1} \eta_{j,1} e^{i\phi_1}, \sigma_{s_2} \eta_{j,2} e^{i\phi_2})^T$  où  $(\eta_{j,1}, \eta_{j,2})_{j=1,L^2} = (\pm 1, \pm 1)$  ( $L = 2$ ) ou  $(\eta_{j,1}, \eta_{j,2})_{j=1,L^2} = (\pm\sqrt{2}/2 \pm i\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2 \pm i\sqrt{2}/2)$  ( $L = 4$ ) associées respectivement aux modulations BPSK et QPSK.

### 3 CRB stochastiques pour des signaux BPSK et QPSK

#### 3.1 Cas d'une source

En mettant les PDF (2) sous les formes suivantes :

$$p_{\text{BPSK}}(\mathbf{y}_t; \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{\pi^M \text{Det}(\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma}))} e^{-(\|\tilde{\mathbf{y}}_t\|^2 + \sigma_{s_1}^2 \|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2)} \text{ch}(\sigma_{s_1} g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t))$$

$$p_{\text{QPSK}}(\mathbf{y}_t; \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{\pi^M \text{Det}(\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma}))} e^{-(\|\tilde{\mathbf{y}}_t\|^2 + \sigma_{s_1}^2 \|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2)} \text{ch}\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}} g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right) \text{ch}\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}} g_2(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)$$

avec  $\tilde{\mathbf{y}}_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_n^{-1/2}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{y}_t$ ,  $\tilde{\mathbf{a}}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_n^{-1/2}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{a}_1$ ,  $g_1(\mathbf{y}_t) \stackrel{\text{def}}{=} 2\Re(e^{i\phi_1} \tilde{\mathbf{y}}_t^H \tilde{\mathbf{a}}_1)$  et  $g_2(\mathbf{y}_t) \stackrel{\text{def}}{=} 2\Im(e^{i\phi_1} \tilde{\mathbf{y}}_t^H \tilde{\mathbf{a}}_1)$ , nous avons étendu les calculs menés dans [1] et démontré le théorème suivant dans [4] :

**Théorème 1** Les paramètres puissances et phases de  $\boldsymbol{\alpha}$  sont découplés dans les FIM associées aux signaux de modulations BPSK et QPSK et celles-ci sont données par :

$$\mathbf{I}_{\text{BPSK}} = T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_B^{(1)} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I}_B^{(2)} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{I}_{\text{QPSK}} = T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_Q^{(1)} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I}_Q^{(2)} \end{bmatrix}$$

avec

$$\mathbf{I}_B^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 2\sigma_{s_1}^2 \|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2 (1 - f(Mr_1)) \\ 2\sigma_{s_1}^2 i(\tilde{\mathbf{a}}_1'^H \tilde{\mathbf{a}}_1) (1 - f(Mr_1)) \\ 2\sigma_{s_1}^2 i(\tilde{\mathbf{a}}_1'^H \tilde{\mathbf{a}}_1) (1 - f(Mr_1)) \\ 2\sigma_{s_1}^2 \|\tilde{\mathbf{a}}_1'\|^2 (1 - f(Mr_1)) \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{I}_Q^{(2)})_{1,1} = 2\sigma_{s_1}^2 \|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2 \left(1 - (1 + Mr_1)f\left(\frac{Mr_1}{2}\right)\right)$$

$$(\mathbf{I}_Q^{(2)})_{1,2} = 2\sigma_{s_1}^2 i(\tilde{\mathbf{a}}_1'^H \tilde{\mathbf{a}}_1') \left(1 - (1 + Mr_1)f\left(\frac{Mr_1}{2}\right)\right)$$

$$(\mathbf{I}_Q^{(2)})_{2,2} = 2\sigma_{s_1}^2 \|\tilde{\mathbf{a}}_1'\|^2 \left(1 - \left(1 + \frac{Mr_1}{\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2} \frac{|\tilde{\mathbf{a}}_1^H \tilde{\mathbf{a}}_1'|^2}{\|\tilde{\mathbf{a}}_1'\|^2}\right) f\left(\frac{Mr_1}{2}\right)\right)$$

où le SNR est défini par  $r_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma_{s_1}^2}{M} \sum_{m=1}^M \frac{1}{\sigma_m^2}$ ,  $\mathbf{a}_1' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{a}_1}{d\theta_1}$ ,  $\tilde{\mathbf{a}}_1' = \mathbf{Q}_n^{-1/2}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{a}_1'$  et où  $f(\rho)$  est la fonction décroissante suivante :

$$f(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{-\rho}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\text{ch}(u\sqrt{2\rho})} du.$$

Grâce au découplage des paramètres puissances et phases de  $\boldsymbol{\alpha}$  dans ces FIM, nous obtenons facilement :

$$\text{CRB}_{\text{BPSK}}(\theta_1) = \frac{1}{T} \left( \frac{1}{\alpha_1 r_1} \right) \left( \frac{1}{1 - f(Mr_1)} \right) \quad (1)$$

$$\text{CRB}_{\text{QPSK}}(\theta_1) = \frac{1}{T} \left( \frac{1}{\alpha_1 r_1} \right) \left( \frac{1}{1 - f\left(\frac{Mr_1}{2}\right)} \right) \quad (2)$$

où  $\alpha_1$  est le facteur  $2M \left( \sum_{m=1}^M \frac{1}{\sigma_m^2} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_1'^H \boldsymbol{\Pi}_{\tilde{\mathbf{a}}_1}^\perp \tilde{\mathbf{a}}_1'$ .

Nous remarquons que  $\text{CRB}_{\text{BPSK}}(\theta_1) < \text{CRB}_{\text{QPSK}}(\theta_1)$  et que pour  $(\sigma_m^2)_{m=1, \dots, M} = \sigma_n^2$ ,  $\alpha_1 = 2\mathbf{a}_1'^H \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{a}_1}^\perp \mathbf{a}_1'$  et (1) et (2) redonnent les expressions obtenues dans [1]. La connaissance a priori d'un bruit uniforme n'améliore donc pas les performances d'estimation de la DOA. Notons enfin que la méthode de blanchiment ( $\tilde{\mathbf{y}}_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_n^{-1/2}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{y}_t$ ) que nous avons utilisée

ne permet pas d'aboutir à une expression analytique et interprétable de la FIM dans le cas général d'une matrice de covariance  $\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma})$  non diagonale car la propriété " $\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2 = \text{Cte}$  indépendante de  $\theta_1$ " essentielle dans ce calcul n'est plus valable.

Selon différentes connaissances a priori sur les paramètres ou sur la distribution des sources, plusieurs CRB peuvent être considérées et comparées aux expressions (1) et (2).

Ainsi en absence de décalage de phase ou après correction de celle-ci (i.e.,  $\phi_1$  est connue), les CRB (1) et (2) deviennent

$$\text{CRB}_{\text{BPSK}}^{\text{CO}}(\theta_1) = \frac{1}{T} \left( \frac{1}{2\|\tilde{\mathbf{a}}_1'\|^2 \sigma_{s_1}^2} \right) \left( \frac{1}{1 - f(Mr_1)} \right)$$

$$\text{CRB}_{\text{QPSK}}^{\text{CO}}(\theta_1) = \frac{1}{T} \left( \frac{1}{2\|\tilde{\mathbf{a}}_1'\|^2 \sigma_{s_1}^2} \right) \left( \frac{1}{1 - \left(1 + Mr_1 \left(1 - \frac{\alpha_1}{2\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2}\right)\right) f\left(\frac{Mr_1}{2}\right)} \right).$$

Si les symboles étaient connues en réception (DA estimation), nous démontrons [4] comme dans le cas de bruit spatialement blanc uniforme [1] que les deux CRB coïncident avec la CRB déterministe obtenue dans [3].

$$\text{CRB}_{\text{DA}}(\theta_1) = \text{CRB}_{\text{DET}}(\theta_1) = \frac{1}{T} \left( \frac{1}{\alpha_1 r_1} \right) \quad (3)$$

qui est identique aux CRB (1) et (2) quand  $\rho$  tend vers  $\infty$ .

Enfin, puisque la modulation BPSK [resp. QPSK] est non-circulaire [resp. circulaire] complexe au second-ordre, il est intéressant de comparer les CRB stochastiques (1) et (2) aux CRB associées à des distributions gaussiennes complexes non-circulaires (NCG) de taux de non-circularité maximal [5] ou complexes circulaires (CG) [3] qui peuvent être considérées comme des majorants par rapport aux vraies bornes (voir e.g., [6, corollary 1] ou [7, p. 293]). Ces bornes sont données par

$$\text{CRB}_{\text{NCG}}(\theta_1) = \frac{1}{T} \left( \frac{1}{\alpha_1 r_1} \left[ 1 + \frac{1}{2Mr_1} \right] \right),$$

$$\text{CRB}_{\text{CG}}(\theta_1) = \frac{1}{T} \left( \frac{1}{\alpha_1 r_1} \left[ 1 + \frac{1}{Mr_1} \right] \right),$$

nous avons

$$\frac{\text{CRB}_{\text{BPSK}}(\theta_1)}{\text{CRB}_{\text{NCG}}(\theta_1)} = \frac{1}{(1 - f(Mr_1)) \left(1 + \frac{1}{2Mr_1}\right)}$$

$$\frac{\text{CRB}_{\text{QPSK}}(\theta_1)}{\text{CRB}_{\text{CG}}(\theta_1)} = \frac{1}{(1 - f\left(\frac{Mr_1}{2}\right)) \left(1 + \frac{1}{Mr_1}\right)}.$$

Nous notons que ces rapports sont identiques à ceux obtenus dans le cas de bruit spatialement blanc uniforme [1], dépendent seulement de  $\rho$  et convergent tous les deux vers 1 quand  $\rho$  tend vers  $\infty$ .

#### 3.2 Cas de deux sources

Puisque dans le cas de deux sources BPSK ou QPSK, la PDF de  $\mathbf{y}_t$  est respectivement un mélange de 4 PDF gaussiennes ou de 16 PDF gaussiennes, les FIM associées au paramètre  $\boldsymbol{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{s_1}, \phi_1, \theta_1, \sigma_{s_2}, \phi_2, \theta_2)$  sont malheureusement difficiles à calculer explicitement ainsi que les CRB associées. La même difficulté a été rencontrée dans le cas d'un bruit complexe circulaire gaussien spatialement blanc uniforme [1].

Cependant pour des grandes valeurs de SNR, plus précisément pour  $\sum_{i=1}^M \frac{\sigma_{s_i}^2}{\sigma_n^2} \gg 1$  et  $\sum_{i=1}^M \frac{\sigma_{s_i}^2}{\sigma_n^2} \gg 1$ , nous démontrons que les FIM associées aux signaux BPSK et QPSK sont approximées par la même expression explicite :

$$\mathbf{I}_{\text{BPSK}}^{\text{HSNR}} \approx \mathbf{I}_{\text{QPSK}}^{\text{HSNR}} \approx T \begin{bmatrix} \mathbf{I}' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}'_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}'_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

avec

$$\mathbf{I}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_M^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}'_k = \begin{bmatrix} 2 \sum_{m=1}^M \frac{1}{\sigma_m^2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 \sum_{m=1}^M \frac{\sigma_{s_k}^2}{\sigma_m^2} & 2 \sigma_{s_k}^2 (i \tilde{\mathbf{a}}_k'^H \tilde{\mathbf{a}}_k) \\ 0 & 2 \sigma_{s_k}^2 (i \tilde{\mathbf{a}}_k'^H \tilde{\mathbf{a}}_k) & 2 \sigma_{s_k}^2 \|\tilde{\mathbf{a}}_k'\|^2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$k = 1, 2$ . Il est clair qu'à partir de (4), les paramètres associés aux deux sources sont découplés entre eux ainsi qu'avec les paramètres puissance de bruit. Par conséquent, pour deux sources indépendantes et de grandes valeurs de SNR, la CRB de la DOA d'une source ne dépend pas des paramètres de l'autre source et nous obtenons pour le paramètre  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  seul :

$$\text{CRB}_{\text{BPSK}}^{\text{HSNR}}(\theta) \approx \text{CRB}_{\text{QPSK}}^{\text{HSNR}}(\theta) \approx \frac{1}{T} \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_1} \frac{1}{r_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_2} \frac{1}{r_2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

où  $\alpha_2$  et  $r_2$  sont définis comme  $\alpha_1$  et  $r_1$ . De plus  $\text{CRB}_{\text{BPSK}}(\theta_k)$  et  $\text{CRB}_{\text{QPSK}}(\theta_k)$  (i.e., les termes diagonaux de (6)) pour chaque DOA sont identiques aux CRB (1) et (2) d'une seule source obtenue dans le cas où  $M r_1 \gg 1$ . Nous notons que cette propriété est totalement différente de celle obtenue dans le cas de sources de distribution gaussienne circulaire ou dans le cas de la modélisation déterministe. Plus précisément, nous démontrons [4] que la CRB stochastique sous hypothèse gaussienne circulaire [3, rel. (36)] et la CRB déterministe [3, rel. (31)] sont équivalentes, pour des sources indépendantes quand les SNR tendent vers  $+\infty$  sous contrainte  $\mathbf{Q}_n = \sigma_n^2 \mathbf{Q}'_n$  avec  $\mathbf{Q}'_n$  diagonale fixée.

$$\text{CRB}_{\text{CG}}(\theta) \approx \text{CRB}_{\text{DET}}(\theta) = \frac{1}{T} \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta_1} \frac{1}{\sigma_{s_1}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta_2} \frac{1}{\sigma_{s_2}^2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

avec  $\beta_k(\theta_1, \theta_2) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \tilde{\mathbf{a}}_k'^H \mathbf{\Pi}_{\tilde{\mathbf{A}}} \tilde{\mathbf{a}}_k$ ,  $k = 1, 2$ , et  $\tilde{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def}}{=} (\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2)$ . En conséquence, le comportement du seuil de résolution pour 2 sources proches de même puissances et indépendantes ( $r \stackrel{\text{def}}{=} r_1 = r_2$  et  $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 = \alpha_2$ ) est aussi totalement différent. Bien que la CRB ne donne pas directement accès à la meilleure résolution accessible par un estimateur sans biais, elle peut être utilisée pour définir une limite ultime, de résolution. Suivant le critère décrit dans [9], 2 telles sources seront résolues si la racine carrée de la CRB sur l'écart angulaire estimé  $(\theta_{1,T} - \theta_{2,T})$  est plus petit que cette séparation angulaire  $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$ , i.e.,

$$\sqrt{\text{CRB}_{\text{PSK}}(\theta_1 - \theta_2)} = \sqrt{\frac{2}{T} \frac{1}{\alpha r}} < \Delta\theta$$

parce que  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont découplés dans (6). Cette résolution borne la résolution de tout estimateur sans biais des DOA dans les conditions  $\text{SNR} \gg 1$  où cette CRB a été obtenue. Pour

un réseau linéaire équidistant (ULA),  $\alpha r = 2\sigma^2 [\sum_{m=1}^{M-1} \frac{m^2}{\sigma_m^2} - (\sum_{m=1}^{M-1} \frac{m}{\sigma_m^2})^2 (\sum_{m=1}^M \frac{1}{\sigma_m^2})^{-1}]$  qui est un SNR étendu  $r_e$  ( $\alpha = \frac{M(M^2-1)}{6}$  et  $r = \frac{\sigma^2}{\sigma_n^2}$  dans le cas de bruit blanc uniforme). Nous obtenons alors  $r_e > \frac{2}{T(\Delta\theta)^2}$ , qui comparée aux sources Gaussiennes circulaires pour lesquelles le seuil de SNR varie en  $(\Delta\theta)^{-4}$  ou en  $(\Delta\theta)^{-3}$  selon le domaine de  $T$  ([10, (35)] pour l'algorithme MUSIC qui est asymptotiquement efficace quand le SNR tend vers l'infini), a un comportement très différent.

Si les symboles étaient connus et les SNR quelconques, les résultats de [1] s'étendent et la FIM associée est également donnée par (4).

Dans le cas de SNR quelconques où des expressions analytiques ne sont pas accessibles, nous avons recours à des approximations numériques obtenues à partir de la loi forte des grands nombres, i.e.,

$$\text{CRB}_{(\text{PSK})}(\theta) = (\mathbf{I}_{\text{PSK}}^{-1})_{([M+3 \ M+6], [M+3 \ M+6])} \quad (8)$$

où la FIM associée à une seule observation  $\mathbf{y}_t$  est donnée par :  $\frac{1}{T} (\mathbf{I}_{\text{PSK}})_{k,l} = \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{T'} \sum_{t=1}^{T'} \left( \frac{\partial \ln p(\mathbf{y}_t; \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_k} \right) \left( \frac{\partial \ln p(\mathbf{y}_t; \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_l} \right)$ . Ces expressions nous permettront de déterminer le domaine de SNR pour lequel l'approximation (4) est valide.

## 4 Exemples numériques

Cette section illustre les résultats des sections 3.1 et 3.2. Nous considérons dans cette section une antenne ULA de  $M$  capteurs pour laquelle  $\mathbf{a}_k = (1, e^{i\theta_k}, \dots, e^{i(M-1)\theta_k})^T$ .

Fig.1 considère le cas d'une source BPSK ou QPSK. Elle compare différentes CRB normalisées (les CRB sont calculées pour  $T = 1$ ) pour  $M = 10$  et  $\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma}) = \text{Diag}(\sigma_n^2(1+\delta_1), \sigma_n^2(1+\delta_2), \dots, \sigma_n^2(1+\delta_M))$  où  $\{\delta_i\}_{i=1}^M$  sont des v.a. IID de loi uniforme sur l'intervalle  $[0, \beta]$  et où le SNR est défini par le SNR "initial"  $10 \log_{10}(\frac{\sigma_{s_1}^2}{\sigma_n^2})$  est égal à -10dB ou 0dB. Notons ainsi que pour  $\beta = 0$ , le bruit est uniforme, i.e.,  $\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_n^2 \mathbf{I}_M$  et que lorsque  $\beta$  augmente le bruit devient de plus en plus non uniforme. Nous remarquons sur cette figure que conformément aux résultats de la section 3.1 :

$$\text{CRB}_{\text{DET}}(\theta_1) < \text{CRB}_{\text{BPSK}}(\theta_1) < \text{CRB}_{\text{NCG}}(\theta_1) < \text{CRB}_{\text{QPSK}}(\theta_1) < \text{CRB}_{\text{CG}}(\theta_1)$$

mais que la différence entre ces CRB s'accroît lorsque le bruit est de moins en moins uniforme.

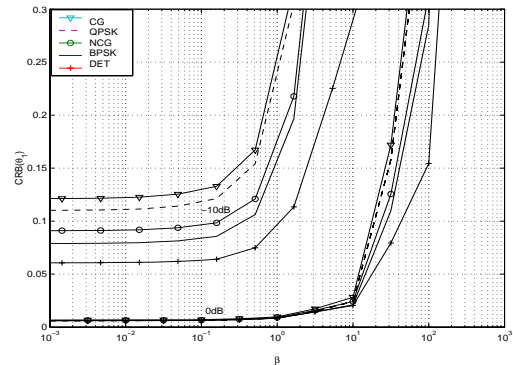


Fig.1 CRB normalisées en fonction de  $\beta$ .

Dans les trois figures suivantes, nous considérons deux sources BPSK de même puissance où le SNR est défini comme dans [1, 3] par  $\text{SNR} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{\sigma_{s_i}^2}{\sigma_n^2}$  avec  $(\sigma_1^2, \dots, \sigma_{10}^2) = (10, 0,$

2.0, 1.5, 0.5, 8.0, 0.7, 1.1, 3.0, 6.0, 3.0) pour  $M = 10$  et  $M = 6$ . Fig.2 compare  $\text{CRB}_{\text{BPSK}}(\theta_1)$  donnée par (8) à  $\text{CRB}_{\text{NCG}}(\theta_1)$  sous distribution gaussienne non circulaire de taux de non circularité égal à 1. Et pour être comparées, cette dernière doit être considérée sous les mêmes connaissances a priori, c'est à dire ici en tenant compte de l'indépendance des deux sources. Pour cette raison, nous n'utilisons pas l'expression donnée dans [5], mais l'expression non explicite de la borne du second-ordre [8] étendue au cas de bruit blanc non uniforme qui permet de tenir compte de cet a priori. Cette figure exhibe le rapport  $\frac{\text{CRB}_{\text{BPSK}}(\theta_1)}{\text{CRB}_{\text{NCG}}(\theta_1)}$ . Nous voyons que contrairement au cas d'une source,  $\text{CRB}_{\text{NCG}}(\theta_1)$  est très largement supérieure à  $\text{CRB}_{\text{BPSK}}(\theta_1)$  sauf pour des grandes valeurs de séparation angulaire  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$  et d'écart de phase  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ . En conséquence, pour de tels signaux de modulation, des algorithmes asymptotiquement efficaces tels que des mises en oeuvre du maximum de vraisemblance (MV) auront des performances bien meilleures que celles issues d'algorithmes asymptotiquement efficaces sous distribution gaussienne. Il en est ainsi de l'algorithme EM (algorithme itératif qui implémente l'estimateur asymptotiquement efficace du MV), dont les performances n'ont été évaluées jusqu'ici que par simulations de Monte Carlo [11].

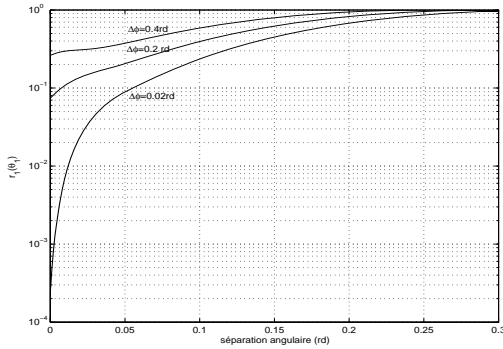


Fig.2 Rapports  $r_1(\theta_1) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{CRB}_{\text{BPSK}}(\theta_1)}{\text{CRB}_{\text{NCG}}(\theta_1)}$  en fonction de la séparation angulaire  $\Delta\theta$  pour plusieurs valeurs d'écart de phase  $\Delta\phi$ ,  $M = 10$  et  $\text{SNR} = 20\text{dB}$ .

Fig.3 exhibe le domaine de validité des valeurs analytiques de CRB obtenues à la section 3.2 pour des SNR élevés. Nous voyons sur cette figure que ce domaine de validité de SNR dépend non seulement du type de modulation mais aussi du nombre de capteurs et de la séparation angulaire  $\Delta\theta$ . Par exemple pour  $M = 10$ , le seuil de validité est de l'ordre de 4dB [resp. 10dB] pour  $\Delta\theta = 0.03\text{rd}$  et 4dB [resp. 8dB] pour  $\Delta\theta = 0.1\text{rd}$  pour BPSK [resp. QPSK].

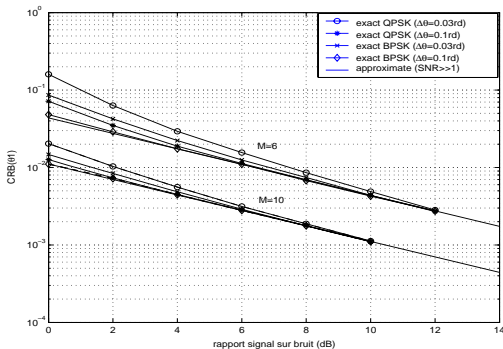


Fig.3 Valeurs exactes et approximées des  $\text{CRB}_{\text{BPSK}}(\theta_1)$  et  $\text{CRB}_{\text{QPSK}}(\theta_1)$  en fonction du SNR pour deux valeurs de  $M$  et de la séparation angulaire  $\Delta\theta$  et  $\Delta\phi = 0.1\text{rd}$ .

Fig.4 compare l'erreur quadratique estimée  $E(\theta_{1,T} - \theta_1)^2$  donnée par l'algorithme EM aux expressions  $\text{CRB}_{\text{BPSK}}(\theta_1)$  exactes et  $\text{CRB}_{\text{NCG}}(\theta_1)$  pour deux valeurs de séparation angulaire  $\Delta\theta$ . Nous constatons que les performances de l'algorithme EM sont largement supérieures à celles données par  $\text{CRB}_{\text{NCG}}(\theta_1)$  dans un très large domaine de SNR que dans le cas de faibles séparations angulaires.

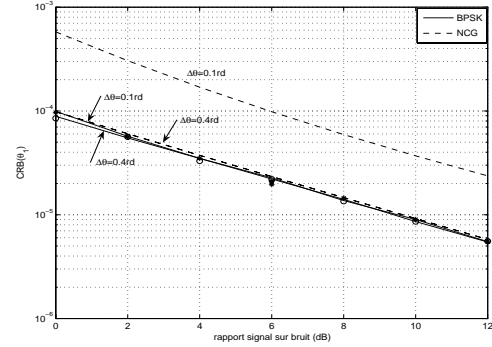


Fig.4  $\text{CRB}_{\text{BPSK}}(\theta_1)$ ,  $\text{CRB}_{\text{NCG}}(\theta_1)$  et erreur quadratique estimée (1000 expériences de Monte Carlo)  $E(\theta_{1,T} - \theta_1)^2$  donnée par l'algorithme EM (10 itérations initialisé dans un voisinage des valeurs exactes) pour  $T = 500$ ,  $M = 6$  et  $\Delta\phi = 0.1\text{rd}$  en fonction du SNR.

## Références

- [1] J.P. Delmas, H. Abeida, "Cramer-Rao bounds of DOA estimates for BPSK and QPSK modulated signals," à paraître dans *IEEE Trans. on Signal Processing*, Janvier 2006.
- [2] A.L. Matveyev, A.B. Gershman and J.F. Böhme, "On the direction estimation Cramer-Rao bounds in the presence of uncorrelated unknown noise," *Circuits, Systems, Signal Processing*, vol. 18, pp. 479-487, 1999.
- [3] M. Pesavento, A.B. Gershman, "Maximum-likelihood direction of arrival estimation in the presence of unknown nonuniform noise," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 49, no. 7, pp. 1310-1324, July 2001.
- [4] H. Abeida, J.P. Delmas, "Cramer Rao bound for DOA estimation of BPSK, QPSK and MSK modulated signals in the presence of unknown nonuniform noise," en préparation.
- [5] H. Abeida, J.P. Delmas, "Gaussian Cramer-Rao bound for direction estimation of non-circular signals in unknown noise fields," à paraître dans *IEEE Trans. on Signal Processing*, Janvier 2006.
- [6] B. Ottersten, M. Viberg and T. Kailath, "Analysis of subspace fitting and ML techniques for parameter estimation from sensor array data," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 40, no. 3, pp. 590-600, March 1992.
- [7] P. Stoica, R. Moses, "Introduction to spectral analysis," *Prentice-Hall*, Upper Saddle River, NJ, 1997.
- [8] J.P. Delmas, "Asymptotically minimum variance second-order estimation for non-circular signals with application to DOA estimation," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 52, no. 5, pp. 1235-1241, May 2004.
- [9] S.T. Smith, "Statistical resolution limits and the complexified Cramer-Rao bound," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 53, no. 5, pp. 1597-1609, May 2005.
- [10] M. Kaveh, A.J. Barabell, "The statistical performance of MUSIC and the minimum-norm algorithms in resolving plane waves in noise," *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, vol. 34, no. 2, pp. 331-341, April 1986.
- [11] M. Lavielle, E. Moulines and J.F. Cardoso, "A maximum likelihood solution to DOA estimation for discrete sources," *Proc. Seventh IEEE Workshop on SP*, pp. 349-353, 1994.

# Méthode Haute Résolution Large Bande pour la Localisation d'Objets Enfouis

Zineb SAIDI<sup>1</sup>, Salah BOURENNANE<sup>2</sup>

<sup>1</sup>IRENav (EA 3634)

Ecole Navale, Lanvéoc Poulmic, BP600, 29240 Brest—Armées, France

<sup>2</sup>Institut Fresnel, UMR CNRS 6133-EGIM,

D.U. de saint Jérôme, 13 397 Marseille Cedex 20, France

saidi@ecole-navale.fr, salah.bourennane@fresnel.fr

**Résumé** – Cette étude traite le problème de la localisation d'objets enfouis en utilisant une source acoustique. Nous proposons une nouvelle méthode qui incorpore la solution exacte du champ réfléchi dans la méthode MUSIC et qui utilise le lissage fréquentiel pour décorréler les signaux afin d'estimer les directions d'arrivée des signaux réfléchis et les distances obliques entre l'antenne et les objets à localiser. Les performances de la méthode proposée sont validées sur des données expérimentales enregistrées durant des expériences d'acoustique sous-marine.

**Abstract** – This study deals with the bearing and the range estimation for buried objects problem. We propose a new method that incorporates the exact solution for the scattered field in the MUSIC method, uses the frequential smoothing to decorrelate the signals to estimate the range and the bearing objects. Finally, the performances of the proposed method are validated on experimental data recorded during an underwater acoustics experiments.

## 1 Introduction

La méthode MUSIC est couramment employée dans le domaine de l'acoustique sous-marine pour l'estimation des directions d'arrivée des signaux réfléchis sur les objets (sources). Cette méthode est fondée sur l'hypothèse que le modèle de propagation est connu et les objets considérés sont situés en champ lointain de l'antenne. En conséquence, l'approximation de front d'onde plan est possible [1]. Pour les applications, où cette approximation n'est pas vérifiée, la localisation d'objets a besoin d'estimer, à la fois, la direction d'arrivée ( $\theta$ ) et la distance oblique ( $r$ ). Il existe plusieurs techniques pour estimer ces deux paramètres [2],[3],[4],[5],...etc. Certaines de ces techniques ne tiennent pas compte des interactions entre les objets, ou elles sont appliquées seulement à des signaux à bande étroite, et souvent ces méthodes sont validées seulement sur des données simulées. Dans cette étude, nous avons développé une méthode qui résout le problème de localisation d'objets en présence de signaux corrélés à large bande et nous présentons des résultats obtenus sur des données expérimentales. Cette méthode est basée sur l'incorporation de la solution exacte du champ réfléchi par une coque cylindrique, dans l'algorithme MUSIC et utilise le lissage fréquentiel pour décorréler les signaux. Les structures d'objets sont supposées connues. Nous commençons cette étude par un petit rappel sur la méthode MUSIC, présenté dans la section 2. Une version modifiée de la méthode MUSIC, pour les signaux à bande étroite et à large bande, est développée, respectivement, dans les sections 3 et 4. La méthode développée est validée sur des données expérimentales. La configuration de l'expérience est décrite dans la section 5 et les résultats obtenus sont présentés et discutés dans la section 6. La conclusion est décrite dans la section 7.

## 2 Formulation du problème

Considérons  $K$  objets enfouis et insonifiés par une source acoustique. Les signaux réfléchis sont reçus sur une antenne rectiligne, composée de  $N$  capteurs, équidistants et de gain unitaire. Le signal de sortie du  $n^{\text{ème}}$  capteur est donné par,

$$r_n(t) = \sum_{k=1}^K s_k(t - \tau_{n,k}) + b_n(t), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

où  $s_k(t)$  est le signal lié au  $k^{\text{ème}}$  front d'onde ( $k = 1, 2, \dots, K$ ),  $\tau_{n,k}$  est le retard lié au temps de propagation de signal entre le  $k^{\text{ème}}$  objet et le  $n^{\text{ème}}$  capteur,  $b_n(t)$  est un bruit additif reçu sur le  $n^{\text{ème}}$  capteur. On suppose que les bruits sont non-corrélés avec les signaux, non-corrélés entre eux, et ont une même variance  $\sigma^2$ .

Lorsque l'objet est dans la région du champ lointain de l'antenne, on peut supposer que le front d'onde est plan et la méthode MUSIC nous permet d'estimer l'angle  $\theta$  de ce front d'onde associé à cet objet. Le spectre spatial de la méthode de MUSIC est donné par

$$P_{\text{MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}(\theta)^+ \mathbf{V}_b \mathbf{V}_b^+ \mathbf{a}(\theta)}, \quad (2)$$

où le symbole  $[\cdot]^+$  désigne le transposé conjugué et  $\mathbf{a}(\theta) = \left[ 1, e^{-2j\pi f \frac{d \sin \theta}{c}}, \dots, e^{-2j\pi f (N-1) \frac{d \sin \theta}{c}} \right]^T$  est le vecteur de direction d'onde plane, et  $[\cdot]^T$  représente le transposé,  $\mathbf{V}_b$  est la matrice des vecteurs propres associés aux plus faibles valeurs propres et qui constituent le sous-espace bruit,  $c$  est la vitesse de propagation dans le milieu,  $d$  est la distance intercapteurs,  $f$  est la fréquence du signal.

### 3 Localisation d'objets enfouis à l'aide d'une source bande étroite

Dans cette section, le problème de localisation d'objets est résolu pour les signaux à bande étroite sous l'hypothèse que les objets sont dans un espace libre. Ces objets sont tous supposés cylindriques.

#### 3.1 Solution exacte

Considérons une coque cylindrique infinie, de rayon externe  $a$ , de rayon interne  $b$ , placée à  $(r_1, \theta_1)$  la distance oblique et la direction d'arrivée, respectivement, associées au premier capteur (figure 1). Les deux fluides en dehors et à l'intérieur de la coque sont indexés par 1 et 3, respectivement, les vitesses du son  $c_{1,3}$ , les vecteurs d'onde  $k_{1,3}$ . Le champ incident est une onde plane avec un angle  $\theta_{inc}$ . Afin de calculer la solution exacte du champ réfléchi  $p_s(r_1, \theta_1)$  une décomposition des différents champs en fonction de Bessel ( $J_m$ ,  $N_m$ ) et de Hankel ( $H_m$ ) [6], est utilisée. Nous adoptons des coordonnées cylindriques.

Dans le milieu 1, la pression est prise comme  $p = p_i + p_s$ , où la pression incidente est

$$p_i(r_1, \theta_1) = p_0 \sum_{m=0}^{\infty} j^m \epsilon_m J_m(k_1 r_1) \cos(m(\theta_1 - \theta_{inc})), \quad (3)$$

où  $p_0$  une constante et la pression réfléchie est

$$p_s(r_1, \theta_1) = p_0 \sum_{m=0}^{\infty} i^m \epsilon_m b_m H_m^{(1)}(k_1 r_1) \cos(m(\theta_1 - \theta_{inc})), \quad (4)$$

on utilise  $\epsilon_0 = 1, \epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = 2$ ,  $b_m, \dots, g_m$  sont des coefficients et  $m$  le nombre de modes.

Dans le milieu 2, le vecteur de déplacement  $\mathbf{u}$  est donné par

$$\mathbf{u} = -\nabla \psi + \nabla \phi, \quad (5)$$

où  $\psi$  le potentiel scalaire et  $\phi$  est le potentiel vectoriel,

$$\psi = p_0 \sum_{m=0}^{\infty} j^m \epsilon_m [c_m J_m(k_l r_1) + d_m N_m(k_l r_1)] \cos(m(\theta_1 - \theta_{inc})), \quad (6)$$

$$\phi = p_0 \sum_{m=0}^{\infty} j^m \epsilon_m [e_m J_m(k_t r_1) + f_m N_m(k_t r_1)] \cos(m(\theta_1 - \theta_{inc})), \quad (7)$$

où  $k_t$  et  $k_l$  sont respectivement le vecteur d'onde transversal et longitudinal.

Dans le milieu 3, le champ de pression est donné par

$$p_z(r_1, \theta_1) = p_0 \sum_{m=0}^{\infty} j^m \epsilon_m g_m J_m(k_3 r_1) \cos(m(\theta_1 - \theta_{inc})). \quad (8)$$

Les coefficients  $b_m, \dots, g_m$  sont calculés à partir des conditions aux limites, pour  $r_1 = a$  et  $r_1 = b$  [6].

#### 3.2 Modification apportée à la méthode MUSIC

Le modèle du champ réfléchi, développé dans la sous-section précédente, est incorporé dans la méthode MUSIC au lieu du

modèle d'onde plane. Le spectre spatial de la méthode MUSIC modifiée est donné par

$$\mathbf{P}_{\text{MUSICnb}}(r, \theta) = \frac{1}{\mathbf{p}_s(r, \theta) + \mathbf{V}_b \mathbf{V}_b^+ \mathbf{p}_s(r, \theta)}, \quad (9)$$

où  $\mathbf{p}_s(r, \theta) = [p_s(r_1, \theta_1), p_s(r_2, \theta_2), \dots, p_s(r_N, \theta_N)]^T$ , représente le vecteur de direction et  $p_s(r_n, \theta_n)$  est le champ réfléchi associé au  $n^{\text{ème}}$  capteur. On a utilisé le théorème de pythagore généralisé pour calculer le couple  $(r_n, \theta_n)$  associé au  $n^{\text{ème}}$  capteur (figure 1). Les  $r_n$  et  $\theta_n$  obtenus sont donnés par

$$r_n = \sqrt{r_{n-1}^2 - d^2 - 2r_{n-1}d \cos(\frac{\pi}{2} + \theta_{n-1})} \quad (10)$$

$$\theta_n = \cos^{-1} \left[ \frac{d^2 + r_n^2 - r_{n-1}^2}{2r_{n-1}d} \right], \quad n = 2, \dots, N. \quad (11)$$

Les équations (10) et (11) sont incorporées dans l'équation (4) pour obtenir  $p_s(r_n, \theta_n)$  en remplaçant  $r_1$  par  $r_n$  et  $\theta_1$  par  $\theta_n$ .

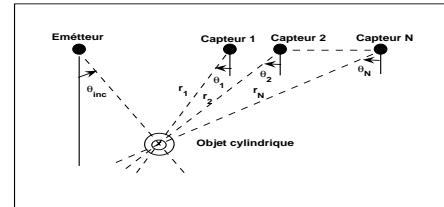


FIG. 1 – Configuration du problème.

### 4 Localisation d'objets enfouis à l'aide d'une source large bande: algorithme proposé

Dans la section précédente, la méthode modifiée de MUSIC a été développée pour les signaux à bande étroite. Dans cette section, les signaux utilisés sont à large bande. Ce choix est fait pour décorréliser les signaux en effectuant un lissage fréquentiel en utilisant des opérateurs de focalisation. Par conséquent les objets peuvent être localisés même si les signaux reçus sont totalement corrélés. Ce n'aurait pas été possible avec les signaux à bande étroite et sans lissage spatial. Nous proposons d'appliquer l'opérateur de focalisation bilinéaire [7], cette technique consiste à diviser la bande de fréquence en  $L$  bandes étroites. Elle transforme les signaux reçus dans les  $L$  bandes à la fréquence de focalisation  $f_0$  puis moyennées d'une façon cohérente et par conséquent décorrélés les signaux [8] [9].  $f_0$  est la fréquence centrale du spectre du signal reçu et elle est choisie comme la fréquence de focalisation.

Les étapes principales de la méthode développée sont:

1. utilisation d'une méthode classique comme la formation de voie pour trouver une estimation initiale de  $r$ ,  $\theta$  et le nombre d'objets  $K$ ,
2. calcul de la matrice de direction,

$$\hat{\mathbf{P}}_s(f_l) = [\mathbf{p}_{s1}(r, \theta, f_l), \mathbf{p}_{s2}(r, \theta, f_l), \dots, \mathbf{p}_{sK}(r, \theta, f_l)],$$

où chaque composante du vecteur de direction

$\mathbf{p}_{sk}(\mathbf{r}, \theta, f_l)$ ,  $1 \leq k \leq K$ , est calculée en utilisant l'équation (4),  $1 \leq l \leq L$ ,

3. estimation de la matrice interspectrale des signaux reçus  $\Gamma(f_l)$  pour chaque fréquence  $f_l$ ,

4. calcul de la matrice interspectrale  $\Gamma_s(f_l)$ ,

$$\Gamma_s(f_l) = (\hat{\mathbf{P}}_s^+(f_l) \hat{\mathbf{P}}_s(f_l))^{-1} \hat{\mathbf{P}}_s^+(f_l) [\Gamma(f_l) - \hat{\sigma}^2(f_l) \mathbf{I}] \hat{\mathbf{P}}_s(f_l) (\hat{\mathbf{P}}_s^+(f_l) \hat{\mathbf{P}}_s(f_l))^{-1}, \quad (12)$$

où  $\mathbf{I}$  est une matrice identité et  $\hat{\sigma}^2$  la variance du bruit estimée.

5. calcul de la matrice interspectrale moyenne,

$$\Gamma_s(f_0) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \Gamma_s(f_l), \quad (13)$$

6. calcul de  $\hat{\mathbf{\Gamma}}(f_0) = \hat{\mathbf{P}}_s(f_0) \Gamma_s(f_0) \hat{\mathbf{P}}_s^+(f_0)$  et  $\hat{\mathbf{\Gamma}}(f_l) = \Gamma(f_l) - \hat{\sigma}^2(f_l) \mathbf{I}$ ,

La variance du bruit est estimée par

$$\hat{\sigma}^2(f_l) = \frac{1}{N-K} \sum_{i=K+1}^N \lambda_i(f_l), \quad (14)$$

où  $\lambda_i(f_l)$  est la  $i^{\text{ème}}$  valeur propre de  $\Gamma(f_l)$ ,

7. estimation de l'opérateur de focalisation bilinéaire

$$\mathbf{T}(f_0, f_l) = \mathbf{V}(f_0) \mathbf{V}^+(f_l), \quad (15)$$

où  $\mathbf{V}(f_0)$  et  $\mathbf{V}(f_l)$  sont les matrices des vecteurs propres de  $\hat{\mathbf{\Gamma}}(f_0)$  et  $\hat{\mathbf{\Gamma}}(f_l)$ , respectivement,

8. calcul de la matrice interspectrale focalisée,

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}(f_0) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{T}(f_0, f_l) \hat{\mathbf{\Gamma}}(f_l) \mathbf{T}^+(f_0, f_l), \quad (16)$$

9. utilisation d'une méthode de détection (AIC ou MDL) pour estimer le nombre d'objets [10].

Le spectre spatial modifié de la méthode MUSIC dans le cas de signaux corrélés est donné par

$$\mathbf{p}_{MUSIC_{wb}}(r, \theta) = \frac{1}{\mathbf{p}_s(r, \theta, f_0) + \mathbf{V}_{b0} \mathbf{V}_{b0}^+ \mathbf{p}_s(r, \theta, f_0)}, \quad (17)$$

où  $\mathbf{V}_{b0}$  est la matrice des vecteurs propres de  $\hat{\mathbf{\Gamma}}(f_0)$  associés aux plus petites valeurs propres.

## 5 Configuration expérimentale

### 5.1 Conditions expérimentales

Des mesures expérimentales ont été réalisées dans une cuve pour évaluer les performances de la méthode développée. La configuration expérimentale établie est montrée sur la figure 2 où toutes les dimensions indiquées sont en mètre. Le fond de la cuve est rempli de sable fin et homogène, dans lequel sont enfouis, entre 0 et 0.005 m, six coques cylindriques, de dimensions différentes (tableau 1). Nous avons réalisé six expériences. L'émetteur est fixé à un angle d'incidence de  $60^\circ$  et le récepteur se déplace horizontalement de la position initiale à la position finale avec un pas de déplacement  $d = 0.002$  m. La

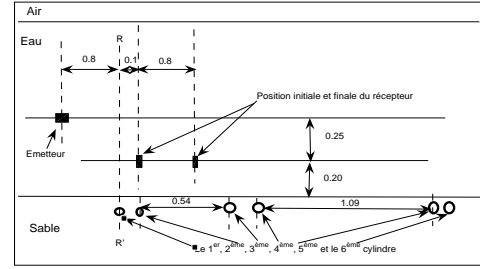


FIG. 2 – Configuration expérimentale

	1 <sup>er</sup> couple	2 <sup>me</sup> couple	3 <sup>me</sup> couple
rayon interne $a$ (m)	0.01	0.018	0.02
rempli de	air	eau	air
espacés de (m)	0.13	0.16	0.06

TAB. 1 – caractéristiques des différents cylindres (le rayon externe  $b = a - 0.001$  m)

distance, entre l'émetteur, l'axe  $RR'$  et le récepteur, demeure la même pour toutes les expériences. Pour les trois premières expériences, nous avons fixé l'axe de récepteur à 0.2 m du fond de la cuve et l'axe  $RR'$  est placé d'abord sur le premier, ensuite sur le second et enfin sur le troisième couple de cylindres. Pour les trois dernières expériences, l'axe de récepteur est fixé à 0.4 m et nous avons répété les mêmes expériences que pour les trois premières.

### 5.2 Données expérimentales

Les signaux reçus sont réfléchis par des objets enfouis ainsi ces signaux sont totalement corrélés. Il s'avère nécessaire d'appliquer un prétraitement pour décorréler ces signaux. Nous proposons d'appliquer l'opérateur de focalisation bilinéaire. Le signal typique reçu sur un capteur correspondant à une expérience est montré sur la figure 3. Le rapport signal sur bruit est de 22 db. La bande de fréquence est  $[f_{min} = 150, f_{max} = 250]$  kHz, la fréquence centrale  $f_0 = 200$  kHz et la fréquence d'échantillonnage est  $f_e = 2$  MHz.

## 6 Résultats et discussions

Le sable, dans lequel nos objets sont enfouis, représente un demi espace et l'eau représente l'autre moitié mais, le sable considéré a des caractéristiques géoacoustiques proches de celles de l'eau, et par conséquent l'hypothèse d'espace libre reste valable dans ce cas de figure.

Les principales étapes de la méthode développée, listées ci-dessus, sont appliquées à toutes les données expérimentales. Un balayage sur  $r$  et sur  $\theta$  a été appliqué ( $[0.2, 1.5]$  m pour  $r$  et  $[-90^\circ, 90^\circ]$  pour  $\theta$ ) et le nombre de positions du récepteur est  $N = 10$ . Nous avons appliqué l'opérateur de focalisation sur les signaux en divisant la bande de fréquences  $B = [150, 250]$  kHz en 100 bandes étroites. Pour chaque expérience, seulement un couple de cylindres est insonifié par l'émetteur. Le Tableau 2 donne les valeurs attendues et esti-

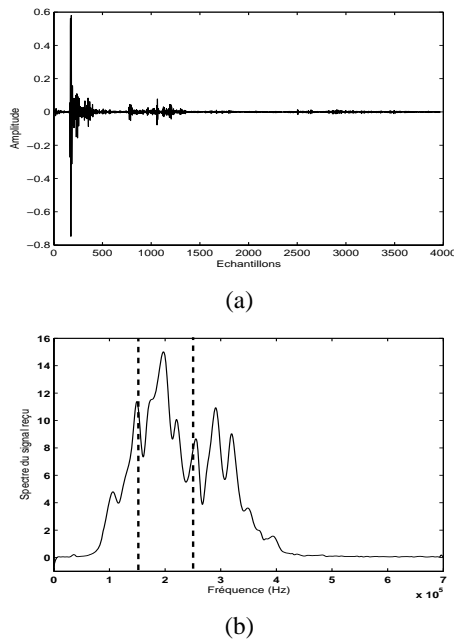


FIG. 3 – signal typique reçu durant l'expérience. (a) Signal temporel. (b) Signal fréquentiel

mées de  $r$  et de  $\theta$  obtenues avec la méthode MUSIC classique, la méthode MUSIC bande étroite (sans lissage fréquentiel) et la méthode MUSIC large bande (avec lissage fréquentiel). Les indices 1 et 2 dans le tableau 2 sont associés aux 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> cylindre de chaque couple, respectivement. La différence entre la valeur estimée ( $r_{1,2est}, \theta_{1,2est}$ ) et la valeur attendue ( $r_{1,2att}, \theta_{1,2att}$ ) est très petite et seulement deux objets qui n'ont pas été détectés dans Exp.4 et Exp.6, parce que, l'écho reçu, associé à ces cylindres, est plutôt faible.

	Exp.1	Exp.4	Exp.2	Exp.5	Exp.3	Exp.6
$r_{1att}(m)$	0.24	0.65	0.26	1.24	0.26	0.65
$\theta_{1att}(^{\circ})$	-25	-50	-34	-70	-34	-50
$r_{2att}(m)$	0.22	0.56	0.24	1.17	0.22	0.64
$\theta_{2att}(^{\circ})$	8	-41	-22	-69	4	-49
MUSIC						
$\theta_{1est}(^{\circ})$	-30	25	-40	-40	-22	—
$\theta_{2est}(^{\circ})$	-38	-40	-48	-45	-32	—
MUSIC BE						
$\theta_{1,2est}(^{\circ})$	-12	-45	-28	-70	-10	-50
$r_{1,2est}(m)$	0.23	0.63	0.25	1.2	0.24	0.65
MUSIC LB						
$r_{1est}(m)$	0.25	0.63	0.29	1.21	0.28	0.63
$\theta_{1est}(^{\circ})$	-23	-52	-33	-70	-32	-52
$r_{2est}(m)$	0.25	—	0.25	1.2	0.23	—
$\theta_{2est}(^{\circ})$	9	—	-20	-65	6	—

TAB. 2 – Valeurs ( $r, \theta$ ) attendues (att) et estimées (est) par la méthode développée ( $\theta$  est positive dans le sens contraire des aiguilles d'une montre par rapport à l'axe vertical, BE: Bande Étroite, LB: Large Bande)

## 7 Conclusion

Les approches de traitement d'antenne, comme la méthode MUSIC et le lissage fréquentiel, sont combinés avec la solution exacte du champ réfléchi afin d'estimer les paramètres  $r$  et  $\theta$  et de localiser des objets. Les performances de cette méthode ont été évaluées sur des données réelles mesurées dans une cuve expérimentale où plusieurs objets ont été enfouis sous le sable. La méthode proposée est supérieure en terme de performances par rapport aux méthodes conventionnelles, que les objets soient placés dans une région de champ lointain ou de champ proche de l'antenne. Les bons résultats de l'estimation des paramètres  $r$  et  $\theta$  des objets enfouis sont encourageants et très prometteurs.

## Références

- [1] P. S. Naidu, *sensor array signal processing*, CRC press, 2001.
- [2] N.Chapman and A.Tolstoy, "Benchmarking geoacoustic inversion methods," *special issue, J. Conf. Acous.*, vol. 6, no. 1 and 2, pp. 289, 1998.
- [3] D.J.Edwards and A.J.Keane, "Numerical techniques for efficient sonar bearing and range searching in the near field using genetic algorithms," in *Evolutionary Algorithms in Engineering Applications*, ISBN 3-540-62021-4, 1996.
- [4] R. N. Challa M. Haardt and S. Shamsunder, "improved bearing and range estimation via high-order subspace based unitary esprit," *IEEE computer society press*, november 1996.
- [5] A. Sahin and E. L. Miller, "object-based localization of buried objects using high resolution array precessing techniques," in *proceeding of SPIE-AeroSense*, vol. 2765, may 1996.
- [6] R.D.Doolittle and H.Uberall, "Sound scattering by elastic cylindrical shells," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 39, no. 2, pp. 272–275, 1996.
- [7] S. Valaee and P. Kabal, "wideband array processing using a two-sided correlation transformation," *IEEE Transaction On signal Processing*, vol. 43, no. 1, 1995.
- [8] H. Wang and M. Kaveh, "Coherent signal-subspace processing for the detection and estimation of angles of arrival of multiple wideband sources," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 33, no. 4, 1985.
- [9] M.A.Doron and J.Weiss, "On focusing for wideband array processing," *IEEE Transaction On signal Processing*, vol. 40, no. 6, 1992.
- [10] M. Wax and T. Kailath, "detection of signals information theoretic criteria," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal processing*, vol. 33, no. 2, 1985.



# Estimation de Directions d'Arrivée en Présence d'Erreurs de Phase

Zineb SAIDI<sup>1</sup>, Salah BOURENNANE<sup>2</sup>, Abdel Ouahab BOUDRAA<sup>1</sup>, Delphine DARE-EMZIVAT<sup>1</sup>

<sup>1</sup>IRENav (EA 3634)

Ecole Navale, Lanvéoc Poulmic, BP600, 29240 Brest—Armées, France

<sup>2</sup>Institut Fresnel, UMR CNRS 6133-EGIM,

D.U. de saint Jérôme, 13 397 Marseille Cedex 20, France

saidi@ecole-navale.fr, salah.bourennane@fresnel.fr, boudraa@ecole-navale.fr,  
dare@ecole-navale.fr

**Résumé** — Sous certaines hypothèses la méthode MUSIC (Multiple Signal Classification) donne des résultats de localisation de sources acoustiques satisfaisants. Parmi les hypothèses fortes utilisées dans les développements de MUSIC il y a la planéité du front d'onde et l'antenne rectiligne ce qui ne sont pas toujours vérifiés. En effet, la non distorsion des fronts d'onde est difficile à garantir du fait que les capteurs se déplacent par rapport à leurs positions d'origine durant l'expérimentation (cas d'antenne souple). La distorsion est due aussi à la non homogénéité du milieu de propagation. La correction des erreurs de phases introduites par la distorsion des fronts d'onde est nécessaire pour pouvoir améliorer le pouvoir séparateur des méthodes de localisation de sources acoustiques. Le but de ce travail est d'estimer à la fois les directions d'arrivée et les erreurs de phase. L'estimation des déphasages est étudiée en utilisant la propriété d'orthogonalité entre les sous espaces signal et bruit. Cette estimation est vue comme un problème de minimisation d'une fonctionnelle, qui en pratique, est Lipschitzienne. Pour ce faire l'algorithme DIRECT (DIviding RECTangles) est utilisé pour la recherche du minimum global de cette fonctionnelle. La méthode proposée est testée sur des données simulées.

**Abstract** — Under certain assumptions, the MUSIC method (Multiple Classification Signal) gives good results of acoustic sources localization. The main assumptions of the MUSIC method are the plane wavefront and the linear sensor array that are not always satisfied. Indeed, a plane wavefront, without distortions, is difficult to guarantee in practice because the sensors move from their origin positions during the experimentation (flexible of sensor array). The distortion is due also to inhomogeneity of the propagation medium. Correction of phase errors introduced by the distortion of the wavefront is necessary to solve the acoustic sources. The goal of this work is to estimate both the directions of arrival and the errors of phase. The distortion is studied by using the orthogonality condition of the signal and the noise subspaces. Phase correction is reduced to function minimization problem, which in practice, is Lipschitzian one. Thus the DIRECT algorithm (DIviding RECTangles) is used for seek the minimum of this function. The proposed method is tested on simulated data.

## 1 Introduction

Le traitement d'antenne est un domaine de recherche qui s'intéresse à la détection et à la localisation de sources rayonnantes dans un milieu. Il a été récemment étendu à la sismique pour séparer des ondes et à la détection et localisation d'objets enfouis [1]. Historiquement, la première méthode de localisation développée est la formation de voies. Elle est basée sur le calcul de l'énergie reçue dans une direction privilégiée en réalisant des rotations virtuelles de l'antenne. Cette méthode est dite à faible résolution car sa résolution spatiale dépend de la largeur du diagramme de réception de l'antenne qui est lié à son tour à la longueur de l'antenne. C'est ce qui limite la formation de voies pour localiser des sources proches ou voisines [1].

Ensuite les travaux de recherche visant à améliorer la résolution spatiale ont conduit aux développements de méthodes dites à haute résolution. La plus connue est la méthode du goniomètre ou de MUSIC. Ces méthodes exploitent les statistiques à l'ordre deux des signaux enregistrés. L'idée de base de ces méthodes est le partage de l'espace d'observation en deux sous espaces complémentaires : le sous espace signal et le sous espace bruit. Contrairement à la méthode de formation de voies, ces méthodes utilisent la propriété d'orthogonalité entre les deux

sous espaces pour localiser les sources ce qui les rend indépendantes des paramètres physiques associés à l'expérimentation. Sous certaines hypothèses ces méthodes donnent des résultats de localisation satisfaisants par rapport à la formation de voies. Seul le cas, de sources totalement corrélées, demeure non résolu par ces méthodes. Leurs performances se dégradent fortement, pour y remédier un prétraitement de décorrélation des sources est indispensable. Parmi les hypothèses fortes utilisées dans les développements de ces méthodes il y a la planéité du front d'onde et l'antenne rectiligne qui ne sont pas toujours vérifiés. En effet, la non distorsion des fronts d'onde est difficile à garantir en pratique. Dans le cas, par exemple, de l'expérimentation en mer, une antenne souple subit des déformations dues essentiellement aux mouvements de la mer et du bateau traînant cette antenne. Ces déformations se traduisent, en général, par des déplacements des capteurs par rapport à leurs positions d'origine. De plus, l'antenne déformée reçoit des fronts d'onde qui sont distordus par la non-homogénéité du milieu de propagation [2]. Ainsi, des déphasages dus aux différentes déformations sont introduits entre les signaux reçus par les capteurs de l'antenne. Ces déphasages dégradent le pouvoir séparateur et par conséquent la localisation de sources rayonnantes. Donc, la compensation de ces déphasages sur l'antenne est nécessaire pour améliorer la localisation. Plusieurs méthodes, pour

l'estimation des erreurs liées à la distorsion de l'antenne, ont été proposées dans la littérature [3]-[6]. Par exemple dans [3], deux sources de référence, de positions relatives connues, sont utilisées pour réduire les distorsions et corriger les positions des capteurs. Dans [4] les auteurs supposent que la forme de l'antenne est connue. L'approche proposée dans ce travail ne fait pas d'hypothèses sur la forme de l'antenne. Comme dans, [6]-[5], la correction est réduite à un problème d'optimisation multidimensionnelle d'un critère (ML, contraste,...) qui dans notre cas est la fonctionnelle traduisant l'orthogonalité du sous espace signal et du sous espace bruit.

Nous rappelons, dans un premier temps, les principaux résultats théoriques de la méthode MUSIC en utilisant une antenne rectiligne (absence de distorsion de phase). Nous montrons, ensuite, la dégradation de la méthode MUSIC en présence de fronts d'onde distordus, puis nous proposons des solutions à ce type de problème.

## 2 Rappel sur la méthode MUSIC

On considère une antenne rectiligne composée de  $N$  capteurs identiques et équidistants. La distance  $d$  entre les capteurs est inférieure à  $\lambda/2$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde de la fréquence  $f$  de travail. Cette antenne reçoit  $P$  ( $P < N$ ) signaux émis par des sources rayonnantes auxquels se superpose un bruit additif. Le vecteur d'observation en représentation fréquentielle est :

$$\mathbf{x}(f) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{u}(f) + \mathbf{b}(f), \quad (1)$$

où  $\mathbf{A}(\theta)$  est la matrice de transfert sources-capteurs ( $N \times P$ ),

$$\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_P)]$$

où :

$$\mathbf{a}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{N}} [\alpha_1, \alpha_2 e^{-j\varphi}, \dots, \alpha_N e^{-j(N-1)\varphi}]^T,$$

$\alpha_i$  est le gain du  $i^{me}$  capteur,

$$\varphi = 2\pi f \frac{d}{c} \sin(\theta) \text{ où } \theta \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[,$$

$\mathbf{u}(f)$  est le vecteur des signaux sources ( $P \times 1$ ),

$\mathbf{u}(f) = [u_1(f), u_2(f), \dots, u_P(f)]^T$ ,  $\mathbf{b}(f)$  est le vecteur des bruits ( $N \times 1$ ),

$$\mathbf{b}(f) = [b_1(f), b_2(f), \dots, b_N(f)]^T.$$

On suppose également que :

- les  $P$  sources sont placées à l'infini,
- les signaux émis par les sources sont stationnaires, centrés et non corrélés avec les bruits,
- les bruits observés sur les différents capteurs sont stationnaires, centrés, non corrélés entre eux et de même variance  $\sigma^2$ .

La matrice interspectrale des signaux reçus est donnée par :

$$\mathbf{R}(f) = E[\mathbf{x}(f)\mathbf{x}^+(f)] \quad (2)$$

$$= \mathbf{A}(\theta)\mathbf{R}_u(f)\mathbf{A}^+(\theta) + \mathbf{R}_b(f), \quad (3)$$

où  $\mathbf{R}_u(f) = E[\mathbf{u}(f)\mathbf{u}^+(f)]$  est la matrice interspectrale des signaux sources ( $P \times P$ ) et  $\mathbf{R}_b(f) = E[\mathbf{b}(f)\mathbf{b}^+(f)] = \sigma^2 \mathbf{I}$  est la matrice interspectrale du bruit ( $N \times N$ ),  $\mathbf{I}$  la matrice identité.

L'opérateur  $[\cdot]^+$  correspond aux opérations, de conjugaison et de transposition, appliquées successivement. L'opérateur  $E[X]$  est l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$ .

La méthode MUSIC utilise la décomposition de la matrice interspectrale en éléments propres pour séparer le sous espace signal du sous espace bruit,

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^+, \quad (4)$$

où  $\mathbf{V}$  est la matrice formée des vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{\Lambda}$  est la matrice diagonale des valeurs propres de la matrice  $\mathbf{R}$ .

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}[\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_P > \lambda_{P+1} = \lambda_{P+2} = \dots = \lambda_N = \sigma^2]$$

$$\mathbf{V} = [\mathbf{V}_S \mathbf{V}_b]$$

où  $\mathbf{V}_S$  et  $\mathbf{V}_b$  représentent respectivement l'espace signal et l'espace bruit. Les vecteurs propres correspondants aux plus petites valeurs propres sont orthogonaux aux colonnes de la matrice  $\mathbf{A}$ ,

$$\{\mathbf{v}_{P+1}, \mathbf{v}_{P+2}, \dots, \mathbf{v}_N\} \perp \{\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_P)\}$$

Cette orthogonalité est due au fait que les vecteurs du sous espace signal engendrent le même sous espace que les vecteurs colonnes de la matrice  $\mathbf{A}$  et comme  $\mathbf{V}_S$  est orthogonal à  $\mathbf{V}_b$  (matrice hermitienne) donc les colonnes de  $\mathbf{A}$  sont aussi orthogonales à ceux de  $\mathbf{V}_b$ . Pour estimer les directions d'arrivée des sources rayonnées, le modèle du vecteur source  $\mathbf{a}(\theta)$  doit être connu. On a supposé que les sources sont placées à l'infini, les ondes reçues sont alors des ondes planes et les capteurs utilisés sont identiques et de gain unitaire. L'orthogonalité des vecteurs avec les vecteurs propres de l'espace bruit est alors caractérisée par leur projection sur celui-ci. En effectuant un balayage de tout ou d'une portion de l'horizon, ne sont alors retenues que les valeurs maximisant la relation suivante :

$$Music(\theta) = \frac{1}{\sum_{i=P+1}^N |\mathbf{v}_i^+ \mathbf{a}(\theta)|^2} \quad (5)$$

Pour des signaux totalement ou partiellement corrélés, comme dans le cas de trajets multiples, les performances de la méthode MUSIC se détériorent et l'utilisation d'un lissage spatial s'avère nécessaire. Cette technique de lissage spatial permet de décorrélérer les signaux seulement dans le cas d'antenne rectiligne et uniforme. Cette condition est très restrictive et limite le domaine d'application de cette technique dans le cas d'antenne distordue.

## 3 Méthode MUSIC pour une antenne distordue

On a vu dans les paragraphes précédents que pour une résolution satisfaisante des sources par la méthode de MUSIC, l'hypothèse d'onde plane est nécessaire. Le modèle d'onde plane n'est plus vérifié dès que (figure 1):

- le milieu de propagation des ondes acoustiques est non homogène, ce qui induit une distorsion des fronts d'onde
- l'antenne utilisée est souple, d'où l'impossibilité de maintenir le réseau de capteurs rectiligne, cela se traduit alors par un déplacement des capteurs par rapport à leurs positions d'origine.

Dans cette étude on s'intéresse au cas d'une antenne distordue. L'antenne utilisée n'est plus rectiligne mais distordue avec un même nombre de capteurs  $N$ . Pour cela, on introduit une erreur de phase sur chaque capteur en déplaçant ce dernier par rapport à sa position d'origine. Dans ce cas, le signal reçu, sur le réseau de capteurs, dans le domaine fréquentiel, est donné par :

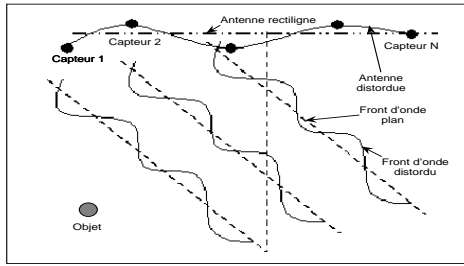


FIG. 1 – Antenne distordue et fronts d'onde distordus.

$$\mathbf{x}(f) = \mathbf{C}(\theta)\mathbf{u}(f) + \mathbf{b}(f), \quad (6)$$

où:

$$\mathbf{C}(\theta) = [\mathbf{c}(\theta_1), \mathbf{c}(\theta_2), \dots, \mathbf{c}(\theta_P)],$$

$$\mathbf{c}(\theta_p) = \frac{1}{\sqrt{N}} [1, e^{-j(\varphi_p + \phi_1)}, \dots, e^{-j((N-1)\varphi_p + \phi_{N-1})}]^T$$

$\varphi_p = 2\pi f \frac{d}{c} \sin(\theta_p)$ ,  $\theta_p \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ , ( $1 < p < P$ ),  $\phi_i$  représente l'erreur de phase due au déplacement du capteur  $i$  par rapport à sa position d'origine (on considère que le premier capteur n'a pas subi de distorsion). Pour illustrer la distorsion de l'antenne, on a introduit une distribution de phase sinusoïdale le long de l'antenne (figure 1), de la forme suivante :

$$\phi_i = Am \cos(2\pi \frac{d}{3} i) \quad i = 2, \dots, N, \quad (7)$$

où  $Am$  représente l'amplitude de la distorsion de la phase (radian). Le principe de notre méthode est de compenser les différents déphasages pour obtenir front d'onde plan à partir du front d'onde distordu reçu sur l'antenne. En d'autres termes, on cherche une matrice diagonale  $\mathbf{D}$ ,

$$\mathbf{D} = \text{diag}[1, e^{j\phi_1}, \dots, e^{j\phi_{N-1}}],$$

telle que :

$$\mathbf{D}\mathbf{c}_{\text{dist}}(\theta) = \mathbf{c}_{\text{rect}}(\theta),$$

où  $\mathbf{c}_{\text{dist}}(\theta)$  représente l'antenne distordue et  $\mathbf{c}_{\text{rect}}(\theta)$  représente l'antenne rectiligne virtuelle. Pour ce faire on calcule d'abord la matrice interspectrale des données distordues,

$$\mathbf{R}_{\text{dist}} = \mathbf{C}(\theta)\mathbf{R}_{\mathbf{u}}\mathbf{C}^H(\theta) + \sigma^2\mathbf{I}.$$

Cette matrice est décomposée en éléments propres pour extraire la matrice des vecteurs propres correspondants au sous espace bruit  $\mathbf{V}_{\text{bdist}}$ . Pour résoudre les sources dans ce cas de figure, on définit une fonction de  $N$  variables  $F(\theta, \phi_1, \dots, \phi_{N-1})$  que l'on va minimiser en utilisant l'algorithme DIRECT.

## 4 Méthode DIRECT

L'algorithme DIRECT a été introduit par Jones et al. [7] pour l'optimisation de fonctionnelles à plusieurs variables dans un espace continu et borné. L'algorithme DIRECT est une méthode qui nécessite ni la connaissance du gradient de la fonctionnelle à minimiser ni la constante de Lipschitz et utilise peu de paramètres dans le processus d'optimisation [7]. DIRECT normalise l'espace de recherche dans un hypercube et évalue la solution qui se trouve au centre de cet hypercube. En suite, des solutions sont évaluées dans les plus grandes dimensions du problème et l'hypercube est divisé en plus petits cubes en

favorisant les zones où les évaluations sont faibles. Un sous-ensemble de cubes optimaux est sélectionné à chaque itération et le processus de division est réalisé récursivement sur chaque bloc. La sélection des blocs optimaux est basée sur un compromis entre la taille et l'évaluation du centre du bloc. Ainsi, si l'on représente l'évaluation du centre des blocs en fonction de la taille des blocs, on sélectionne les blocs qui se trouvent sur l'enveloppe convexe inférieure de cet ensemble. Ainsi, on sélectionne d'une part des petits blocs possédant une évaluation intéressante et d'autre part de grands blocs peu performants au sens du critère. Dans le premier cas, l'algorithme DIRECT se comporte comme une méthode de recherche locale et dans le second comme une méthode de recherche globale.

On montre, qu'en pratique, la condition d'orthogonalité donnée par l'équation suivante :

$$F(\theta, \phi_1, \dots, \phi_{N-1}) = \|\mathbf{V}_{\text{bdist}}^H \mathbf{g}(\theta) \mathbf{D}(\phi_1, \dots, \phi_{N-1})\|^2 \quad (8)$$

est Lipchizienne, c'est à dire

$$|F(\Phi) - F(\Phi')| \leq \beta |\Phi - \Phi'| \quad (9)$$

où  $\Phi = [\theta, \phi_1, \dots, \phi_N]^T$  et  $\Phi' = [\theta, \phi'_1, \dots, \phi'_N]^T$  et  $0 < \beta < 1$  et  $\mathbf{g}(\theta)$  est le modèle d'onde plane qui peut s'écrire sous la forme :

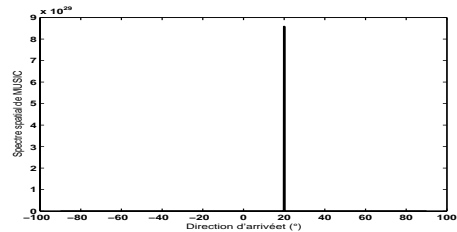
$$\mathbf{g}(\theta) = [1, e^{j2\pi f \frac{d \sin(\theta)}{c}}, \dots, e^{j(N-1)2\pi f \frac{d \sin(\theta)}{c}}]$$

Le principe de la méthode de correction proposée est d'utiliser l'algorithme DIRECT pour déterminer le vecteur de paramètres  $\Phi$ . La méthode de correction permet de déterminer à la fois la direction d'arrivée de source ainsi que les distorsions de phase sans connaissance a priori des erreurs de distorsion.

## 5 Exemple numérique

Pour illustrer les performances de la méthode développée, nous avons simulé la matrice de transfert  $\mathbf{A}(\theta)$  à laquelle nous avons rajouté des erreurs de phase de forme sinusoïdale (équation (7)) sur tous les capteurs, en prenant  $d = 0.5$  m et  $|Am| = 0, 1, 2$  et  $3$  rad. Nous avons placé la source en champ lointain d'une antenne composée de  $N = 5$  capteurs, dans la direction  $\theta = 20^\circ$ .

L'effet de ces erreurs de phase introduites sur la méthode

FIG. 2 – Spectre spatial de la méthode MUSIC en absence de distorsions de phase ( $|Am| = 0$  rad)

MUSIC sans aucun traitement est montré sur les figures 2, 3, 4 et 5. Les distorsions de phase dégradent fortement les performances de la méthode MUSIC et une correction de ces distorsions s'impose pour localiser correctement les sources. Les spectres spatiaux de la nouvelle méthode développée qui combine la méthode MUSIC avec l'algorithme DIRECT, pour les mêmes erreurs de phase sont présentés sur les figure 6, 7 et 8.

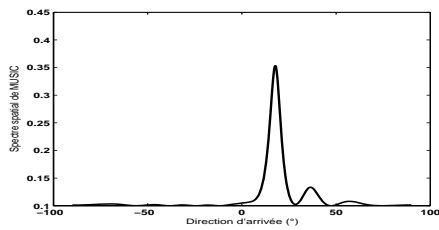


FIG. 3 – Spectre spatial de la méthode MUSIC en présence de distorsions de phase ( $|A_m| = 1$  rad)

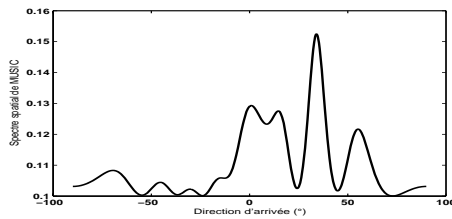


FIG. 4 – Spectre spatial de la méthode MUSIC en présence de distorsions de phase ( $|A_m| = 2$  rad)

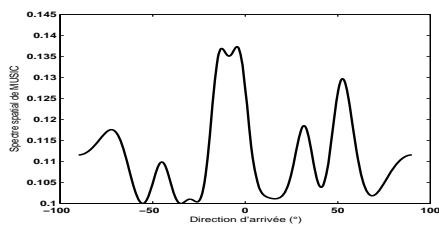


FIG. 5 – Spectre spatial de la méthode MUSIC en présence de distorsions de phase ( $|A_m| = 3$  rad)

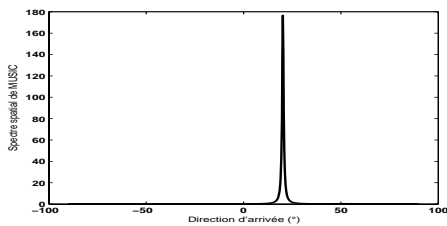


FIG. 6 – Spectre spatial de la méthode développée en présence de distorsions de phase ( $|A_m| = 1$  rad)

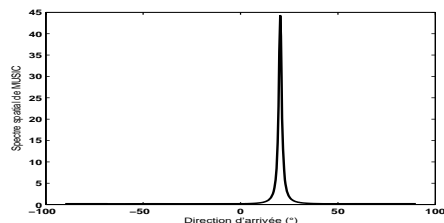


FIG. 7 – Spectre spatial de la méthode développée en présence de distorsions de phase ( $|A_m| = 2$  rad)

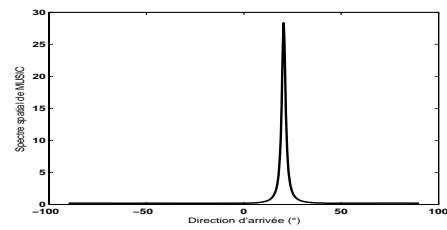


FIG. 8 – Spectre spatial de la méthode développée en présence de distorsions de phase ( $|A_m| = 3$  rad)

## 6 Conclusion

L'approche présentée, ne nécessite pas la connaissance, a priori, des directions d'arrivée des sources pour pouvoir corriger les données. Pour cela, on a combiné la méthode MUSIC avec l'algorithme DIRECT pour estimer à la fois la direction d'arrivée de la source et les erreurs de phases induites par la déformation de l'antenne souple (déplacement des capteurs composants l'antenne). La méthode proposée a été appliquée dans le cas d'une seule source et pour une déformation d'antenne de forme sinusoïdale, ce qui implique une fonction d'erreurs de phase sinusoïdale d'amplitude variant entre  $-\pi$  et  $+\pi$ . Le résultat obtenu est satisfaisant dans le cas d'une seule source. Cependant, l'étude du cas de plusieurs sources s'avère nécessaire pour intégrer l'effet des interactions entre les sources. Pour cela, on étendra notre méthode à des signaux large bande et on la comparera avec des méthodes classiques ayant déjà fait leurs preuves.

## Références

- [1] S. Marcos, "Les méthodes à haute résolution", Hermes, 1998.
- [2] M. Friel, Traitement d'antenne en présence d'un bruit coloré. Thèse de Doctorat de l'Université de Corse, 1996.
- [3] S. Marcos, "Calibration of a distorted towed array using a propagation operator," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 93, no. 4, pp. 1987-1994, 2003.
- [4] S. Bourennane and M. Friel, "Localization of wideband sources with estimation of an antenna shape," *Proc. IEEE Workshop on Statistical Sig. Array Proc.*, pp. 97-100, 1996.
- [5] W. Brandenburg, "A point mechanical model for the dynamics of towed arrays," *Proc. ICASSP*, pp. 40.2.1-40.2.4, 1984.
- [6] D.J. Edwards and A.J. Keane, "Numerical techniques for efficient sonar bearing and range searching in the near field using genetic algorithms," in *Evolutionary Algorithms in Engineering Applications*, ed. D. Dasgupta and Z. Michalewicz, Springer-Verlag, 1997.
- [7] D.R. Jones, C.D. Pertunen and B.E. Stuckman, "Lipschitzian optimisation without the Lipschitz constant," *Journal of Optimization and Applications*, vol. 79, no. 157-181, 1993.

# Blind Multiuser Equalization using a PARAFAC-Subspace Approach

André L. F. DE ALMEIDA<sup>1</sup>, Gérard FAVIER<sup>1</sup>, João C. M. MOTA<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire I3S/UNSA/CNRS  
2000 route des Lucioles, BP 121, 06903, Sophia Antipolis - Cedex, France

<sup>2</sup>Wireless Telecom Research Group GTel/DETI/UFC  
Campus do Pici, CP 6005, 60455-760, Fortaleza-CE, Brazil  
{lima, favier}@i3s.unice.fr, mota@gtel.ufc.br

**Résumé** – Dans cet article, nous utilisons la décomposition tensorielle PARAFAC (PARAllel FACtors) en vue de développer une nouvelle approche pour l'égalisation aveugle multi-utilisateur dans le cadre des systèmes de communications sans fil. Le système considéré est basé sur l'utilisation conjointe d'un réseau d'antennes et d'un sur-échantillonnage à la réception. Nous proposons tout d'abord un modèle tridimensionnel du type PARAFAC pour le signal reçu, dont les 3 dimensions sont l'espace, le temps et le sur-échantillonnage. Ensuite, nous présentons un nouveau récepteur aveugle multi-utilisateur pour la séparation des signaux et pour l'égalisation. Le récepteur proposé combine une modélisation PARAFAC, une méthode de sous-espace et l'exploitation de la propriété d'alphabet fini des symboles transmis. Des résultats de simulations sont montrés pour illustrer la performance du récepteur aveugle proposé.

**Abstract** – In this paper, we make use of the PARAFAC (PARAllel FACtors) tensor decomposition and propose a new blind multiuser equalization approach for wireless communications systems employing an antenna array and oversampling at the receiver. First, a tridimensional PARAFAC model for the received signal is proposed, the 3 dimensions being *space*, *time* and *oversampling*. Then, a blind receiver performing joint blind multiuser signal separation and equalization is formulated, combining PARAFAC modelling and a subspace method together with the use of Finite Alphabet (FA) property of symbols. Simulation results are provided to illustrate the performance of the proposed receiver.

## 1 Introduction

The blind multiuser equalization problem is an attractive research topic in the area of signal processing for wireless communications. It consists in recovering the information transmitted by several co-channel users with the assumption of a frequency-selective channel and without the knowledge of training sequences. Most of receiver algorithms deal with matrix (two-dimensional or 2-D) models for the received signal, exploiting its space and time dimensions as well as structural (problem-specific) properties of the transmitted signals (finite-alphabet, constant-modulus, etc) for signal separation and equalization [1, 2, 3].

Unlike the decompositions of 2-D arrays (matrices), which are generally nonunique for any rank greater than one (for rank one it is unique up to a scalar factor), low-rank decompositions of 3-D arrays (also called third-order *tensors*) are essentially unique. One of the most studied low-rank decompositions of 3-D (or higher dimensional) tensors is called PARAFAC (PARAallel FACtor) analysis, which was independently developed by Carroll and Chang [5] and Harshman [6] in the context of psychometrics and widely studied in the chemometrics area [7]. In the context of wireless communications, PARAFAC has recently appeared as a powerful tool for receiver signal processing, allowing to perform multiuser channel identification, beamforming and symbol recovery in a blind way. Most of research bringing PARAFAC to the context of signal processing for wireless communications were carried out by Sidiropoulos and his co-workers (see [8] and several references therein).

In this work, we present a new approach to the problem

of blind multiuser equalization of single-input multiple-output (SIMO) wireless communication systems employing a receiver antenna array together with oversampling. We first show that the received signal can alternatively be represented as a tridimensional (3-D) PARAFAC model, the 3 dimensions being *space*, *time* and *oversampling*. After formulating the model, a new blind multiuser equalization receiver for joint blind multiuser signal separation and equalization is proposed, combining PARAFAC modelling and a subspace method together with the use of Finite Alphabet (FA) property of symbols. The key aspect of the proposed algorithm is that multiuser signal separation (PARAFAC stage) and equalization (Subspace+FA stage) are iteratively performed. Simulation results are provided to illustrate the performance of the proposed receiver with that of classical ones.

This paper is organized as follows. In Section 2, some background on the PARAFAC decomposition is given. Section 3 is dedicated to the signal modelling, where the proposed PARAFAC model is introduced. In Section 4, our PARAFAC receiver for blind multiuser equalization is formulated. Section 5 contains simulation results for performance evaluation. The paper is finalized in Section 6 with some conclusions and perspectives.

## 2 Parallel Factor (PARAFAC) analysis

For an  $I \times J \times K$  third-order tensor  $\mathcal{X}$ , its  $Q$ -component PARAFAC decomposition is given by

$$x_{i,j,k} = \sum_{q=1}^Q a_{i,q} b_{j,q} c_{k,q}. \quad (1)$$

The standard PARAFAC model for a three-way (3-D) array expresses the original tensor as a sum of rank-one three-way factors, each one of which being an outer product of three vectors. By analogy with the definition of matrix rank, the rank of a third-order tensor is defined as the minimum number of rank-one three-way components needed to decompose  $\mathcal{X}$ .

The PARAFAC decomposition can also be represented in matrix notation. Define an  $I \times R$  matrix  $\mathbf{A}$ ,  $J \times R$  matrix  $\mathbf{B}$  and  $K \times R$  matrix  $\mathbf{C}$ . Define also a set of matrices  $\mathbf{X}_{i..} \in \mathbb{C}^{J \times K}$ ,  $i = 1, \dots, I$ , a set of matrices  $\mathbf{X}_{.j.} \in \mathbb{C}^{K \times I}$ ,  $j = 1, \dots, J$  and a set of matrices  $\mathbf{X}_{..k} \in \mathbb{C}^{I \times J}$ ,  $k = 1, \dots, K$ . Based on these definitions, the model (1) can be written in three different ways. For each writing of the model a system of simultaneous matrix equations exists. The three writings of the model are:

$$\mathbf{X}_{i..} = \mathbf{B} D_i[\mathbf{A}] \mathbf{C}^T \quad i = 1, \dots, I, \quad (2)$$

$$\mathbf{X}_{.j.} = \mathbf{C} D_j[\mathbf{B}] \mathbf{A}^T \quad j = 1, \dots, J, \quad (3)$$

$$\mathbf{X}_{..k} = \mathbf{A} D_k[\mathbf{C}] \mathbf{B}^T \quad k = 1, \dots, K, \quad (4)$$

where the operator  $D_i[\mathbf{A}]$  forms a diagonal matrix from the  $i$ -th row of  $\mathbf{A}$ . The matrices  $\mathbf{X}_{i..}$ ,  $i = 1, \dots, I$ ,  $\mathbf{X}_{.j.}$ ,  $j = 1, \dots, J$ , and  $\mathbf{X}_{..k}$ ,  $k = 1, \dots, K$  can be interpreted as slices of the tensor along the first, second and third dimensions, respectively. Stacking the matrix slices  $\mathbf{X}_{..k}$ ,  $k = 1, \dots, K$  into a matrix  $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{C}^{IJ \times K}$ , we have

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{..1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{..K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} D_1[\mathbf{C}] \\ \vdots \\ \mathbf{A} D_K[\mathbf{C}] \end{bmatrix} \mathbf{B}^T = (\mathbf{C} \diamond \mathbf{A}) \mathbf{B}^T, \quad (5)$$

where  $\diamond$  is the Khatri-Rao (columnwise Kronecker) product. Two other matrices  $\mathbf{X}_2 \in \mathbb{C}^{JK \times I}$  and  $\mathbf{X}_3 \in \mathbb{C}^{KI \times J}$  containing the full tensor information can be similarly formed by stacking the matrix slices  $\mathbf{X}_{.j.}$ ,  $j = 1, \dots, J$ , and  $\mathbf{X}_{i..}$ ,  $i = 1, \dots, I$ . Uniqueness of the PARAFAC decomposition was studied by Harshman [6] and the proof was provided by Kruskal [4]. According to Kruskal, a trilinear PARAFAC decomposition over  $\mathbb{R}$  is unique, except for trivial permutation and scaling ambiguity. The uniqueness theorem is now revisited. Consider a set of  $I$  matrices  $\mathbf{X}_{i..} = \mathbf{B} D_i[\mathbf{A}] \mathbf{C}^T$   $i = 1, \dots, I$ , where  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{I \times R}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{J \times R}$  and  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{K \times R}$ . If  $k_A + k_B + k_C \geq 2(R+1)$  the matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  and  $\mathbf{C}$  are unique up to common permutation and scaling of columns. This means that, any matrices  $\bar{\mathbf{A}}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}$  and  $\bar{\mathbf{C}}$  satisfying the model  $\mathbf{X}_{i..}$ ,  $i = 1, \dots, I$ , are linked to  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  and  $\mathbf{C}$  by

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \Pi \Delta_1, \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \Pi \Delta_2, \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \Pi \Delta_3, \quad (6)$$

where  $\Pi$  is a permutation matrix and  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  and  $\Delta_3$  are diagonal matrices satisfying the condition  $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 = \mathbf{I}$ .

### 3 Signal modelling

Let us consider a linear and uniformly-spaced array of  $M$  antennas receiving signals from  $Q$  co-channel users. Assume that the signal transmitted by each co-channel user is subject to frequency-selective multipath propagation and arrives at the receiver via  $L$  specular paths. The length of the channel impulse response is  $K$  symbols long. At the output of each receiver antenna, the signal is sampled at a rate that is  $P$  times the symbol rate. Due to temporal oversampling, the resolution of the pulse-shaping filter response is increased by a factor  $P$ .

Such an increase in the temporal resolution is interpreted here as an addition of a third axis (or dimension) to the received signal, called here the *oversampling dimension*. Let us organize the  $P$  oversamples of the signal received at the  $m$ -th antenna at the  $n$ -th symbol period in a vector  $\mathbf{x}_m(n) = [x_m(n)x_m(n+1/P) \dots x_m(n+(P-1)/P)]^T \in \mathbb{C}^P$ . Its discrete-time baseband representation in absence of noise can be factored as

$$\mathbf{x}_m(n) = \sum_{q=1}^Q \sum_{l=1}^L b_{lq} a_m(\theta_{lq}) \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{g}(k - \tau_{lq}) s_q(n - k), \quad (7)$$

$b_{lq}$  is the fading envelope of the  $l$ -th path of the  $q$ -th user,  $a_m(\theta_{lq})$  is the phase response of the  $m$ -th antenna-element to the  $l$ -th path of the  $q$ -th user,  $\theta_{lq}$  being the associated direction of arrival. Similarly,  $\tau_{lq}$  denotes the propagation delay (in multiples of the symbol period  $T$ ) and

$$\mathbf{g}(k - \tau_{lq}) = \begin{bmatrix} g(k - \tau_{lq}) \\ g(k - \tau_{lq} + 1/P) \\ \vdots \\ g(k - \tau_{lq} + (P-1)/P) \end{bmatrix} \quad (8)$$

represents the  $k$ -th component of the oversampled pulse-shaping filter response evaluated at delay  $\tau_{lq}$ . The channel length  $K$  is such that  $K \geq \max(\tau_{lq})$ . This condition guarantees that all multipath energy is captured in our frequency-selective channel impulse response model. Finally,  $s_q(n)$  is the information symbol transmitted by the  $q$ -th user at the  $n$ -th time symbol period. Depending on the type of signal processing used at the receiver, we may utilize either the above parametric channel model, with explicit description of angles and delays (narrowband assumption), or a non-parametric one, when we are not interested in characterizing angle and delay parameters of the channel. In this work we focus on the parametric model, which means that all the multipath parameters of all users are captured in our tensor model. Define

$$\mathbf{a}_{l,q} = [a_1(\theta_{lq}) a_2(\theta_{lq}) \dots a_M(\theta_{lq})]^T \in \mathbb{C}^M \quad (9)$$

and

$$\mathbf{G}_{l,q} = [\mathbf{g}(0 - \tau_{lq}) \dots \mathbf{g}(K - 1 - \tau_{lq})] \in \mathbb{C}^{P \times K} \quad (10)$$

as the spatial and temporal responses of the channel to the  $l$ -th multipath of the  $q$ -th user,  $l = 1, \dots, L$ ,  $q = 1, \dots, Q$ . In order to rewrite (7) in a more compact form, let us concatenate the  $LQ$  spatial and temporal responses into equivalent matrices  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{1,1} \dots \mathbf{a}_{L,Q}] \in \mathbb{C}^{M \times LQ}$  and  $\mathbf{G} = [\mathbf{G}_{1,1} \dots \mathbf{G}_{L,Q}] \in \mathbb{C}^{P \times KLQ}$ , and define  $\mathbf{b} = [b_{11} \dots b_{LQ}]^T \in \mathbb{C}^{LQ}$  as a vector of multipath gains. Define also the overall channel impulse response matrix  $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{P \times KLQ}$  as

$$\mathbf{H} = \mathbf{G}(\text{diag}(\mathbf{b}) \otimes \mathbf{I}_K) \in \mathbb{C}^{P \times KLQ}, \quad (11)$$

where the operator  $\otimes$  defines the Kronecker product. The matrix  $\mathbf{H}$  is nothing but the temporal response matrix scaled by the complex multipath gains. The operator  $\text{diag}(\cdot)$  forms a diagonal matrix out of its vector argument. Considering that a block of  $N$  transmitted symbols is processed at the receiver, we define  $\mathbf{S} = [\mathbf{S}_1^T \dots \mathbf{S}_Q^T]^T \in \mathbb{C}^{KQ \times N}$  a block-Toeplitz matrix concatenating  $Q$  Toeplitz symbol matrices, each one of which having its first row and column equal to  $s_q^{(r)} = [s_q(1)s_q(2) \dots s_q(N)]$  and  $s_q^{(c)} = [s_q(1)0 \dots 0]^T$ , respectively.

TAB. 1: IPSP Algorithm

<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>i = 0</math>; Initialize <math>\hat{\mathbf{A}}^{(0)}</math> and <math>\hat{\mathbf{B}}^{(0)}</math></li> </ul> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>i = i + 1</math>;</li> <li>2. Update <math>\hat{\mathbf{C}}^{(i)} = [(\hat{\mathbf{B}}^{(i-1)} \diamond \hat{\mathbf{A}}^{(i-1)} \Psi) \Phi]^\dagger \mathbf{X}_1</math>;</li> <li>3. <b>Subspace + FA projection stage</b> (Table 2)</li> <li>4. Form <math>\hat{\mathbf{C}}^{(i)}</math> from <math>\hat{\mathbf{C}}_1^{(i)}, \dots, \hat{\mathbf{C}}_Q^{(i)}</math>;</li> <li>5. Update <math>[\hat{\mathbf{A}}^{(i)}]^T = [((\Phi \hat{\mathbf{C}}^{(i)})^T \diamond \hat{\mathbf{B}}^{(i-1)}) \Psi^T]^\dagger \mathbf{X}_2</math>;</li> <li>6. Update <math>[\hat{\mathbf{B}}^{(i)}]^T = [\hat{\mathbf{A}}^{(i)} \Psi \diamond (\Phi \hat{\mathbf{C}}^{(i)})^T]^\dagger \mathbf{X}_3</math>;</li> <li>7. Go to step 2 until convergence.</li> </ol>
---

TAB. 2: Subspace + FA projection stage

<b>for</b> $q = 1$ to $Q$ , - Determine $\mathbf{T}_q^{(i)}$ from $\hat{\mathbf{C}}_q^{(i)}$ (subspace method [9]); - $\hat{\mathbf{S}}_q^{(i)} = [\hat{\mathbf{T}}_q^{(i)}]^{-1} \hat{\mathbf{C}}_q^{(i)}$ ; - $\hat{\mathbf{s}}_q^{(i)} = \text{proj}[\hat{\mathbf{S}}_q^{(i)}]$ ; - $\hat{\mathbf{C}}_q^{(i)} = \text{toeplitz}[\hat{\mathbf{s}}_q^{(i)}]$ ; <b>end</b>
---

In absence of noise, the received signal is a 3-D tensor  $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{M \times N \times P}$  that can be expressed as a set of  $M \times N$  space-time slices  $\mathbf{X}_{:,p}$ , each one of which admitting the following factorization:

$$\mathbf{X}_{:,p} = (\mathbf{A}\Psi)D_p(\mathbf{H})(\Phi\mathbf{S}), \quad p = 1, \dots, P, \quad (12)$$

where

$$\Psi = \mathbf{I}_{LQ} \otimes \mathbf{1}_K^T \in \mathbb{C}^{LQ \times KLQ}, \quad (13)$$

$$\Phi = \mathbf{I}_Q \otimes \mathbf{I}_L \otimes \mathbf{I}_K \in \mathbb{C}^{KLQ \times KQ}, \quad (14)$$

are constraint matrices, composed of 1's and 0's. The term  $\mathbf{1}_K$  being a "all ones" column vector of dimension  $K \times 1$ . The operator  $D_p(\mathbf{H})$  takes the  $p$ -th row of its matrix argument and forms a diagonal matrix out of it. Note that (12) follows a tridimensional (3-D) PARAFAC model. With respect to the PARAFAC decomposition in Section 2, Equation (12) can be interpreted as the  $p$ -th matrix slice of a  $(M, N, P)$ -dimensional tensor  $\mathcal{X}$ . According to (12), the received tensor is completely characterized by a set of three matrix components  $\mathbf{A}\Psi$ ,  $\mathbf{H}$  and  $\Phi\mathbf{S}$ . This tensor model is a PARAFAC model having a constrained structure, the constraints being given by matrices  $\Psi$  and  $\Phi$ . According to (2), the received signal tensor can also be expressed as a set of  $P \times M$  matrix slices  $\mathbf{X}_{:,n} = \mathbf{H}D_n((\Phi\mathbf{S})^T)(\mathbf{A}\Psi)^T$ ,  $n = 1, \dots, N$  or as a set of  $N \times P$  matrix slices  $\mathbf{X}_{m,:} = (\Phi\mathbf{S})^T D_m(\mathbf{A}\Psi)\mathbf{H}^T$ ,  $m = 1, \dots, M$ . The three unfolded matrices  $\mathbf{X}_{i=1,2,3}$ , containing the full tensor information, are defined as  $\mathbf{X}_1 = [\mathbf{X}_{:,1}^T \dots \mathbf{X}_{:,P}^T]^T \in \mathbb{C}^{MP \times N}$ ,  $\mathbf{X}_2 = [\mathbf{X}_{1,:}^T \dots \mathbf{X}_{N,:}^T]^T \in \mathbb{C}^{PN \times M}$  and  $\mathbf{X}_3 = [\mathbf{X}_{1,:}^T \dots \mathbf{X}_{M,:}^T]^T \in \mathbb{C}^{NM \times P}$ , respectively.

## 4 Receiver algorithm

A combined PARAFAC-Subspace receiver for joint blind multiuser signal separation and equalization is now presented. Multiuser signal separation is done in the 3-D tensor space, exploiting *oversampling*, *time* and *space* dimensions of the received signal in an alternating way. The alternating least squares (ALS) algorithm [6] is used for this purpose.

Equalization is done in the 2-D matrix space, where the Toeplitz structure of users symbol matrices as well as the Finite-Alphabet (FA) property of the transmitted symbols are exploited for symbol estimation via a subspace method. The key aspect of the proposed algorithm is that multiuser signal separation (PARAFAC stage) and equalization (Subspace+FA stage) are iteratively performed. The goal of the PARAFAC stage is to estimate three component matrices from which the model parameters, i.e. the oversampled channel response matrix  $\mathbf{H}$ , the spatial signature matrix  $\mathbf{A}$  and the transmitted symbols  $\mathbf{S}$ . In turn, the goal of the subspace+FA stage is to determine an ambiguity matrix that is inherent to the model as well as to estimate the transmitted symbols in the 2-D space, which are then used as an input to the PARAFAC stage to refine the estimates of model parameters in the 3-D space. In the following, we describe the proposed algorithm. This algorithm is called Iterative PARAFAC-Subspace with Projection (IPSP).

For the received signal tensor  $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{M \times N \times P}$ , multiuser signal separation consists in estimating in an alternating way three matrices  $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^{KLQ \times N}$ ,  $\hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{C}^{M \times KLQ}$  and  $\hat{\mathbf{C}} \in \mathbb{C}^{P \times KLQ}$  from the matrix representations  $\mathbf{X}_{i=1,2,3}$  of the received signal tensor. The multiuser signal separation problem can be formulated as a set of three independent nonlinear least squares problems:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}} &= \underset{\mathbf{B}}{\text{argmin}} \|\mathbf{X}_1 - (\mathbf{C} \diamond \mathbf{A} \Psi) \Phi \mathbf{B}\|^2 \\ \hat{\mathbf{A}} &= \underset{\mathbf{A}}{\text{argmin}} \|\mathbf{X}_2 - ((\Phi \mathbf{B})^T \diamond \mathbf{C})(\mathbf{A} \Psi)^T\|^2 \\ \hat{\mathbf{C}} &= \underset{\mathbf{C}}{\text{argmin}} \|\mathbf{X}_3 - (\mathbf{A} \Psi \diamond (\Phi \mathbf{B})^T) \mathbf{C}^T\|^2 \end{aligned} \quad (15)$$

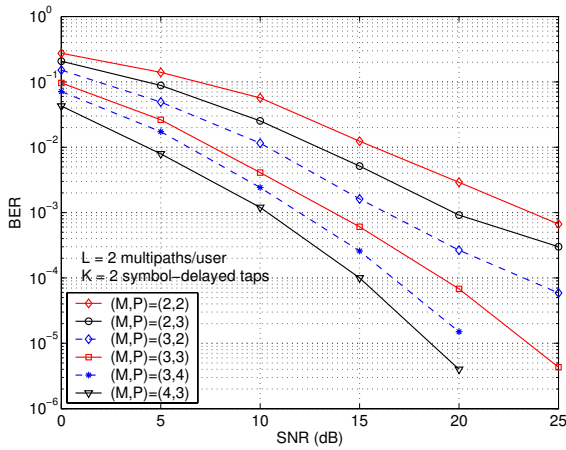
One iteration of the multiuser signal separation stage is composed of three steps. At each step one component matrix is updated while the others are fixed to the values obtained at the previous step. Assuming that identifiability conditions are satisfied, an estimate of the component matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{H}$  and  $\mathbf{S}$  are related to  $\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}$  and  $\hat{\mathbf{C}}$  in the following way

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{T}(\Pi \otimes \mathbf{I}_K) \mathbf{S}, \quad \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\Pi \Delta \otimes \mathbf{I}_L), \quad \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{H}(\Pi \otimes \mathbf{I}_{KL}) \mathbf{T}^{-1}$$

where  $\Pi$  is a permutation ambiguity matrix,  $\Delta$  is a scaling ambiguity matrix and  $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{KQ \times KQ}$  is a block-diagonal (partial rotation) ambiguity matrix, which must be determined at the receiver in order to recover users symbol sequences. Since  $\mathbf{T}$  is block-diagonal, the symbol sequences can be recovered by solving the following set of independent equations:

$$\hat{\mathbf{B}}_1 = \mathbf{T}_1 \mathbf{S}_1, \quad \hat{\mathbf{B}}_2 = \mathbf{T}_2 \mathbf{S}_2, \quad \dots, \quad \hat{\mathbf{B}}_Q = \mathbf{T}_Q \mathbf{S}_Q. \quad (16)$$

The subspace+FA stage consists in estimating  $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_Q$  via a subspace method [9]. For reasons of space, we report the interested reader to [9] for further details on this algorithm. After determining the partial rotation ambiguity matrices, users symbol matrices can be estimated. An estimation of the symbol sequences can be obtained from the projection of the first row of the estimated symbol matrices  $\hat{\mathbf{S}}_1, \dots, \hat{\mathbf{S}}_Q$  onto the FA. Then, an updated (post-equalized) version of the received signal tensor, now free from the partial rotation ambiguity, is then formed and used as an input to the PARAFAC stage to refine user signal separation in the 3-D space. Tables 1 and 2 show the pseudo-code for the IPSP receiver algorithm. Table 1 enumerates the steps of the IPSP algorithm, with emphasis on the ALS stage while Table 2 shows the steps associated to the subspace+FA stage.

FIG. 1: BER versus SNR.  $L=2$  and  $K=2$ .

## 5 Simulation Results

The performance of the blind PARAFAC-Subspace receiver is evaluated through computer simulations. Results are shown in terms of bit-error-rate (BER) versus signal-to-noise ratio (SNR), averaged over 1000 Monte Carlo experiments. For each experiment, multipath fading gains are redrawn from an i.i.d. Rayleigh generator while user signals are redrawn from an i.i.d. distribution. Users symbols are modulated using binary-phase shift keying (BPSK). The number of users is fixed to  $Q = 2$ . For each experiment, a block of  $N = 50$  received samples is processed at the receiver and the BER is averaged over the two users. At the beginning of the algorithm  $\hat{\mathbf{A}}^{(0)}$  and  $\hat{\mathbf{B}}^{(0)}$  are initialized as  $\hat{\mathbf{A}}^{(0)} = \mathbf{A} + \mathbf{E}_1$  and  $\hat{\mathbf{B}}^{(0)} = \mathbf{B} + \mathbf{E}_2$ , with  $\mathbf{E}_1$  and  $\mathbf{E}_2$  being random error matrices, the entries of which are drawn from a normal distribution with standard deviation  $10^{-1}$ . More sophisticated strategies exist but they are beyond the scope of this work. The performance results are compared by varying the number  $M$  of receiver antennas and the oversampling factor  $P$ . The number of multipaths/user is  $L = 2$  and the length of the overall temporal channel response is  $K = 2$ . Multipath delays, gains and angles are respectively  $(\tau_{11}, \tau_{21}) = (\tau_{12}, \tau_{22}) = (0, T)$ ,  $(b_{11}, b_{21}) = (b_{12}, b_{22}) = (1, 0.5)$ ,  $(\theta_{11}, \theta_{21}) = (0, 30^\circ)$  and  $(\theta_{12}, \theta_{22}) = (-20^\circ, -40^\circ)$ . Figure 1 shows the results for the proposed PARAFAC-Subspace receiver with the IPSP algorithm. As the number of antennas or the oversampling factor increases, the performance gradually improves. Note that an increase in the number  $M$  of antennas offers a greater performance improvement than an increase in the oversampling factor  $P$ . These results confirm that user signals are better distinguished in the space dimension than in the oversampling dimension. In order to provide a performance reference for our PARAFAC-Subspace receiver, we have also evaluated the performance of the blind space-time receiver proposed by Van der Veen et al. in [3], which is also based on a subspace method and FA projection. The performance of the Minimum Mean Square Error (MMSE) receiver with perfect knowledge is also considered as a reference. According to Figure 2, our receiver outperforms the blind space-time receiver of [3], and is close to the MMSE one, with a performance gap of 3 dB approximately.

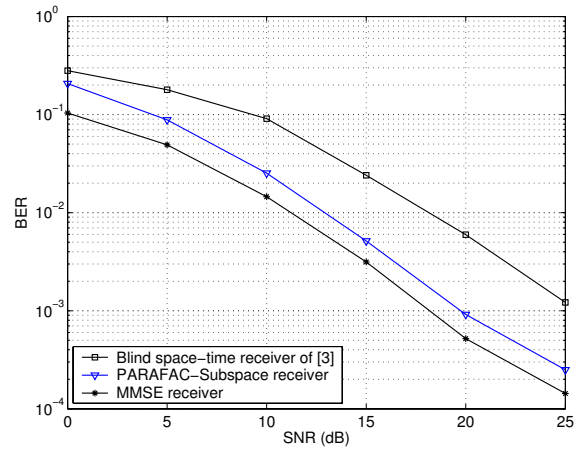


FIG. 2: Performance of the PARAFAC-Subspace receiver compared to those of the blind space-time receiver of [3] and MMSE receiver with perfect channel knowledge.

## 6 Conclusions

In this work, a new blind multiuser equalization receiver has been proposed for joint blind multiuser signal separation and equalization. The receiver is based on a PARAFAC modelling of the received signal when an antenna array and oversampling are jointly employed at the receiver. The proposed Iterative PARAFAC-Subspace with Projection (IPSP) receiver combines PARAFAC modelling and subspace method with the use of FA-property of symbols in order to perform user signal separation and equalization iteratively. Our results have shown that the performance of the proposed blind receiver is better than that of the blind space-time receiver of [3] and is close to that of the MMSE receiver with perfect channel knowledge.

## References

- [1] A. J. Paulraj, C. B. Papadimas, Space-time processing for wireless communications, *IEEE Sig. Proc. Mag.*, vol. 14, no. 6, pp. 49–83, 1997.
- [2] S. Talwar, M. Viberg, A. J. Paulraj, Blind separation of synchronous co-channel digital signals using an antenna array—Part I: Algorithms, *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 44, no. 5, pp. 1184–1197, May 1996.
- [3] A. -J. van der Veen, “A subspace approach for blind space-time signal processing,” *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 45, no. 1, pp. 173–190, January 1997.
- [4] J. B. Kruskal, Three-way arrays: Rank and uniqueness of trilinear decompositions, with applications to arithmetic complexity and statistics, *Linear Algebra Applications*, vol. 18, pp. 95–138, 1977.
- [5] J. D. Carroll, J. Chang, Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an  $n$ -way generalization of “Eckart-Young” decomposition, *Psychometrika*, vol. 35, pp. 283–319, 1970.
- [6] R. A. Harshman, “Foundations of the PARAFAC procedure: Model and conditions for an “explanatory” multi-mode factor analysis,” *UCLA Working papers in phonetics*, vol. 16, no. 1, pp. 1–84, 1970.
- [7] R. Bro, Multi-way analysis in the food industry: models, algorithms and applications, *PhD. thesis*, University of Amsterdam, 1998.
- [8] N. D. Sidiropoulos, “Low-rank decomposition of multi-way arrays: A signal processing perspective,” invited plenary lecture at IEEE SAM 2004, Barcelona, Spain, July 2004.
- [9] E. Moulines, P. Duhamel, J.-F. Cardoso, S. Mayrargue, Subspace methods for blind identification of multichannel FIR filters, *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 43, no. 2, pp. 516–525, 1995.



# Conception d'un système de localisation de source sonore large bande par formation de voie pour des applications robotiques

Sylvain ARGENTIERI<sup>1</sup>, Patrick DANÈS<sup>1,2</sup>, Philippe SOUÈRES<sup>1</sup>

<sup>1</sup>LAAS - CNRS

7, avenue du Colonel Roche, 31077 Toulouse, France

<sup>2</sup>Université Paul Sabatier

118, route de Narbonne, 31062 Toulouse, France

Sylvain.Argentieri@laas.fr, Patrick.Danes@laas.fr, Philippe.Soueres@laas.fr

**Résumé** – Le travail présenté dans cet article a été mené dans le cadre d'un projet visant au développement d'un capteur auditif pour la localisation de locuteur en robotique mobile. La méthode de localisation proposée s'appuie sur une formation de voie large bande déterminée par résolution d'un problème d'optimisation convexe. Une description précise de la procédure d'optimisation et de la chaîne d'acquisition utilisée sur la plateforme expérimentale est donnée de façon à faire le lien entre la théorie et son implémentation pratique. Des résultats de simulation ainsi que des comparaisons avec les techniques classiques de formation de voie sont également fournis.

**Abstract** – The work presented in this paper comes as a part of a project which aims at developing an auditory system for a mobile robot in order to localize a speaker. The proposed localization method is based on a convex optimization solution to wideband beamforming. A precise description of the optimization procedure together with the acquisition chain of the experimental testbed is given in order to bridge the gap between theory and practical implementation. Simulation results and comparisons with classical beamforming techniques are also provided.

## 1 Introduction

Le groupe Robotique et Intelligence Artificielle du LAAS-CNRS est impliqué depuis de nombreuses années dans le développement de stratégies de navigation de robots mobiles. La plupart d'entre elles utilisent des modalités visuelles permettant de réaliser des tâches de localisation ou d'asservissement par rapport à des amers de la scène. Ces modalités sont ensuite complétées par l'ajout d'autres informations extéroceptives, e.g. fournies par des capteurs laser, ultrasoniques ou GPS [4]. Afin de compléter les capacités sensorielles de nos robots, nous travaillons à la conception et l'implémentation d'un système auditif embarqué.

Partant du constat que deux oreilles permettent à la majorité des animaux de percevoir efficacement leur environnement sonore, de nombreux systèmes de localisation de source sonore embarqués sur des plateformes robotiques exploitent seulement deux microphones [9]. Ces approches, dites "biomimétiques", s'appuient le plus souvent sur des mesures des différences en phase et amplitude des deux signaux reçus. Cependant, leur sensibilité importante aux variations des conditions expérimentales et au bruit ambiant limite leur intérêt dans un contexte robotique. Par conséquent, même si le développement de capteurs biomimétiques reste encore aujourd'hui un sujet de recherche très actif, il semble plus approprié, d'un point de vue ingénierie, d'utiliser une antenne de microphones [12]. Cependant, même si la théorie des antennes a déjà été largement étudiée sous des aspects Acoustique et Traitement du Signal [5], le contexte de la robotique mobile pose des problèmes inédits et originaux.

L'article est organisé comme suit. Nous détaillons d'abord

les spécificités propres au contexte de la robotique. Puis, dans une deuxième partie, nous présentons une méthode de synthèse d'antenne large bande basée sur la résolution d'un problème d'optimisation convexe. Enfin, dans une troisième partie, la chaîne d'acquisition utilisée sur la plateforme expérimentale est décrite, et des résultats de localisation en simulation sont apportés.

## 2 Spécificités liées à la robotique

En robotique, l'ensemble *capteur + système de traitement* est souvent un tout indissociable. On parle alors de *capteur intégré* dont l'exploitation matérielle et logicielle se trouve grandement simplifiée. Une architecture modulaire permettant d'intégrer facilement de nouvelles modalités sensorielles à nos robots est alors envisageable. Du fait que l'ensemble *antenne de microphones + algorithme de localisation* doit constituer un capteur sonore *autonome*, plusieurs impératifs techniques et théoriques sont à prendre en compte lors de sa conception.

Tout d'abord, l'aspect temporel apparaît comme un critère déterminant dans toutes les applications robotiques modernes. Ainsi, de nombreuses lois de commande sont basées sur l'introduction, dans la boucle d'asservissement, de données extéroceptives. Citons par exemple les méthodes d'asservissement visuel permettant d'asservir un robot sur un amer visuel [3]. Ceci est rendu possible par l'utilisation de capteurs délivrant l'information à une cadence suffisamment élevée pour réaliser une commande *temps réel*. L'introduction, dans une telle boucle d'asservissement, de données issues d'un capteur auditif n'est donc envisageable qu'avec un capteur *rapide*, capable

de fournir un résultat à une cadence minimale de 10Hz. Par conséquent, des méthodes de localisation de source très efficaces, telles que MUSIC ou Maximum de Vraisemblance [6], doivent être écartées. Au contraire, les méthodes de formation de voie, nécessitant moins de calculs en ligne, semblent mieux adaptées pour répondre à de fortes contraintes temporelles.

De plus, des contraintes d'embarquabilité fortes contraignent la dimension du capteur à synthétiser. En effet, compte tenu des dimensions des plateformes mobiles disponibles au LAAS, l'antenne de microphones ne pourra excéder une longueur de 50cm. De ce fait, les méthodes conventionnelles de formation de voie, qui compensent les retards causés par la propagation des signaux reçus sur chacun des microphones, possèdent une mauvaise résolution spatiale en basse fréquence et paraissent donc mal adaptées pour la localisation de signaux large bande tels que la voix.

Dès lors se pose la question de la conception d'une antenne acoustique de petite dimension utilisant une formation de voie large bande. Nous proposons dans la partie suivante une méthode permettant d'approcher cet objectif.

### 3 Synthèse d'une antenne large bande

#### 3.1 Description du problème d'optimisation

Dans toute la suite, nous nous plaçons dans l'hypothèse de champ lointain et nous considérons une antenne linéaire de  $N = 8$  microphones identiques omnidirectionnels, de fonction de transfert  $a(f)$ , placés à des abscisses  $d_i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ . D'une manière générale, les méthodes de formation de voie pour signaux large bande combinent les sorties de filtres RIF d'ordre  $K$  placés en aval de chacun des microphones. Les coefficients de ces filtres étant calculés hors ligne, une implémentation sur DSP permet d'envisager une utilisation en temps réel du capteur acoustique. Soit  $\theta$  l'angle d'incidence de l'onde considérée (voir figure 1) et  $f$  sa fréquence. L'objectif est de déterminer le vecteur  $W = (w_{1,1}, \dots, w_{N,K})^T$  constitué des  $KN$  coefficients des filtres RIF, de façon que la réponse de l'antenne  $P(\theta, f)$  dans un plan horizontal soit aussi proche que possible d'un comportement désiré  $P_d(\theta, f)$ . L'introduction des vecteurs  $V_{RIF}(f) = (1, \dots, e^{-j2\pi f(K-1)T_e})^T$  et  $V_{Antenne}(\theta, f) = a(f)(e^{\frac{2\pi f}{c}d_1 \sin \theta}, \dots, e^{\frac{2\pi f}{c}d_N \sin \theta})^T$  permet l'écriture suivante, où  $\otimes$  désigne le produit de Kronecker et  $\tau_{\theta,i} = \frac{d_i}{c} \sin \theta$  [10] :

$$\begin{aligned} P_{FV}(\theta, f) &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K w_{i,k} a(f) e^{-j2\pi f(k-1)T_e} e^{j2\pi f \tau_{\theta,i}} \\ &= W^T (V_{Antenne}(\theta, f) \otimes V_{RIF}(f)) = W^T V(\theta, f). \end{aligned} \quad (1)$$

La procédure d'optimisation portant sur  $W$ , effectuée sur un produit  $\Theta \times F$  d'ensembles discrets d'angles  $\theta$  et de fréquences  $f$  est alors :

$$\begin{aligned} &\text{Minimiser } \varepsilon \\ &\text{Sous } |W^T V(\theta, f) - P_d(\theta, f)|^2 \leq \varepsilon, \forall (\theta, f) \in \Theta \times F. \end{aligned} \quad (2)$$

Une telle procédure d'optimisation a été récemment proposée dans [13] pour le cas faible bande et nous nous proposons

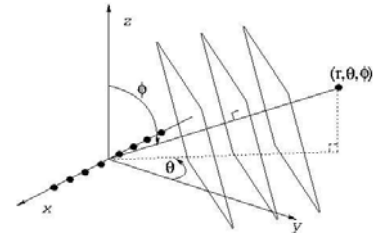


FIG. 1 – Antenne linéaire en champ lointain.

ici de l'étendre au cas large bande. Le comportement désiré  $P_d(\theta, f)$  est supposé tenir compte des spécificités du contexte applicatif (petite taille de l'antenne, faible nombre de microphones), qui limitent de fait les performances pouvant être obtenues. Ce profil de référence est visible à la figure 2(a).

Ces contraintes se traduisent par la définition d'un lobe principal d'écoute dont la largeur est constante en fonction de la fréquence, ainsi que de zones devant être filtrées spatialement et fréquemment. Sa phase est quant à elle fixée à zéro. La largeur du lobe principal est paramétrée par les angles  $\theta_c, \theta_p$  et  $\theta_s$ , représentant respectivement l'angle d'écoute, la bande passante et la bande coupée angulaire. Le problème ainsi formulé est un problème d'optimisation convexe [7] pour lequel il existe des solveurs efficaces capables de converger vers l'optimum global en temps polynomial.

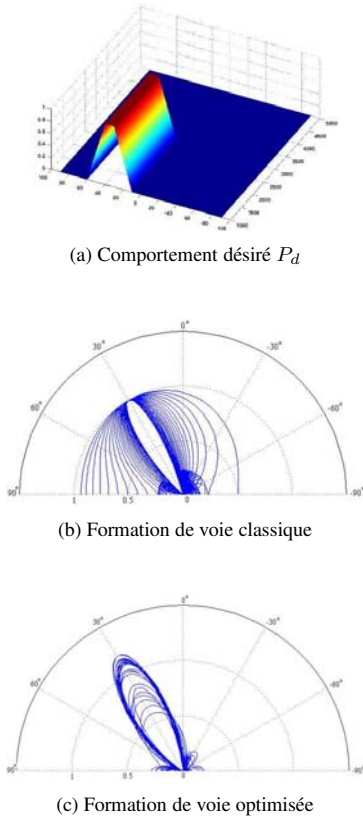
#### 3.2 Résultats d'optimisation

Considérons que notre objectif est d'écouter dans la direction  $\theta_c = 30^\circ$ , tout en conservant une largeur du lobe principal d'écoute constante sur la décade  $f = [300Hz; 3kHz]$ . Le problème d'optimisation (2) est posé sur l'ensemble  $F \times \Theta = \{300Hz, 400Hz, \dots, 3.5kHz\} \times \{-90^\circ, -88^\circ, \dots, +90^\circ\}$ . Le processus d'optimisation utilise le solveur SDPT3 (v3.2) [11] en association avec YALMIP [8] sous MATLAB. L'influence de chacun des degrés de liberté du problème d'optimisation a été précisément évaluée dans [1]. Nous avons montré que compte tenu du faible nombre de microphones utilisés, il est nécessaire d'effectuer un compromis entre l'efficacité du filtrage spatial (en terme de niveaux des lobes secondaire et largeur du lobe principal) et le gain de bruit d'antenne  $B_a = W^T W$ .

Un exemple de résultat d'optimisation, pour lequel  $\theta_p = 10^\circ$ ,  $\theta_s = 24^\circ$  et  $K = 50$  est présenté figure 2(c), pour une antenne de  $N = 8$  microphones régulièrement espacés de  $5.66cm$ . Le lobe principal obtenu admet effectivement une direction et une largeur quasi-constantes en fonction de la fréquence, et ce même en basse fréquence malgré la petite dimension de l'antenne ( $45cm$ ). Ainsi, par rapport à certaines techniques conventionnelles de formation de voie visant à compenser les retards temporels dus à la propagation, la résolution de la localisation d'un locuteur dont la voix comporte majoritairement des composantes basses fréquences pourra être améliorée, malgré la présence d'oscillations du niveau du lobe principal.

### 4 Modèle de la chaîne d'acquisition

Nous allons détailler dans cette partie la chaîne d'acquisition représentée figure 3, ainsi que le matériel de traitement

FIG. 2 – Réponses d'antenne pour  $f \in [300Hz; 3kHz]$ .

des données utilisé sur la plateforme expérimentale, de façon à comprendre comment la relation (1) est impliquée dans le comportement spatio-fréquentiel de l'antenne obtenue.

#### 4.1 Matériel utilisé

Nous utilisons, afin d'acquérir les signaux émis par le locuteur à localiser,  $N = 8$  microphones d'antennerie fabriqués par GRAS, appariés en phase à  $\pm 1^\circ$ , régulièrement espacés de  $\frac{1}{2}\lambda_{3kHz} = 5.66cm$ , et de fonction de transfert  $M(p)$ . Les signaux issus de ces microphones sont ensuite traités par un filtre anti-repliement à capacités commutées, de fréquence de coupure égale à  $3kHz$  et de fonction de transfert  $AR(p)$ . L'utilisation de ce type de filtre permet de garantir que le filtrage effectué sur chacune des voies est totalement identique. Une fois les signaux filtrés, ceux-ci sont numérisés sur 16 bits par une carte d'acquisition d'Analog Devices équipée d'un DSP 21065L sur laquelle est implémentée la formation de voie. Celle-ci est réalisée par les filtres RIF de fonction de transfert  $FV_i(z)$  déterminés hors ligne par la résolution du problème d'optimisation (2), mais aussi par des filtres RII de fonction de transfert  $G(z)$  prenant en charge le filtrage permettant de ne retenir que la bande de fréquence d'intérêt (ici, la décade  $[300Hz; 3kHz]$ ).

#### 4.2 Description mathématique

Dans la suite, nous notons par  $x^*(t)$  le signal temporel associé au signal numérique  $x(k)$ . Les transformées de Fourier, aussi appelées *spectres* par abus de langage, des signaux  $x(t)$  et

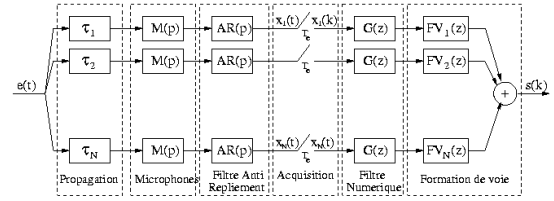


FIG. 3 – Chaîne d'acquisition

$x^*(t)$  sont respectivement notées  $X(f)$  et  $X^*(f)$ , avec  $X^*(f) = \frac{1}{T_e} \sum_m X(f - \frac{m}{T_e})$ . Avec ces notations, on peut montrer que le spectre  $S_\theta^*(f)$  du signal de sortie  $s_\theta^*(t)$  s'exprime par :

$$S_\theta^*(f) = \frac{1}{T_e} \sum_m S_\theta^\#(f - \frac{m}{T_e}), \quad \text{avec} \quad (3)$$

$$S_\theta^\#(f) = P_{\text{CHACQ}}(\theta, f) E(f), \quad \text{et} \quad (4)$$

$$P_{\text{CHACQ}}(\theta, f) = \sum_{i=1}^N FV_i(e^{j2\pi f T_e}) G(e^{j2\pi f T_e}) AR(f) M(f) e^{j2\pi f \tau_{\theta,i}}$$

où  $E(f)$  désigne le spectre du signal d'entrée. Comme cela était prévisible, il n'existe pas de fonction de transfert reliant le spectre continu du signal d'entrée au spectre numérique du signal de sortie. Pour autant, en comparant l'équation (3) avec (1) et sachant que  $FV_i(e^{j2\pi f T_e}) = \sum_{k=1}^K w_{i,k} e^{-j2\pi f (k-1)T_e}$ , nous avons :

$$P_{\text{CHACQ}}(\theta, f) = \frac{S_\theta^\#(f)}{E(f)} = P_{\text{FV}}(\theta, f) \quad (5)$$

avec  $a(f) = G(e^{j2\pi f T_e}) AR(f) M(f)$ . D'après (3), le résultat du problème d'optimisation (2) est donc replié et périodisé de façon à obtenir le spectre du signal de sortie  $S_\theta^*(f)$ . Il faut donc veiller à ce que ce repliement ne vienne pas modifier le comportement souhaité de l'antenne dans la bande des fréquences d'intérêt. Cela est rendu possible par un choix judicieux des caractéristiques des filtres  $AR(f)$  et  $G(z)$  qui vont permettre de contrer l'explosion numérique de la réponse d'antenne  $P_{\text{FV}}(\theta, f)$  hors du domaine contraint. L'étude détaillée de la chaîne d'acquisition a été effectuée dans [2], et nous a permis d'aboutir aux paramètres suivants :

- $AR(f)$  est un filtre passe-bas elliptique du 8<sup>ème</sup> ordre à capacités commutées possédant une fréquence de coupure  $f_c = 3kHz$  et un niveau d'atténuation de 82dB.
- La fréquence d'échantillonnage a été fixée à  $f_e = 24kHz$ .
- $G(z)$  est un filtre RII passe-bande elliptique, de bande passante comprise entre 300Hz et 3kHz, apportant une atténuation de 82dB dans la bande coupée.

#### 4.3 Résultats de localisation

Une fois la procédure d'optimisation effectuée pour chacune des directions d'écoute  $\theta$ , nous disposons d'une banque de coefficients de filtres numériques capable de polariser l'antenne selon une direction souhaitée. Une méthode de localisation simple et peu coûteuse en temps de calcul consiste alors à écouter successivement dans toutes les directions plausibles d'arrivée de l'onde sonore. Pour chacune de ces directions, la puissance

de sortie de la formation de voie est calculée sur une fenêtre temporelle notée  $T_{obs}$ , conduisant à la construction d'une carte d'énergie acoustique. Pour illustrer cette procédure de localisation, nous avons enregistré une voix masculine visible figure 4(a) sur un microphone de mauvaise qualité. La formation de voie classique est implémentée de manière numérique conduisant à une approximation de la réponse idéale 2(b) à l'origine des légères déformations constatées sur la figure 4(b).

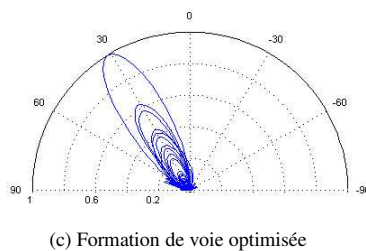
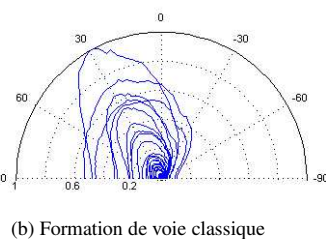
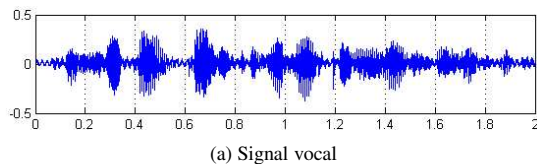


FIG. 4 – Carte d'énergie normalisée, calculée pour des formations de voie classique et optimisée, sur une succession de fenêtres temporelles (une courbe par fenêtre).

Les figures 4(b)-(c) montrent les cartes d'énergie calculées successivement sur chacune des fenêtres d'observation de durée  $T_{obs} = 1000T_e$ . Considérons dans un premier temps le résultat de la localisation obtenu à partir d'une formation de voie classique, présenté figure 4(b). Comme la puissance de la voix est principalement localisée dans les basses fréquences, seuls des lobes possédant une largeur importante apparaissent dans le résultat de la localisation. En effet, seules les composantes basses fréquences de la réponse de l'antenne sont sollicitées, conduisant à une directivité médiocre à l'origine d'une détérioration de la qualité de la localisation du locuteur. La figure 4(c) montre quant à elle que l'antenne optimisée possède de fait une meilleure résolution de localisation, indiquée par une largeur de lobe principal quasi-constante, conséquence directe du comportement amélioré de la réponse de l'antenne en basses fréquences suite à la procédure d'optimisation.

## 5 Conclusion

Nous avons présenté une méthode de synthèse d'une formation de voie large bande par optimisation convexe adaptée à la localisation de locuteur. Malgré une antenne de petite dimension, les filtres numériques RIF obtenus permettent de localiser efficacement une source basse fréquence tout en garantissant une exécution en temps réel de la formation de voie. L'implémentation de la méthode sur la plateforme robotique expérimentale est en cours. Nous prévoyons en parallèle de revenir sur le conditionnement du problème d'optimisation proposé. De cette façon, nous espérons pouvoir tenir compte de l'incertitude sur la phase des microphones ainsi que réaliser des optimisations tenant compte uniquement des caractéristiques en gain du diagramme d'antenne souhaité.

## Références

- [1] S. Argentieri, P. Danès, and P. Souères. Prototyping filter-sum beamformers for sound source localization in mobile robotics. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2005.
- [2] S. Argentieri, P. Danès, P. Souères, and P. Lacroix. An experimental testbed for sound source localization with mobile robots using optimized wideband beamformers. *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2005.
- [3] D. Bellot and P. Danès. An LMI solution to visual-based localization as the dual of visual servoing. In *42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 5420–5425, Maui, HI, 2003.
- [4] V. Cadenat, P. Souères, and M. Courdès. Using system redundancy to perform a sensor-based navigation task amidst obstacles. *International Journal of Robotics and Automation*, 16(2), 2001.
- [5] J.C. Chen, K. Yao, and R.E. Hudson. Source localization and beamforming. *IEEE Signal Processing Magazine*, March 2002.
- [6] L. Kopp. *Détection et estimation en traitement d'antenne : applications*. Techniques de l'ingénieur - TE5226, 2003.
- [7] H. Lebrecht and S. Boyd. Antenna array pattern synthesis via convex optimization. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(3) :526–532, March 1997.
- [8] J. Löfberg. *YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB*, 2004. <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>.
- [9] K. Nakadai, D. Matsuura, H.G. Okuno, and H. Kitano. Applying scattering theory to robot audition system : Robust sound source localization and extraction. In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2003.
- [10] D.P. Scholnik and J.O. Coleman. Formulating wideband array-pattern optimizations. In *IEEE International Symposium on Phased Array Systems and Technology*, 2000.
- [11] R.H. Tutuncu, K.C. Toh, and M.J. Todd. *SDPT3 - A MATLAB Software Package for Semidefinite-Quadratic-Linear Programming*. <http://www.math.nus.edu.sg/~mattohkc/sdpt3.html>.
- [12] J.M. Valin, F. Michaud, B. Hadjou, and J. Rouat. Localization of simultaneous moving sounds sources for mobile robot using a frequency-domain steered beamformer approach. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2004.
- [13] F. Wang, V. Balakrishnan, P. Zhou, J. Chen, R. Yang, and C. Frank. Optimal array pattern synthesis using semidefinite programming. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 51(5) :1172–1183, 2003.

# Détection sous optimale en contexte $\alpha$ -stable : performances et algorithmes

Steeve ZOZOR, Jean-Marc BROSSIER, Pierre-Olivier AMBLARD et Cédric DUCHÊNE

Laboratoire des Images et des signaux, CNRS UMR 5083

961 Rue de la Houille Blanche, B.P. 46, 38402 Grenoble Cedex, France

(steeve.zozor), (jean-marc.brossier), (bidou.amblard), (cedric.duchene)@lis.inpg.fr

**Résumé** – Nous nous intéressons à la détection d'un signal constant dans un bruit  $\alpha$ -stable symétrique à échantillons indépendants et identiquement distribué. Pour remédier au fait que le récepteur optimal ne peut pas être mis en œuvre du fait de l'absence de forme explicite de la densité de probabilité, nous proposons une forme sous optimale paramétrée qui inclut le détecteur optimal Gaussien et le détecteur localement optimal adapté à un bruit de Cauchy. Après avoir optimisé les paramètres de ce détecteur, optimisation facilitée par le choix du récepteur, nous comparons ses performances à celles des détecteurs plus classiques que sont le filtre adapté, le détecteur de Cauchy et le détecteur proposé par Brown : le récepteur proposé montre une plus grande robustesse à l'indice de stabilité du bruit, ainsi qu'à l'amplitude du signal.

**Abstract** – This paper focus on the detection problem of a constant signal corrupted by additive symmetrical  $\alpha$ -stable noise of samples independent identically distributed. The optimal detector cannot be implemented due to the non existence of a closed form for the probability density function of the noise. Hence, we propose the use of a suboptimal parametric detector which includes the matched filter, optimal in the Gaussian case, and the locally optimal detector of a Cauchy noise. We first optimize the parameters of the proposed detector. This optimization is easy due to the particular choice of the detector. Then, we compare the performance of the detector with classical detectors such as the matched filter, the Cauchy receiver and the receiver proposed by Brown: we show that the detector exhibits a higher robustness to the stability index and to the signal amplitude.

## 1 Introduction

Les lois  $\alpha$ -stables constituent un modèle classique de bruits impulsifs tels qu'il en existe dans beaucoup de phénomènes naturels (par exemple en turbulence) et artificiels (par exemple dans des données financières, trafic internet). Une variable  $\alpha$ -stable symétrique (notée S $\alpha$ S) se définit via sa fonction caractéristique :  $\Phi(u) = e^{-|\sigma u|^\alpha}$ , où  $\alpha \in ]0; 2]$  est l'indice de stabilité de la loi et  $\sigma > 0$  son paramètre d'échelle<sup>1</sup>. La densité de probabilité (d.d.p.) – transformée de Fourier de  $\Phi$  – de ces lois n'admet de forme explicite que dans les cas  $\alpha = 2$  (Gauss) et  $\alpha = 1$  (Cauchy)<sup>2</sup>.

Le problème de détection considéré ici consiste à choisir entre l'hypothèse bruit seul  $H_0$  et l'hypothèse  $H_1$  correspondant à l'observation d'un signal constant  $c$  bruité. L'observation se compose de  $T$  échantillons  $x_t$  :

$$\begin{cases} H_0 & : x_t = n_t \\ H_1 & : x_t = c + n_t \end{cases} \quad t = 0, \dots, T-1 \quad (1)$$

Les  $n_t$  sont des variables S $\alpha$ S indépendantes, identiquement distribuées (i.i.d.) de d.d.p. (resp. fonction caractéristique)  $f_n$  (resp.  $\Phi_n$ ) et  $c$  est le signal connu dont on cherche à détecter la présence.  $\sigma$  est également supposé connu et nous choisissons  $\sigma = 1$  sans perte de généralité. Les deux hypothèses sont supposées équiprobables.

Sous ces hypothèses, la solution optimale (probabilité d'erreur minimale (Pe min), Neyman-Pearson (probabilité de

détection maximale à probabilité de fausse alarme fixée), approche Bayésienne ou maximum *a posteriori*) s'écrit à l'aide du test de rapport de vraisemblance [2] :

$$\Lambda_{\text{opt}} = \sum_{t=0}^{T-1} (\log(f_n(x_t - c)) - \log(f_n(x_t))) \geq \eta$$

Si  $\Lambda_{\text{opt}}$  dépasse le seuil  $\eta$ , on décide  $H_1$  sinon  $H_0$ . Pour mettre en pratique ce test, il faut connaître  $c$  ainsi que la d.d.p.  $f_n$ . Dans le cas  $\alpha$ -stable, seule une méthode d'approximation numérique coûteuse peut être envisagée. La question pratique est alors celle de trouver des récepteurs sous-optimaux de mise en œuvre économique aux performances aussi proches que possible de l'*optimum*. Une solution couramment envisagée est celle du récepteur localement optimal (LO) [2] performant pour un signal "faible", ce qui donne dans le cadre de (1) :

$$\Lambda_{\text{lo}} = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{-f'_n}{f_n}(x_t) \geq \eta$$

Ce détecteur fait apparaître la fonction score  $-f'_n/f_n$  ( $f'_n$  est la dérivée de  $f_n$ ). Dans le cas  $\alpha$ -stable, le récepteur LO est aussi complexe que l'*optimum* lui-même. Une solution est d'explorer d'autres formes de récepteur sous-optimaux.

## 2 Famille de récepteurs sous-optimaux

La solution que nous proposons utilise un récepteur sous optimal de la forme :

$$\Lambda_g = \sum_{t=0}^{T-1} g(x_t) \quad \text{avec} \quad g(x) = \frac{\lambda x}{1 + \beta x^2} \quad (2)$$

<sup>1</sup>La fonction caractéristique dépend en général d'un paramètre de centralité et d'un facteur de dissymétrie [1], tout deux nuls ici

<sup>2</sup>Pour les lois asymétriques, il existe aussi la loi de Lévy (ou Pearson) obtenue pour  $\alpha = 0.5$  [1]

$g$  est une fonction dérivable, paramétrée, proche du récepteur LO, qui capture deux caractéristiques essentielles d'une loi  $\alpha$ -stable :  $g_{lo}(x) = \frac{-f'_n}{f_n}(x)$  est linéaire autour de 0 et  $g_{lo}(x) \sim \frac{\alpha+1}{x}$  en  $x \rightarrow \pm \infty$ .

La structure du détecteur étant fixée, l'objectif est alors d'optimiser les paramètres  $\lambda$  et  $\beta$  afin de maximiser les performances pour ensuite rapporter les résultats à ceux que produit le récepteur optimal. Contrairement aux récepteurs proposés dans [3, 4, 5, 6], la forme (2) englobe le filtre adapté ( $\beta = 0$ ) et le récepteur LO de Cauchy ( $\beta = 1$ ).

### 3 Optimisation

Le type de critère envisagé est soit géométrique (ajustement du maximum de  $g$  sur celui de  $g_{LO}$ , distance euclidienne minimale entre  $g$  et  $g_{LO}$ ), soit statistique (Erreur Quadratique Moyenne (EQM)  $E[(g_{LO}(X) - g(X))^2]$  minimale), soit un critère de détection (efficacité, probabilité d'erreur minimum (Pe min)).

Nous optimisons maintenant les paramètres pour ces critères pour ensuite analyser l'évolution des paramètres optimaux et les performances atteintes en fonction de  $\alpha$  et de l'amplitude du signal à détecter.

**Position du max. :** Notons  $g_{xlo}$  le maximum de  $g_{lo}$ , atteint pour  $x = x_{lo}$ . Ce critère, inspiré de [4, 5], conduit à

$$\begin{cases} \lambda_{xlo} &= 2\beta_{xlo}^{\frac{1}{2}} g_{xlo} \\ \beta_{xlo} &= \frac{1}{x_{lo}^2} \end{cases} \quad (3)$$

Il est donc nécessaire de déterminer numériquement la position du maximum de la fonction score (la valeur du maximum est inutile, voir plus loin). Néanmoins, dans la mesure où  $\beta_{xlo}$  ne dépend que de  $\alpha$ , ce paramètre peut être déterminé une fois pour toute et être tabulé en fonction de  $\alpha$ . Notons également que dans [4, 5] Brown propose l'approximation  $x_{lo} = 2.73\alpha - 1.75$  précise pour  $\alpha \in [1, 1.8]$ . Le  $\beta$  optimal est représenté en fonction de  $\alpha$  en figure 1.

**Distance  $L_2$  :** On cherche à minimiser  $L = \int_{\mathbb{R}} (g_{lo}(x) - g(x))^2 dx$ . Résoudre  $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$  permet de déterminer le  $\lambda$  optimum, fonction explicite de  $\beta$ . Puis on cherche à résoudre  $\frac{\partial L}{\partial \beta} = 0$  pour obtenir le  $\beta$  optimal noté  $\beta_{L_2}$ . On remplace  $\lambda$  par son expression optimale dans la seconde équation pour obtenir alors  $\beta_{L_2}$ , implicitement donné par

$$F_{L_2}(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{(\beta x^3 - 3x) f'_\alpha(x)}{(1 + \beta x^2)^2 f_\alpha(x)} dx = 0 \quad (4)$$

Ce  $\beta$  optimal est issu d'une optimisation de type gradient, néanmoins il est nécessaire de connaître la fonction score pour cette optimisation. Toutefois, comme  $\beta_{L_2}$  ne dépend pas du signal, ce paramètre pourra être tabulé suivant  $\alpha$ . La figure 1 représente une estimation numérique de  $\beta_{L_2}$  optimal en fonction de  $\alpha$ .

**EQM :** Comme dans le cas précédent, la minimisation de  $M = E[(g_{lo}(X) - g(X))^2]$  conduit à un  $\lambda$  optimal fonction explicite de  $\beta$ .  $\beta$  optimal, noté  $\beta_{eqm}$ , est solution d'une équation implicite. Mais contrairement au critère  $L_2$ , l'équation donnant  $\beta_{eqm}$  fait apparaître des intégrales en forme de produit scalaire  $\int_{\mathbb{R}} h(x) f_n(x) dx$ . Ces produits scalaires peuvent s'exprimer dans l'espace de Fourier inverse,

faisant apparaître la fonction caractéristique du bruit au lieu de la d.d.p., le choix du récepteur permettant pour sa part d'écrire facilement ces produits scalaires en Fourier inverse. Quelques calculs fastidieux aboutissent finalement à l'expression

$$\begin{aligned} F_{mse}(\beta) &= \int_0^{+\infty} u e^{-u-\beta^{\frac{\alpha}{2}} u^\alpha} du \\ &\times \int_0^{+\infty} (u^2 - 5u + 3) e^{-u-\beta^{\frac{\alpha}{2}} u^\alpha} du \\ &- 2 \int_0^{+\infty} (u - 1) e^{-u-\beta^{\frac{\alpha}{2}} u^\alpha} du \\ &\times \int_0^{+\infty} (u^2 - 2u) e^{-u-\beta^{\frac{\alpha}{2}} u^\alpha} du \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Ce critère ne requiert que l'évaluation d'intégrales simples utilisant uniquement des fonctions connues explicitement. La figure 1 représente  $\beta_{eqm}$  (indépendant du signal) en fonction de  $\alpha$ .

**Pe min :** Pour le problème de détection présenté ici, la Pe min s'écrit en utilisant le fait que  $g(x_t)$  a une variance finie, et en supposant que le nombre d'observations  $T$  est assez grand pour considérer que  $\Lambda_g$  (cf. (2)) est Gaussien sous  $H_0$  (resp.  $H_1$ ), de moyenne  $E_0$  (resp.  $E_1$ ) et de variance  $\sigma_0^2$  (resp.  $\sigma_1^2$ ), en conséquence du théorème de la limite centrale. Son expression est alors donnée par

$$\begin{aligned} P_{e,m} &= \frac{1}{4} \operatorname{erfc} \left( \frac{E_1}{\sqrt{2}(\sigma_0 + \sigma_1)} \left( 1 + \frac{\sigma_1(\delta - 1)}{\sigma_1 - \sigma_0} \right) \right) \\ &+ \frac{1}{4} \operatorname{erfc} \left( \frac{E_1}{\sqrt{2}(\sigma_0 + \sigma_1)} \left( 1 - \frac{\sigma_0(\delta - 1)}{\sigma_1 - \sigma_0} \right) \right) \end{aligned} \quad (6)$$

avec

$$\delta = \left( 1 + 2 \frac{\sigma_1^2 - \sigma_0^2}{E_1^2} \log \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

La fonction  $\operatorname{erfc}$  est la fonction d'erreur complémentaire et les moyennes et variances sous chaque hypothèse sont données par  $E_1 = T\lambda \int_{\mathbb{R}} \frac{(x+c)f_n(x)dx}{1+\beta(x+c)^2}$  et  $\sigma_k^2 = T\lambda^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{(x+k.c)^2 f_n(x)dx}{(1+\beta(x+k.c)^2)^2} - E_k^2/T$ ,  $k = 0, 1$  ( $E_0 = 0$ ). Lorsque l'amplitude du signal est assez faible, on peut facilement montrer que cette Pe min est une fonction décroissante (i.e.  $\operatorname{erfc}$ ) de l'efficacité, qui est une approximation au premier ordre de la déflexion  $D = \frac{E_1^2}{\sigma_0^2} : E = \frac{(\int_{\mathbb{R}} g'(x) f_n(x) dx)^2}{\int_{\mathbb{R}} g^2(x) f_n(x) dx}$ . Si dans l'expression de l'EQM on remplace  $\lambda$  par son expression optimale, l'efficacité et l'EQM vérifient  $M = J - E$  avec  $J = \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{f'_n(x)}{f_n(x)} \right)^2 f_n(x) dx$  l'information de Fisher du bruit lié au centrage (moyenne si  $\alpha > 1$ ).  $J$  ne dépendant pas des paramètres, minimiser la Pe min équivaut à minimiser l'EQM (sous l'hypothèse de signal faible). Puisque  $\lambda$  disparaît de l'expression à optimiser (voir expression de la Pe min et de  $E_k$  et  $\sigma_k^2$ ), seul le  $\beta$  optimal doit être recherché pour la mise en œuvre<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Dans tous les cas de figures,  $\lambda$  n'influence pas la Pe min, même s'il intervient dans l'optimisation de la distance  $L_2$  et de l'EQM (voir (6)-(7) et les expressions des moyennes et variances). Ce paramètre peut être rejeté dans le seuil. Le problème sera de déterminer le seuil optimal.

En général, l'expression de  $P_e$  min est trop compliquée pour envisager une optimisation directe. On supposera alors que  $T$  est suffisamment grand pour simplifier son expression (en négligeant les infiniment petits) pour aboutir à

$$P_{e,m} \approx \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{E_1}{\sqrt{2}(\sigma_0 + \sigma_1)} \right) \quad (8)$$

La minimisation de la  $P_e$  asymptotique minimale équivaut à la maximisation de l'argument de la fonction  $\operatorname{erfc}$ . La fonction à annuler pour obtenir le paramètre optimal,  $\beta_{\text{Pemin}}$ , n'est pas donnée ici. Mais comme pour l'EQM, il s'agit de d'annuler la dérivée de la  $P_e$  min (8) en  $\beta$ , puis d'exprimer les  $E_k$  et  $\sigma_k^2$  dans l'espace de Fourier inverse : le paramètre optimal,  $\beta_{\text{Pemin}}$ , est solution d'une équation implicite décrite via des intégrales de fonction connues explicitement. On peut montrer alors que  $\beta_{\text{Pemin}}$  optimal est maintenant fonction de  $\alpha$  et du signal  $c$  à détecter (voir expression de  $E_1$  et  $\sigma_k$ ). La figure 1 illustre le comportement de  $\beta_{\text{Pemin}}$  en fonction de  $\alpha$  pour plusieurs valeurs de  $c$  et la figure 2 donne  $\beta_{\text{Pemin}}$  en fonction de  $\alpha$  et  $c$ .

Dans les cas distance  $L_2$ , EQM et  $P_e$  min, le paramètre optimum est solution d'une équation implicite : la solution est recherchée par une méthode de type gradient. Nous avons choisi l'algorithme de Newton-Raphson qui, expérimentalement, exhibe une convergence rapide. Enfin, dans le cas de l'EQM et  $P_e$  min, étant donné la forme des intégrales à évaluer, nous utilisons une méthode de type quadrature de Gauss (Gauss-Laguerre [7]) : expérimentalement cette méthode se montre très précise et à l'avantage d'être rapide : plutôt que de tabuler  $\beta$ , une optimisation en ligne peut être envisagée.

La section suivante analyse le comportement des  $\beta$  optimaux en fonction de  $\alpha$ .

## 4 Paramètres optimaux et performances de $\Lambda_g$

Les figures 1 et 2 représentent les  $\beta$  optimaux pour les différents critères :

- Pour  $\alpha = 2$ , quelque soit l'amplitude du signal, les critères conduisent tous au filtre adapté ( $\beta = 0$ , solution optimale en Gaussien).
- Les critères position,  $L_2$  et EQM donnent des  $\beta$  optimaux voisins pour  $\alpha \leq 1$ . Quand  $\alpha$  tend vers 2, la distance  $L_2$  tend à donner un  $\beta$  très différents des autres critères. Ceci semble lié au caractère spécial de  $f'_n/f_n$  en  $\alpha = 2$  (transition d'un comportement asymptotique en  $1/x$  à un comportement linéaire). La fonction score n'apparaît pas pour l'EQM ou la  $P_e$  minimale, les solutions correspondantes ne semblent pas présenter cette particularité.
- Quand  $c$  croît, le critère de la  $P_e$  minimale donne des  $\beta$  de plus en plus petits :  $P_e$  est de moins en moins liée à l'EQM et le LO est de plus en plus éloignée du récepteur optimal. En particulier, pour  $\alpha = 1$ , ce critère ne donne pas  $\beta = 1$ . Tout se passe comme si le récepteur tendait à réaliser le filtre adapté pour les observations dans une gamme d'échelle plus importante à mesure que  $c$  est grand ( $g$  est approximativement linéaire dans une gamme d'entrée de plus en plus importante à mesure que  $\beta$  décroît).

- Lorsque  $\alpha$  tend vers 0,  $\beta$  diverge. Ce cas dégénéré correspond à un bruit déterministe, nul sous notre hypothèse de symétrie. On tend à comparer  $x_t$  à 0 ( $g \sim \delta_{x,0}$ ) et sommer ces comparaisons.

Les performances du détecteur proposé, du filtre adapté, du détecteur optimal de Cauchy, et du détecteur de Brown (linéaire sur  $[-x_{10}, x_{10}]$  et égal à  $\frac{\alpha+1}{x}$  sinon) sont illustrées sur les figures 3, 4, et 5, comparées avec les performances optimales. La  $P_e$  min est calculée en utilisant l'hypothèse gaussienne pour le récepteur proposé, le récepteur optimal, de Cauchy et de Brown (théorème de la limite centrale). Pour le filtre adapté, on utilise la propriété de stabilité des SaS pour en déduire que le filtre adapté est non plus asymptotiquement gaussien mais  $\alpha$ -stable de même indice  $\alpha$  que le bruit [1]. La probabilité d'erreur minimale est alors donnée par  $P_{e,m} = F_n(-\frac{c}{2} T^{\frac{\alpha-1}{\alpha}})$  (où  $F_n$  est la fonction de répartition du bruit). La d.d.p. n'est pas requise pour évaluer la  $P_e$  minimale du récepteur  $\Lambda_g$ , elle est par contre nécessaire au calcul des performances optimales, du récepteur de Cauchy et de Brown tandis que la fonction de répartition du bruit intervient dans les performances du filtre adapté. La comparaison des performances aux performances optimales donne lieu aux conclusions suivantes :

- Pour  $\alpha = 2$ , quelque soit l'amplitude du signal, les critères conduisent tous au filtre adapté ( $\beta = 0$ , solution optimale en Gaussien).
- Pour un signal faible, la notion de "faible" dépendant clairement de  $\alpha$ , les performances des récepteurs sont similaires, sauf celles du récepteur de Cauchy et du filtre adapté. Ces deux derniers récepteurs s'avèrent peu robustes quand  $\alpha$  s'écarte respectivement de 1 et 2.
- Pour un signal fort et  $\alpha$  loin de 2, le critère de  $P_e$  min est meilleur que les autres (dont les performances se dégradent lorsque l'amplitude du signal grandit, d'autant plus que  $\alpha$  est petit). Le filtre adapté reste non robuste en  $\alpha$ , tandis que le récepteur de Cauchy s'avère de plus en plus robuste à mesure que le signal devient grand.

## 5 Discussion

Le détecteur proposé montre une certaine robustesse vis-à-vis de l'indice de stabilité  $\alpha$  et du signal  $c$ , en particulier pour les critères d'optimisation basés sur des considérations de détection (surtout  $P_e$  min). Pour l'optimisation du paramètre, les intégrations numériques entrant en jeu se font une fois pour toute et non pas à chaque échantillon du signal observé comme ce serait le cas pour la log-vraisemblance. On peut donc tabuler  $\beta$  optimal, en fonction de  $\alpha$  (et  $c$ ). Le choix de la forme du récepteur, essentiellement dictée par des considérations sur les lois  $\alpha$ -stable, permet *a posteriori* de faciliter l'optimisation. Dans le cas où  $\alpha$  serait inconnu, on peut envisager l'estimation de  $\alpha$  et d'utiliser la table établie, mais aussi de faire l'optimisation en ligne avec l'estimation de  $\alpha$ . De même, si l'on considère le problème de détection d'un signal non constant  $s_t$ , seul le critère  $P_e$  min est à revoir. Dans ce cas, on peut considérer le  $\beta$  optimal obtenu pour une constante,  $\beta_{\text{Pemin}}(\alpha, c)$  et le remplacer par  $\beta_{\text{Pemin}}(\alpha, s_t)$  : dans ce cas encore on peut envisager une optimisation temps réel.

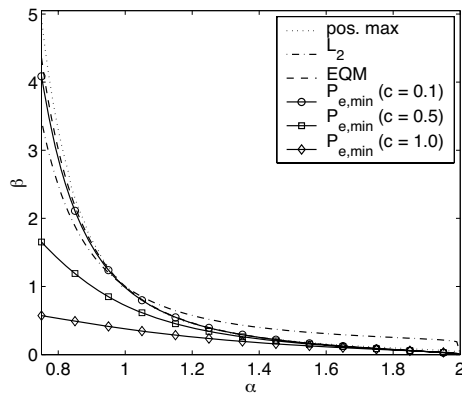


FIG. 1 – Comportement du  $\beta$  optimal pour le détecteur (2) en fonction de  $\alpha$  et pour les différents critères.

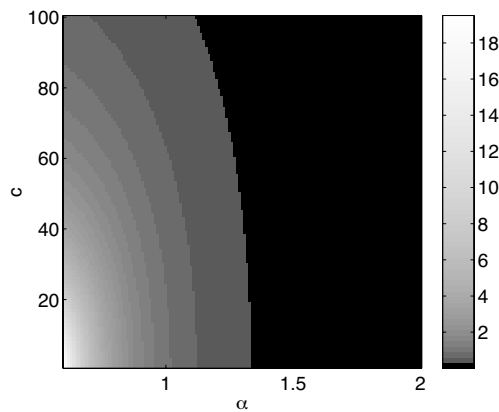


FIG. 2 –  $\beta$  optimal pour le critère  $P_e$  min, en fonction de  $\alpha$  et du signal  $c$  à détecter.

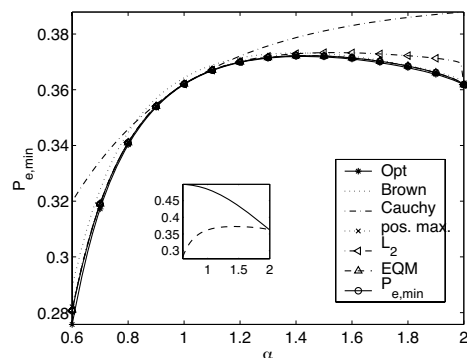


FIG. 3 – Probabilité d'erreur minimale pour le détecteur (2), fonction de  $\alpha$  et pour les différents critères. Comparaison avec les performances des récepteurs optimal, de Cauchy et proposé par Brown. En insert : performances du filtre adapté (trait plein) et du critère EQM (tirets).  $T = 100$  et  $c = 0.1$ .

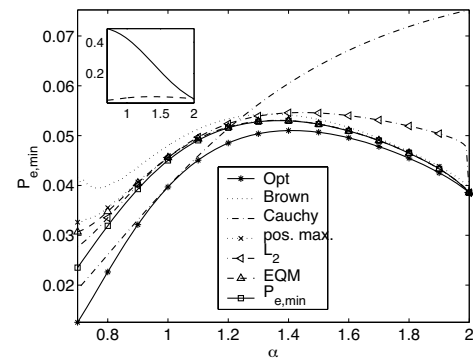


FIG. 4 – Comme la figure 3, pour  $c = 0.5$ .

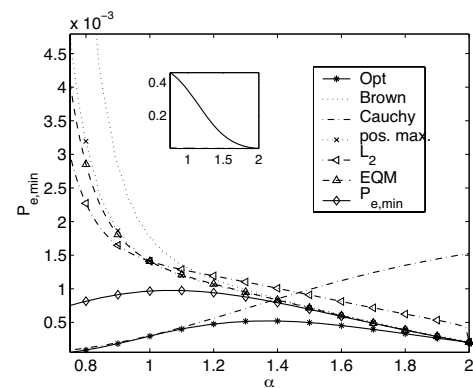


FIG. 5 – Comme la figure 3, pour  $c = 1$ .

## Références

- [1] G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes. Stochastic Models with infinite Variance*. New-York : Chapman & Hall, 1994.
- [2] S. M. Kay, *Fundamentals for Statistical Signal Processing : Detection Theory*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall, 1998.
- [3] G. A. Tsihrintzis and C. L. Nikias, "Performance of optimum and suboptimum receivers in the presence of impulsive noise modeled as an alpha-stable process," *IEEE Trans. on Com.*, vol. 43, pp. 904–914, February/March/April 1995.
- [4] C. L. Brown and A. M. Zoubir, "A nonparametric approach to signal detection in impulsive interference," *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, vol. 48, pp. 2665–2669, September 2000.
- [5] C. L. Brown, "Score functions for locally suboptimum and locally suboptimum rank detection in alpha-stable interference," in *Proc. of the 11th Sig. Proc. workshop on Stat. Sig. Proc.*, (Singapore), pp. 58–61, August 2001.
- [6] A. Ambike, J. Ilow, and D. Hatzinakos, "Detection for binary transmission in a mixture of Gaussian noise and impulsive noise modeled as an alpha-stable process," *IEEE Sig. Proc. Let.*, vol. 1, pp. 55–57, March 1994.
- [7] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. 9th printing, New-York : Dover, 1970.



# Approche *a contrario* pour la détection de changements à partir d'images satellite basse résolution

Amandine ROBIN<sup>1,2</sup>, Lionel MOISAN<sup>1</sup>, Sylvie LE HEGARAT-MASCLE<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire MAP5, Université Paris-Descartes,  
45, rue des Saints-Pères 75006 Paris, France

<sup>2</sup>Laboratoire CETP, Institut Pierre Simon Laplace  
10-12, avenue de l'Europe, 78 140 Vélizy, France  
{robin,moisan}@math-info.univ-paris5.fr, mascle@cetp.ipsl.fr

**Résumé** – Nous considérons le problème du suivi de végétation et de la détection de changements à partir de séquences d'images satellite présentant une forte répétitivité temporelle mais une faible résolution spatiale. Nous dérivons un critère probabiliste *a contrario* mesurant la cohérence entre la séquence d'images "basse résolution" et un état antérieur de référence (classification). La mesure ainsi obtenue est au cœur d'un algorithme stochastique qui sélectionne automatiquement les zones contenant les changements apparus au cours de la période étudiée. Le principe de cette approche est validé d'un point de vue théorique : nous montrons que tout changement, aussi local soit-il, peut être détecté pour peu que le niveau de *contraste* de l'image soit suffisamment élevé. Enfin, nous présentons des expériences sur données simulées, qui affichent des performances prometteuses en vue d'une future application à des données réelles.

**Abstract** – In this study, we focus on the problem of vegetation monitoring and change detection from remote sensing data. Multitemporal information required by such an application is provided by coarse resolution series presenting high time-repetitiveness. We derive a probabilistic *a contrario* criterion analyzing the coherence between a coarse resolution image time series and a previous knowledge of the land-cover state (through a classification). The measure obtained is the core of a stochastic algorithm that selects automatically the regions with the most likely changes. The principle of this approach is validated from a theoretical viewpoint, since we prove that even very local changes may be detected, provided that the image *contrast* level is high enough. We conclude by showing promising experiments on simulated data.

## 1 Introduction

Les méthodes automatiques de détection de changements en imagerie satellitaire font l'objet d'un intérêt croissant, notamment en raison des nombreuses applications liées à l'analyse de la surface terrestre ou de l'environnement (suivi de la végétation, mise à jour de cartographies, gestion des risques, etc). Les satellites permettant le suivi des zones d'intérêt présentent généralement soit une forte résolution spatiale, soit une forte résolution temporelle, mais ces deux qualités sont incompatibles, puisque le délai entre deux acquisitions d'une même zone (qui dépend de l'orbitographie du satellite) est, en première approximation, inversement proportionnel à la largeur de sa trace sur la surface terrestre.

La plupart des méthodes existantes (voir [1, 2] par exemple) sont adaptées à des données haute résolution spatiale (h.r.), typiquement Landsat/TM ou Spot/HRV (pixel de largeur inférieure à 30 m). Elles ne sont donc valables que pour des applications nécessitant très peu d'images par an. Dans le cas du suivi de la végétation, l'évolution temporelle étant l'un des critères des plus discriminants, l'exploitation conjointe de données haute et basse résolution devient nécessaire.

Les premières méthodes de détection de changements à basse résolution (b.r.), c'est-à-dire pour une largeur de pixel allant de 300 m pour les images Meris à 1 km pour les images Spot/VGT ou NOAA/AVHRR, ont été adaptées de méthodes haute résolution (h.r.) [3, 4]. Des travaux plus récents [5] parviennent à

détecter des changements de taille inférieure à celle du pixel b.r. en utilisant des informations *a priori* sur l'état précédent pour contraindre une approche de type *Expectation Maximization* (EM). Ces dernières méthodes atteignent leurs limites dès que le changement considéré concerne une surface de taille inférieure à un certain pourcentage du pixel b.r. et lorsque le nombre de pixels affectés par des changements dépasse une certaine proportion de l'image.

La méthode que nous proposons ici est entièrement automatique et vise à extraire d'une image b.r. le sous-domaine le plus cohérent avec une classification h.r. donnée (les pixels de changement correspondent alors au domaine complémentaire). À partir d'une classification h.r. correspondant à la date  $t_0$  et d'une séquence d'images b.r. de la même région acquise ultérieurement, nous proposons de déterminer dans quel sous-domaine spatial cette classification est encore correcte à un temps  $t > t_0$  donné. Pour chaque sous-domaine de l'image b.r., nous mesurons la cohérence entre la classification h.r. et la séquence b.r. observée par le degré de contradiction qu'elle implique sur un modèle naïf très simple. Cette méthode, inspirée de la modélisation *a contrario* introduite en analyse d'images dans [6], permet ainsi de calculer un niveau de significativité sans avoir à quantifier les écarts attendus (bruit, distortions, variabilité intrinsèque, etc.) entre la classification h.r. initiale et les observations b.r. ultérieures.

Dans la section 2, nous commençons par préciser le système de formation des images (lien avec les caractéristiques du sol,

changement de résolution), avant de dériver une expression explicite du critère de détection *a contrario* (nombre de fausses alarmes) et de discuter ses performances théoriques. Dans la section 3, nous décrivons un algorithme stochastique associé à ce critère, avant de commenter les résultats obtenus sur des données simulées (section 4).

## 2 Modèle de détection

### 2.1 Modèle d'image

Supposons que les données suivantes sont disponibles :

- une classification h.r.  $C$  de la région d'intérêt à la date  $t_0$ . Cette classification associe un label  $l$  à chaque pixel du domaine h.r., où  $l \in L$  et  $L$  représente l'ensemble des types d'occupation du sol possibles.

- une séquence d'images b.r. de la même zone, acquises à des dates ultérieures à  $t_0$ . Par la suite, on considère le cas d'une séquence b.r. réduite à une image unique, notée  $v$ , mais la généralisation au cas multi-temporel est immédiate en considérant un vecteur d'images.

Pour commencer, on modélise l'image b.r. en fonction de l'information spatiale haute résolution et des caractéristiques des classes (intensité moyenne). Supposons que chaque pixel h.r. représente une surface dont le type d'occupation est décrit par un label unique (classe *pure*). La valeur moyenne d'un pixel b.r. correspond alors à la somme des moyennes caractéristiques de chaque type d'occupation du sol, pondérée par leur taux d'occupation au sein du pixel. Soit  $y$  un pixel appartenant au domaine b.r.  $\Omega$  et  $\alpha_l(y)$  la surface relative occupée par le label  $l$  dans le pixel  $y$  (par construction,  $\sum_{l \in L} \alpha_l(y) = 1$ ). En notant  $e = (e_l)_{l \in L}$ , l'intensité moyenne caractéristique de chaque label, une estimation de l'intensité en un pixel b.r.  $y$  est donnée par

$$\hat{v}(y) = \sum_{l \in L} \alpha_l(y) e_l. \quad (1)$$

Cette hypothèse est bien connue sous le nom de *modèle linéaire de mélange* et largement utilisée en télédétection [7, 8].

### 2.2 Détection *a contrario*

La différence entre l'image estimée ( $\hat{v}$ ) par (1) et observée ( $v$ ) sur un sous-domaine  $\omega$  de  $\Omega$  peut être mesurée, en norme  $L^2$ , par

$$E(\omega, e) = \sum_{y \in \omega} (v(y) - \hat{v}(y))^2. \quad (2)$$

Dans notre problème, on suppose la famille  $(e)$  des moyennes caractéristiques des classes inconnue et l'on cherche l'erreur minimale

$$\bar{E}(\omega) = \min_e E(\omega, e). \quad (3)$$

Cette formulation est couramment utilisée comme schéma de régression pour l'estimation de paramètres. Dans l'objectif de décider de l'apparition de changements dans un domaine  $\omega$ , la principale difficulté est la définition d'un seuil *a priori* sur  $\bar{E}(\omega)$ . De plus, pour caractériser le domaine le plus inchangé  $\omega$ , il est nécessaire de normaliser la valeur de l'erreur en fonction de la taille du domaine considéré. La modélisation *a contrario* offre un moyen d'accomplir ces deux tâches, en formalisant

la détection d'une structure donnée comme un événement très improbable par rapport à une hypothèse naïve sur les données :

**$H_0$  :** *Le modèle naïf pour l'image basse résolution est un processus aléatoire de variables aléatoires gaussiennes i.i.d.  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  où  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma > 0$  sont fixés.*

Dans l'esprit de [6], nous pouvons alors définir le *nombre de fausses alarmes* ( $NFA$ ) associé au sous-domaine  $\omega \subset \Omega$  par

$$NFA(\omega, \delta, \sigma, \mu) = \mathbb{P}[\bar{E}(\omega) \leq \delta \mid H_0]. \quad (4)$$

Le terme  $\mathbb{P}[\bar{E}(\omega) \leq \delta \mid H_0]$  représente la probabilité, pour le domaine  $\omega$ , d'obtenir une erreur quadratique particulièrement faible dans une image b.r. aléatoire. Les  $\eta(\omega, \Omega)$  sont des coefficients de pondération vérifiant  $\sum_{\omega \subset \Omega} \eta(\omega, \Omega)^{-1} \leq 1$ . Ils permettent de répartir le nombre de fausses alarmes attendu sur l'ensemble des sous-domaines  $\omega \subset \Omega$ .

**Définition 1 (et théorème)** *Un sous-domaine  $\omega \subset \Omega$  est dit  $\varepsilon$ -significatif si*

$$NFA(\omega, \bar{E}(\omega), \sigma, \mu) \leq \varepsilon. \quad (5)$$

*L'espérance du nombre de domaines  $\varepsilon$ -significatifs sous l'hypothèse  $H_0$  est inférieure ou égale à  $\varepsilon$ .*

Plus le  $NFA$  est faible, plus le domaine  $\omega$  est cohérent avec le modèle de l'image. Classiquement, on choisit  $\varepsilon = 1$  pour garantir, en moyenne, au plus une fausse détection.

Le choix le plus simple pour  $\eta(\omega, \Omega)$  est  $\eta(\omega, \Omega) = 2^{|\Omega|}$ , ce qui répartit le risque de fausse détection uniformément sur tous les sous-domaines, mais rend du même coup très improbable la détection par hasard de domaines très petits ( $|\omega| \ll |\Omega|$ ) ou très grands ( $|\omega| \approx |\Omega|$ ). Pour comparer équitablement des domaines de taille différente, il est plus judicieux de répartir le risque par taille, en prenant

$$\eta(\omega, \Omega) = |\Omega| \binom{|\Omega|}{|\omega|}. \quad (6)$$

Avec l'hypothèse *a contrario* donnée par  $H_0$ , le  $NFA$  peut être calculé explicitement :

**Théorème 1** *Soit  $P(a, x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt$ , alors*

$$NFA(\omega, \delta, \sigma, \mu) = \eta(\omega, \Omega) \cdot P\left(\frac{|\omega| - |\Omega|}{2}, \frac{\delta}{2\sigma^2}\right). \quad (7)$$

Avec cette nouvelle mesure, on peut maintenant sélectionner le domaine  $\omega$  le plus *cohérent* avec la classification initiale, en tant que domaine  $\omega$  minimisant  $NFA(\omega, \bar{E}(\omega), \sigma, \mu)$ . Remarquons que le nombre de fausses alarmes obtenu est en fait indépendant du choix de  $\mu$  (nous omettrons donc désormais le dernier argument de la fonction  $NFA$ ). En pratique, la variance  $\sigma^2$  du modèle naïf ( $H_0$ ) est fixée égale à la variance empirique de l'image b.r. analysée de façon à garantir l'absence de toute détection dans une image de bruit blanc.

### 2.3 Performances attendues

Le modèle de détection étant maintenant établi, nous proposons ici d'évaluer ses performances théoriques dans le cas du modèle simple pour l'image observée  $v = \hat{v} + b$ , où  $\hat{v}$  représente l'image idéale décrite par (1) et  $b$  un processus de variables

aléatoires gaussiennes i.i.d.  $\mathcal{N}(0, \sigma_b^2)$  modélisant la variabilité intra-classe. Sous cette hypothèse, la variance de  $v$  s'écrit

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + \sigma_b^2, \quad (8)$$

où  $\sigma_0^2$  représente la variance empirique de  $\hat{v}$  (variance inter-classe). Le résidu moyen vaut alors

$$\bar{\delta} = \mathbb{E}[\bar{E}(\omega)] = |\omega| \sigma_b^2,$$

et l'on peut estimer la performance moyenne de la méthode (seuil de détectabilité) grâce à

$$NFA(\omega, \bar{\delta}, \sigma) = |\Omega| \binom{|\Omega|}{|\omega|} \cdot P\left(\frac{|\omega| - |L|}{2}, \frac{|\omega|}{2(\frac{\sigma_0}{\sigma_b})^2 + 2}\right). \quad (9)$$

Ce nombre de fausses alarmes typique dépend de la taille de  $\omega$  et du rapport  $c = \frac{\sigma_0}{\sigma_b}$ , appelé *contraste*. L'étude de ses variations en fonction du contraste et de la taille des domaines  $|\Omega|$  et  $|\omega|$  conduit aux propriétés suivantes :

- le *NFA* typique étant une fonction décroissante du *contraste* de l'image, plus la valeur du contraste est élevée, plus le domaine  $\omega$  est détectable ;
- pour un domaine  $\Omega$  de taille fixée, tout sous-domaine  $\omega$  peut être détecté dès que le contraste  $c$  est suffisamment fort ;
- pour un niveau de contraste  $c > 0$  fixé, il existe une proportion critique  $p(c) \in [0, 1[$  telle que tout sous-domaine  $\omega$  de taille  $|\omega| > p(c)|\Omega|$  peut être détecté dès que le domaine  $\Omega$  est suffisamment grand.

### 3 Algorithme

L'algorithme suivant prend en entrée une classification h.r. et une image b.r. de la même scène, et retourne une estimation du sous-domaine  $\omega$  le plus cohérent avec la classification (i.e. de *NFA* minimal). Etant donné la taille des images considérées, une exploration des  $2^{|\Omega|}$  sous-domaines n'est pas envisageable. On utilise par conséquent une stratégie de type *Random Sample Consensus* [9], comme dans [10].

```

affecter à  $\sigma^2$  la variance de l'image b.r.
initialiser  $\delta_{min}[]$  et  $NFA_{min} \leftarrow +\infty$ 
répéter  $N$  fois
  tirer aléatoirement un ensemble  $I$  de  $|L|$  pixels de  $\Omega$ 
  calculer  $e$  en résolvant (1) pour  $y \in I$  (matrice carrée)
  calculer  $r(y) = (\hat{v}(y) - v(y))^2$  pour  $y \in \Omega$  en utilisant (1)
  trier  $\Omega$  en  $(y_i)_{1 \leq i \leq |\Omega|}$  par  $r(y_i)$  croissants
  poser  $\delta = 0$ 
  pour  $k = |L| + 1$  à  $k = |\Omega|$ 
    poser  $\delta = \delta + r(y_k)$ 
    si  $\delta < \delta_{min}[k]$  alors
      mettre à jour  $\delta_{min}[k]$ 
      si  $NFA(k, \delta, \sigma) < NFA_{min}$  alors
        mettre à jour  $NFA_{min}$  et poser  $\omega = \{y_i\}_{i=1..k}$ 
  fin
fin
fin

```

Le seul paramètre de l'algorithme est le nombre total d'itérations  $N$ . Pour les expériences présentées section 4, une bonne convergence de l'algorithme a été obtenue pour  $N = 10000$ .

## 4 Résultats

Dans cette section, une illustration de la méthode est présentée pour des images simulées à l'échelle Spot/HRV pour la h.r. (pixel de largeur 20 m) et, pour la b.r., à l'échelle Meris (pixel de largeur 300 m). La classification utilisée (Fig. 1) a été simulée à partir d'un extrait de taille  $256 \times 256$  d'une image Spot/HRV de manière à présenter une géométrie réaliste pour la haute résolution. Elle résulte du tirage aléatoire d'un label  $l \in \{0, 1, \dots, 8\}$  pour chaque région de la segmentation, chaque label représentant une classe de la scène observée (par exemple  $l = 0$  pour le blé,  $l = 1$  pour l'avoine, etc), à laquelle on associe aléatoirement (et injectivement) une intensité moyenne  $e(l) \in \{0, 0.1, \dots, 0.8\}$ . L'image h.r. est ensuite simulée en ajoutant à l'image  $\hat{v}$  ainsi obtenue un bruit blanc de moyenne nulle et d'écart-type  $\sigma_b = 0.05$  pour modéliser la variabilité intra-classe. Deux types de changements sont ensuite simulés (Fig. 2.a) : une classe est scindée en deux classes d'intensités moyennes très proches (apparition d'une nouvelle parcelle), et un large disque recouvrant plusieurs parcelles est superposé à l'image (simulation d'une inondation ou d'un incendie par exemple). Pour finir, cette image h.r. a été moyennée par blocs pour produire l'image b.r. Fig. 2.b.

A partir de cette image b.r. et de la classification h.r. (Fig. 1), l'algorithme rejette 27 pixels ( $|\Omega| - |\omega| = 27$ ), représentés en noir Fig. 2c. Les courbes blanches superposées aux domaines de changements correspondent à la trace des changements à h.r. et montrent la bonne correspondance entre les changements détectés et ceux réellement présents. On observe que les pixels b.r. ne contenant que des changements très partiels sont aussi détectés par l'algorithme. Notons aussi que le rejet de ces 27 pixels par une simple analyse de l'erreur quadratique, à la place du *NFA*, aurait été beaucoup plus délicat (cf. Fig. 3).



FIG. 1 – Classification h.r. (entrée du programme). Les classes sont numérotées de 0 à 8 comme indiqué sur la légende.

## 5 Conclusion

Nous avons proposé un modèle *a contrario* pour détecter des changements de types de couvert en comparant une image basse résolution à une classification haute résolution représen-

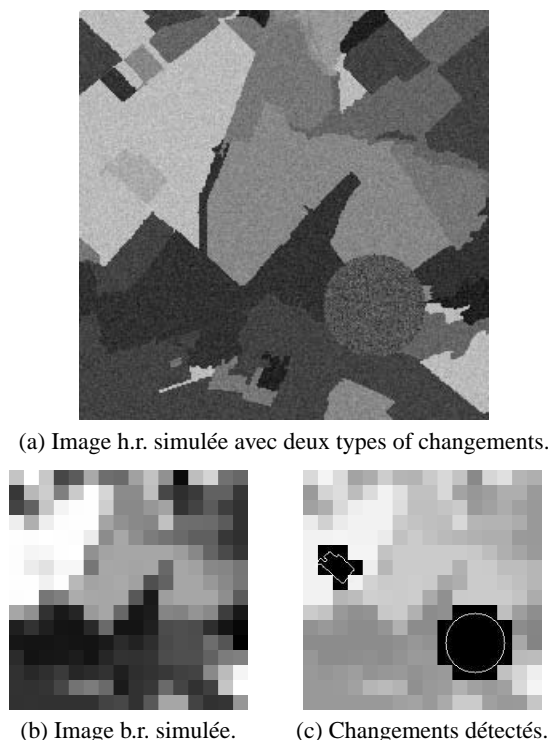


FIG. 2 – L'image b.r. (b) est obtenue par moyennage de l'image h.r. (a) sur des blocks de  $16 \times 16$  pixels. Les changements détectés (27 pixels) sont représentés en noir (c). Ils correspondent bien aux changements introduits à haute résolution (dont le contour est représentée en blanc, par superposition).

tant la même scène à une date antérieure. Ce modèle conduit à un algorithme stochastique (RANSAC) générique et complètement automatique, ne nécessitant aucune calibration préalable de paramètres en fonction du type de données observées. Il n'a pas encore été validé sur des données réelles, mais les résultats obtenus sur des données simulées réalistes sont très encourageants.

Les méthodes classiques sont généralement limitées à une faible proportion de changements dans l'image b.r. L'analyse théorique du modèle *a contrario* montre au contraire que quel que soit leur proportion, les changements dans l'image b.r. peuvent être détectés à condition que le *contraste* de l'image soit suffisamment fort. Les premières simulations ont montré que les changements étaient bien détectés même pour des images contenant 80% de changements.

Une étude spécifique ultérieure pourrait analyser la robustesse de la méthode proposée. Elle permettrait une comparaison quantitative avec d'autres méthodes de détection de changements dans le cadre d'applications réelles : suivi de coupes de sylviculture, rotation des cultures sur un site agricole, etc.

## Références

- [1] J.F. Mas, "Monitoring land-cover changes : a comparison of change detection techniques," *Int. J. Rem. Sens.*, vol. 20, no. 1, pp. 139–152, 1999.

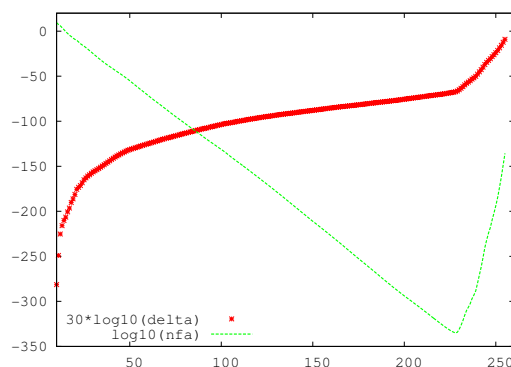


FIG. 3 – Les croix représentent, en fonction de  $k$ , l'erreur quadratique minimale obtenue sur tous les sous-domaines  $\omega$  de taille  $k$  (en échelle log). Les pointillés représentent la courbe du  $NFA$  correspondante. Alors que la courbe de l'erreur quadratique seule permettrait difficilement de détecter le 27 pixels de changements, la courbe de  $NFA$  atteint un minimum marqué quand  $k$  correspond au domaine valide  $\omega$ .

- [2] L. Bruzzone and D.F. Prieto, "An adaptive semiparametric and context-based approach to unsupervised change detection in multitemporal remote-sensing images," *IEEE Trans. Geo. Rem. Sens.*, vol. 11, no. 4, pp. 452–466, 2002.
- [3] E. Lambin and A. Stralher, "Change vector analysis in multitemporal space : a tool to detect and categorize land-cover change processes using high temporal-resolution satellite data," *Rem. Sens. Environment*, vol. 48, pp. 231–244, 1994.
- [4] A. Nielsen, K. Conradsen, and J. Simpson, "Multivariate alteration detection (mad) and maf postprocessing in multispectral, bitemporal image data : New approaches to change detection studies, remote sensing of environment," *Rem. Sens. of Environment*, vol. 64, pp. 1–19, 1998.
- [5] S. Le Hégarat, C. Ottlé, and C. Guérin, "Land cover change detection at coarse spatial scales based on iterative estimation and previous state information," *Rem. Sens. of Environment*, vol. 95, no. 4, pp. 464–479, 2005.
- [6] A. Desolneux, L. Moisan, and J.M. Morel, "Meaningful alignments," *Int. J. Comp. Vision*, vol. 40, no. 1, pp. 7–23, 2000.
- [7] R. Faivre and A. Fischer, "Predicting crop reflectances using satellite data observing mixed pixels," *J. Agric., Bio. Env. Stat.*, vol. 2, pp. 87–107, 1997.
- [8] F. Van Der Meer, "Iterative spectral unmixing," *Int. J. Rem. Sens.*, vol. 20, no. 17, pp. 3431–3436, 1999.
- [9] M. Fischler and R. Bolles, "Random sample consensus : a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography," *Communications of the ACM*, vol. 24, pp. 381–385, 1981.
- [10] L. Moisan and B. Stival, "A probabilistic criterion to detect rigid point matches between two images and estimate the fundamental matrix," *Int. J. Comp. Vision*, vol. 57, no. 3, pp. 201–218, 2004.

# Détection des zones de mouvement et régularisation: Application à la vidéo surveillance

Lionel CARMINATI, Jenny BENOIS-PINEAU

LaBRI UMR CNRS 5800

351 Cours de la libération

33405 Talence (France)

{lionel.carminati, benois-p}@labri.fr

**Résumé** – L’objectif de notre étude consiste à concevoir un système de vidéo surveillance orienté objet qui affiche les activités d’un site en détectant et suivant un objet d’intérêt. Cet objet connu est supposé être animé d’un mouvement propre différent de celui de la caméra -supposée statique dans notre cas-. Le problème consiste donc à localiser la zone d’intérêt, c’est à dire la zone de mouvement et de la rendre la plus nette et lisse possible au sens spatio-temporel pour pouvoir servir à la recherche d’un ou plusieurs objets d’intérêt. La méthode proposée actuellement s’exécute en temps réel (25 images par seconde) sur des vidéos de résolution CIF.

**Abstract** – The goal of this work is to create an object oriented video surveillance system that monitors activity at a site over extended periods of time by detecting motion activities in a site. The paper deals with detection of moving objects by modelling pixel grey level distribution along the time. The detection of moving objects is based on learning and update of background pixel distributions. The choice of appropriate mixture’s component for a given pixel is performed by likelihood maximization. An original Markov regularization is proposed to smooth detection. The method performs in real time on CIF resolution video and low cost commercial hardware.

Le problème de détection des zones de mouvement avec une caméra fixe dans la vidéo a été largement étudié dans la littérature [1, 2, 3]. Récemment la modélisation à base de mélange de lois Gaussiennes est devenue très populaire grâce à certains travaux fondamentaux [1, 4, 5, 6]. Appliqué au problème de la télésurveillance, ces modèles montrent de bonnes performances pour des conditions d’éclairage variables au cours du temps.

Le modèle à base de mélange de Gaussienne est devenu très populaire du fait que l’intensité d’un pixel peut être modélisée de façon efficace par un mélange de lois Gaussiennes à condition de supposer un bruit d’acquisition non corrélé et de faibles changements de luminosité. Les auteurs de [1, 5] proposent ainsi de modéliser le fond de la scène -par opposition aux objets en mouvement- par un mélange de lois Gaussiennes des valeurs RGB d’un pixel. Grimson propose également un schéma de mise à jour dans lequel les pixels sont confrontés au modèle existant afin de permettre leur classification : “fond”/”objet en mouvement”.

Considérant le cadre du modèle par mélange de lois Gaussiennes, nous proposons dans ce papier une méthode originale de détection de mouvement appliquée à des contextes de vidéo surveillance. Le processus est découpé en trois étapes : initialisation du mélange, classification de chaque nouveau pixel et mise à jour du modèle en fonction de la classification. La méthode proposée diffère des autres travaux par l’apprentissage et le réentraînement que l’on suggère. Une régularisation markovienne est également étudiée afin d’améliorer le taux de détection tout en ajoutant une cohérence à la fois spatiale et temporelle. Enfin contrairement aux travaux précédents [1, 4] où les auteurs proposent un simple seuillage statistique sur le

poids des distributions, une règle de décision basée sur le maximum de vraisemblance nous permet de déterminer la meilleure distribution Gaussienne parmi le mélange. Dans la méthode proposée le nombre initial de Gaussiennes par pixel, obtenu lors de l’entraînement, et donc supposé optimal, reste inchangé.

Ce papier est organisé de la façon suivante : A travers la Section 1 nous présentons le modèle par mélange de lois Gaussiennes et la règle de décision que nous proposons pour classer tous les nouveaux pixels en “fond” / ”objet en mouvement”. Notre schéma de mise à jour ainsi que les équations permettant de mettre à jour le modèle en temps réel sont présentés également dans cette même section. La Section 2 présente quand à elle le schéma de régularisation de type Markovienne du champ d’étiquettes. Les résultats sur des vidéos extraites de notre corpus de télésurveillance sont décrits à la section 3. La conclusion et les perspectives seront finalement présentées à la Section 4

## 1 Modèle à mélange de lois Gaussiennes et sa mise à jour

Considérant les valeurs de niveaux de gris de chaque pixel de l’image comme un processus stochastique indépendant, nous supposons que la distribution suivie par les valeurs de luminance d’un pixel peut être modélisée par un mélange de lois Gaussiennes si la probabilité de la luminance  $x_t$  à l’instant  $t$  est définie comme suit

$$P(x_t) = \sum_{i=1}^K w_{i,t} * \eta(x_t | \mu_{i,t}, \sigma_{i,t}^2) \quad (1)$$

où  $w_{i,t}$  est le poids,  $\mu_{i,t}$  et  $\sigma_{i,t}^2$  sont respectivement la moyenne

et l'écart type de la  $i^{\text{ème}}$  Gaussienne à l'instant  $t$ . Le but de notre travail consiste donc à estimer la densité de probabilité  $P(x_t)$  pour chaque pixel et pour chaque instant  $t$ . Pour ce faire nous proposons une approche en 3 étapes : la première, dite d'initialisation, estime le nombre optimal  $K$  de Gaussiennes ainsi que leurs paramètres dans le mélange durant un intervalle de temps donné grâce à l'algorithme ISODATA [7] sur l'ensemble d'apprentissage  $X$ , des valeurs de  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . Cet algorithme, basé sur le fameux K-Means, fusionne et découpe les clusters suivant des seuils de compacité et d'éloignement définis par l'utilisateur. Remarquons que par la suite le nombre de Gaussiennes dans le mélange n'est pas remis en cause.

La deuxième étape de détection des pixels en mouvement consiste en la vérification des hypothèses statistiques de l'appartenance de la valeur courante de l'intensité du pixel à la distribution de probabilité ou non.

Comme les conditions d'éclairage évolue au fil du temps, les paramètres du modèle d'intensité d'un pixel doit être mis à jour. Nous avons divisé ce processus en deux étapes : classification des nouvelles valeurs du pixel et mis à jour du modèle correspondant suivant la décision précédente. La première étape détermine, pour chaque pixel, si son intensité lumineuse suit ou non la distribution existante c'est à dire si le pixel est "fond" ou pas. Grimson [1, 8] propose de vérifier chaque nouveau pixel avec les  $K$  distributions existantes. Si sa valeur RGB est comprise entre 2.5 fois l'écart-type de la distribution, le pixel est considéré comme appartenant à la distribution.

Dans notre étude une solution plus élégante est proposée par maximisation de la vraisemblance. Elle est réalisée de la façon suivante : Pour un exemple donné  $x_t$  nous maximisons la vraisemblance du paramètre  $\eta$  du mélange  $P(x_t) = \sum_{i=1}^K w_i \cdot \eta(x_t, \mu_i, \sigma_i^2)$ . Dans ce cas nous considérons la vraisemblance du paramètre  $\eta$  conditionnellement à l'ensemble du mélange Gaussien. Considérons une partition complète de l'espace des hypothèses,  $X$ , définie par  $B = \{H_1, \dots, H_i, \dots, H_K\}$  et associons chaque Gaussienne  $\eta_i$  avec  $H_i$ . Grâce au théorème de Bayes, nous avons  $P(H_i/B) = P(H_i \cdot B)/P(B)$ . Supposant que  $H_i, i = 1, \dots, K$  forme une partition complète de  $B$  nous avons  $P(H_i \cdot B) = P(H_i)$ .

Considérons la densité de probabilité  $p(x_t \in H_i/B)$  telle que

$$p(x_t \in H_i/B) = \frac{w_i \eta_i}{\sum_{k=1}^K w_k \eta_k} \quad (2)$$

La vraisemblance conditionnelle de la  $i^{\text{ème}}$  Gaussienne du mélange pour l'exemple  $x_t$  sera alors

$$l(x_t) = \frac{w_i \eta_i}{\sum_{k=1}^K w_k \eta_k} \quad (3)$$

Suivant le processus usuel de prise de décision nous maximisons la log-vraisemblance  $L_i = \log(l(x))$ . Nous avons alors

$$L_i = \log \left( \frac{w_i \cdot \eta_i}{\sum_{k=1}^K w_k \eta_k} \right) = \log(w_i \eta_i) - \log \left( \sum_{k=1}^K w_k \eta_k \right) \quad (4)$$

comme  $\log \left( \sum_{k=1}^K w_k \eta_k \right)$  est le même pour tous les  $i$  nous devons alors maximiser  $\log(w_i \eta_i)$  ce qui est finalement équivalent à chercher  $\hat{\eta}$  avec sa correspondance  $\Theta_i^* = (w_i^*, \mu_i^*, \sigma_i^{2*})$  tel que

$$\Theta_i^* = \underset{\Theta_i = (w_i, \mu_i, \sigma_i^2)}{\operatorname{argmax}} \left( \log w_i - \left( \frac{\log \sigma_i^2}{2} + \frac{(x - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} \right) \right) \quad (5)$$

En considérant la vraisemblance de chaque Gaussienne dans le mélange associé au pixel par rapport à la mesure courante  $x$ , nous déterminons la "meilleure" Gaussienne au sein du mélange grâce à la règle de décision ci dessus. Ainsi si le maximum partie droite de l'équation est au dessus d'un certain seuil, la nouvelle valeur  $x_t$  du pixel sera considérée comme appartenant au fond. Dans le cas contraire, on supposera que le pixel appartient à l'objet en mouvement.

Une fois la classification des pixels effectuée, la dernière étape consiste à mettre à jour le modèle. Nous proposons un réentraînement adapté en fonction du résultat de classification précédent. Si l'intensité du pixel suit une distribution déjà existante - c'est à dire si le pixel fait partie du fond - alors les poids et les paramètres  $(\mu, \sigma_i^2)$  du mélange Gaussien seront mis à jour de la même façon que dans [1], c'est à dire :

Les poids seront ajustés en considérant l'équation suivante

$$w_{i,t} = (1 - \alpha)w_{i,t-1} + \alpha v(w_k | x_t) \quad (6)$$

où  $\alpha \in [0, 1]$  est le taux d'apprentissage fixé par Grimson,  $v(w_k | x_t)$  est égale à 1 si  $k = \hat{k}$ , i.e.  $\eta_{\hat{k}}(\mu_{\hat{k}}, \sigma_{\hat{k}}^2)$  est la meilleure correspondance pour  $x_t$ , et 0 sinon. Moyenne et écart-type sont mis à jour en considérant

$$\mu_{i,t} = (1 - \alpha)\mu_{i,t-1} + \rho x_t, \quad (7)$$

$$\sigma_{i,t}^2 = (1 - \alpha)\sigma_{i,t-1}^2 + \rho(x_t - \mu_{i,t})^2 \quad (8)$$

avec  $\rho = \alpha \eta(x_t | \mu_{i,t}, \sigma_{i,t}^2)$ . En pratique, et suivant les travaux de Grimson, une valeur de  $\alpha$  aux alentours de 0.1 donne des résultats convaincant au cours du temps.

Si la valeur d'intensité du pixel n'appartient à aucune des distributions déjà existantes pendant une période de temps fixé, nous proposons de relancer la phase d'initialisation sur l'ensemble des pixels constitué du pixel courant et des pixels qui ont été détecté comme étant un objet en mouvement pendant cette même période. Contrairement aux autres travaux [1], cette méthode permet une bien meilleure réactivité face aux changements rapides de luminosité ou lorsqu'un objet en mouvement s'arrête de bouger.

A chaque itération de temps  $t$ , les pixels qui ont été comparés aux Gaussiennes  $\eta_i(t)$  sont étiquetés  $b$  si ils appartiennent au fond  $a$  sinon. Après l'étape de détection de mouvement, on obtient une carte de champ d'étiquette que nous allons régulariser par approche markovienne.

## 2 Régularisation Markovienne temps réel

Du fait du bruit intrinsèque de la caméra et du mouvement des petits objets -feuilles, ...- il peut rester parfois des fausses détections indésirables. De plus on remarque que certains des objets résultants ne sont pas tout à fait complets. Une approche type régularisation Markovienne permet donc de résoudre ce problème [9, 2]. Généralement, on modélise la différence entre deux images par seulement une Gaussienne, ce qui permet de formuler une fonction d'énergie englobant les termes d'attaches

aux données et de régularisation des champs d'étiquettes. Dans le cas d'un mélange de lois Gaussiennes, une telle formulation est impossible du fait que les distributions des intensités de pixels suivent une loi additive [2]. En considérant seulement les champs d'étiquettes  $(a, b)$  résultant de l'étape de détection, on peut quand même proposer la régularisation suivante non pas sur les valeurs de pixels mais plutôt sur la carte d'étiquette obtenue après classification.

Soit  $O$  l'ensemble d'observations tel que  $O = \{o_1, \dots, o_n\}$ ,  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  un ensemble d'étiquettes prenant ses valeurs dans  $\{a, b\}$ . Nous dénoterons d'ores et déjà  $\{E = e\}$  l'état particulier tel que  $\{E_{s1} = e_{s1}, \dots, E_{sn} = e_{sn}\}$ . De plus, considérons  $v(n)$  un voisinage du site  $s_n$  et  $V$  un système de voisinage. Le fameux théorème d'Hammersley et Clifford établit que  $P(E = e) = \frac{1}{Z} \exp(-\sum V(e))$ . Le problème consiste alors à maximiser la probabilité conditionnelle  $P(O = o | E = e) \cdot P(E = e)$ . En supposant le problème au sens du Maximum A Posteriori -M.A.P-, nous définissons la fonction d'énergie  $U(e)$  comme la décomposition de deux termes :

$$U(e) = \sum_{c \in C} V(e) = V(e_s, e_t) + V(e, o) \quad (9)$$

$V(e_s, e_t)$  est le terme de régularisation avec  $\langle s, t \rangle$  une clique binaire de  $c$  sur le voisinage  $V$ .  $V(e, o)$  est le terme d'attache aux données. Nous exprimons ces deux termes de la façon suivante

$$V(e_s, e_t) = \begin{cases} 0 & \text{if } e_s = e_t \\ \beta & \text{sinon} \end{cases} = \beta(1 - \delta_{e_s, e_t}) \quad (10)$$

avec  $\delta$  le symbole de Kronecker.  $V(e, o)$  exprime les dépendances temporelles des étiquettes en introduisant  $\Phi$  tel que

$$\Phi(e_{t-dt}(s), e_t(s)) = \begin{cases} 0 & \text{if } (e_{t-dt}(s), e_t(s)) = (b, b) \\ m_1 & \text{if } (e_{t-dt}(s), e_t(s)) = (a, a) \\ m_2 & \text{sinon} \end{cases} \quad (11)$$

La maximisation de la fonction d'énergie s'effectue ensuite grâce à l'algorithme "Iterated Conditional Modes" (I.C.M.) [10].

### 3 Résultats

Nous avons testé notre méthode sur deux types de corpus. Le premier contient 10 séquences de 5000 images de locaux à surveiller. Le deuxième est composé de 5 séquences de vidéo surveillance prise à l'extérieur contenant 2500 images chacune. Chaque image est de résolution CIF. Quelques résultats sont présentés sur la Figure (1). Du fait des variations brutales de luminosité et de la position de la source lumineuse, chaque type de corpus présente des contraintes différentes : le premier implique des changements rapides de luminosité et un objet peut traverser rapidement la scène. La détection doit par conséquent être rapide et la mise à jour également.

Dans le deuxième corpus les changements sont moins rapides et le processus d'apprentissage doit être plus lent pour converger vers la distribution de "fond" idéale tout en restant le plus efficace possible au fil du temps.

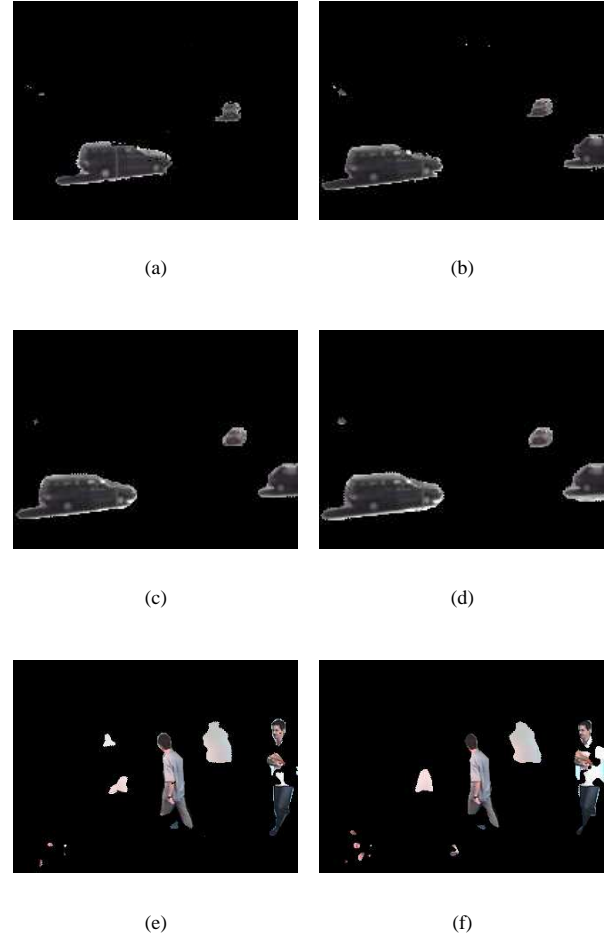


FIG. 1 – Exemple de masque de mouvement extraits du corpus de vidéo surveillance. La ligne du haut présente la détection de mouvement sans régularisation. La seconde ligne présente les masques de mouvement après régularisation Markovienne. L'algorithme détecte les feuilles en haut à droite, mais la régularisation efface ces fausses détections. La dernière ligne présente les résultats pour une scène d'intérieur avec une régularisation type markov.

### 4 Conclusion

Ces travaux s'inscrivent dans la continuité de ceux de Grimson. L'approche que nous proposons consiste à détecter les objets en mouvement pour un système de télésurveillance. Nous avons développé une méthode originale basée sur la modélisation par mélange de lois Gaussiennes sur une fenêtre temporelle des valeurs de luminosité. En travaillant uniquement sur les valeurs de luminosité et grâce à une classification par maximisation de la vraisemblance, le processus que nous proposons permet d'être déployé sur des systèmes temps-réel avec des architectures banalisées. Une régularisation type Markov ajoute au masque de mouvement une cohérence spatio-temporelle, permettant ainsi d'éliminer les fausses détections.

## Références

- [1] W. Grimson, C. Stauffer, R. Romano, L. Lee, Using adaptive tracking to classify and monitor activities in a site, IEEE CVPR 1998 (1998) 22–29.
- [2] P. Lalande, P. Bouthemy, A statistical approach to the detection and tracking of moving objects in an image sequence, 5th European Signal Processing Conference EU-SIPCO 90.
- [3] L. Carminati, J. Pineau, M. Gelgon, Human detection and tracking from video surveillance applications in low density environment, SPIE VCIP'2003 SPIE 0277 -786X 5150 (2003) 51–60.
- [4] C. Stauffer, W. Grimson, Adaptive background mixture models for real-time tracking, the Artificial Intelligence Laboratory, Massachusetts Institute of Technology Cambridge, MA02139 (1998).
- [5] P. Kaewtrakulpong, R. Bowden, An improved adaptive background mixture model for real-time tracking with shadow detection, 2nd European Workshop on Advanced Video Based Surveillance Systems.
- [6] K. Karmann, A. Brandt, Detection and tracking of moving objects by adaptive background extraction, Proceedings of the 6th Scandinavian Conference on Image Analysis (1989) 1051–1058.
- [7] G. Ball, D. Hall, A clustering technique for summarizing multivariate data, in : Behavioral Science, Volume 12, 1967, pp. 153–155.
- [8] C. Stauffer, W. Eric, W. Grimson, Learning patterns of activity using real-time tracking, IEEE PAMI, Volume 22 (8) (2000) 747–757.
- [9] S. Geman, D. Geman, Stochastic relaxation, gibbs distributions and the bayesian restoration of images, IEEE PAMI 1984 Vol.6.
- [10] J. Besag, Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems, Journal of the Royal Statistical Society (1974) 36 :192–236 Series B.



# Transformée de Radon lissée et utilisation dans une procédure de détection en contrôle non destructif

P. AKNIN<sup>1</sup> – P. SIMARD<sup>2</sup> – H. CYGAN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire LTN – INRETS, 2 Av. du Gal. Malleret-Joinville, 94114 Arcueil Cedex, France

<sup>2</sup> Laboratoire HEUDIASYC UMR CNRS 6599 – UTC - BP 20529, 60205 Compiègne Cedex, France

[patrice.akinin@inrets.fr](mailto:patrice.akinin@inrets.fr), [patrice.simard@utc.fr](mailto:patrice.simard@utc.fr)

**Résumé** – Cet article introduit une variante de la transformée de Radon qui autorise la mise en œuvre d'une procédure de détection rapide non pénalisée par la rotation du segment recherché dans une image à horizon glissant. Cette transformée de Radon dite lissée utilise une fonction de voisinage sur lequel s'effectue l'intégration au lieu de la projection standard sur droite pivotante. Elle généralise la transformée de Radon et permet l'introduction de connaissances a priori sur la structure de l'image à traiter et la nature des bruits qui la dégrade. Son application à une procédure de contrôle non destructif de rail par ultrasons en mode B-Scan est présentée en fin d'article.

**Abstract** – This article introduces a modified Radon transform that allows real time detection of segment in image without drawbacks due to its rotation inside the sliding window. This Radon transform, called Smoothed Radon Transform, uses a neighborhood domain instead of the 1D integration line (the rotating axis of the Radon Transform). It extends the Radon Transform and allows the induction of a priori knowledge about the image and noise structures. The problem of non destructive evaluation of rail with ultrasonic technology in B-Scan mode illustrates the end of the article.

## 1. Le contrôle ultrasonore en mode B-Scan

Dans le cadre du contrôle non destructif par ultrasons (US), la représentation A-Scan est la plus répandue [1]. Celle-ci présente l'amplitude du signal d'écho US en fonction de son temps de vol. Une inhomogénéité dans une cible se traduit alors par un pic sur la courbe A-Scan.

Dans les représentations B-Scan [2], la sonde est déplacée parallèlement à la surface de la cible et la « bufferisation » des vecteurs A-Scan fournit la représentation matricielle B-Scan (cf. figure 1).

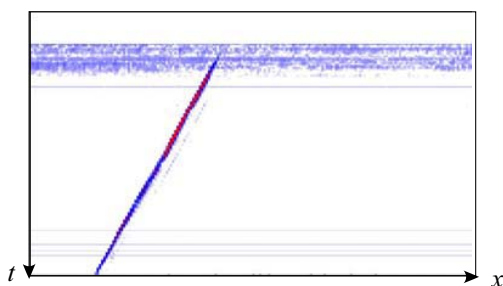


Fig. 1 – Image B-Scan d'une fissure

Cette représentation présente un intérêt particulier dans la mesure où elle permet de mettre en lumière la cohérence spatiale des défauts.

Sur ce type de représentation, les défauts détectés apparaissent en effet toujours comme des segments de droite. L'alignement spatial des pics des A-Scans successifs est dû à la direction privilégiée d'émission de la sonde qui agit également en réception. Le défaut n'étant pas ponctuel, si un écho apparaît dans plusieurs A-Scans successifs, c'est que

l'orientation du défaut dans la cible reste perpendiculaire à la direction principale d'émission du faisceau. L'orientation angulaire  $\beta$  du segment dans l'image B-Scan dépend de trois paramètres : le pas d'échantillonnage spatial (entre les colonnes de la matrice), le pas d'échantillonnage temporel (entre les lignes de la matrice), et la direction du faisceau US.

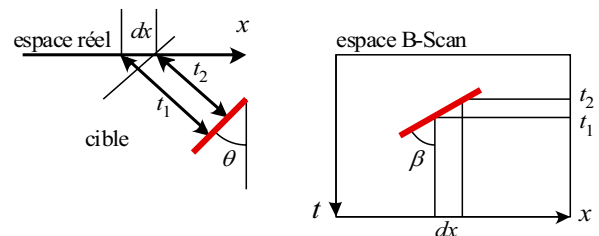


Fig 2 – lien entre l'espace réel et l'espace B-Scan

Si l'angulation de la fissure dans la cible à contrôler est notée  $\theta$  (cf. figure 2), la direction de propagation des ondes US dans la cible doit être complémentaire (et elle reste constante pour une sonde donnée). Dans le plan B-Scan, l'angulation de l'image de la fissure est donnée par :

$$\tan \beta = \frac{1}{\cos \theta}$$

Si de plus, on introduit une fréquence d'échantillonnage spatial  $F_x$  pour l'avancement sur la cible, et une fréquence  $F_t$  pour la digitalisation en profondeur, on obtient :

$$\tan \beta = \frac{F_t}{F_x} \frac{1}{\cos \theta}$$

## 2. La détection par transformée de Radon

### 2.1 Formulation et implémentation

Pour résoudre la problématique de détection de segment dans ce type d'image, la transformée de Radon (TR) -et son corollaire la transformée de Hough- est couramment utilisée [3], [4], [5]. Celle-ci opère une projection orthogonale des pixels de l'image sur un axe tournant passant au centre de l'image :

$$\rho = x \cos \alpha + y \sin \alpha \quad (\alpha=0 \text{ pour un axe horizontal})$$

La TR d'une image  $I(x,y)$  s'écrit ainsi classiquement :

$$TR(\rho, \alpha)|_I = \iint I(x, y) \cdot \delta(\rho - x \cos \alpha - y \sin \alpha) dx dy$$

L'allure d'une telle transformée est donnée figure 3. Beaucoup de travaux de recherche ont concerné son implémentation rapide [6], [7], [8]. Les travaux présentés ici sont focalisés sur la réduction de la complexité par l'injection de connaissances a priori fortes sur les images. En effet, le segment de la figure 1 apparaît principalement concentré en un point à l'abscisse  $\alpha_0 = 180^\circ - \beta_0$  de la TR ( $\alpha_0$  est l'angle complémentaire de la fissure assurant une projection perpendiculaire de celle-ci sur l'axe tournant). Son ordonnée est fonction de la position horizontale de la fissure dans la fenêtre glissante sur laquelle est calculée la TR. Lorsque la fissure se projette sur le centre de l'image, le point de concentration est obtenu pour l'ordonnée  $\rho=0$ .

Ces propriétés sont utilement mises à profit pour les implémentations en ligne de procédures de détection, puisque la connaissance a priori de la direction angulaire des segments dans l'image permet de se contenter du seul calcul  $TR(0, \alpha_0)$ . L'utilisation de cette unique transformée de Radon bloquée dans la direction  $\alpha_0$  et centrée en  $\rho=0$  réduit drastiquement le volume des calculs. La décision est prise par simple seuillage qui s'active lorsque la projection du segment glissant passe sur le centre de l'image. Cette méthode s'avère très efficace si l'image B-Scan du défaut se présente bien sous la forme d'un segment aligné dans la direction voulue. Si cela n'est pas le cas, il est nécessaire d'observer la TR à d'autres valeurs angulaires et l'implémentation temps réel devient plus délicate.

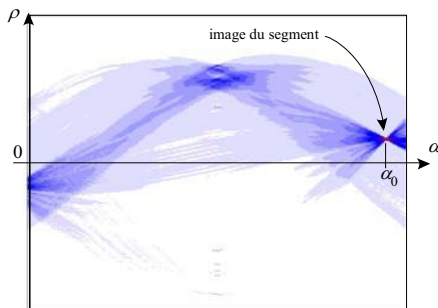


Fig. 3 – TR de l'image B-Scan présentée figure 1

### 2.2 Limitation pour la détection

Si les trois paramètres qui conditionnent la valeur de  $\beta$  peuvent être considérés comme constants au premier ordre lors d'essais en laboratoire, ils s'avèrent par contre plus

fluctuants en conditions de terrain [5], [9]. La connaissance a priori injectée dans la procédure de détection est alors faussée et dégrade immédiatement le contraste obtenu lors de la phase de décision. La figure 4 compare 3 transformées bloquées  $TR(0, 15^\circ)$  calculées en fonction de l'avancement du contrôle sur la cible : la première pour un segment orienté à  $14^\circ$  (a), un deuxième à  $15^\circ$  (b) et un troisième à  $16^\circ$  (c). On conçoit aisément qu'il devienne plus difficile de régler le seuil de détection dans les situations (a) et (c) que pour (b).

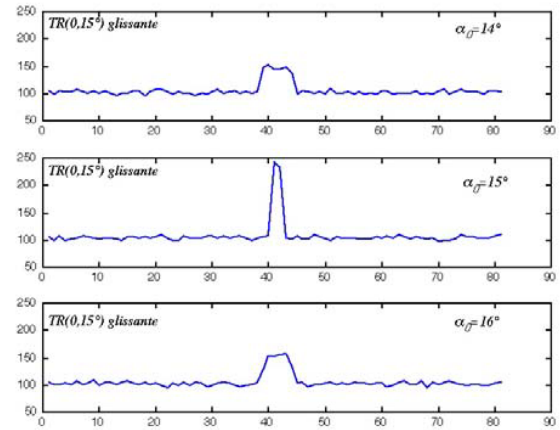


Fig. 4 – Effet des variations angulaires du segment sur le signal de détection

## 3. La transformée de Radon lissée

Pour solutionner ce problème, nous proposons de généraliser la TR sous la forme,

$$TRL(\rho, \alpha)|_I = \iint I(x, y) \cdot V(x, y, \rho, \alpha) dx dy$$

dans laquelle  $V(x, y, \rho, \alpha)$  est un masque de voisinage (ou de lissage) à valeurs dans  $[0, 1]$  qui permet de gérer l'incertitude sur la direction attendue de détection. Par exemple, on peut fixer un voisinage sous la forme d'une bande parallèle à la direction de détection souhaitée (figure 5b), ou sous la forme d'un cône (figure 5a). La décroissance dans la direction perpendiculaire à l'axe central peut être choisie gaussienne ou triangulaire, voire uniforme selon l'application. L'expression d'un voisinage cône gaussien est la suivante :

$$V(x, y, \rho, \alpha) = e^{-a^2/\sigma^2} \quad \text{avec}$$

$$a = \text{Atan} \left( \frac{x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha - \rho}{x \cdot \sin \alpha - y \cdot \cos \alpha} \right)$$

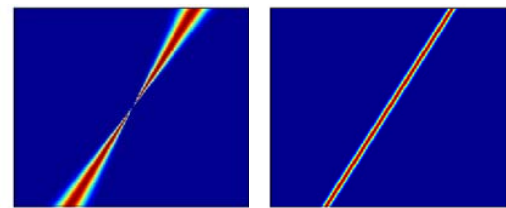


Fig. 5 – masques cône gaussien (a), bande gaussien (b)

Cette formulation est à rapprocher des approches de type fusion de décision où quelques TR simples sont mises en compétition pour la génération de la décision finale [10].

## 4. Résultats

### 4.1 Contraste de détection

La figure 6 montre les résultats de contraste obtenu lorsque l'orientation du segment varie de  $\beta_p = \pm 5^\circ$  autour de la position de référence de  $15^\circ$ . L'image utilisée est une image synthétique de  $400 \times 200$  pixels avec un segment unique et homogène de longueur 100 centré dans l'image. Dans le cas de la TR, le contraste s'atténue très rapidement de part et d'autre de l'orientation de référence ( $40\% \pm 5^\circ$ ), alors qu'il reste relativement élevé dans le cas de la TRL ( $85\% \pm 5^\circ$ )

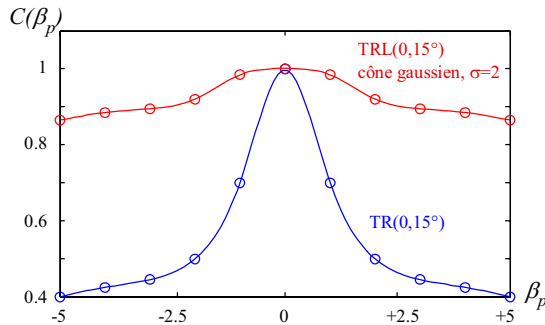


Fig. 6 – Effet des variations angulaires du segment en position centrée sur le signal de détection (max normalisé)

Il est évident qu'un compromis doit être réalisé entre l'obtention d'un contraste important et un étalement trop pénalisant rendant le détecteur sensible à la présence de tous les segments. Ce compromis est à réaliser à l'aide d'une estimation des variations angulaires attendues.

### 4.2 Cas particulier d'un segment oscillant

L'application traitée concerne la détection de fissure interne de rail [9]. Au cours des inspections automatisées effectuées par les réseaux ferroviaires, les sondes sont plaquées sur le dessus du rail et solidaires d'un sabot qui glisse à des vitesses pouvant atteindre 50km/h. Les sondes visent avec un angle donné dans le champignon du rail (cf. figure 7) de sorte à obtenir des échos importants pour les fissures dont les directions de propagation sont privilégiées par les contraintes de roulement.

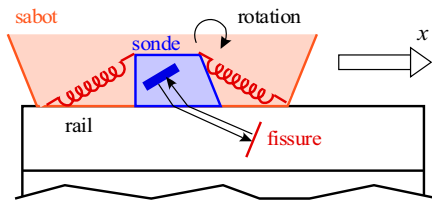


Fig. 7 – Montage d'une sonde oblique et rotation défavorable

Les raisons pouvant conduire à une variation d'angle des segments dans les images B-Scan sont multiples :

- tangage du montage mécanique de maintien des sondes (cf. figure 7)
- existence de fissures en « escalier » présentant un faciès angulaire complexe

- erreur d'estimation de la vitesse du véhicule et donc fréquence d'échantillonnage  $F_x$  non constante
- fréquence d'échantillonnage  $F_t$  non constante à cause des variations de la température extérieure qui modifient la célérité des ondes US
- incertitude sur l'angle d'émission des sondes (erreur de construction)

Afin de quantifier l'apport de la TRL pour le premier cas, nous supposons que le montage mécanique possède un mode propre en rotation indésirable et que son angle relativement au plan du rail suit une loi sinusoïdale ; on supposera que l'angle équivalent dans le plan B-Scan est d'amplitude  $5^\circ$  et suit la loi :

$$\beta = 15^\circ + \beta_p = 15^\circ + 5 \sin(\omega t)$$

On montre aisément que sur l'excursion  $\pm 5^\circ$ , la densité de probabilité de l'angle instantané (cf. figure 8) et sa fonction de répartition valent :

$$f(\beta_p) = \frac{1}{\pi \sqrt{5^2 - \beta_p^2}} \quad F(\beta_p) = \frac{1}{\pi} \text{Arcsin} \left( \frac{\beta_p}{5} \right)$$

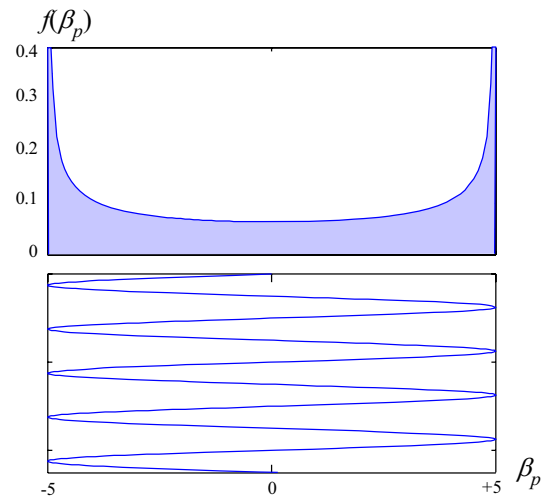


Fig. 8 – densité de probabilité de l'angle d'un segment oscillant sinusoïdalement

### 4.3 Courbe COR

Compte tenu de la connaissance de l'évolution de la TR et de la TRL présentée figure 6, on est capable d'estimer la probabilité de bonne détection d'un tel segment en intégrant, pour une valeur de seuil donné, la densité de probabilité entre les deux valeurs d'angle intercepté (ou deux fois la surface d'un seul côté puisque le contraste  $C(\beta_p)$  est symétrique).

Si  $s_{TR}$  désigne le seuil de détection pour l'utilisation de la TR simple et  $s_{TRL}$  celui pour la TRL,

$$P_{BD}(s) = 2.F(\beta_1) \text{ avec}$$

$$s_{TR} = C_{TR}(\beta_1) \quad \text{et} \quad s_{TRL} = C_{TRL}(\beta_1)$$

La figure 10 présente l'évolution de ces seuils en fonction de  $P_{BD}$ . On constate qu'il n'est pas nécessaire de trop baisser le seuil de détection de la TRL pour obtenir une probabilité de bonne détection maximale, alors que celui de la TR doit

être inférieur à 0,4. Cet abaissement du seuil sera bien sûr pénalisant vis-à-vis du taux de fausses alarmes.

Si l'on choisit un modèle de bruit uniformément réparti entre  $[0,1]$  dans l'espace de Radon sur le support  $[-5^\circ, +5^\circ]$ , la probabilité de fausse alarme s'exprime simplement par :

$$P_{FA} = 1 - s_{TR} \quad \text{pour la TR et}$$

$$P_{FA} = 1 - s_{TRL} \quad \text{pour la TRL}$$

La courbe COR est bien clairement plus favorable à la TRL (cf. figure 11).

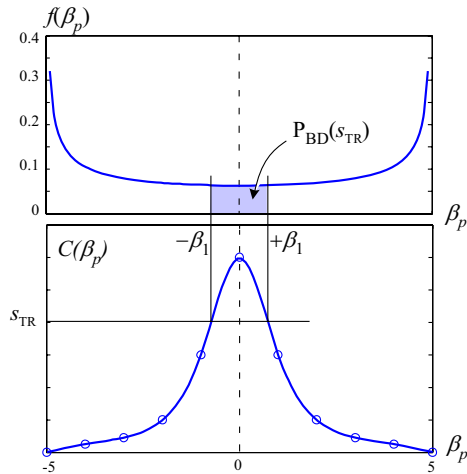


Fig. 9 – estimation de la probabilité de bonne détection

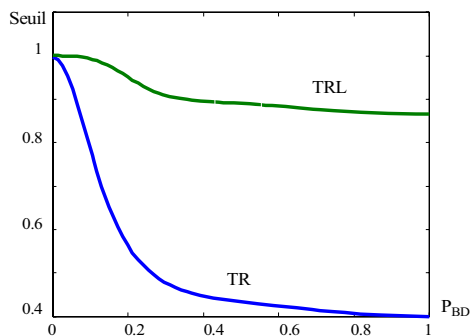


Fig. 10 – évolution du seuil de détection fonction de la probabilité de bonne détection d'un segment oscillant

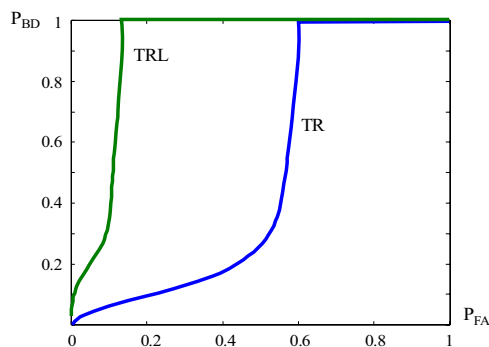


Fig. 11 – Courbes COR pour le traitement TR et TRL

## 5. Conclusion

L'article a présenté une extension de la transformée de Radon pour une utilisation en contexte détection. Lorsque l'on recherche des segments à orientation prédéfinie dans une image à horizon glissant, le calcul d'une seule TR bloquée sur l'angle complémentaire du segment recherché et estimée au centre de l'image suffit. Cependant, une imprécision sur la connaissance a priori de l'orientation des segments entraîne immédiatement des non détections.

Afin de rendre possible la détection de tels segments « mal » orientés, une extension de la transformée de Radon, dénommée Transformée de Radon Lissée, a été introduite. Celle-ci effectue un calcul par intégration sur un domaine et non sur un chemin. Ce voisinage ou masque est placé sur l'image et on montre que la sommation sur ce domaine constitue un détecteur de bon contraste.

Une estimation théorique de la courbe COR obtenue par cette méthode est produite dans le cas d'un segment oscillant dans l'image et d'un bruit uniforme. Des validations sont en cours sur une application de détection temps réel de fissure de rails par méthode ultrasonore en mode B-Scan. Une optimisation de l'adéquation de la forme du voisinage avec les excursions angulaires des segments est également à l'étude.

D'une façon générale, et moyennant un choix raisonnable des paramètres du voisinage, on dispose d'une approche simple, peu coûteuse en temps de calcul, et robuste, permettant d'intégrer les connaissances a priori sur la physique du système de mesure dans la procédure de détection.

## Références

- [1] H. Krautkramer J. Krautkramer. *Ultrasonic Testing of materials*. Springer-Verlag, 1990.
- [2] J. Blitz, G. Simpson. *Ultrasonic methods of non destructive testing*. Chapman & Hall. 1996
- [3] S.R. Deans. *Hough transform from the radon transform*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 3(2), 2004.
- [4] R.O. Duda P.E. Hart . *Use of the Hough transformation to detect lines and curves in pictures*. Comm.ACM., 15(1), 1972
- [5] P. Akin H. Cygan. *Improving the detection of rail cracks by using recursive radon transform*. Railway Engineering, London, 2004.
- [6] K. Murakami, T. Naruse. *High speed line detection by Hough transform in local area*. ICPR'00. 2000
- [7] C. Galambos, J. Matas, J. Kittler. *Progressive probabilistic Hough transform for line detection*. CVPR'99. 1999
- [8] L. Xiu, E. Oja. *Randomized Hough transform : basic mechanisms, algorithms and computational complexities*. CVGIP Image Understanding vol 57-2. 1993
- [9] H. Cygan P. Akin P. Simard L. Girardi . *B-scan ultrasonic image analysis for internal rail defect detection*. WCRR. Edinburg, 2003.
- [10] P. Toft. *The Radon transform, Theory and implementations*. PhD thesis, 1996.

# Segmentation conjointe de données poissonniennes

Nicolas DOBIGEON, Jean-Yves TOURNERET

IRIT/ENSEEIH/TéSA

2 rue Charles Camichel, BP 7122, 31071 Toulouse cedex 7, France

Nicolas.Dobigeon@enseeiht.fr, Jean-Yves.Tourneret@tesa.prd.fr

**Résumé** – Cet article étudie une méthode de segmentation conjointe de plusieurs signaux issus d’une application astrophysique. Les signaux considérés possèdent des lois de Poisson dont les paramètres sont constants sur des intervalles à déterminer. La méthode proposée est basée sur une analyse Bayésienne hiérarchique. Une méthode de simulation basée sur l’échantillonneur de Gibbs permet d’estimer les paramètres et hyperparamètres inconnus intervenant dans le modèle de segmentation conjointe. Des simulations effectuées sur des données synthétiques illustrent les performances de cette méthode de segmentation conjointe.

**Abstract** – This paper addresses the problem of detecting significant intensity variations in multiple astronomical time-series. This detection is achieved by using a constant Poisson rate model and a hierarchical Bayesian approach. An appropriate Gibbs sampling strategy allows joint estimation of the unknown parameters and hyperparameters. Simulation results performed on synthetic data illustrate the performance of the proposed algorithm.

## 1 Introduction

Segmenter un signal ou une image est un problème qui a reçu un vif intérêt dans la communauté du traitement du signal et des images (voir par exemple [1] et [2]). De nombreuses méthodes basées sur des approches Bayésiennes ou sur le principe du maximum de vraisemblance pénalisé permettent de résoudre ces problèmes de segmentation [3, 4, 5]. Nous nous intéressons dans cet article à un problème de segmentation de données astrophysiques présenté initialement dans [6]. La méthode récursive proposée dans [6] consistait à décomposer le signal d’intérêt en deux blocs par optimisation d’un critère approprié et de recommencer l’opération sur chacun des blocs ainsi créés jusqu’à ce qu’un critère d’arrêt soit vérifié. L’avantage de la méthode proposée est sa simplicité due au fait qu’on cherche à chaque itération une seule rupture. Par contre, le principal inconvénient de cette approche est la nécessité d’utiliser une règle d’arrêt qui influence fortement les résultats de segmentation. Cet article propose une nouvelle méthode de segmentation basée sur une approche Bayésienne hiérarchique. Cette méthode ne nécessite pas de définir une règle d’arrêt et permet de segmenter conjointement plusieurs signaux issus de capteurs différents. On suppose comme dans [6] que les propriétés statistiques des signaux observés sont définies par des lois de Poisson de paramètres constants par morceaux :

$$y_{j,i} \sim \mathcal{P}(\lambda_{j,k}),$$

avec  $j = 1, \dots, J$ ,  $J$  désignant le nombre de signaux à segmenter,  $i \in I_{j,k} = [l_{j,k-1} + 1, l_{j,k}]$ ,  $k = 1, \dots, K_j$ , où  $I_{j,k}$  est le  $k^{\text{ième}}$  intervalle du  $j^{\text{ième}}$  signal,  $l_{j,k}$  est le point après lequel a lieu la  $k^{\text{ième}}$  rupture dans le  $j^{\text{ième}}$  signal (avec  $l_{j,0} = 0$  et  $l_{j,K_j} = n$ , où  $n$  est le nombre de points de chaque séquence observée) et  $K_j$  est le nombre de ruptures dans le  $j^{\text{ième}}$  signal. Enfin la notation  $\mathcal{P}(\lambda_{j,k})$  désigne une loi de Poisson de paramètre  $\lambda_{j,k}$ . On suppose de plus que les séquences  $y_k = (y_{k,1}, \dots, y_{k,n})$  et  $y_l = (y_{l,1}, \dots, y_{l,n})$  sont indépendantes pour  $k \neq l$ . Segmenter conjointement les signaux  $y_j = (y_{j,1}, \dots, y_{j,n})$  consiste à esti-

mer les nombres de ruptures  $K_j$  et les positions associées  $l_{j,k}$  (pour  $j = 1, \dots, J$  et  $k = 1, \dots, K_j$ ) à partir des observations  $y_{j,i}$ .

## 2 Modèle hiérarchique bayésien

Les paramètres inconnus pour le problème de segmentation introduit précédemment sont  $K_j$ ,  $l_{j,k}$  et les paramètres de Poisson  $\lambda_{j,k}$ . Un reparamétrage classique [3, 5] consiste à introduire des indicateurs  $r_{j,i}$ ,  $j \in \{1, \dots, J\}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  tels que :

$$\begin{cases} r_{j,i} = 1 & \text{s'il y a une rupture à l'instant } i \text{ du } j^{\text{ième}} \text{ signal,} \\ r_{j,i} = 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec  $r_{j,n} = 1$  (cette condition assure que le nombre de paliers et le nombre de ruptures du  $j^{\text{ième}}$  signal sont égaux à  $K_j = \sum_{i=1}^n r_{j,i}$ ). Le vecteur inconnu des paramètres devient alors  $\theta = (r, \lambda)$  avec  $r = (r_1, \dots, r_n)$ ,  $r_i = (r_{1,i}, \dots, r_{J,i})^T$  et  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_J)$ ,  $\lambda_j = (\lambda_{j,1}, \dots, \lambda_{j,K_j})^T$ . Il est important de noter que le vecteur de paramètres  $\theta$  appartient à un espace  $\Theta = \{0, 1\}^{nJ} \times \prod_{j=1}^J \mathbb{R}_+^{K_j}$  dont la dimension dépend de la valeur des paramètres  $K_j$ . Ce travail se propose d’estimer le vecteur de paramètres  $\theta$  en utilisant une méthode d’inférence Bayésienne hiérarchique. Pour cela, il est nécessaire de définir la vraisemblance des observations et les lois *a priori* des paramètres inconnus.

### 2.1 Vraisemblance

La vraisemblance du vecteur des observations  $y$  s’écrit :

$$\begin{aligned} f(y|\theta) &= \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^{K_j} \prod_{i \in I_{j,k}} \frac{\lambda_{j,k}^{y_{j,i}} \exp(-\lambda_{j,k})}{y_{j,i}!}, \\ &\propto \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^{K_j} \lambda_{j,k}^{s_{j,k}(r)} \exp(-\lambda_{j,k} n_{j,k}(r)), \end{aligned} \quad (1)$$

où  $\propto$  signifie "proportionnel à",  $s_{j,k}(r) = \sum_{i \in I_{j,k}} y_{j,i}$  (somme des points du  $k^{\text{ième}}$  intervalle  $I_{j,k}$  du  $j^{\text{ième}}$  signal) et  $n_{j,k}(r) = l_{j,k} - l_{j,k-1}$  (nombre de points du segment  $I_{j,k}$ ).

## 2.2 Lois a priori des paramètres

### 2.2.1 Vecteur des indicateurs

Nous supposons que la probabilité d'avoir  $r_i = \epsilon$ , ne dépend pas de  $i$ , avec  $r_i = (r_{1,i}, \dots, r_{J,i})^T$  et  $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_J)^T \in \{0, 1\}^J$ . La loi *a priori* des indicatrices s'écrit alors :

$$f(r|P) = \prod_{\epsilon \in \{0,1\}^J} P_{\epsilon}^{S_{\epsilon}(r)},$$

où  $P_{\epsilon} \in \{P_{0\dots 0}, \dots, P_{1\dots 1}\}$  et  $S_{\epsilon}(r)$  est le nombre d'instantanés tels que  $r_i = \epsilon$ . Par exemple, dans le cas de deux signaux  $y_1$  et  $y_2$  (i.e.  $J = 2$ ), la distribution *a priori* peut s'écrire :

$$f(r|P) = P_{00}^{S_{00}(r)} P_{10}^{S_{10}(r)} P_{01}^{S_{01}(r)} P_{11}^{S_{11}(r)},$$

où  $S_{00}(r) = \sum_{i=1}^{n-1} (1 - r_{1i})(1 - r_{2i})$ ,  $S_{11}(r) = \sum_{i=1}^{n-1} r_{1i}r_{2i}$ ,  $S_{10}(r) = \sum_{i=1}^{n-1} r_{1i}(1 - r_{2i})$  et  $S_{01}(r) = \sum_{i=1}^{n-1} (1 - r_{1i})r_{2i}$ . A une grande valeur de  $P_{\epsilon}$  correspondra une forte probabilité d'avoir la configuration  $r_i = \epsilon$ . Par exemple, en choisissant une grande valeur pour  $P_{0\dots 0}$  (resp. pour  $P_{1\dots 1}$ ), nous favoriserons l'absence (resp. la présence) de ruptures simultanées dans toutes les séquences. Ce choix permet d'introduire une corrélation entre les points de ruptures dans les différents signaux temporels.

### 2.2.2 Paramètres de Poisson

Nous supposons que les paramètres des lois de Poisson suivent une loi Gamma :

$$f(\lambda_{j,k}|\nu, \gamma) \sim \mathcal{G}(\nu, \gamma),$$

où  $\nu = 1$  et  $\gamma$  est un hyperparamètre qui peut être ajusté. En supposant l'indépendance des paramètres  $\lambda_{j,k}$ , la loi *a priori* de  $\lambda$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned} f(\lambda|\gamma) &= \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^{K_j} f(\lambda_{j,k}|\nu, \gamma), \\ &= \prod_{j=1}^J \left[ \frac{\gamma^{\nu K_j} e^{-\gamma \sum_{k=1}^{K_j} \lambda_{j,k}}}{\Gamma(\nu)^{K_j}} \prod_{k=1}^{K_j} \left( \lambda_{j,k}^{\nu-1} I_{\mathbb{R}^+}(\lambda_{j,k}) \right) \right], \end{aligned}$$

où  $I_{\mathbb{R}^+}$  est la fonction indicatrice sur  $\mathbb{R}^+$  ( $I_{\mathbb{R}^+}(x) = 1$  si  $x \geq 0$  et  $I_{\mathbb{R}^+}(x) = 0$  sinon).

Le vecteur des hyperparamètres est noté  $\Phi = (P, \gamma)$ . Bien sûr, la qualité de la segmentation dépend fortement de la valeur de  $\Phi$ . Dans le cas de certaines applications, les hyperparamètres peuvent être fixés à partir d'informations disponibles concernant les signaux observés. Cependant, afin d'augmenter la robustesse de l'algorithme, les hyperparamètres peuvent être considérés comme des variables aléatoires dont les lois *a priori* restent vagues, i.e. n'apportent pas d'information, comme c'est le cas dans [4]. Cette stratégie qui implique différents niveaux dans le paradigme bayésien est connue sous le nom d'analyse Bayésienne hiérarchique. Cette analyse impose de définir des lois *a priori* sur les hyperparamètres qui sont détaillées dans la partie suivante.

## 2.3 Lois a priori des hyperparamètres

• **Hyperparamètre  $\gamma$**  : la loi *a priori* pour  $\gamma$  est une loi non-informative de Jeffrey qui traduit l'absence d'information sur cet hyperparamètre :

$$f(\gamma) = \frac{1}{\gamma} I_{\mathbb{R}^+}(\gamma).$$

• **Hyperparamètre  $P$**  : la loi *a priori* de  $P$  est une loi de Dirichlet de vecteur paramètre  $(\alpha_{0\dots 0}, \dots, \alpha_{1\dots 1})^T$ . Cette loi est définie sur l'ensemble  $S = \{P; \sum_{\epsilon \in \{0,1\}^J} P_{\epsilon} = 1, P_{\epsilon} > 0\}$  et sera notée  $f(P|\alpha) \sim \mathcal{D}_{2^J}(\alpha)$ . Les paramètres  $\gamma$  et  $P$  sont supposés indépendants. On peut alors écrire :

$$f(\Phi|\alpha) = \left( \prod_{\epsilon \in \{0,1\}^J} P_{\epsilon}^{\alpha_{\epsilon}-1} \right) \frac{1}{\gamma} I_{\mathbb{R}^+}(\gamma). \quad (2)$$

## 2.4 Loi a posteriori de $\theta$

La loi *a posteriori* du vecteur des paramètres inconnus  $\theta = (\lambda, r)$  peut être calculée à partir de la structure hiérarchique suivante :

$$f(\theta|y) = \int f(\theta, \Phi|y) d\Phi \propto \int f(y|\theta) f(\theta|\Phi) f(\Phi) d\Phi,$$

où  $f(y|\theta)$  et  $f(\Phi)$  ont été définies dans (1) et (2). Des calculs élémentaires permettent d'obtenir le résultat suivant :

$$\frac{f(r, \gamma|y)}{C(r|y)} \propto \frac{1}{\gamma} \prod_{j=1}^J \left[ \left( \frac{\gamma^{\nu}}{\Gamma(\nu)} \right)^{K_j} \prod_{k=1}^{K_j} \frac{\Gamma(n_{j,k}(r) + \nu)}{(s_{j,k}(r) + \gamma)^{n_{j,k}(r) + \nu}} \right], \quad (3)$$

avec

$$C(r|y) = \frac{\prod_{\epsilon \in \{0,1\}^J} \Gamma(S_{\epsilon}(r) + \alpha_{\epsilon})}{\Gamma\left(\sum_{\epsilon \in \{0,1\}^J} (S_{\epsilon}(r) + \alpha_{\epsilon})\right)}$$

où  $\Gamma(t)$  est la fonction Gamma. La loi *a posteriori* (3) a une forme trop complexe pour obtenir une expression simple des estimateurs bayésiens (comme l'estimateur minimisant l'erreur quadratique moyenne ou l'estimateur du maximum *a posteriori*). Nous nous proposons de générer des échantillons qui sont asymptotiquement distribués suivant la loi *a posteriori* (3) qui nous intéresse à l'aide d'une méthode MCMC. Ces échantillons seront ensuite utilisés pour estimer les paramètres inconnus du modèle de segmentation conjointe. Nous étudions dans cet article une stratégie faisant appel à un échantillonneur de Gibbs, stratégie qui a également été adoptée dans [4]. Notons cependant les différences suivantes entre les deux approches. La méthode proposée dans cet article ne nécessite pas d'utiliser des sauts réversibles puisque les paramètres inconnus apparaissant dans (3) (obtenus après reparamétrisation) appartiennent à un ensemble de dimension fixe. Ceci simplifie considérablement la complexité calculatoire de l'algorithme. La méthode proposée dans cet article permet également de segmenter conjointement plusieurs signaux, contrairement à [4].

## 3 Échantillonneur de Gibbs

L'échantillonneur de Gibbs est une méthode de simulation qui consiste à générer des données distribuées suivant une loi d'expression analytique connue à une constante multiplicative près.



Dans cet article, nous utilisons cette méthode pour générer des données distribuées suivant la loi  $f(r, \gamma|y)$ . La génération se fait en deux étapes : 1) génération d'indicatrices suivant  $f(r|\gamma, y)$  et 2) génération d'hyperparamètres  $\gamma$  suivant  $f(\gamma|r, y)$ .

### 3.1 Génération suivant $f(r|\gamma, y)$

Cette génération s'effectue à partir de  $(n-1)$  tirages suivant la loi des variables  $r_i|\gamma, y$  où  $r_i = (r_{1,i}, \dots, r_{J,i})$ . Ce vecteur aléatoire est discret et prend ses valeurs dans  $\mathcal{F} = \{0, 1\}^J$ . Ainsi cette loi est totalement caractérisée par les probabilités  $P(r_i = \epsilon|\gamma, y)$ ,  $\epsilon \in \mathcal{F}$ . En utilisant les notations  $r_{p:q} = (r_p, \dots, r_q)$  et  $r_{-i} = (r_{1:i-1}, r_{i+1:n})$ , on a le résultat suivant :

$$P(r_i = \epsilon|r_{-i}, \gamma, y) \propto f(r_i(\epsilon), \gamma|y),$$

où  $r_i(\epsilon) = (r_{1:i-1}, \epsilon, r_{i+1:n})$  et  $\epsilon \in \{0, 1\}^J$ . On obtient alors une expression simple de  $P(r_i = \epsilon|r, y)$  après normalisation.

### 3.2 Génération suivant $f(\gamma|r, y)$

Pour générer des hyperparamètres de loi  $f(\gamma|r, y)$ , il est très commode de simuler des vecteurs distribués suivant la loi conjointe  $f(\gamma, \lambda|r, y)$  en utilisant des mouvements de Gibbs. Cette étape peut alors se décomposer comme suit :

- **Tirage d'échantillons selon  $f(\lambda|\gamma, r, y)$**  : en se penchant de près sur la distribution conjointe  $f(\theta, \Phi|y)$ , on peut obtenir le résultat suivant :

$$\lambda_{j,k}|\gamma, r, y \sim \mathcal{G}(s_{j,k}(r) + \nu, n_{j,k}(r) + \gamma),$$

où  $\mathcal{G}(a, b)$  est la loi Gamma de paramètre  $a$  et  $b$ .

- **Génération suivant  $f(\gamma|\lambda, r, y)$**  : cette simulation est effectuée comme suit :

$$\gamma|\lambda, r, y \sim \mathcal{G}\left(\nu \sum_{j=1}^J K_j, \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{K_j} \lambda_{j,k}\right).$$

### 3.3 Loi *a posteriori* de l'hyperparamètre $P$

La loi *a posteriori* de  $P$  est intéressante puisqu'elle fournit les probabilités *a posteriori* d'avoir des ruptures simultanées ou non dans les différents signaux observés. Quelques calculs supplémentaires permettent de déterminer la loi *a posteriori* de  $P$  conditionnellement au vecteur des indicateurs  $r$ , aux observations  $y$  et aux paramètres  $(\alpha_\epsilon)_{\epsilon \in \mathcal{F}}$ . Il s'agit d'une loi de Dirichlet d'ordre  $2^J$  et de paramètres  $(\alpha_\epsilon + S_\epsilon(r))_{\epsilon \in \mathcal{F}}$  :

$$f(P|r, y, \alpha) \sim \mathcal{D}_{2^J}(\alpha_\epsilon + S_\epsilon(r)). \quad (4)$$

## 4 Simulations

Les simulations présentées ci-dessous ont été obtenues pour  $J = 2$  séquences de  $n = 120$  échantillons. Les instants de ruptures pour ces deux séquences sont  $l_1 = (20, 50, 100, 120)$ ,  $l_2 = (50, 120)$  tandis que les paramètres des lois de Poisson sont  $\lambda_1 = (19, 9, 16, 6)$  et  $\lambda_2 = (8, 11)$ . Les résultats ont été obtenus après avoir moyenné les échantillons fournis par 64 chaînes de Markov. Le nombre total d'itérations pour chaque chaîne est  $N_{MC} = 1000$ , qui comprend  $N_{bi} = 200$  itérations de chauffage. Nous comparons alors les résultats obtenus pour une segmentation non-conjointe et une segmentation conjointe.

Nous nous intéressons tout d'abord aux nombres de ruptures estimés dans chaque séquence. Les algorithmes de segmentation proposés génèrent des échantillons  $(r^n, \gamma^n)$  distribués suivant la loi conjointe *a posteriori*  $f(r, \gamma|y)$  qui permettent de choisir le modèle correct. En effet, le nombre de rupture dans chaque séquence peut être estimé par  $\hat{K}_j = \sum_{k=1}^n \hat{r}_{j,k}$ . Les figures 1 et 2 montrent les histogrammes des nombres de ruptures estimés dans chaque séquence à partir des derniers échantillons des chaînes de Markov, respectivement dans le cas d'une segmentation non conjointe et d'une segmentation conjointe. Ces histogrammes ont des valeurs maximales pour  $K_1 = 4$  et  $K_2 = 2$  qui correspondent aux nombres réels de changements (on rappelle que par convention il y a une rupture en  $n = 120$  pour les deux signaux).

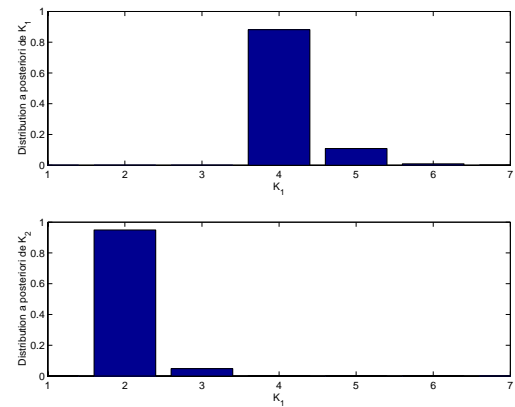


FIG. 1: Loïs *a posteriori* des nombres de ruptures (segmentation non-conjointe).

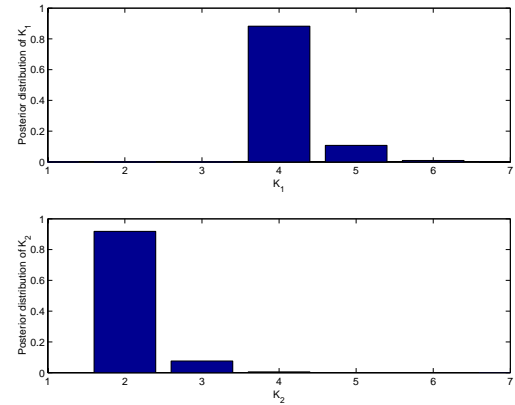


FIG. 2: Loïs *a posteriori* des nombres de ruptures (segmentation conjointe).

Les figures 3 et 4 représentent les moyennes des 800 derniers vecteurs d'indicatrices  $(r_{1,i}$  et  $r_{2,i}$  pour  $i = 1, \dots, n)$  obtenus dans le cas d'une segmentation conjointe et non conjointe. Notons que puisque  $r_{j,i}$  est une variable aléatoire binaire, la moyenne d'un vecteur  $r$  distribué suivant la loi  $f(r|y)$  fournit les probabilités *a posteriori* d'avoir des ruptures aux instants considérés. Par exemple, il y a une probabilité très importante d'avoir une rupture à la position  $l = 100$  pour les deux signaux. Les deux méthodes semblent hésiter quant à la localisation de la première rupture dans la première séquence

( $l_{11} = 20$ ). Enfin, il apparaît clairement que la rupture à la position  $l_{12} = l_{21} = 50$  dans la seconde séquence est beaucoup mieux détectée par l'approche conjointe (Fig. 4) que par l'approche non conjointe (Fig. 3).

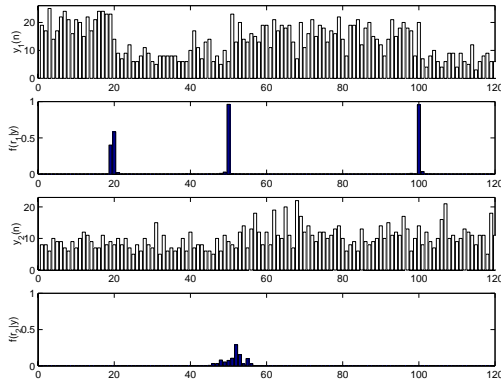


FIG. 3: Loïs a posteriori des instants de ruptures (segmentation non-conjointe).

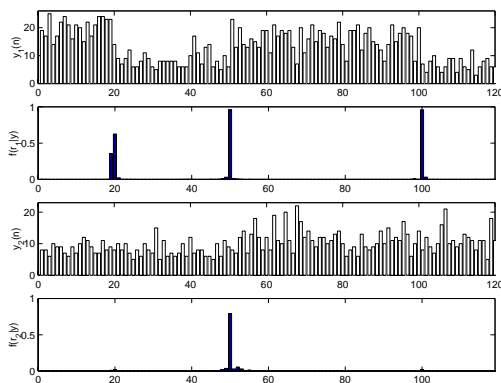


FIG. 4: Distribution a posteriori des instants de ruptures (segmentation conjointe).

L'estimation des paramètres des lois de Poisson est également intéressante puisqu'elle permet la reconstruction des signaux observés. Les lois *a posteriori* des paramètres  $\hat{\lambda}_{1i}$  et  $\hat{\lambda}_{2i}$  conditionnellement à  $K_1 = 4$  et  $K_2 = 2$  sont représentés sur les figures 5 et 6. Ces histogrammes sont en accord avec les valeurs réelles de ces paramètres de Poisson  $\lambda_1 = (19, 9, 16, 6)$  et  $\lambda_2 = (8, 11)$ .

Les derniers résultats illustrent la performance de la méthode pour l'estimation du vecteur d'hyperparamètres  $P$ . Les histogrammes des estimateurs  $\hat{P}_\epsilon$  sont représentés Fig.7. Ces histogrammes coïncident avec les lois *a posteriori* réelles données par les lois de Dirichlet (4).

## 5 Conclusion

Cet article présente un algorithme Bayésien hiérarchique permettant de segmenter conjointement plusieurs signaux issus d'une application astrophysique. La méthode proposée est adaptée à des observations Poissonniennes. Les travaux en cours consistent à étendre cette approche à d'autres catégories de données décrites dans [6] et d'effectuer une segmentation conjointe à partir de données issues de capteurs différents (par exemple segmentation de signaux de tension et d'intensité).

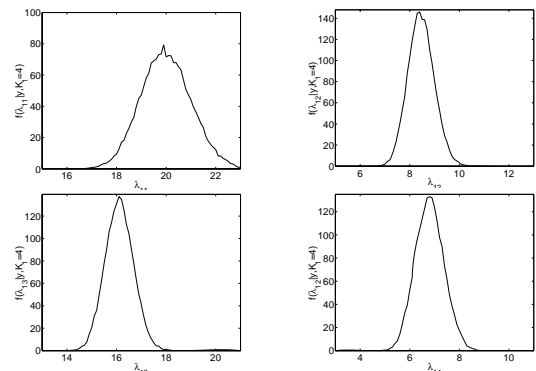


FIG. 5: Loïs a posteriori des paramètres  $\lambda_{1i}$  (pour  $i = 1, \dots, 4$ ) conditionnellement à  $K_1 = 4$ .

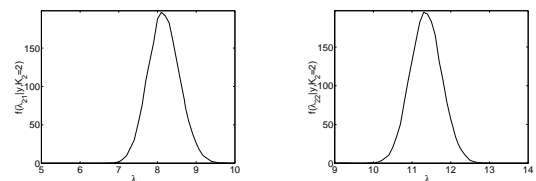


FIG. 6: Loïs a posteriori des paramètres  $\lambda_{2i}$  (pour  $i = 1, 2$ ) conditionnellement à  $K_2 = 2$ .

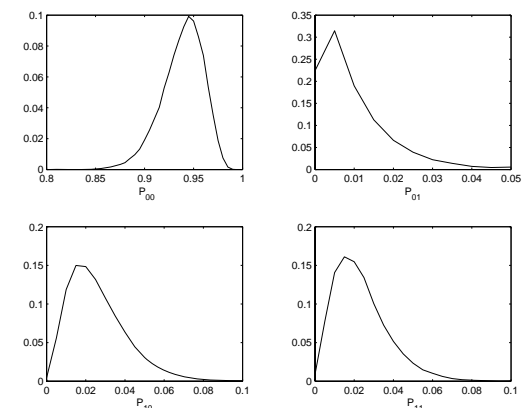


FIG. 7: Loïs a posteriori des hyperparamètres  $P_{00}, P_{01}, P_{10}$  et  $P_{11}$ .

## Références

- [1] M. Basseville et I. V. Nikiforov, *Detection of Abrupt Changes: Theory and Application*. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1993.
- [2] M. Lavielle, "Optimal segmentation of random processes," *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 46, no. 5, pp. 1365-1373, March 1998.
- [3] J-P. Cocquerez et S. Philipp, *Analyse d'images : filtrage et segmentation*. Masson, Sept. 1995.
- [4] E. Punskeya, "Bayesian curve fitting using MCMC with applications to signal segmentation," *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 50, no. 3, pp. 747-758, March 2002.
- [5] J.-Y. Tourneret, M. Doisy et M. Lavielle, "Bayesian retrospective detection of multiple changepoints corrupted by multiplicative noise. Application to SAR image edge detection," *Signal Processing*, vol. 83, no. 9, pp. 1871-1887, Sept. 2003.
- [6] J. D. Scargle, "Studies in astronomical time series: v. bayesian blocks, a new method to analyze structure in photon counting data," *The Astrophysical Journal*, pp. 405-418, Sept. 1998.



# Détection sous-optimale et quantifieurs stochastiques

Cédric DUCHÊNE, Steeve ZOZOR, Pierre Olivier AMBLARD

Laboratoire des Images et des signaux, CNRS UMR 5083  
961 Rue de la Houille Blanche, B.P. 46, 38402 Grenoble Cedex, France  
cedric.duchene@lis.inpg.fr, steeve.zozor@lis.inpg.fr, bidou.amblard@lis.inpg.fr

**Résumé** – L’implantation de la solution optimale d’un problème de détection peut être parfois difficile. Poor [1] a proposé en 1977 une solution sous-optimale fondée sur la quantification des données à traiter. Cependant, cette méthode, moins compliquée à implanter, reste néanmoins difficile à mettre en œuvre étant donné que le quantifieur optimal est solution d’un difficile problème d’optimisation. Par ailleurs, un quantifieur peut être considéré comme étant un réseau de seuils. Ces dispositifs possèdent des comportements étranges en présence de bruit [2, 3, 4] : ils sont capables d’améliorer un traitement de données par ajout de bruit sur les seuils. Nous montrerons que les quantifieurs stochastiques utilisés comme détecteurs présentent l’effet de détection améliorée par le bruit. De plus, une fois les seuils tirés, si les niveaux de quantifications sont adaptés aux statistiques des observations, alors les performances sont quasiment constantes quelle que soit la puissance des fluctuations.

**Abstract** – In many cases of binary detection problem the optimal detector cannot be implemented, notably for nonGaussian input noises. Even if optimal quantizer-detection systems [1] are easily implementable it is very difficult to determine their parameters because they are issued from an optimization problem and depend on the data at hand. Another point of view is to consider a quantizer as an array of threshold devices. These systems were studied in [2, 3, 4] for their strange behavior often named stochastic resonance: they are able to improve the processing of signals by adding noise prior to the nonlinearities. We propose to build quantizer-decision systems with stochastic thresholds which are able to use noise in a benefic way. Also, we will present the performance of detectors whose levels are fitted to the statistics of the datas, and we will remark these performance are constant whatever the power of the fluctuations.

## 1 Détection et quantifieurs

Considérons le problème de détection suivant :

$$\left. \begin{array}{l} H_0 : x_i = \xi_i + s_0 \\ H_1 : x_i = \xi_i + s_1 \end{array} \right\} i = 1, \dots, n \quad (1)$$

dans lequel  $x_i \sim f_j(x) = f_\xi(x - s_j)$  avec  $f_\xi$  la densité de probabilité du bruit de canal,  $f_j$  la densité de probabilité des observations  $x_i$  conditionnée par l’hypothèse  $H_j$ . Nous nous placerons dans le cadre d’étude le plus simple : le bruit  $\xi$  est indépendant et identiquement distribué (iid) et les signaux  $s_0$  et  $s_1$  sont constants. Par conséquent, la séquence d’observation  $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=0}^n$  est iid également. Selon les critères de Neyman Pearson, Bayes ou encore du Maximum *a posteriori* (MAP) [5], la meilleure stratégie de décision est le test du log-rapport-de-vraisemblance (LLRT pour log-likelihood ratio test) :

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \log \frac{f_1(\mathbf{x})}{f_0(\mathbf{x})} = \sum_{i=1}^n \log l(x_i) \begin{array}{l} H_1 \\ \geq \eta_\Lambda \\ H_0 \end{array} \quad (2)$$

où  $l(x_i) = f_1(x_i)/f_0(x_i)$  est le rapport de vraisemblance pour chaque échantillon  $x_i$ . Cependant, cette solution ne peut pas toujours être physiquement implantée dans une procédure de détection. En effet, il se peut que nous n’ayons pas accès aux densités  $f_j$ , ou que celles-ci n’aient pas d’expression analytique (cas des densités  $\alpha$ -stable par exemple [6]). Ce sont les principales raisons qui ont poussé de nombreux auteurs [1, 7, 8, 9] à

se pencher sur le problème de conception de détecteurs sous-optimaux. Plusieurs stratégies, autres que celles suivies pour l’élaboration du LLRT, peuvent être envisagées pour la construction de détecteurs sous-optimaux. Ces stratégies doivent tenir compte des informations disponibles sur le problème à traiter. En revanche, comme nous l’avons déjà souligné ce sont souvent les informations non disponibles qui nous guident vers une stratégie sous-optimale. Dans tous les cas, utiliser un tel détecteur conduit bien évidemment à une perte de performances par rapport à celles qui seraient obtenues avec le LLRT, celles-ci pouvant être bornées par les expressions données par Orsak et Paris dans [7]. D’autres auteurs [1, 8, 9] ont restreint le problème en imposant la structure du détecteur à celle d’un quantifieur. Rappelons qu’un quantifieur scalaire est un dispositif qui convertit une entrée réelle en une grandeur prédéfinie sur  $M$  niveaux. A chaque niveau de quantification est associé un intervalle auquel chaque entrée est comparée. Un quantifieur  $Q$  est complètement caractérisé par le couple de vecteurs  $(\mathbf{t}, \mathbf{q})$  et est défini par :

$$Q : \mathbb{R} \mapsto \{q_1, \dots, q_M\} \\ x \mapsto y = q_k \text{ si } x \in [t_{k-1}; t_k[ \quad (3)$$

où  $t_k$  sont seuils et  $q_k$  les niveaux de quantification. Dans ce cas, la stratégie de décision basée sur le quantifieur  $Q$  est décrite par :

$$T_Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n Q(x_i) = \sum_{k=1}^M Z_k \cdot q_k \begin{array}{l} H_1 \\ \geq \eta \\ H_0 \end{array} \quad (4)$$

où  $Z_k$  correspond au nombre de fois où une entrée  $x_i$  tombe dans l'intervalle  $[t_{k-1}; t_k[$ . Sous chaque hypothèse  $H_j$ ,  $j = 0, 1$ , le vecteur  $\mathbf{Z} = \{Z_1, \dots, Z_M\}$  est distribué selon une loi multinomiale que nous noterons :

$$\mathbf{Z} \sim \mathcal{M}(n, p_{1,j}(\mathbf{t}), \dots, p_{M,j}(\mathbf{t})) \quad (5)$$

avec  $p_{k,j}(\mathbf{t}) = \Pr[x_i \in [t_{k-1}; t_k[ \mid H_j]$ . Poor et Thomas ont proposé dans [1] une méthode fondée sur la recherche des intervalles de quantification optimaux par maximisation d'une « distance » ( $f$ -divergence) entre les densités de probabilité post quantification  $f_{j,Q}(\mathbf{x})$  pour  $j = 0, 1$ . Au préalable, on montre que pour  $\mathbf{t}$  fixé, les valeurs des niveaux de quantification  $\mathbf{q}$  optimaux sont les rapports de vraisemblance locaux pour chaque intervalle de quantification. Il reste ensuite à trouver la valeur des seuils  $\mathbf{t}$  optimaux maximisant les statistiques sous chaque hypothèse après quantification. Cette procédure se résume par :

$$q_k^{opt} = \log \frac{F_1(t_k) - F_1(t_{k-1})}{F_0(t_k) - F_0(t_{k-1})} \quad (6)$$

$$\mathbf{t}^{opt} = \underset{\mathbf{t}}{\text{Arg max}} \{d_f(f_{0,Q}(\mathbf{x}), f_{1,Q}(\mathbf{x}))\} \quad (7)$$

dans laquelle on note  $F_j(t_k) = \int_{-\infty}^{t_k} f_j(x) dx$  la fonction de répartition des observations conditionnelle à  $H_j$ . Le quantifieur ainsi obtenu, peut être vu comme étant la meilleure approximation par escalier de la log-rapport-de-vraisemblance du problème.

## 2 Quantifieurs stochastiques

Nous avons étudié deux quantifieurs stochastiques différents. Ceux-ci sont obtenus par fluctuations aléatoires des seuils de quantification  $t_k$ . On supposera les bruits ajoutés sur chaque seuil indépendant. Ainsi, la densité conjointe des seuils bruités  $\tilde{t}_k$  se factorise sous la forme  $f_{\tilde{\mathbf{t}}}(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{k=1}^{M-1} f_{\tilde{t}_k}(\theta_k)$ . Pour garder une structure de quantifieur nous imposons aux seuils bruités la contrainte suivante :  $\tilde{t}_0 = -\infty < \dots < \tilde{t}_M = \infty$ .

- Le premier quantifieur porte le nom de quantifieur uniforme stochastique (QUS). Il est réalisé à partir d'un quantifieur déterministe dont les bornes  $\mathbf{t}$  et les niveaux  $\mathbf{q}$  de quantification sont répartis de façon uniforme et en faisant fluctuer  $\mathbf{t}$ .
- Le second, est dit adapté (QAS), car les niveaux  $\mathbf{q}$  ne sont plus uniformes mais pour chaque intervalle le niveau de quantification prend la valeur du rapport de vraisemblance local comme dans (6).

### 2.1 QUS et $P_e$ minimale

Nous nous sommes intéressés à l'influence du seuil  $\eta$  et de la puissance des fluctuations  $\sigma_{\tilde{\mathbf{t}}}^2$  pour un schéma de détection basé sur un QUS. Dans cette partie, les nouvelles bornes du quantifieur sont données par l'expression  $\tilde{t}_k = t_k + \tau_k$  avec  $\tau_k$  distribué uniformément sur l'intervalle  $[0, 2\sqrt{3}\sigma_{\tilde{\mathbf{t}}}]$  et  $t_k$  la valeur de la borne sans fluctuation. Nous avons retenu la probabilité d'erreur comme

critère d'évaluation des performances de nos schémas de détection. Pour un quantifieur déterministe  $P_e$  est obtenue facilement en utilisant la propriété (5). Dans le cas d'un quantifieur stochastique, on écrit que la probabilité d'erreur conditionnelle à  $\tilde{\mathbf{t}}$  est celle d'un quantifieur déterministe que l'on note  $P_e|_{\tilde{\mathbf{t}}}$ . Il suffit alors de moyenner suivant la densité conjointe des seuils bruités :

$$P_e = \int_{\mathbb{R}^{M-1}} P_e|_{\tilde{\mathbf{t}}=\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}) \cdot f_{\tilde{\mathbf{t}}}(\boldsymbol{\theta}) \cdot d\boldsymbol{\theta}$$

pour obtenir la probabilité d'erreur du quantifieur stochastique. On obtient alors :

$$\begin{aligned} P_e &= \pi_0 P_{D_1|H_0} + \pi_1 P_{D_0|H_1} \\ &= \pi_1 + \int_{\mathbb{R}^{M-1}} \sum_{\mathbf{l} \in \mathcal{D}(n, \mathbf{q}(\boldsymbol{\theta}), \eta)} \frac{n!}{l_1! \dots l_M!} \\ &\quad \times \left( \pi_0 \prod_{k=1}^M p_{k,1}^{l_k}(\boldsymbol{\theta}) - \pi_1 \prod_{k=1}^M p_{k,0}^{l_k}(\boldsymbol{\theta}) \right) f_{\tilde{\mathbf{t}}}(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \end{aligned} \quad (8)$$

dans laquelle  $\mathcal{D}(n, \mathbf{q}, \eta) = \{\mathbf{l} \in \{0, \dots, n\}^M \text{ tel que } \sum_{k=1}^M l_k = n \text{ et } \sum_{k=1}^M l_k q_k > \eta\}$  et où  $\mathcal{C}(\mathbf{l}) = \{0\} \times \{0, 1, \dots, l_2\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, l_M\}$ .  $\pi_j$  sont les probabilités *a priori* des hypothèses  $H_j$ . Pour un quantifieur uniforme, l'indépendance des  $t_k$  et quelques développements mathématiques conduisent à une expression de  $P_e$  dans laquelle seules des intégrales simples interviennent :

$$\begin{aligned} P_e &= \pi_1 + \sum_{\mathbf{l} \in \mathcal{D}(n, \mathbf{q}, \eta), \mathbf{m} \in \mathcal{C}(\mathbf{l})} \frac{n! (-1)^{\sum_{k=1}^M m_k}}{\prod_{k=1}^M (l_k - m_k)! m_k!} \\ &\quad \times \left( \sum_{i=0}^1 (-1)^i \pi_i \prod_{k=1}^{M-1} \int_{\mathbb{R}} F_i(\theta) \theta^{l_k - m_k + m_{k+1}} f_{\tilde{t}_k}(\theta) d\theta \right) \end{aligned} \quad (9)$$

La figure 1 représente l'évolution de la probabilité d'erreur d'un QUS en fonction de la puissance des fluctuations et du seuil de détection. Celle-ci est calculée par intégration numérique de (9). Le problème est asymétrique, les constantes à détecter sont :  $s_0 = 0$  et  $s_1 = 2$ . Le quantifieur uniforme est de dimension  $M = 4$ . Ses seuils sans bruit sont  $\mathbf{t} = [-\infty, -2, 0, 2, \infty]$  et ses niveaux de quantification sont  $\mathbf{q} = [-3, -1, 1, 3]$ . Notons que le quantifieur est symétrique sans fluctuation, mais dès l'application de fluctuations non centrées  $\tau_k$  sur ces seuils  $t_k$  il perd cette propriété de symétrie. Il est intéressant de remarquer que l'influence du seuil  $\eta$  ne modifie pas les performances de détection de manière continue. Les courbes  $P_e$  à  $\sigma_{\tilde{\mathbf{t}}}^2$  fixée sont constantes par paliers. Ceci s'explique par le fait que  $T_Q$  est une grandeur discrète définie dans un ensemble de taille finie. En effet, les quantifieurs en général, possèdent la propriété de robustesse vis-à-vis des fluctuations du seuil de détection. On peut également remarquer que pour un seuil  $\eta$  fixe, les fluctuations peuvent nous conduire à une amélioration des performances. C'est par exemple le cas pour  $\eta = 1$ , où la probabilité d'erreur  $P_e$  atteint un minimum en  $\sigma = 0.23$ . Le QUS possède un comportement de « détection améliorée par le bruit ». Ce comportement s'explique en partie par le fait que : sans fluctuation le quantifieur est centré, alors que le problème

est décentré. Si nous ne sommes pas en mesure de repositionner correctement le quantifieur, alors l'ajout de bruit de moyenne non nulle, peut corriger son mauvais positionnement vis-à-vis des constantes  $s_0$  et  $s_1$ . La probabilité d'erreur minimale ( $P_e = 0.03$ ) est obtenue sans bruit, pour  $\sigma_{\mathbf{t}} = 0$  et pour la plage  $3 < \eta < 5$ .

La figure 3 donne les variations de  $P_e$  (cercles) en fonction de  $\sigma_{\mathbf{t}}^2$  pour le QUS avec un seuil  $\eta = 1$ , ainsi que le minimum de la probabilité d'erreur (croix) de ce même quantifieur. La première courbe correspond à une tranche du réseau tracé dans la figure 1, et la seconde est obtenue pour  $\sigma_{\mathbf{t}}$  fixé et en recherchant le seuil de détection  $\eta$  donnant la plus faible probabilité d'erreur, c'est à dire  $P_e^{\min} = \text{Arg min}_{\eta} \{P_e(\eta)\}$ . La ligne en pointillé représente les performances obtenues avec un quantifieur optimal (sans bruit de seuil) fondé sur (6) et (7) et où la divergence utilisée est la divergence de Kullback.

Remarquons que le QUS présente une courbe de performance qui tangente celle de probabilité d'erreur minimale pour une large plage de valeur de  $\sigma_{\mathbf{t}}$ . En terme de stratégie de décision, il suffirait donc d'optimiser la puissance des fluctuations pour obtenir un quantifieur assez performant lorsqu'il serait impossible d'ajuster le seuil  $\eta$ , ou encore d'éviter une phase coûteuse d'optimisation du seuil  $\eta$ . Notons également que les pertes de performance du QUS sans bruit ( $\sigma_{\mathbf{t}} = 0$  et  $3 < \eta < 5$ ) sont très faibles par rapport aux performances de détection du quantifieur optimal.

## 2.2 QAS versus QUS

Dans cette partie nous allons comparer les performances de deux quantifieurs stochastiques différents : le quantifieur uniforme et le quantifieur adapté. Dans les deux cas, l'expression des seuils bruités est donnée par  $\tilde{t}_k(i) = t_k + \tau_k(i)$  avec  $\tau_k(i)$  distribué uniformément sur l'intervalle  $[0, 2\sqrt{3}\sigma_{\mathbf{t}}]$  et  $t_k$  la valeur du seuil sans fluctuation. Ainsi, cette étude sera menée pour deux modes de fonctionnement distinct des quantifieurs :

- Le mode variant dans le temps : où pour chaque échantillons  $x_i$  le vecteur  $\tilde{\mathbf{t}}$  est tiré à nouveau.
- Le mode invariant dans le temps : où  $\tilde{\mathbf{t}}$  reste le même pour toute la séquence  $\mathbf{x}$ , i.e.  $\tau_k(i) = \tau_k$ .

Comme précédemment, les performances de ces quatre quantifieurs sont évaluées à l'aide de leur probabilité d'erreur. Dans 2.1, à l'aide de (9), dans un cadre invariant dans le temps, nous avons réussi à simplifier  $P_e$  en une expression moins coûteuse en calcul. Dans le cadre du quantifieur adapté, cette tâche se complique fortement du fait que les niveaux  $\mathbf{g}$  de quantification sont des fonctions des seuils bruités  $\tilde{\mathbf{t}}$ . Dès que le quantifieur devient variant dans le temps, il n'est même plus possible de s'appuyer sur (5) pour le calcul de  $P_e$ . Donc, dans la majorité des cas, on s'aperçoit qu'il n'existe pas d'écriture simple de la probabilité d'erreur. Nous pouvons alors : soit avoir recours à une intégration numérique coûteuse pour son évaluation, ou encore estimer sa valeur par une méthode de Monte-Carlo. Pour tracer la figure 2 nous avons opté pour cette dernière démarche. Cette figure décrit donc le comportement des deux quantifieurs (uniforme et adapté) dans le

cas variant et invariant temporellement. Les performances sont évaluées en traçant l'évolution d'une estimation de la probabilité d'erreur  $P_e$  en fonction de la puissance des fluctuations pour un bruit de canal Laplacien. Comme sur la figure 3, la ligne en pointillé correspond aux performances obtenues avec un quantifieur optimal (sans bruit de seuil) fondé sur (6) et (7) et où la divergence utilisée est la divergence de Kullback.

On peut imaginer que dans le cas où nous n'avons pas accès aux densités  $f_j$ , il est judicieux d'implanter le quantifieur uniforme et d'optimiser la puissance des fluctuations afin d'obtenir les meilleures performances de détection. Cette stratégie peut aussi se révéler efficace en supposant que le quantifieur évolue dans un environnement intrinsèquement bruité. Ainsi, par ajout de bruit sur les seuils, on peut espérer compenser l'effet néfaste du bruit natif. Dans le cas où les densités sont connues, on peut alors utiliser le quantifieur adapté. Dans ce cas, nous devons calculer les valeurs des rapports de vraisemblance uniquement pour chaque borne de quantification et non pas pour chaque observation  $x_i$  comme on devrait le faire avec le LLRT. De même, on peut remarquer combien le quantifieur adapté est peu sensible aux variations de  $\sigma_{\mathbf{t}}$ . Les performances sont pratiquement semblables quelque soit la puissance des fluctuations. Nous pouvons alors imaginer une stratégie de conception de détecteur fondée sur celle de Poor, mais en s'affranchissant de l'étape d'optimisation des bornes  $t_k$ . En d'autres termes cette méthode de conception peut être vue comme une version stochastique de l'algorithme de Poor. Finalement, cette stratégie sous-optimale, beaucoup plus simple que le quantifieur optimal, possède néanmoins de bonnes performances. En effet, la probabilité d'erreur du quantifieur adapté est très proche de celle du quantifieur optimal de Poor.

## 3 Conclusion

Nous avons proposé deux solutions sous-optimales basées sur l'utilisation de quantifieur stochastique. La première, le QUS, trouve un intérêt d'utilisation lorsqu'il est impossible d'avoir accès aux densités  $f_j$ . L'optimisation de la puissance des fluctuations  $\sigma_{\mathbf{t}}^2$ , bien que nécessaire, semble assez simple à mettre en œuvre car pour une large plage de valeur de  $\sigma_{\mathbf{t}}^2$ , le quantifieur donne ses meilleures performances. Quant au QAS, celui-ci peut être mis en pratique uniquement lorsque les densités  $f_j$  sont connues. Il est véritablement plus simple d'implanter le QAS plutôt que le LLRT. Le QAS donne des performances pratiquement équivalentes au quantifieur optimal de Poor. Nous avons vu que quelque soit la puissance des fluctuations  $\sigma_{\mathbf{t}}^2$ , ce quantifieur donne globalement les mêmes résultats de détection. Dans les deux cas, ce type de détection présente un intérêt pratique lorsque des bruits sont natifs dans l'implantation hard du quantifieur. Par ajout de bruit sur les seuils, on espère contrebalancer ces effets indésirables. Pour conclure, il est intéressant de remarquer à quel point ces schémas de détection sont semblables à certaines architectures neuronales (notamment l'architecture Pool).

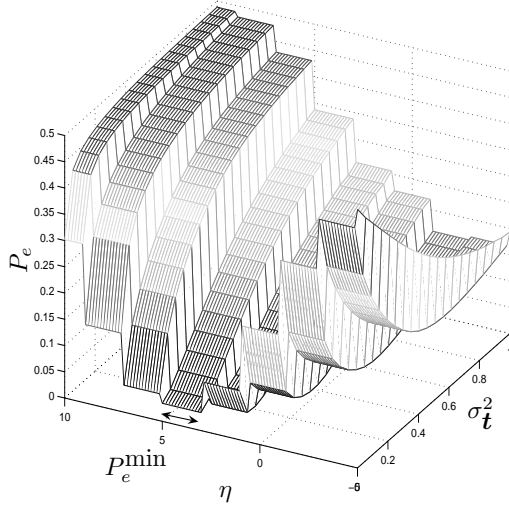


FIG. 1 – Probabilité d’erreur d’un QUS invariant temporellement en fonction de la puissance des fluctuations  $\sigma_t^2$  et du seuil de détection  $\eta$ . Dimension  $M = 4$ , seuils de quantification  $\mathbf{t} = [-\infty, -2, 0, 2, \infty]$ , niveaux de quantification  $\mathbf{q} = [-3, -1, 1, 3]$ . Nombre d’échantillon  $n = 5$ , bruit de canal Laplacien centré et de variance unitaire  $\sigma_\epsilon = 1$ . Constantes à détecter  $s_1 = 2$  et  $s_0 = 0$ .

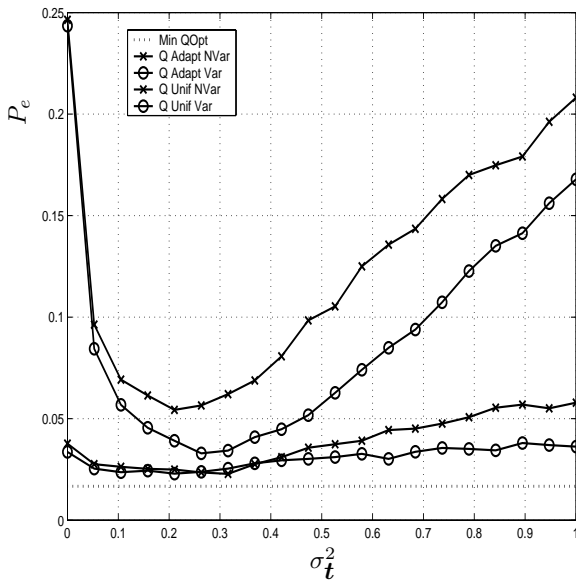


FIG. 2 – Probabilité d’erreur des QUS et QAS en fonction de la puissance des fluctuations  $\sigma_t^2$  dans un cadre variant et invariant dans le temps. Les autres paramètres sont identiques à ceux de la Figure 1.

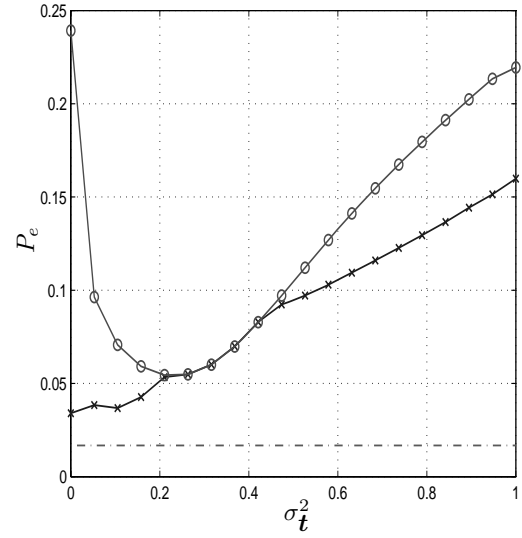


FIG. 3 – Cercles : Probabilité d’erreur d’un QUS invariant temporellement en fonction de la puissance des fluctuations  $\sigma_t^2$  pour un seuil de détection  $\eta = 1$  - Croix : Probabilité d’erreur minimale de ce même quantifieur. Les autres paramètres sont identiques à ceux de la Figure 1

## Références

- [1] H. V. Poor and J. B. Thomas. Application of ali-silvey distance measures in the design of generalized quantizers for binary decision systems. *IEEE Transactions on Communication*, 25(9) :893–900, September 1977.
- [2] D. Rousseau, F. Duan, and F. Chapeau-Blondeau. Suprathreshold stochastic resonance and noise-enhanced fisher information in arrays of threshold devices. *Physical Review E*, 68, 2003.
- [3] N. G. Stocks. Suprathreshold stochastic resonance in multilevel threshold systems. *Physical Review Letters*, 84(11) :2310 – 2313, March 2000.
- [4] N. G. Stocks. Information transmission in parallel threshold arrays : Suprathreshold stochastic resonance. *Physical Review E*, 63, March 2001.
- [5] H. L. Van Trees. *Detection, Estimation, and Modulation Theory*. part 1. John Wiley & Sons, New York, 1968.
- [6] G. Samorodintsky and M. S. Taqqu. *Stable nonGaussian random processes. Stochastic models with infinite variance*. Chapman and Hall, New-York, 1994.
- [7] G. C. Orsak and B.-P. Paris. On the relationship between measures of discrimination and the performance of suboptimal detectors. *IEEE Transactions on Information Theory*, 41(1) :188–203, January 1995.
- [8] S. A. Kassam. Optimum quantization for signal detection. *IEEE Transactions on Communications*, 25(5) :479–484, May 1977.
- [9] B. Picinbono and P. Duvaut. Optimum quantization for detection. *IEEE Transaction on Communications*, 36(11) :1254, November 1988.

# Algorithme de Synthèse d'Ouverture Basé sur un Détecteur à Sous Espace

Rémi DURAND<sup>1</sup>, Guillaume GINOLHAC<sup>2</sup>, Philippe FORSTER<sup>2</sup>, Laetitia THIRION<sup>1</sup>, Marc LESTURGIE<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire SONDRRA

Plateau du Moulon - 3 rue Joliot Curie, 91192 Gif-sur-Yvette, France

<sup>2</sup>GEA

Univ. Paris X, PST Ville d'Avray, 1 ch. Desvallières, 92410 Ville d'Avray, France

remi.durand@supelec.fr, guillaume.ginolhac@u-paris10.fr

**Résumé** – Cet article traite de l'imagerie de cibles localisées sous un couvert forestier à l'aide d'un Radar à Synthèse d'Ouverture (RSO) Large Bande, fonctionnant en UHF-VHF (fréquence centrale entre 100 MHz et 1 GHz). Partant de l'idée qu'une cible est constituée d'un ensemble de plaques, nous développons un algorithme original d'imagerie basé sur un détecteur à sous espace. Nous montrons que quelque soit l'orientation d'une plaque, l'ensemble de ses réponses appartient à un sous espace restreint et nous projetons le signal reçu réel dans ce sous espace. Ensuite, cet algorithme est testé sur des cas simples de simulation où la cible est une plaque et les performances de détection de cet algorithme sont comparées avec un algorithme traditionnel d'imagerie RSO. Les résultats montrent une nette amélioration des performances de localisation et de détection dans le cas de plaques noyées dans du bruit blanc, gaussien.

**Abstract** – This article deals with the imagery of targets located beneath foliage with a Synthetic Aperture Radar (SAR), Wide Band, UHF-VHF (Frequencies from 100 MHz to 1 GHz). Assuming that a man made target is a gathering of plates, we develop an original imagery algorithm based on a subspace detector. We show that, whatever the plate orientation is, all its responses belong to a reduced subspace and we project the received signal in this subspace. Then, this algorithm is tested on simple cases of simulation where plates are used as targets and the detection performances are compared with ones obtained with a traditional SAR algorithm. The results show an important improvement of localisation and detection performances in the case of plates dropped in a gaussian white noise.

## 1 Introduction

Le Radar à Synthèse d'Ouverture (RSO) est un radar embarqué sur un avion ou un satellite. Celui ci permet d'imager une scène mettant en jeu des cibles réparties sur une zone donnée (Figure 1). Les RSO VHF-UHF (d'environ 100 MHz à 1 GHz) émettent des signaux dont la longueur d'onde leur permet de pénétrer le couvert forestier et de détecter des cibles cachées sous celui ci [1]. Cependant, sans un post traitement adapté, il est souvent difficile de distinguer une cible du fouillis, le taux de fausse alarme étant très élevé. Le but de cet article est d'exposer un algorithme de formation d'image permettant de réduire le taux de fausse alarme et donc d'améliorer la détection.

Les algorithmes traditionnels de formation d'image sont basés sur l'intercorrélation entre un modèle du signal attendu et le signal reçu. Ces techniques utilisent comme modèle le signal émis retardé. En supposant que toutes les cibles répondent comme des points isotropes, ce modèle exploite seulement la position des éléments et exclut les autres propriétés, notamment physiques, de la cible.

Partant de l'idée qu'une cible manufacturée peut être vue comme un assemblage d'éléments canoniques, nous allons d'abord considérer des objets construits à l'aide de plaques métalliques de différentes tailles [2], et nous proposons donc l'utilisation d'un algorithme adapté à la réponse d'une plaque. Cette

approche présente l'avantage de prendre en compte la variabilité du coefficient de réflexion en fonction de l'angle d'incidence du signal émis et de l'orientation de la cible. On sait qu'en basse fréquence, la réponse de la forêt est dominée par celle des troncs (et des branches primaires) qui présente une symétrie azimutale. Si la cible manufacturée présente un comportement angulaire spécifique, il sera alors possible de les discriminer grâce à ce modèle. En prenant directement en compte ces nouveaux paramètres (angle d'incidence, position de la cible...), l'algorithme ainsi développé gagnerait en précision, mais perdrait en robustesse. En effet, il est impossible de développer un algorithme prenant en compte toutes les orientations d'une plaque. Dans cet article, nous montrons que l'ensemble des réponses d'une plaque est contenu dans un espace restreint. Pour développer cet algorithme, nous utilisons le test du Rapport de Vraisemblance Généralisé (RVG) [3]. Nous montrons que cette approche consiste à projeter le signal reçu dans l'espace restreint des réponses d'une plaque. Cet algorithme nous permet d'améliorer les performances de détection d'une plaque tout en gardant la robustesse des algorithmes classiques.

Nous exposerons dans une première partie les différentes étapes nécessaires à l'implémentation de l'algorithme. La deuxième partie rassemble les études de performance de l'algorithme pour la détection de plaques noyées dans du bruit blanc gaussien.

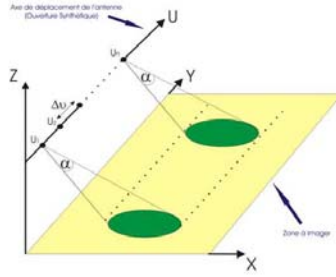


Figure 1: Système d'acquisition de données RSO

## 2 Algorithme de synthèse d'ouverture

### 2.1 Un algorithme classique de reconstitution d'image

L'algorithme de Corrélation Spatio-Temporelle (CST) est un algorithme RSO de formation d'image. Il consiste à corréler le signal reçu avec le modèle de signal attendu pour chaque position \$(x,y)\$ à imager. On a ainsi [4]:

$$I(x, y) = \int_t \sum_{u_n} z(t, u_n) \cdot e^*(t - r(u_n, x, y)) dt \quad (1)$$

où \$I(x, y)\$ est l'amplitude de l'image en \$(x,y)\$ et \$z(t, u\_n)\$ le signal reçu en fonction du temps et de la position \$u\_n\$ de l'antenne. La cible étant considérée comme isotrope, sa réponse est modélisée par le signal émis \$e(t - r(u\_n, x, y))\$ pour chaque position \$u\_n\$, retardée de \$r(u\_n, x, y)\$ (le temps mis par le signal pour faire un aller retour entre l'émetteur et la cible). De ce fait, ce modèle ne prend pas en compte les variations du signal diffracté par une cible, notamment en fonction de l'angle d'incidence du signal et de la position de la cible.

### 2.2 Algorithme basé sur un détecteur à sous-espace

#### 2.2.1 Problème de détection d'une cible

Pour chaque position \$(x,y)\$ à imager, nous implémentons un détecteur basé sur le test du RVG, qui estime si une plaque (quelque soit son orientation) est présente ou pas. Soit :

$$\mathbf{z} \in \mathbb{C}^M, \quad \mathbf{z} = [\mathbf{z}_1^T \quad \mathbf{z}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{z}_n^T]^T \quad (2)$$

l'ensemble des \$M\$ échantillons du signal reçu par le récepteur aux différentes positions \$u\_1, u\_2, \dots, u\_n\$ (Figure 1), où \$\mathbf{z}\_i\$ est le signal mesuré échantillonné à la position \$u\_i\$. Soit le problème de détection suivant :

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{z} = \mathbf{b} \\ H_1 : \mathbf{z} = a \mathbf{s}_{xy}(\alpha, \beta) + \mathbf{b} \end{cases} \quad (3)$$

avec \$H\_0\$ l'hypothèse considérant que le signal reçu est du bruit blanc de variance \$\sigma^2\$ et \$H\_1\$ l'hypothèse bruit plus plaque présente à la position \$(x\_0, y\_0)\$ et avec l'orientation \$(\alpha\_0, \beta\_0)\$. Nous définissons maintenant \$\mathbf{s}\_{xy}(\alpha, \beta)\$:

$$\mathbf{s}_{xy}(\alpha, \beta) = [\mathbf{s}_{xy,1}(\alpha, \beta)^T \quad \dots \quad \mathbf{s}_{xy,n}(\alpha, \beta)^T]^T \quad (4)$$

le signal non bruité reçu par le récepteur aux différentes positions \$u\_1, u\_2, \dots, u\_n\$ pour une plaque située en \$(x,y)\$ et dont

l'orientation est définie par les angles d'Euler [7] \$(\alpha, \beta)\$ variant dans \$I = [0, \pi]^2\$. Ces angles définissent la rotation appliquée à la plaque par rapport à sa position initiale (plaque parallèle au plan \$(xOy)\$). On note \$\mathbf{s}\_{xy,i}(\alpha, \beta)\$ le signal non bruité mesuré à la position \$u\_i\$ lorsqu'une plaque est située en \$(x,y)\$. \$a\$ est le terme complexe représentant l'atténuation.

Soit :

- \$V\_{xy}\$ la variété contenant l'ensemble des réponses \$\mathbf{s}\_{xy}(\alpha, \beta)\$ avec \$(\alpha, \beta)\$ décrivant \$I\$ ;
- \$E\_{xy}\$ l'espace vectoriel contenant au mieux la variété \$V\_{xy}\$ au sens d'un critère exposé ci-après.

Si aucun paramètre n'est inconnu, le problème de détection se ramène au test de maximum de vraisemblance [3] :

$$T = \frac{p(\mathbf{z}|H_1)}{p(\mathbf{z}|H_0)} \quad (5)$$

Or, le but de notre approche est d'être plus adapté une réponse de plaque quelque soit son orientation. Le cas optimal est d'avoir la moyenne de \$\mathbf{z}|H\_1\$ dans la variété \$V\_{xy}\$. On pourrait envisager de tester toutes les orientations possibles de la plaque. Cette approche conduirait à une charge de calcul prohibitive. C'est pourquoi nous nous limiterons à tester si la moyenne de \$\mathbf{z}|H\_1\$ appartient à \$E\_{xy}\$, \$E\_{xy}\$ contenant au mieux la variété \$V\_{xy}\$ au sens d'un critère précisé ci-après. Dans ce cas la quantité test du RVG s'écrit :

$$T = \frac{\max_{\mathbf{v} \in E_{xy}} p(\mathbf{z}|\mathbf{v})}{p(\mathbf{z}|H_0)} \quad (6)$$

avec \$(^H = \text{transposé conjugué})\$ :

$$p(\mathbf{z}|\mathbf{v}) = \frac{1}{\pi^M \sigma^{2M}} \exp \left[ -\frac{(\mathbf{z} - \mathbf{v})^H (\mathbf{z} - \mathbf{v})}{\sigma^2} \right] \quad (7)$$

le paragraphe suivant montre que maximiser la probabilité \$p(\mathbf{z}|H\_1)\$ revient à projeter \$\mathbf{z}\$ sur une base particulière.

#### 2.2.2 Développement du détecteur basé sur le test du Rapport de Vraisemblance Généralisé (RVG)

A - Calcul du MVG

Maximiser \$p(\mathbf{z}|H\_1)\$ nécessite la minimisation de \$\|\mathbf{z} - \mathbf{v}\|^2\$ par rapport à \$\mathbf{v}\$ d'après (7). Supposons dans un premier temps que nous disposons d'une base de l'espace \$E\_{xy}\$ de dimension \$R\$. Nous notons \$U\_{xy}\$ la matrice \$M \times R\$ dont les colonnes forment une base orthonormée de \$E\_{xy}\$. Le minimum de \$\|\mathbf{z} - \mathbf{v}\|^2\$ vaut :

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{v}\|_{min}^2 = \|\mathbf{z} - U_{xy} U_{xy}^H \mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{z}\|^2 - \|U_{xy}^H \mathbf{z}\|^2 \quad (8)$$

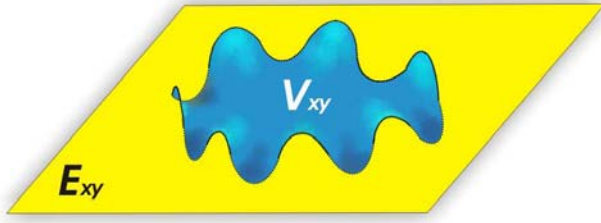
Dans ces conditions le maximum de vraisemblance \$T\$ s'écrit :

$$T = \frac{\frac{1}{\pi^M \sigma^{2M}} \exp \left[ -\frac{\|\mathbf{z}\|^2 + \|U_{xy}^H \mathbf{z}\|^2}{\sigma^2} \right]}{\frac{1}{\pi^M \sigma^{2M}} \exp \left[ -\frac{\|\mathbf{z}\|^2}{\sigma^2} \right]} \quad (9)$$

Si on pose \$I(x, y) = \log(T)\$, on a finalement :

$$I(x, y) = \left\| \frac{U_{xy}^H \mathbf{z}}{\sigma} \right\|^2 \quad (10)$$

On obtient donc le RVG par projection du signal reçu dans l'espace \$E\_{xy}\$.

Figure 2: Espace  $E_{xy}$  contenant 'au mieux' la variété  $V_{xy}$ 

### B - Détermination du sous-espace

On détermine l'espace  $E_{xy}$  comme étant l'espace vectoriel de rang  $R$  contenant au mieux la variété  $V_{xy}$  au sens de la minimisation du critère :

$$C(U_{xy}) = \int_I \|s_{xy}(\alpha, \beta)\|^2 - \|U_{xy}^H s_{xy}(\alpha, \beta)\|^2 d\alpha d\beta \quad (11)$$

En discrétisant  $\alpha$  et  $\beta$  on aboutit au critère approché suivant :

$$C'(U_{xy}) = \sum_{i,j} \|s_{xy}(\alpha_i, \beta_j)\|^2 - \|U_{xy}^H s_{xy}(\alpha_i, \beta_j)\|^2 \quad (12)$$

La figure 2 donne une représentation simplifiée de ce problème. Soit  $S_{xy}$  la matrice dont les vecteurs colonnes sont formés par les vecteurs  $s(\alpha_i, \beta_j)$  tels que  $\alpha_i$  et  $\beta_j$  couvrent l'intervalle  $[0, \pi]$  :

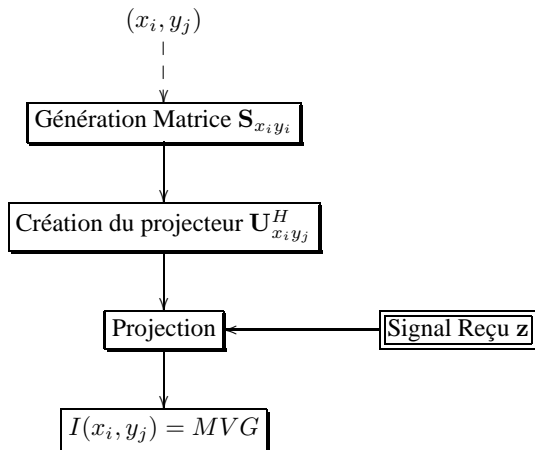
$$S_{xy} = [s_{xy}(\alpha_1, \beta_1) \quad \dots \quad s_{xy}(\alpha_P, \beta_N)] \quad (13)$$

Si on considère la Décomposition en Valeurs Singulières de  $S_{xy}$  [5] :

$$S_{xy} = U \Lambda V^H \quad (14)$$

On montre dans [6] que  $U_{xy}$  est donné par les vecteurs singuliers de  $U$  associés aux  $R$  plus grandes valeurs singulières non nulles. L'image du point  $(x, y)$  s'obtient donc par projection du signal reçu  $z$  sur  $U_{xy}$ , base (approchée au sens du critère  $C'(U_{xy})$ ) des signaux renvoyés par une cible placée en  $(x, y)$  et d'orientation quelconque.

Pour résumer, différentes étapes nécessaires sont à la mise en oeuvre de l'algorithme peuvent être résumées comme suit :



## 3 Performances de l'Algorithme à sous-espace pour la détection d'une plaque noyée dans du bruit blanc

### 3.1 Modèle utilisé

**Code :** Le code utilisé pour calculer les réponses  $s_{xy}(\alpha_i, \beta_j)$  de la plaque est un code basé sur l'approximation de l'optique physique. En effet, les plaques utilisées dans cette partie ont des dimensions supérieures à la longueur d'onde. Le code est choisi pour des plaques parfaitement conductrices [7].

**Dimensions du modèle de plaque utilisé :** La plaque utilisée comme modèle de cible **dans le détecteur** est de dimension  $1m \times 2m \times 2cm$ .

**Position de la plaque :** La plaque est placée au centre de la scène représentées et  $\alpha$  et  $\beta$  définissent son orientation.

**Fréquences utilisées :** - Fréquence centrale  $f_0$  : 400 MHz.  
- Largeur de bande  $B$  : 100 MHz.

### 3.2 Performances de détection

#### 3.2.1 Localisation

La figure 3 présente une image obtenue avec l'algorithme à sous espace comparée à celle obtenue par l'algorithme CST est donné.

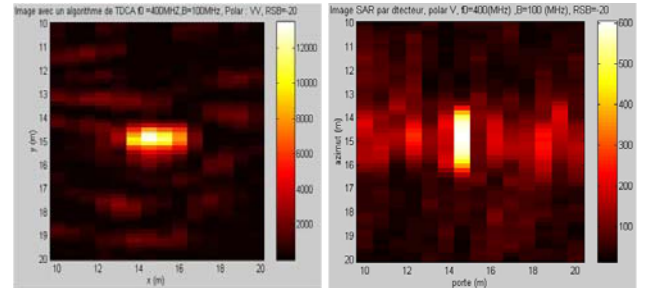


Figure 3: Image formée par l'algorithme à Sous Espace de rang 6 (droite), CST (gauche) pour une plaque orientée ( $\alpha = 0, \beta = -\frac{\pi}{4}$ ), de dimension  $1m \times 2m \times 2cm$  et pour un RSB = -20 dB

Une première observation est que la partie de l'image représentant la plaque est très différente, selon l'algorithme utilisé. Celle formée par l'algorithme CST est peu étalée en azimuth (axe y), mais très étalée en portée (axe x), celle formée par l'algorithme à sous espace n'est pratiquement pas étalée en portée, mais de façon assez importante en azimuth (axe y). Cet étalement est dû aux vecteurs formant la base du sous espace, certains n'étant pas parfaitement adaptés à cette configuration de plaque. Si l'on compare à nouveau les deux algorithmes pour une configuration de plaque différente (Figure 4), et si l'on considère que le maximum représenté par chaque figure représente l'emplacement de la plaque, on observe dans le cas de l'algorithme CST une erreur de placement de quelques mètres, alors que l'algorithme à sous espace donne la position exacte. Plusieurs autres variations d'orientation de plaque ont été testées et l'on constate



que l'algorithme CST se trompe parfois de quelques mètres, l'algorithme à sous espace donne, quant à lui, toujours la bonne position.

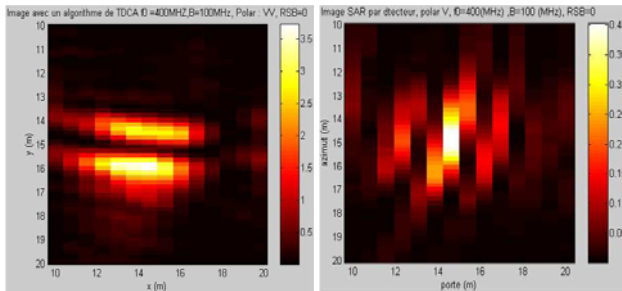


Figure 4: Image formée par les deux algorithmes (CST à gauche et Sous Espace à droite) pour une plaque orientée ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{6}$ ), de dimension  $1m \times 2m \times 2cm$ ,  $RSB = 0dB$

Notre algorithme semble donc mieux adapté à la détection de plaque en terme de précision de placement. Au delà de cette première conclusion, il est nécessaire de quantifier les performances réelles de l'algorithme à sous espace pour une plaque noyée dans du bruit blanc.

### 3.2.2 Courbe de détection

Une bonne façon de représenter les performances de détection de l'algorithme est de représenter la probabilité de détection en fonction de la probabilité de fausse alarme (PFA) (courbe COR) pour un rapport signal à bruit et une orientation de plaque donnés.

La figure 5 représente la probabilité de détection en fonction de la PFA pour deux plaques présentant une orientation différente. On montre [3], que la PFA suit une loi du  $\chi^2$  centrée à 2R degrés de liberté et que la probabilité de détection suit une loi du  $\chi^2$  décentrée à 2R degrés de liberté. Dans chacune de ces configurations, on représente les trois courbes correspondant aux performances de détection dans le cas de l'algorithme à sous espace de  $R$  égal à 2, 4 ou 6 dimensions. La courbe optimale correspond aux performances d'une réception parfaitement adaptée, c'est à dire avec une connaissance à priori de l'orientation de la plaque. La courbe TDCA (Time Domain Correlation Algorithm) correspond à l'algorithme CST. Dans

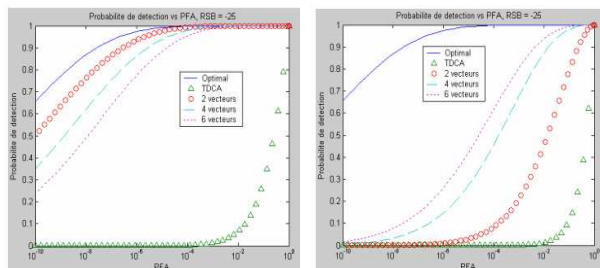


Figure 5: Probabilité de détection vs PFA, pour une plaque  $1 \times 2 m$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = -\frac{\pi}{4}$  (à droite),  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{6}$  (à gauche),  $RSB = -25dB$

chaque cas, l'algorithme à sous espace donne de meilleurs résultats que l'algorithme CST. Il est intéressant de constater que pour les deux orientations de plaque, les meilleurs performances ne sont pas obtenues pour le même nombre de dimensions de sous espace. En effet, dans le premier cas ( $\alpha = 0$  et  $\beta = -\frac{\pi}{4}$ ), le détecteur a de meilleurs performances pour un sous espace à deux dimensions, alors que pour second cas ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$  et  $\beta = \frac{\pi}{6}$ ), les meilleurs performances obtenues sont pour un sous espace à 6 dimensions. Cette différence s'explique par la nature des vecteurs qui constituent les bases de chaque sous espace. On rappelle que ces vecteurs sont en fait les vecteurs singuliers correspondant au plus fortes valeurs singulières de la matrice constituée de l'ensemble des réponses d'une plaque pour différentes orientations. Les vecteurs singuliers sont ordonnés suivant l'amplitude de la réponse de la plaque. Lorsque la plaque a une orientation donnée par  $\alpha = 0$  et  $\beta = -\frac{\pi}{4}$ , elle répond fortement dans la direction des récepteurs (la plaque fait 'face' à l'antenne synthétique). Cette réponse correspond donc plus aux premiers vecteurs singuliers associés aux plus grandes valeurs singulières. Dans le cas ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$  et  $\beta = \frac{\pi}{6}$ ), la plaque répond faiblement dans la direction du récepteur, quelque soit sa position. Le signal reçu correspond donc plus aux vecteurs singuliers associés aux valeurs singulières plus faibles.

## 4 Conclusion

Les études préliminaires effectuées pour déterminer les performances de l'algorithme à synthèse d'ouverture basé sur un détecteur à sous espace dans le cas d'une plaque noyée dans un bruit blanc gaussien sont très prometteuses. Ses avantages sur l'algorithme de corrélation spatio-temporelle sont démontrés dans ce cas là, aussi bien sur sa précision que sur ses performances de détection. Les études concernant la robustesse de l'algorithme à la détection de plaques de tailles non adaptées au détecteur, ainsi qu'à la détection de cibles plus complexes sont en actuellement en cours.

## References

- [1] M. Soumekh. *Reconnaissance with Ultra Wide Band UHF Synthetic Aperture Radar*. Signal Processing Magazine, IEEE, vol.12, n°4, pp.21-40, July 1995.
- [2] M. Dehmollaian, K. Sarabandi. *A Forward Scattering Model for Foliage Camouflaged Complex Targets*. Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2004, IGARSS 04, Proceedings 2004, IEEE International, vol.1, pp258-261, 20-24 Sept 2004.
- [3] H.L. Van Trees. *Estimation and Modulation Theory, volume 1*. John Wiley & Sons, 1971.
- [4] M. Soumekh. *Synthetic Aperture Radar Signal Processing*. John Wiley & Sons, inc.
- [5] L.L. Scharf. *Statistical Signal Processing : Detection, Estimation, and Time Series Analysis*. Addison-Wesley Publishing Co., 1990.
- [6] P. Forster. *Generalized Rectification of Cross Spectral Matrices for Array of Arbitrary Geometry*. IEEE transaction on Signal Processing, vol. 49, n°5, May 2001.
- [7] F.T. Ulaby, C. Elachi. *Radar Polarimetry for Geoscience Application*. F.T. Ulaby, C. Elachi Editors.



# Utilisation des statistiques d'ordres supérieurs en contrôle qualité de détecteurs de rayons X

Frédéric MAUSSANG, Jocelyn CHANUSSOT

Laboratoire des Images et des Signaux (UMR CNRS 5083)  
LIS / ENSIEG, Domaine Universitaire, BP 46, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France  
frederic.maussang@lis.inpg.fr, jocelyn.chanussot@lis.inpg.fr

**Résumé** – Nous proposons dans cet article une méthode de contrôle qualité pour les détecteurs de rayons X. Elle est basée sur les propriétés statistiques des images obtenues avec ce détecteur. Les Statistiques d'Ordres Supérieurs (SOS), et plus précisément le kurtosis (grandeur statistique d'ordre 4), sont utilisées sur ces images afin de mettre en évidence les régions d'intérêt susceptibles de contenir des défauts qu'un expert humain doit détecter rapidement. Les propriétés de ces petits éléments étant différentes de celles du fond de l'image, les SOS permettent d'extraire les régions correspondantes du reste de l'image. Les résultats ainsi obtenus (taille et amplitude des régions mises en évidence) aideront alors l'expert dans l'analyse des défauts.

**Abstract** – A quality control method for X-ray detector is proposed in this paper. The process is based on the statistical properties of the images obtained with this detector. Higher Order Statistics (HOS) tools, and more specifically the kurtosis (4th order statistical value), are used on these images in order to highlight the regions of interest likely to contain artifacts a human expert has to detect rapidly. The properties of these small structures being different from the background, HOS allow to extract the corresponding regions from the rest of the image. The results (size and amplitude of the highlighted regions) will help the expert to analyse the artifact.

## 1 Introduction

L'imagerie rayons X joue un rôle prépondérant dans de nombreuses applications (imagerie médicale, contrôle non destructif, ...). La plupart de ces applications sont critiques et ne laisse aucune place à l'erreur de diagnostique. Le contrôle qualité de ce type de détecteur doit donc utiliser le principe de "tolérance zéro". Afin de garantir les détecteurs sans défaut, les fabricants ont recours à de fastidieuses inspections visuelles effectuées par un expert en interprétation d'images. Nous proposons dans cet article de rendre ce contrôle plus rapide et plus simple en utilisant des outils de traitement des images basés sur les Statistiques d'Ordres Supérieurs (SOS).

Plusieurs articles ont déjà été écrits sur la qualité des images médicales, éventuellement après avoir subi une compression [1]. Certains d'entre eux proposent des méthodes de rehaussement des régions correspondant à des objets [2]. Mais, les Statistiques d'Ordres Supérieurs sont un puissant outil largement utilisé en traitement du signal [3], touchant des domaines aussi variés que l'astronomie, la communication, la sismique, ou le traitement de données radar et sonar. Par contre, les SOS ont plus rarement été utilisées en traitement d'images et, à notre connaissance, la littérature est limitée à quelques articles dans ce domaine. Par exemple, Jacovitti [4] a proposé une application des SOS à la décomposition d'images, la déconvolution aveugle, le codage et la reconnaissance de formes. Carrato et Ramponi [5] ont présenté une méthode d'extraction de contours en utilisant le skewness (statistique d'ordre 3) sur des images. Dans des études précédentes [6], l'utilisation des SOS en imagerie sonar à antenne synthétique a également été testée, aboutissant à un rehaussement des échos réfléchis par les objets présents dans le fond marin.

La méthode de contrôle qualité est ici basée sur le kurtosis

(grandeur statistique d'ordre 4). Pratiquement, le kurtosis est évalué localement sur une fenêtre de calcul carrée, cette fenêtre parcourant entièrement l'image produite par le détecteur de rayons X fonctionnant à vide (aucun objet présent entre l'émetteur et le détecteur). Les défauts ont des propriétés statistiques différentes de celles du fond bruité de l'image et apparaissent alors distinctement sur l'image du kurtosis. L'objectif de la méthode proposée est alors de sélectionner automatiquement des régions d'intérêt (c'est-à-dire des régions susceptibles de contenir des défauts) et d'attirer l'attention de l'expert, la décision finale restant de son ressort. Ces défauts sont des marques ou des points correspondant à des variations d'amplitude du signal non désirées liées à la structure même du détecteur.

Cet article se présente comme suit : les propriétés statistiques des images rayons X sont étudiées dans la partie 2. La partie 3 détaille les propriétés intéressantes des SOS et leur utilisation dans le contrôle qualité de ces images. Enfin, la méthode présentée est testée sur différentes parties d'images réelles obtenues à partir d'un détecteur de rayons X.

## 2 Propriétés statistiques des images

### 2.1 Modèle statistique du fond

Les images obtenues à partir d'un détecteur de rayons X sont généralement bruitées. Par exemple, les figures 4 et 7 présentent deux régions différentes d'une image rayons X. La variabilité d'amplitude due au bruit y est visible (voir les figures 6 et 9 comme versions égalisées des figures respectives 4 et 7). De plus, le signal est non stationnaire : la valeur moyenne du fond connaît de lentes variations, certaines régions devenant plus claires que d'autres. Par exemple, la figure 4 correspond à une

région plus claire que la figure 7. Cet effet est également mis en évidence par une égalisation et l'on peut remarquer une lente variation de la valeur moyenne entre les côtés gauche et droit de la figure 9. En conséquence, le modèle statistique du fond doit être estimé localement. On suppose habituellement que le bruit de fond d'une image rayons X suit une loi de Poisson. Ce modèle converge rapidement vers une distribution gaussienne de moyenne  $\mu_B$  et de variance  $\sigma_B^2$ , de densité de probabilité :

$$\mathcal{G}_B(B) = \frac{1}{\sigma_B \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(B - \mu_B)^2}{2\sigma_B^2} \right\} \quad (1)$$

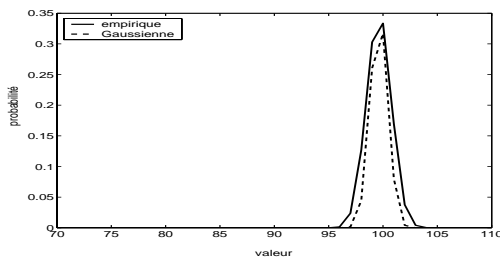


FIG. 1: histogramme et loi gaussienne estimée – partie claire

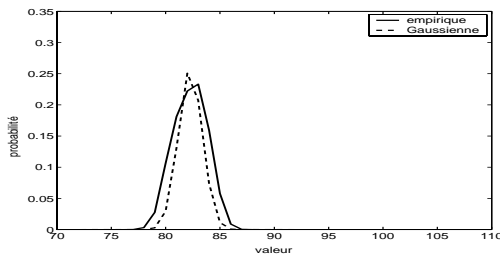


FIG. 2: histogramme et loi gaussienne estimée – partie sombre

TAB. 1: paramètres estimés et performance d'un modèle gaussien local

	partie claire	partie sombre
$\hat{\mu}_B$	99,62	82,27
$\hat{\sigma}_B$	1,126	1,542
$d_{\chi^2}$	0,707	0,707
$d_K$	0,090	0,085

Les figures 1 et 2 représentent les histogrammes observés sur deux régions de taille  $256 \times 256$ , respectivement dans des parties claires et sombres (trait continu). Elles représentent également les distributions gaussiennes estimées correspondantes (pointillés). D'après cette figure, nous pouvons dire que la distribution gaussienne est un bon modèle pour le fond bruité de l'image. Ceci est confirmé par le calcul des distances de Kolmogorov et des critères de  $\chi^2$  (tableau 1) [7] qui indiquent la même qualité de modélisation dans les deux parties de l'image. Cependant, la non stationnarité du signal réclame une estimation locale des paramètres du modèle, bien que le modèle reste gaussien sur toute l'image.

## 2.2 Défauts et Rapport Signal à Bruit (RSB)

Les images obtenues à partir du détecteur de rayons X comportent quelques défauts qu'un système de contrôle qualité doit détecter. Ces défauts apparaissent comme des groupes de pixels de petite dimension et de faible intensité qui peuvent être considérés comme des éléments déterministes d'amplitude  $A$ . Le Rapport Signal à Bruit (RSB)  $\rho$  peut alors être défini comme :

$$\rho = \frac{\mu_B - A}{\sigma_B} \quad \text{et} \quad \rho_{dB} = 20 \log_{10}(\rho) \quad (2)$$

## 3 Contrôle qualité utilisant les SOS

### 3.1 Propriétés des Statistiques d'Ordres Supérieurs

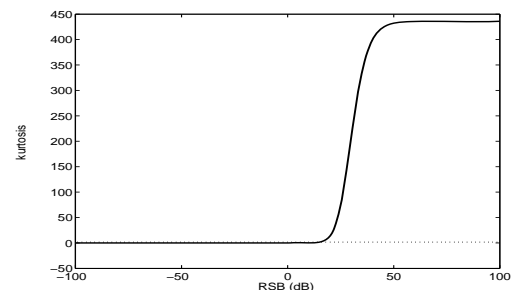


FIG. 3: kurtosis en fonction du RSB  $\rho$  ( $p = 1/441$ )

Les grandeurs les plus fréquemment utilisées en SOS sont le skewness (3e ordre) et le kurtosis (4e ordre) [3]. Dans cet article, nous nous intéressons essentiellement au kurtosis (des résultats similaires ont été obtenus avec le skewness). Si l'on note  $\mu_{X(r)}$  le moment centré d'ordre  $r$  de l'échantillon  $X$ , la définition du kurtosis estimé sur  $X$  est donnée par :

$$\mathcal{K}_X = \frac{\mu_{X(4)}}{\mu_{X(2)}^2} - 3 \quad (3)$$

Le kurtosis mesure l'étalement de la distribution des valeurs relativement à une loi gaussienne. Une propriété clé est sa nullité pour une distribution normale.

Le kurtosis est alors évalué sur une fenêtre glissante carrée ( $21 \times 21$  ici), le pixel courant étant le centre de la fenêtre. Le choix de la taille de cette fenêtre est un compromis : une petite taille permet de considérer le fond comme stationnaire et donne avec précision la localisation des défauts, mais elle augmente la variance de l'estimateur du kurtosis. Par contre, une grande taille permet de limiter cette variance, mais rend l'hypothèse de stationnarité moins valable.

Soit  $p \in [0, 1]$  la proportion de pixels déterministes (défauts) dans la fenêtre de calcul.  $(1 - p)$  est alors la proportion de valeurs aléatoires (pixels appartenant au fond bruité gaussien). Nous en déduisons alors l'expression du kurtosis  $\mathcal{K}_W$  estimé sur la fenêtre :

$$\mathcal{K}_W(\rho, p) = \frac{p}{1 - p} \frac{(6p^2 - 6p + 1)\rho^4 + 6(2p - 1)\rho^2 + 3}{(p\rho^2 + 1)^2} \quad (4)$$

On peut remarquer que pour  $p = 0$ , nous obtenons un kurtosis nul, tous les pixels suivant une loi gaussienne.

La taille des régions recherchées étant faible (seulement de quelques pixels) relativement à celle de la fenêtre de calcul, nous nous intéressons essentiellement aux faibles valeurs de  $p$ . Pour illustrer le propos, nous considérons le cas extrême de  $p = 1/(21 \times 21) = 1/441$ , ce qui correspond au cas d'un seul pixel déterministe à l'intérieur de la fenêtre. La figure 3 montre que le kurtosis prend des valeurs élevées pour un RSB supérieur à environ 20dB. Un défaut étant une région déterministe avec une faible intensité (comparée à son voisinage proche), ceci entraîne des valeurs élevées pour le kurtosis. Pour un  $\rho$  tendant vers l'infini, le kurtosis (obtenu pour un pixel déterministe dans la fenêtre de calcul) peut être approché par  $1/p$  (soit 441 pour une fenêtre  $21 \times 21$ ). Par contre, si aucun défaut n'est présent, le kurtosis est proche de zéro (distribution gaussienne).

### 3.2 Résultats sur des données réelles

Dans cette partie, le kurtosis est estimé sur une fenêtre de calcul  $21 \times 21$  sur deux parties différentes (de taille  $256 \times 256$  pixels) d'une image réelle obtenue à partir d'un détecteur de rayons X.

La première image (figure 4) contient un petit défaut (un seul pixel, indiqué par le rectangle noir). La figure 5 présente l'image obtenue avec le kurtosis. Nous pouvons alors voir apparaître des valeurs élevées (proches de 441) sur un carré de taille  $21 \times 21$  situé autour du pixel défectueux de l'image initiale. Ce résultat est en accord avec ce que nous avons vu précédemment. Étant donné le RSB élevé, le kurtosis s'élève à environ  $441 = 21 \times 21$ . Le défaut qui était peu visible sur l'image d'origine est alors mis en évidence sur l'image du kurtosis, la région correspondante étant plus visible et de valeur beaucoup plus élevée comparée au voisinage proche de zéro. L'attention de l'expert sera alors immédiatement attirée et celui-ci pourra restreindre son analyse à la région délimitée par le cadre qui apparaît sur l'image du kurtosis. On peut remarquer que le kurtosis est très faible sur toute l'image exceptée la région susceptible de contenir un défaut. En effet, le fond étant localement gaussien, le kurtosis est proche de zéro quelles que soient la moyenne et la variance du fond de l'image.

La deuxième image contient un défaut de plus grande taille, indiqué par le rectangle noir sur la figure 7, avec un RSB plus faible (le défaut apparaît avec un contraste moins élevé et le fond est plus sombre – regarder la version égalisée de l'image d'origine sur la figure 9). L'image du kurtosis correspondante (figure 8) montre une forme rectangulaire autour du défaut. Ceci est dû au résultat obtenu dans le paragraphe 3.1 : la taille de la région de valeurs élevées correspond à la taille de région déterministe ajoutée à la taille de la fenêtre de calcul. Si on considère  $n_D$  comme étant la longueur (respectivement la largeur) de la région déterministe, et  $n_F$  le côté de la fenêtre de calcul, de forme carrée ( $n_F \times n_F$ ), la longueur (respectivement la largeur) de la forme rectangulaire résultante sera :

$$n_R = n_D + n_F - 1 \quad (5)$$

Dans notre cas, le défaut est d'environ  $5 \times 3$  pixels et le rectangle résultant est d'environ  $25 \times 23$  ( $21 + 5 - 1$  pour la longueur, et  $21 + 3 - 1$  pour la largeur). L'attention de l'expert sera

à nouveau attirée et celui-ci pourra restreindre son analyse à la région ainsi délimitée.

## 4 Conclusion

Nous avons présenté dans cet article une méthode de contrôle qualité de détecteurs de rayons X. Basée sur l'utilisation des Statistiques d'Ordres Supérieurs, elle a pour but de simplifier et d'accélérer l'inspection visuelle habituellement réalisée par un expert humain. Le kurtosis permet de mettre en évidence les régions susceptibles de contenir des défauts sur l'image rayons X. Les résultats obtenus sont très prometteurs : l'estimateur SOS est parfaitement adapté à la détection de changements de propriétés statistiques (concrètement, la non gaussianité provoquée par les défauts) et l'analyse de l'expert sera dorénavant limitée à quelques régions d'intérêt définies par les structures entourant toute région susceptible d'être un défaut. De plus, la taille de cette structure et son intensité donne des informations sur la taille du défaut potentiel et le RSB correspondant. Ceci pourra être utile dans le diagnostic de l'expert.

De plus, il semble possible d'utiliser cette méthode en analyse d'images cliniques. Ceci permettrait de mettre en évidence certaines structures caractéristiques de ces images (par exemple, les micro-calcifications en mammographie, ...) afin d'aider le médecin dans son diagnostic.

## Références

- [1] P. C. Cosman, R. M. Gray et R. A. Olshen, "Evaluating quality of compressed medical images: SNR, subjective rating, and diagnostic accuracy," *Proceedings of the IEEE*, vol. 82, no. 6, pp. 919 – 932, Juin 1994.
- [2] K. F. Kamm, "The quality of digital X-ray images", *Medicamundi*, vol. 38, no. 2, pp. 111 – 116, 1993.
- [3] J.-L. Lacoume, P.-O. Amblard et P. Comon, *Statistiques d'ordre supérieur pour le traitement du signal*, Masson, Paris, France, 1997, ISBN 2-225-83118-1, [http://www.lis.inpg.fr/pages\\_perso/bidou/livreSOS.html](http://www.lis.inpg.fr/pages_perso/bidou/livreSOS.html).
- [4] G. Jacovitti, "Applications of higher order statistics in image processing," in *Proc. of International Signal Processing workshop on Higher Order Statistics*, Chamrousse, France, Juillet 1991, pp. 241 – 247.
- [5] S. Carrato et G. Ramponi, "Edge detection using generalized higher-order statistics," in *Proc. of IEEE Signal Processing Workshop on Higher Order Statistics*, South Lake Tahoe, Californie, USA, Juin 1993, pp. 66 – 70.
- [6] F. Maussang, J. Chanussot et A. Hétet, "On the use of higher order statistics in SAS imagery," in *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP'04)*, Montréal, Québec, Canada, Mai 2004, vol. 5, pp. 269 – 272.
- [7] G. Saporta, *Probabilités. Analyse des données et statistique*, Technip, Paris, France, 1990.

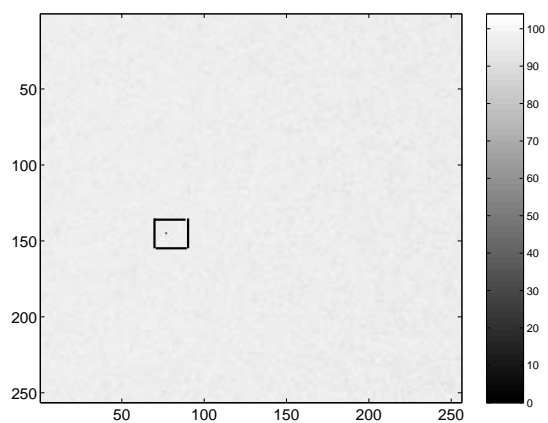


FIG. 4: première image : partie contenant un petit défaut

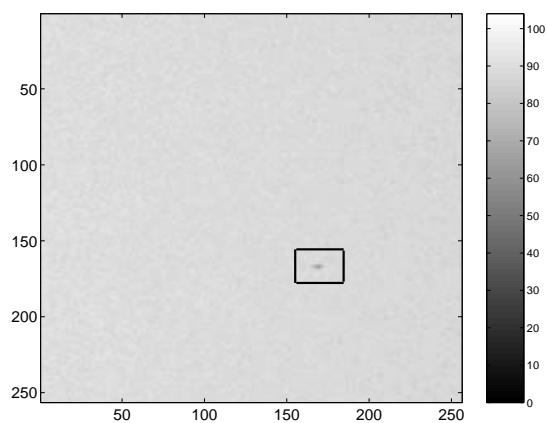


FIG. 7: deuxième image : partie contenant un plus grand défaut

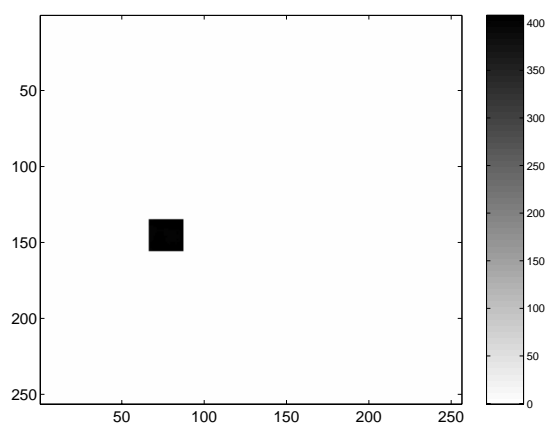
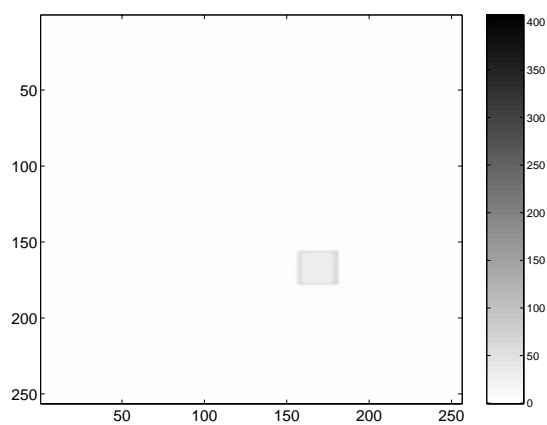
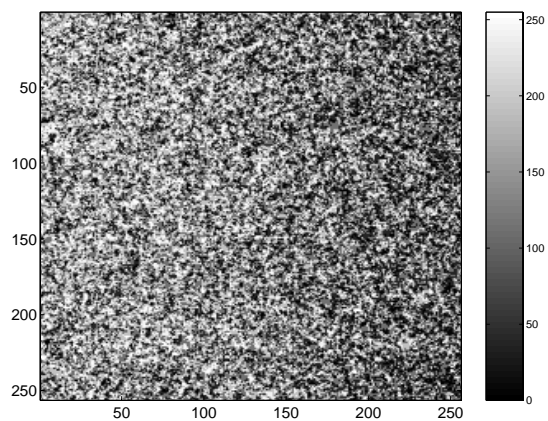
FIG. 5: kurtosis estimé sur une fenêtre  $21 \times 21$  sur la première imageFIG. 8: kurtosis estimé sur une fenêtre  $21 \times 21$  sur la deuxième image

FIG. 6: première image après égalisation

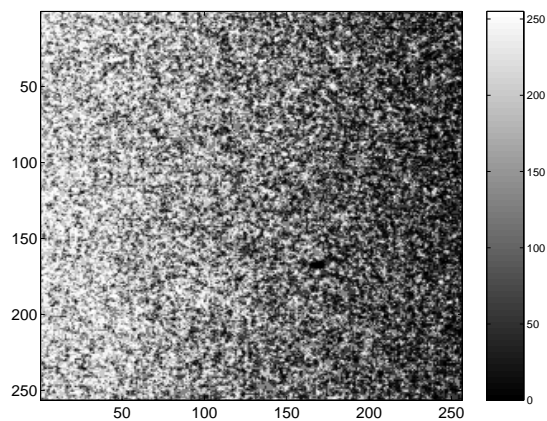


FIG. 9: deuxième image après égalisation

# Propriété CFAR-Matrice du Détecteur BORD - Application Radar sur Signaux Expérimentaux non-Gaussiens

Frédéric PASCAL<sup>1,2,3</sup>, Jean-Philippe OVARLEZ<sup>1</sup>, Philippe FORSTER<sup>2</sup>, Pascal LARZABAL<sup>3</sup>

<sup>1</sup>ONERA DEMR/TSI

Chemin de la Hunière, F-91761 Palaiseau Cedex, France

<sup>2</sup>GEA

1 Chemin Desvallières, F-92410 Ville d'Avray, France

<sup>3</sup>ENS Cachan/SATIE

61 Avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan Cedex, France

pascal@onera.fr, ovarlez@onera.fr, philippe.forster@cva.u-paris10.fr,  
pascal.larzabal@satie.ens-cachan.fr

**Résumé** – Cet article propose d'étudier, dans une première partie, la propriété "CFAR-Matrice" du détecteur BORD de manière théorique, et par la suite, d'utiliser ce résultat sur signaux expérimentaux. Son application sur données expérimentales ouvre une nouvelle voie pour l'ajustement du seuil de détection dans la communauté radar (problème de la régulation de fausse alarme sur données hétérogènes). L'analyse expérimentale de signaux valide plusieurs résultats théoriques importants.

**Abstract** – This paper is devoted, in a first section, to the BORD theoretical analysis. The "CFAR-Matrix" property is derived in a first time, and in a second section, this property is used on experimental radar signals. This application allows to adjust the detection threshold for a given probability of False Alarm when the clutter is non-Gaussian and modelled by a SIRP. Moreover, experimental analysis confirms several theoretical results, developed in other papers.

## 1 Introduction

Depuis plusieurs années, la caractérisation de l'environnement non-Gaussien (fouillis de sol ou de mer) dans la communauté radar connaît un intérêt grandissant [1, 2, 3], notamment depuis que des mesures expérimentales [4] ont montré que celles-ci pouvaient être correctement décrites par des processus sphériques aléatoires invariants (SIRP), englobant de nombreuses lois classiques (Gauss, K-distribution, Weibull,...).

En détection radar, le problème fondamental consiste à détecter, dans un vecteur d'observation  $\mathbf{y}$  de dimension  $m$ , un signal complexe  $\mathbf{s}$  connu, caractérisant une cible, corrompu par un bruit de fouillis  $\mathbf{c}$  additif non-Gaussien. Ce problème se formalise généralement par un test d'hypothèses :

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{y} = \mathbf{c} & \mathbf{y}_i = \mathbf{c}_i \quad i = 1, \dots, N \\ H_1 : \mathbf{y} = \mathbf{s} + \mathbf{c} & \mathbf{y}_i = \mathbf{c}_i \quad i = 1, \dots, N \end{cases} \quad (1)$$

où les  $\mathbf{y}_i$  sont des vecteurs d'observations indépendants appelés "données secondaires", contenant uniquement le bruit de fouillis et permettant d'estimer les paramètres du fouillis (Matrice de covariance, puissance, densité, ...).

La résolution de ce problème dans le cadre d'un bruit additif non-Gaussien SIRP a permis de construire plusieurs tests de rapports de vraisemblance généralisés (GL-RT), comme le GLRT-Linear Quadratic (GLRT-LQ) [1, 2] ou le BORD (Bayesian Optimum Radar Detector) Asymp-

totique [3]. Un des problèmes majeurs de ces détecteurs est que la matrice de covariance des données est inconnue. Il faut par conséquent l'estimer puis la substituer dans le détecteur qui sera qualifié dès lors de détecteur adaptatif.

Dans cet article nous nous proposons d'étudier les performances de deux estimateurs de la matrice de covariance des données. La première partie fait un rapide état de l'art dans le domaine de la détection radar, en présentant la modélisation du fouillis et les estimateurs utilisés. Dans la deuxième partie, une étude théorique originale va permettre d'établir la propriété de "CFAR-Matrice" du détecteur adaptatif selon l'estimateur utilisé, c'est un des apports de ce papier. Enfin, dans la troisième partie, une application réalisée sur des données expérimentales, va être présentée, avec les deux estimateurs de la matrice étudiés, elle permet de valider certains résultats théoriques déjà établis.

## 2 Formulation du problème et Environnement

Rappelons qu'un SIRP [5] est le produit d'une variable aléatoire positive  $\tau$  (*texture*) de densité de probabilité  $p(\tau)$  et d'un vecteur Gaussien  $\mathbf{x}$  de dimension  $m$  (*speckle*), indépendant de  $\tau$ , de moyenne nulle et de covariance  $\mathbf{M} = \mathbb{E}(\mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger)$  vérifiant la normalisation  $\text{Tr}(\mathbf{M}) = m$ , où  $\dagger$  désigne l'opérateur "transposé-conjugué" :

$$\mathbf{c} = \sqrt{\tau} \mathbf{x}.$$

La densité de probabilité de  $\mathbf{c}$  est alors définie par :

$$p_m(\mathbf{c}) = \frac{1}{(\pi \tau)^m |\mathbf{M}|} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{\mathbf{c}^\dagger \mathbf{M}^{-1} \mathbf{c}}{\tau}\right) p(\tau) d\tau, \quad (2)$$

Le problème majeur des détecteurs évoqués présentés dans l'introduction est la non connaissance de la matrice de covariance  $\mathbf{M}$ . En pratique,  $\mathbf{M}$  est inconnue et une estimée est nécessaire. Cette dernière doit évidemment vérifier la condition de normalisation  $\text{Tr}(\widehat{\mathbf{M}}) = m$ . Plusieurs estimateurs ont été proposés dans la littérature comme la "Normalized Sample Covariance Matrix Estimate" (NSCME) [6, 7], définie comme :

$$\widehat{\mathbf{M}}_{NSCME} = \frac{m}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{c}_i \mathbf{c}_i^\dagger}{\mathbf{c}_i^\dagger \mathbf{c}_i} = \frac{m}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\dagger}{\mathbf{x}_i^\dagger \mathbf{x}_i}, \quad (3)$$

où pour  $1 \leq i \leq N$ ,  $\mathbf{c}_i = \sqrt{\tau_i} \mathbf{x}_i$ .

Par ailleurs, dans [8], nous avons étudié certaines propriétés de l'estimateur  $\widehat{\mathbf{M}}_{FP}$  du Point Fixe, issu de la théorie du maximum de vraisemblance et défini comme étant l'unique solution de l'équation suivante [9] :

$$\widehat{\mathbf{M}}_{FP} = \frac{m}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{c}_i \mathbf{c}_i^\dagger}{\mathbf{c}_i^\dagger \widehat{\mathbf{M}}_{FP}^{-1} \mathbf{c}_i}. \quad (4)$$

Dans cet article, nous nous proposons d'étudier les propriétés de la version adaptative du BORD asymptotique. Ce détecteur est défini dans [3] de la façon suivante :

$$\hat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{M}}) = \frac{|\mathbf{p}^\dagger \widehat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{y}|^2}{(\mathbf{p}^\dagger \widehat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{p})(\mathbf{y}^\dagger \widehat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{y})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda, \quad (5)$$

où  $\mathbf{p}$  est le "steering vector" caractérisant la vitesse de la cible (Doppler). Ce détecteur, construit avec l'estimateur du point fixe ou la NSCME, ne dépend pas de la loi statistique de la texture, c'est la propriété de Taux de Fausse Alarme Constant (CFAR) quelle que soit la texture ("CFAR-texture") établie à plusieurs reprises.

### 3 Résultats Théoriques

Dans cette partie, nous allons établir la propriété "CFAR-Matrice" de  $\hat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{M}}_{FP})$ . Avant tout, définissons la propriété "CFAR-Matrice" d'un détecteur adaptatif.

**Définition 1** Un détecteur adaptatif  $\hat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{M}})$  vérifie la propriété "CFAR-Matrice" si sa distribution statistique est indépendante de la matrice  $\mathbf{M}$  de covariance estimée par  $\widehat{\mathbf{M}}$ .

Cette propriété est, comme nous allons le voir par la suite, d'un intérêt pratique majeur, elle fait l'objet du théorème suivant :

**Théorème 1** Soient  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{M}_2$  deux matrices de covariance distinctes ( $\mathbf{M}_1 \neq \mathbf{M}_2$ ), soit  $\widehat{\mathbf{M}}_{FP,1}$  (respectivement  $\widehat{\mathbf{M}}_{FP,2}$ ) l'estimateur du point fixe de  $\mathbf{M}_1$  (respectivement

de  $\mathbf{M}_2$ ),

alors, sous l'hypothèse  $H_0$  (pas de cible),

$$\mathcal{L}(\hat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{M}}_{FP,1})) = \mathcal{L}(\hat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{M}}_{FP,2})) \quad (6)$$

où  $\mathcal{L}(X)$  représente la loi de la variable aléatoire  $X$ .

Ainsi, le théorème 1 établit la propriété "CFAR-Matrice" du détecteur BORD adaptatif construit avec l'estimateur du point fixe  $\widehat{\mathbf{M}}_{FP}$ . Voici la démonstration de ce théorème.

**Preuve 1** Nous devons montrer que la distribution de  $\hat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{M}}_{FP,1})$  ne dépend pas de la matrice de covariance  $\mathbf{M}_1$ .

Considérons tout d'abord  $N$  données secondaires ayant pour matrice de covariance  $\mathbf{M}_1$ , i.e. pour  $i = 1, \dots, N$ ,

$$\mathbf{x}_i \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{M}_1).$$

Dans cette démonstration, des données secondaires Gaussiennes vont être utilisées car l'estimateur du point fixe ainsi que le détecteur sont indépendants de la texture : on peut donc prendre  $\tau_i = 1, \forall i$ .

L'estimateur du point fixe de  $\mathbf{M}_1$  est défini par

$$\widehat{\mathbf{M}}_{FP,1} = \frac{m}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\dagger}{\mathbf{x}_i^\dagger \widehat{\mathbf{M}}_{FP,1}^{-1} \mathbf{x}_i},$$

et le détecteur adaptatif BORD est défini par

$$\hat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{M}}_{FP,1}) = \frac{|\mathbf{p}^\dagger \widehat{\mathbf{M}}_{FP,1}^{-1} \mathbf{x}|^2}{(\mathbf{p}^\dagger \widehat{\mathbf{M}}_{FP,1}^{-1} \mathbf{p})(\mathbf{x}^\dagger \widehat{\mathbf{M}}_{FP,1}^{-1} \mathbf{x})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda,$$

où  $\mathbf{x}$  représente le vecteur d'observation avec,  $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{M}_1)$ .

La première étape consiste à blanchir les données par le changement de variables  $\mathbf{y} = \mathbf{M}_1^{-1/2} \mathbf{x}$ . Alors,  $\mathbf{y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ . On effectue ce changement dans l'estimateur du point fixe,

$$\widehat{\mathbf{M}}_{FP,1} = \frac{m}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{M}_1^{1/2} \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^\dagger \mathbf{M}_1^{1/2}}{\mathbf{y}_i^\dagger (\mathbf{M}_1^{-1/2} \widehat{\mathbf{M}}_{FP,1} \mathbf{M}_1^{-1/2})^{-1} \mathbf{y}_i}.$$

En posant maintenant

$$\widehat{\mathbf{T}} = \mathbf{M}_1^{-1/2} \widehat{\mathbf{M}}_{FP,1} \mathbf{M}_1^{-1/2},$$

on constate que  $\widehat{\mathbf{T}}$  est l'unique estimateur du point fixe (à une rotation près) dans le cas de données  $\mathbf{y}_i$  ayant comme matrice de covariance, l'identité  $\mathbf{I}$ .

On s'intéresse maintenant au détecteur, auquel on applique aussi le changement de variable

$$\hat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{M}}_{FP,1}) = \frac{|\mathbf{p}_1^\dagger \widehat{\mathbf{T}}^{-1} \mathbf{y}|^2}{(\mathbf{p}_1^\dagger \widehat{\mathbf{T}}^{-1} \mathbf{p}_1)(\mathbf{y}^\dagger \widehat{\mathbf{T}}^{-1} \mathbf{y})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda,$$

où  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{M}_1^{-1/2} \mathbf{p}$ . La distribution de  $\hat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{M}})$  ne dépend pas de  $\mathbf{p}$ , et ainsi, la loi de  $\hat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{M}}_{FP,1})$  est la même que la loi de  $\hat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{T}})$ . Ceci conclut la démonstration du théorème 1.

**Remarque :**  $\hat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{M}}_{NSCME})$  ne vérifie pas la propriété "CFAR-Matrice".

Les propriétés du détecteur construit avec les deux estimateurs  $\widehat{\mathbf{M}}_{NSCME}$  et  $\widehat{\mathbf{M}}_{FP}$  sont synthétisées dans le tableau suivant :

Propriétés de $\hat{\Lambda}(\hat{\mathbf{M}})$	$\hat{\mathbf{M}}_{FP}$	$\hat{\mathbf{M}}_{NSCME}$
CFAR-texture	Oui	Oui
CFAR-Matrice	Oui	Non

Les résultats contenus dans le tableau montrent que, d'un point de vue opérationnel, l'estimateur du point fixe  $\hat{\mathbf{M}}_{FP}$  est plus intéressant. En effet, les deux propriétés concernant le détecteur construit avec  $\hat{\mathbf{M}}_{FP}$ , affirment l'indépendance de ce détecteur avec la texture et avec la matrice de covariance des données. Ceci signifie que, bien que prenant en compte l'impulsivité du fouillis dans sa modélisation non-Gaussienne,  $\hat{\Lambda}(\hat{\mathbf{M}}_{FP})$  aura la même distribution quel que soit le SIRP utilisé, et cette distribution peut-être calculée analytiquement dans le cas où les données sont des variables aléatoires indépendantes Gaussiennes, centrées et de matrice de covariance l'identité, il s'agit là d'un cas "d'école". Il en est évidemment de même, pour la relation entre la probabilité de fausse alarme et le seuil de détection ; cette relation n'étant rien d'autre que la fonction de répartition de  $\hat{\Lambda}(\hat{\mathbf{M}}_{FP})$ .

## 4 Résultats Expérimentaux

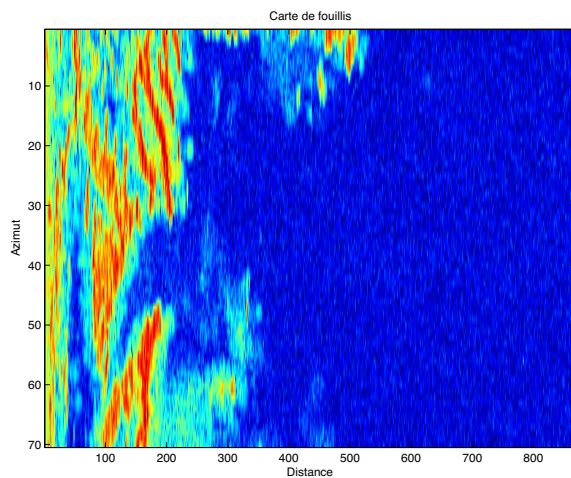


Fig. 1 : Carte distance-azimut

Cette partie présente des résultats expérimentaux obtenus à partir de l'analyse de données réelles de fouillis de sol. La figure 1 est une carte "distance-azimut" de données radar collectées par un radar de Thales Air Defence<sup>1</sup> pour  $m = 8$  impulsions. Elle présente des données hétérogènes non-Gaussiennes. La zone foncée, de niveau faible, représente le bruit thermique blanc et Gaussien (zones "distance" au delà de l'horizon radioélectrique du radar). Les zones plus claires, de niveau fort, représentent le fouillis de sol, de nature impulsive et très corrélé. Pour mettre en évidence les zones de bruit impulsif, la figure 2

<sup>1</sup>Les auteurs tiennent à remercier Thales Air Defence pour l'exploitation de leurs données

représente la carte distance-azimut de la figure 1 en 3 dimensions (la troisième dimension codant la puissance du bruit).

L'analyse de ces données radar par comptage permet l'ajustement du seuil de détection  $\lambda$  en fonction de la Probabilité de Fausse Alarme (PFA). Le réglage expérimental du seuil de détection  $\lambda$  a donc été déterminé par comptage en déplaçant, sur l'image de la figure 1, un masque CFAR rectangulaire de taille  $5 \times 5$ . Pour chaque case centrale du masque (case de test), la matrice  $\hat{\mathbf{M}}_{FP}$  a été estimée grâce aux  $N = 24$  vecteurs de taille  $m$  considérés comme données secondaires et entourant la case testée.

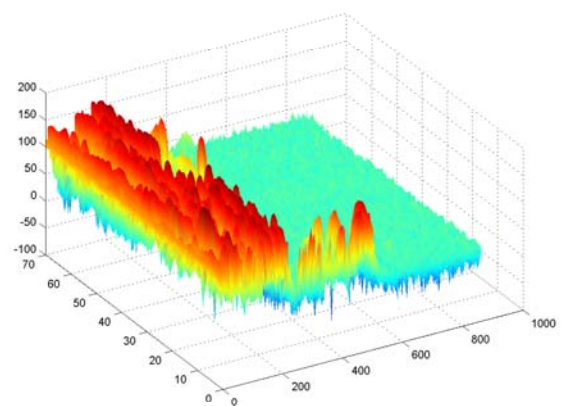


Fig. 2 : Carte distance-azimut en 3 dimensions

Une relation théorique liant  $\lambda$  à la PFA a été établie dans les deux cas suivants :  $\mathbf{M}$  connue [3] et  $\mathbf{M}$  inconnue [10]. L'analyse des données radar, par comptage, permet la validation de la relation théorique lorsque  $\mathbf{M}$  est estimée par  $\hat{\mathbf{M}}_{FP}$ . Cette validation expérimentale n'est possible que grâce à la propriété CFAR-Matrice du détecteur.

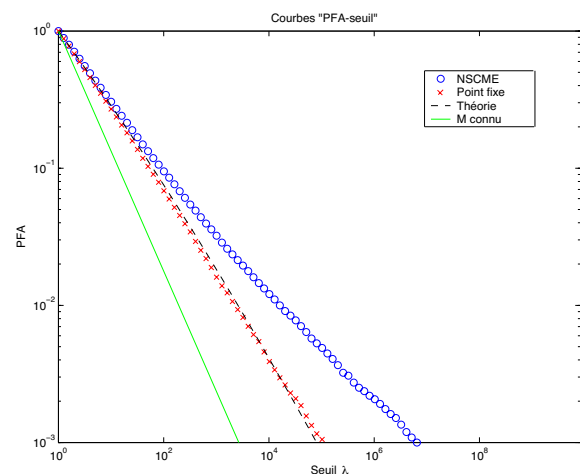


Fig. 3 : Réglage du seuil de détection



Sur la figure 3, la courbe pleine correspond à la relation théorique "PFA-seuil" dans le cas où  $\mathbf{M}$  est connue tandis que la courbe en pointillés correspond à la relation théorique "PFA-seuil" dans le cas où  $\mathbf{M}$  est inconnue et estimée par  $\widehat{\mathbf{M}}_{FP}$ .

La courbe constituée de croix ( $\times$ ) représente la relation "PFA-seuil" expérimentale quand  $\mathbf{M}$  est estimée par  $\widehat{\mathbf{M}}_{FP}$ . Elle est en parfait accord avec la relation théorique. On observe également, sur la courbe constituée de cercles ( $\circ$ ), que la relation "PFA-seuil" expérimentale calculée pour  $\widehat{\mathbf{M}} = \widehat{\mathbf{M}}_{NSCME}$  ne coïncide pas avec la courbe constituée de croix. Cette différence s'explique par le fait que  $\hat{\Lambda}(\widehat{\mathbf{M}}_{NSCME})$  ne vérifie pas la propriété CFAR-Matrice, indispensable pour du fouillis hétérogène.

Cette propriété "CFAR-Matrice" est très intéressante d'un point de vue opérationnel. Lorsque la matrice de covariance  $\mathbf{M}$  du processus SIRP est inconnue, le fait de construire le détecteur  $\hat{\Lambda}$  avec l'estimée  $\widehat{\mathbf{M}}_{FP}$  le rend totalement indépendant de  $\mathbf{M}$ . De ce fait, la relation "PFA-seuil" est elle-même indépendante de  $\mathbf{M}$ . Dans un environnement hétérogène de fouillis comme le montre la figure 1, cette propriété nous garantit une régulation constante de la fausse alarme quel que soit le point de la carte distance-azimut où l'on estime la matrice de covariance.

La figure 4 représente, pour tous les points de la carte distance-azimut, le rapport de vraisemblance, i.e. le BORD, calculé avec l'estimateur du point fixe  $\widehat{\mathbf{M}}_{FP}$ . Malgré l'hétérogénéité du fouillis, l'utilisation de l'estimateur du point fixe a permis d'obtenir une carte de vraisemblance totalement uniforme assurant ainsi une régulation constante de la fausse alarme, même dans les zones de transitions.

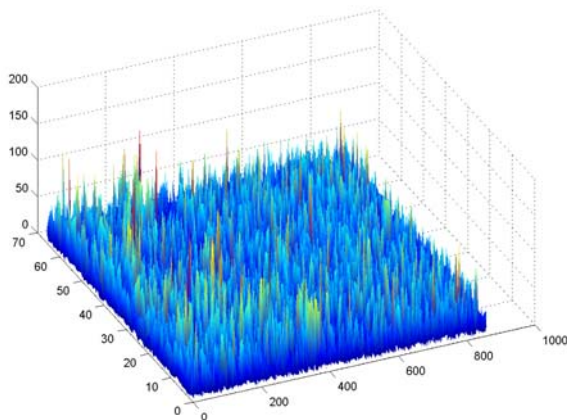


Fig. 4 : Homogénéisation du fouillis

## 5 Conclusion

Dans cet article, une nouvelle propriété du détecteur adaptatif BORD construit avec l'estimateur de matrice de covariance du point fixe a été établie. Cette propriété CFAR-Matrice rend la statistique du détecteur invariante

de la véritable matrice de covariance des données. Une des conséquences majeures de cette propriété est de pouvoir construire un détecteur à partir de données secondaires n'ayant pas toutes la même matrice de covariance, ce qui est souvent le cas en pratique. De plus, l'analyse de signaux expérimentaux de fouillis de sol non-Gaussien a permis de valider la relation théorique liant la probabilité de fausse alarme et le seuil de détection, établie dans [10].

## Références

- [1] E. Conte, M. Lops and G. Ricci, Asymptotically Optimum Radar Detection in Compound-Gaussian Clutter, *IEEE Trans.-AES*, **31**(2) (April 1995), 617-625.
- [2] F. Gini, Sub-Optimum Coherent Radar Detection in a Mixture of K-Distributed and Gaussian Clutter, *IEE Proc.Radar, Sonar Navig*, **144**(1) (February 1997), 39-48.
- [3] E. Jay, J.P. Ovarlez, D. Declercq and P. Duvaut, BORD : Bayesian Optimum Radar Detector, *Signal Processing*, **83**(6) (June 2003), 1151-1162
- [4] J.B. Billingsley, Ground Clutter Measurements for Surface-Sited Radar, *Technical Report 780*, MIT, February 1993.
- [5] K. YAO "A Representation Theorem and its Applications to Spherically Invariant Random Processes", *IEEE Trans.-IT*, Vol.19, No.5, pp.600-608 Sept. 1973
- [6] E. CONTE, M. LOPS, G. RICCI, "Adaptive Radar Detection in Compound-Gaussian Clutter", *Proc. of the European Signal processing Conf.*, September 1994, Edinburgh, Scotland.
- [7] F. GINI, M.V. GRECO, AND L. VERRAZZANI, "Detection Problem in Mixed Clutter Environment as a Gaussian Problem by Adaptive Pre-Processing, *Electronics Letters*, **31**(14)(July 1995), 1189-1190.
- [8] F. PASCAL, P. FORSTER, J.P. OVARLEZ AND P. LARZABAL, "Theoretical analysis of an improved covariance matrix estimator in non-Gaussian Noise", *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, March 2005, Philadelphia, PA, USA.
- [9] F. PASCAL, Y. CHITOUR, J.P. OVARLEZ P. FORSTER AND P. LARZABAL, "Existence and Characterization of the Covariance Matrix Maximum Likelihood Estimate in Spherically Invariant Random Processes", soumis à IEEE-SP, avril 2005
- [10] F. PASCAL, J.P. OVARLEZ, P. FORSTER AND P. LARZABAL, "Constant False Alarm Rate Detection in Spherically Invariant Random Processes", *Proc. of the European Signal processing Conf.*, September 2004, 2143-2146, Vienna, Austria.



# Un théorème limite et un test pour la détection non paramétrique de signaux dans un bruit blanc gaussien de variance inconnue.

Dominique PASTOR

GET - ENST Bretagne, CNRS FRE 2658 TAMCIC,  
Technopole de Brest Iroise, CS 83818, 29238 BREST Cedex, France  
dominique.pastor@enst-bretagne.fr

**Résumé** — On s'intéresse à la détection statistique non paramétrique de signaux dont les distributions de probabilité et les probabilités de présence sont inconnues en présence de bruit blanc additif et indépendant d'écart-type lui-même inconnu. Sur la base d'un théorème limite énoncé dans ce papier, on introduit un algorithme de détection. Celui-ci estime l'écart-type du bruit pour décider de la présence d'éventuels signaux lorsque ceux-ci ont une probabilité de présence inférieure ou égale à  $1/2$  et une amplitude supérieure ou égale à une valeur donnée  $A \in [0, \infty[$ . Des résultats expérimentaux concernant la détection non paramétrique de porteuses sinusoïdales dans un bruit blanc sont présentés. Ces résultats suggèrent que les conditions asymptotiques du théorème ne sont pas très contraignantes dans la pratique. La détection de cibles radar est une application typique de ce travail.

**Abstract** — This paper concerns the non parametric statistical detection of signals that have unknown probability distributions and unknown probabilities of presence in a background of white Gaussian noise with unknown standard deviation. On the basis of a limit theorem stated below, a test is introduced. This test performs an estimate of the noise standard deviation and achieves the detection of signals that have probability of presence less than or equal to one half and norm larger than or equal to some known non negative real number  $A$ . Experimental results regarding the non parametric detection of sinusoidal carriers in white Gaussian noise are presented. These results suggest that the asymptotic conditions of the limit theorem can somewhat be relaxed and are not so constraining in practice. The radar target detection problem is a typical application of this work.

## 1 Introduction

L'observée en sortie d'un capteur résulte souvent de la présence aléatoire d'un signal dans un bruit blanc Gaussien additif et indépendant. Le modèle est simple mais la détection du signal peut être délicate. En effet, la distribution exacte du signal, voire l'écart-type du bruit, peuvent ne pas être connus. Ainsi, en traitement du signal radar, le niveau de bruit thermique fluctue et l'écho reçu d'une cible résulte d'une convolution entre le pulse émis et l'environnement.

Les critères usuels de décision basés sur le rapport de vraisemblance (Bayes, Neyman-Pearson, minimax, Rapport de Vraisemblance Généralisé) ne sont exploitables que si l'on dispose d'un modèle suffisamment précis où le nombre de paramètres à estimer reste limité ([7]). Les critères non paramétriques sont une alternative aux critères de vraisemblance. Dans une approche non paramétrique, le critère de décision garantit une mesure de performance constante sur toute une classe de signaux ([7]).

L'approche non paramétrique proposée dans [5] concerne la détection d'un signal dont la probabilité de présence est inférieure ou égale  $1/2$ . C'est une hypothèse raisonnable dans des applications radar ou sonar car les cibles sont moins souvent présentes qu'absentes. La proposition suivante est alors une conséquence immédiate de [5, Théorème VII.1]. Dans l'énoncé de cette proposition,  $\mathbf{I}_n$

désigne la matrice identité de taille  $n \times n$ ; nous appelons seuillage de hauteur  $T$  le test binaire d'hypothèses qui décide qu'un signal est présent dès que la norme de l'observée est supérieure ou égale à  $T$  et qu'aucun signal n'est présent dans le cas contraire;  ${}_0F_1$  est la fonction hypergéométrique généralisée ([4, p. 275]);

**Proposition 1.1** Soit un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ , les vecteurs aléatoires  $U, \Lambda, X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  et une variable aléatoire  $\epsilon : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  tels que  $\Lambda, X$  et  $\epsilon$  sont indépendants,  $X \in \mathcal{N}(0, \sigma_0^2 \mathbf{I}_n)$  et  $U = \epsilon \Lambda + X$ .

Soit  $V$  la fonction définie pour tout  $\rho \in [0, \infty[$  par

$$V(\rho) = \frac{e^{-\rho^2/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^{\xi(\rho)} e^{-t^2/2} t^{n-1} {}_0F_1(n/2; \rho^2 t^2/4) dt + \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2^{1-n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^{\xi(\rho)} e^{-t^2/2} t^{n-1} dt \right]. \quad (1)$$

où  $\xi(\rho)$  est l'unique solution en  $x$  de l'équation

$${}_0F_1(n/2; \rho^2 x^2/4) = e^{\rho^2/2}. \quad (2)$$

Soit  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne usuelle dans  $\mathbf{R}^n$ . On définit l'amplitude minimale  $\varrho(\Lambda)$  de  $\Lambda$  par

$$\varrho(Y) = \sup\{\alpha \in [0, \infty] : \|Y\| \geq \alpha \text{ (p.s.)}\} \quad (3)$$

où  $\|\Lambda\| : \Omega \rightarrow [0, \infty[$  associe la valeur  $\|\Lambda(\omega)\|$  à  $\omega \in \Omega$ .

- (i) Si la probabilité de présence  $P(\{\varepsilon = 1\})$  de  $\Lambda$  est inférieure ou égale à  $1/2$ ,  $V(\varrho(\Lambda)/\sigma_0)$  est une borne supérieure pour la probabilité d'erreur du test du Maximum de Vraisemblance (MV) et du seuillage de hauteur  $\sigma_0 \xi(\varrho(\Lambda)/\sigma_0)$ .
- (ii) Il y a égalité entre  $V(\varrho(\Lambda)/\sigma_0)$ , la probabilité d'erreur du test MV et la probabilité d'erreur du seuillage de hauteur  $\sigma_0 \xi(\varrho(\Lambda)/\sigma_0)$  lorsque la distribution de probabilité de  $\Lambda$  est uniforme sur la sphère centrée à l'origine et de rayon  $\varrho(\Lambda)$  et  $P(\{\varepsilon = 1\}) = 1/2$ .

Aussi, pour  $A \geq 0$ , le seuillage de hauteur  $\sigma_0 \xi(A/\sigma_0)$  est non paramétrique pour la détection de tout signal de probabilité de présence inférieure ou égale à  $1/2$  et de norme supérieure ou égale à  $A$ . La mesure de performance que ce test garantit sur cette classe de signaux est  $V(A/\sigma_0)$ , cette borne étant atteinte pour un signal dont la distribution de probabilité est uniforme sur la sphère de rayon  $A$  et dont la probabilité de présence est  $1/2$ . Cependant, ce seuillage ne peut être utilisé dans la pratique que si l'écart-type du bruit est connu, ce qui n'est hélas pas toujours le cas. Ainsi, en traitement du signal radar, le niveau de bruit fluctue et une estimation régulière de l'écart-type est nécessaire pour maintenir constant le taux de fausse alarme. Nous proposons une approche purement probabiliste pour estimer cet écart-type et détecter les signaux.

## 2 Un théorème limite

Nous continuons à supposer que tous les vecteurs aléatoires et toutes les variables aléatoires rencontrées ci-après sont définis sur le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ . Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble de toutes les suites de vecteurs aléatoires de dimension  $n$ , c'est-à-dire définis dans  $\Omega$  et à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$ . Nous dirons qu'une suite  $X = (X_k)_{k \in \mathbf{N}}$  de  $\mathcal{S}$  est un *Bruit Blanc Gaussien* de dimension  $n$  ( $n$ -BBG) d'écart-type  $\sigma_0 > 0$  si les vecteurs aléatoires  $X_k$ ,  $k \in \mathbf{N}$ , sont mutuellement indépendants, de dimension  $n$  et de distribution Gaussienne de moyenne nulle et de matrice de covariance  $\sigma_0^2 \mathbf{I}_n$  où  $\mathbf{I}_n$  est la matrice identité  $n \times n$  ( $X_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2 \mathbf{I}_n)$ ).

Pour estimer l'écart-type du bruit, nous étendons le modèle de la proposition 1.1 comme suit. Soient  $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{k \in \mathbf{N}}$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $\{0, 1\}$ ,  $\Lambda = (\Lambda_k)_{k \in \mathbf{N}}$  un élément de  $\mathcal{S}$  et  $X = (X_k)_{k \in \mathbf{N}}$  un  $n$ -BBG. On considère la suite  $U = (U_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \mathcal{S}$  définie par  $U = \varepsilon \Lambda + X$  dans le sens où pour tout entier  $k$ ,  $U_k = \varepsilon_k \Lambda_k + X_k$ . Cette suite modélise une suite d'observations où des signaux sont aléatoirement présents ou absents en présence d'un bruit blanc Gaussien additif et indépendant: la suite  $X$  modélise évidemment le bruit; pour tout  $k \in \mathbf{N}$ ,  $\Lambda_k$  est le signal aléatoire qui peut être présent ou absent et  $\varepsilon_k$  modélise cette présence aléatoire. Pour chaque entier  $k$ ,  $P(\{\varepsilon_k = 1\})$  est donc la probabilité de présence de  $\Lambda_k$ .

Pour énoncer le théorème limite, nous avons besoin de quelques autres notations et de définitions.

Pour un nombre réel positif ou nul  $a$ ,  $L^a(\Omega, \mathbf{R}^n)$  est l'ensemble des vecteurs aléatoires  $Y : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  pour lesquels

$E[\|Y\|^a] < \infty$ . L'ensemble des éléments  $\Lambda = (\Lambda_k)_{k \in \mathbf{N}}$  de  $\mathcal{S}$  tels que  $\sup_{k \in \mathbf{N}} E[\|\Lambda_k\|^a] < \infty$  est noté  $\ell^\infty(\mathbf{N}, L^a(\Omega, \mathbf{R}^n))$ .

Nous généralisons aussi (3) en définissant l'amplitude minimale d'un élément  $\Lambda = (\Lambda_k)_{k \in \mathbf{N}}$  de  $\mathcal{S}$  comme la borne supérieure  $\varrho(\Lambda)$  de l'ensemble des  $\alpha \in [0, \infty]$  tels que, pour tout entier  $k$ ,  $\|\Lambda_k\| \geq \alpha$  (p-s):

$$\varrho(\Lambda) = \sup \{ \alpha \in [0, \infty] : \forall k \in \mathbf{N}, \|\Lambda_k\| \geq \alpha \text{ (a-s)} \}. \quad (4)$$

Pour tout réel positif ou nul  $q$ ,  $\Upsilon_q : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  est définie pour tout  $x \in [0, \infty[$  par  $\Upsilon_q(x) = \int_0^x t^{q+n-1} e^{-t^2/2} dt$ .

Enfin, pour une variable aléatoire  $Y$  et un sous-ensemble  $B$  quelconque de  $\mathbf{R}$ ,  $\mathcal{I}(Y \in B)$  est la fonction indicatrice de l'ensemble  $\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in B\}$ .

Avec ce matériel, nous énonçons le résultat suivant qui est un cas particulier d'un résultat plus général dont on trouvera la démonstration dans [6].

**Théorème 2.1** Soit  $U = (U_k)_{k \in \mathbf{N}}$  un élément de  $\mathcal{S}$  tel que  $U = \varepsilon \Lambda + X$  où  $\Lambda = (\Lambda_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \mathcal{S}$ ,  $X = (X_k)_{k \in \mathbf{N}}$  est un  $n$ -BBG d'écart-type  $\sigma_0$  et  $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{k \in \mathbf{N}}$  est une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $\{0, 1\}$ .

Supposons que:

- (H1) pour tout  $k \in \mathbf{N}$ ,  $\Lambda_k$ ,  $X_k$  et  $\varepsilon_k$  sont mutuellement indépendants;
- (H2) les vecteurs aléatoires  $U_k$ ,  $k \in \mathbf{N}$ , sont mutuellement indépendants;
- (H3) il existe une borne  $p \in [0, 1[$  pour les probabilités  $\{P(\{\varepsilon_k = 1\}) : k \in \mathbf{N}\}$  et les variables aléatoires  $\varepsilon_k$ ,  $k \in \mathbf{N}$ , sont mutuellement indépendantes;
- (H4) il existe  $\nu \in ]0, \infty[$  tel que  $\Lambda \in \ell^\infty(\mathbf{N}, L^\nu(\Omega, \mathbf{R}^n))$ .

Soient deux réels  $r$  et  $s$  tels que  $0 \leq s < r \leq \nu/2$ . Pour tout entier  $m$  et tout couple  $(\sigma, T)$  de réels positifs ou nuls, définissons alors la variable aléatoire  $\mathcal{D}_m(\sigma, T)$  par

$$\mathcal{D}_m(\sigma, T) = \left| \frac{\sum_{k=1}^m \|U_k\|^r \mathcal{I}(\|U_k\| \leq \sigma T)}{\sum_{k=1}^m \|U_k\|^s \mathcal{I}(\|U_k\| \leq \sigma T)} - \sigma^{r-s} \frac{\Upsilon_r(T)}{\Upsilon_s(T)} \right|$$

L'écart-type  $\sigma_0$  du bruit est le seul réel strictement positif  $\sigma$ , tel que, pour tout  $\beta_0 \in ]0, 1]$ ,

$$\lim_{\varrho(\Lambda) \rightarrow \infty} \left\| \overline{\lim}_m \mathcal{D}_m(\sigma, \beta \xi(\varrho(\Lambda)/\sigma)) \right\|_\infty = 0 \quad (5)$$

uniformément en  $\beta \in [\beta_0, 1]$ .

**Remarques:**

- De manière triviale,  $\sigma = 0$  satisfait (5) et le critère de convergence introduit ne joue alors aucun rôle. C'est pour cela que le théorème précédent ne concerne que les solutions strictement positives de (5).
- Il est évident que (5) est vérifiée par tout  $\sigma \in [0, \infty[$  dès que  $r = s \geq 0$ . C'est pour cette raison que l'énoncé repose sur l'hypothèse  $r > s \geq 0$ .
- En pratique, on aura souvent  $\nu = 2$  et  $p = 1/2$ . En effet, les signaux sont en général d'énergie finie et moins souvent présents qu'absents.

### 3 Le test de la borne essentielle

Nous conservons les notations et hypothèses du théorème 2.1 avec  $p = 1/2$  et  $\nu = 2$ , conformément à la dernière remarque de la section précédente. De plus, nous supposons que tous les signaux ont une norme supérieure ou égale à un certain  $A \in [0, \infty[$ . En d'autres termes, nous faisons l'hypothèse  $\varrho(\Lambda) \geq A$ . A partir de la proposition 1.1 et du théorème 2.1, nous proposons un test qui commence par estimer l'écart-type du bruit pour détecter ensuite la présence des signaux utiles. Nous l'appelons le test de la borne essentielle pour le rôle que joue la norme de la borne essentielle dans le théorème 2.1.

Considérons une suite finie  $U_1, \dots, U_m$  d'observations. Choisissons un entier  $L$  et posons  $\beta_\ell = \ell/L$  pour  $\ell \in \{1, \dots, L\}$ . Le théorème 2.1 suggère alors d'estimer  $\sigma_0(m)$  par un minimum  $\hat{\sigma}_0$ , éventuellement local, de

$$\sup \{ \mathcal{D}_m(\sigma, \beta_\ell \xi(A/\sigma)) : \ell \in \{1, \dots, L\} \} \quad (6)$$

avec, pour  $(\sigma, T) \in [0, T] \times [0, T]$ ,

$$\mathcal{D}_m(\sigma, T) = \left| \frac{\sum_{k=1}^m \|U_k\| \mathcal{I}(\|U_k\| \leq \sigma T)}{\sum_{k=1}^m \mathcal{I}(\|U_k\| \leq \sigma T)} - \sigma \frac{\Upsilon_1(T)}{\Upsilon_0(T)} \right|,$$

compte-tenu de notre choix pour  $p$  et  $\nu$ . Le calcul de ce minimum peut se faire par interpolation parabolique [3] (en utilisant la routine MATLAB `fminbnd.m` par exemple) dans l'intervalle de recherche que nous explicitons plus loin. La décision sur la présence ou l'absence de signal utile pour l'observée  $U_k$  se fait ensuite en utilisant le seuillage de hauteur  $\sigma_0 \xi(A/\sigma_0)$  en remplaçant  $\sigma_0$  par son estimée: si  $\|U_k\| \geq \hat{\sigma}_0 \xi(A/\hat{\sigma}_0)$ , on décide qu'un signal est présent; sinon, on décide le contraire. Soit  $U_{[k]}$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  la suite des observées rangées en norme croissante. La borne supérieure de l'intervalle de recherche est  $\sigma_{\max} = \|U_{[m]}\|/\sqrt{n}$ . En effet, si nous cherchons une valeur  $\hat{\sigma}_0(m)$  strictement supérieure à  $\sigma_{\max}$ , nous prenons le risque d'obtenir une estimée pour laquelle on aura  $\|U_k\| \leq \hat{\sigma}_0(m) \xi(A/\hat{\sigma}_0(m))$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  puisque  $\xi(\rho) \geq \sqrt{n}$  pour tout  $\rho \in [0, \infty[$  ([5]). La décision serait donc qu'aucun signal n'est présent parmi nos  $m$  observations, ce qui est improbable pour  $m$  grand, à condition quand même, que la probabilité de présence ne soit pas trop petite. La borne inférieure de l'intervalle de recherche est ajustée de manière récursive comme suit. Cette borne est  $\sigma_{\min} = \|U_{[i_0]}\|/\sqrt{n}$  où  $i_0$  est initialisée à 1. On considère que l'observée de plus petite norme est due au bruit seul et devrait être détectée en tant que telle pour toute valeur de  $A$ , donc en particulier pour  $A = 0$ . La probabilité d'avoir un nombre supérieur à  $m/2 - hm$  d'observées de bruit seul est supérieure ou égale à  $Q = 1 - 1/4mh^2$ . Aussi, en fixant  $Q$  et donc  $h$ , tant que le nombre d'observées dont la norme est inférieure à  $\hat{\sigma}_0(m) \xi(A/\hat{\sigma}_0(m))$  reste supérieur à  $m/2 - hm$ , on modifie  $\sigma_{\min}$  en incrémentant  $i_0$  de 1 pour calculer une nouvelle estimation de  $\sigma_0$ . En ajustant ainsi l'intervalle de recherche, on cherche à éviter un minimum local proche de 0 puisqu'on sait que 0 est une solution triviale de (5).

### 4 Résultats expérimentaux

Nous ne savons pas encore évaluer de manière théorique les performances de l'algorithme de la borne essentielle. L'algorithme fonctionnant sans connaissance a priori des distributions et probabilités de présence, une réponse expérimentale exhaustive à cette question est difficile. Aussi, nous nous limitons à des résultats expérimentaux concernant le cas suivant. Avec les notations introduites précédemment, on suppose que pour tout entier  $k$ ,  $U_k$ ,  $\Lambda_k$  sont  $X_k$  des vecteurs aléatoires de dimension 2 où la distribution de probabilité de chaque  $\Lambda_k$  est uniforme sur le cercle centré à l'origine et de rayon  $A$ . Nous supposons aussi que la probabilité de présence de chaque  $\Lambda_k$  est  $P(\{\varepsilon_k = 1\}) = 1/2$ . Ce cas n'est pas seulement académique. En effet, pour chaque entier, les deux composantes de  $\Lambda_k$  peuvent être considérées comme les composantes en phase et en quadrature d'une porteuse sinusoïdale d'amplitude  $A$  et de phase équirépartie sur  $[0, 2\pi]$ . L'exemple que l'on traite est donc celui de la "détection non cohérente d'une porteuse", dont on connaît toute l'importance dans de nombreuses applications ([7, Exemple III.B.5, p. 65]).

Le test du maximum de vraisemblance pour ce problème est un seuillage dont la hauteur est l'unique solution en  $x$  de l'équation  $I_0(A/\sigma_0 x) = e^{A^2/2\sigma_0^2}$ , où  $I_0$  est la fonction de Bessel modifiée de première espèce ([7, Exemple II.E.1, p. 34]). Ce résultat est aussi une conséquence de l'égalité  $I_0(x) = {}_0F_1(1; x^2/4)$  ([1, Eq. 9.6.47, p. 377]) et de la proposition 1.1. Celle-ci étend d'ailleurs l'application de ce test. En effet, elle nous apprend que le même test à seuil garantit une probabilité d'erreur inférieure ou égale à  $V(A/\sigma_0)$  même lorsque la probabilité de présence est inférieure ou égale à  $1/2$ , l'amplitude du signal est supérieure ou égale à  $A$  et la distribution de la phase n'est pas uniforme.

Lorsque  $\sigma_0$  n'est pas connu et que l'on dispose de  $m$  observations  $U_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , on peut espérer que le Taux d'Erreur Binaire (TEB) du test proposé dans cet article approche  $V(A/\sigma_0)$  lorsque  $A$  et  $m$  sont suffisamment grands. On se propose de vérifier cette intuition en calculant les TEBs issus de simulations de Monte-Carlo. Pour cela, on suit la méthode généralement admise par les spécialistes des systèmes de télécommunication numérique pour estimer une probabilité d'erreur qui décroît rapidement avec le Rapport Signal à Bruit (RSB) comme c'est le cas de  $V(A/\sigma_0)$  avec le RSB  $A/\sigma_0$ .

La simulation consiste à éprouver le test de la section précédente sur une succession d'ensembles distincts de  $m$  observations. Pour chaque épreuve de  $m$  observations, on compte le nombre d'erreurs commises par le test. Épreuve après épreuve, on additionne ces nombres d'erreurs jusqu'à ce que le nombre total  $N_e$  d'erreurs soit supérieur ou égal à un nombre  $N$  choisi préalablement. Le TEB est alors défini comme étant le rapport  $N_e/(j \times m)$  où  $j$  est le nombre d'épreuves qu'il a été nécessaire de réaliser pour obtenir  $N_e \geq N$ . En ce qui concerne le test de la borne essentielle, nous choisissons  $L = m$  et  $Q = 0.95$  sur la base de quelques expérimentations préliminaires. Le tableau 1 présente alors les résultats obtenus pour différentes valeurs

$A/\sigma_0$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$V(A/\sigma_0)$	0.4777	0.4183	0.3390	0.2566	0.1826	0.1225	0.0775	0.0462	0.0260	0.0138
TEB ( $m = 100$ )	0.5067	0.4233	0.3900	0.2775	0.2260	0.2017	0.1250	0.0567	0.0371	0.0227
TEB ( $m = 200$ )	0.4875	0.4375	0.2900	0.3350	0.2825	0.1525	0.0967	0.0694	0.0361	0.0178
TEB ( $m = 300$ )	0.4633	0.3767	0.3350	0.3733	0.2267	0.1222	0.0992	0.0589	0.0262	0.0179

TAB. 1: TEBs du test de la borne essentielle pour la détection non cohérente de sinusôides dans le bruit

$A/\sigma_0$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$V(A/\sigma_0)$	0.4777	0.4183	0.3390	0.2566	0.1826	0.1225	0.0775	0.0462	0.0260	0.0138
TEB ( $m = 100$ )	0.4680	0.4060	0.3014	0.2500	0.1918	0.1200	0.0693	0.0556	0.0287	0.0170
TEB ( $m = 200$ )	0.4433	0.3900	0.3583	0.2675	0.1586	0.0896	0.0564	0.0357	0.0244	0.0124
TEB ( $m = 300$ )	0.4733	0.3917	0.3717	0.2244	0.1527	0.1156	0.0703	0.0317	0.0214	0.0083

TAB. 2: TEBs du test de la borne essentielle pour la détection non cohérente de sinusôides dans le bruit

de  $m$  et de  $A$ . Les écarts entre TEBs et valeurs théoriques sont irréguliers car une mauvaise estimation de  $\sigma_0$  engendre des erreurs corrélées en rafale puisque la décision se fait sur les observées qui ont servi à l'estimation. Cependant, les TEBs se rapprochent des valeurs théoriques lorsque  $m$  et  $A$  augmentent.

Lorsque le rapport  $\varrho(\Lambda)/A$  entre l'amplitude minimale de la suite  $\Lambda$  et la borne inférieure  $A$  que l'on se donne pour la détection est suffisamment grand, le théorème 2.1 suggère que le TEB du test de la borne essentielle devrait être inférieur ou égal à  $V(A/\sigma_0)$ . En guise d'exemple, la figure présente les TEBs obtenus par le test de la borne essentielle lorsque  $\varrho(\Lambda)/A = 1.2589$ , c'est-à-dire lorsque les porteuses ont une amplitude 1 dB plus élevée que la borne inférieure que l'on donne au test de la borne essentielle. Au vu des résultats du tableau 2, nous pouvons dire que l'utilisation du test de la borne essentielle représente finalement une perte d'environ 1 dB par rapport au test optimal. Les résultats expérimentaux ainsi obtenus sont donc très encourageants.

## 5 Perspectives et extensions

On a présenté un résultat théorique et introduit le test de la borne essentielle dédié à la détection de signaux de distributions non connues et moins présents qu'absents dans un bruit blanc indépendant, additif et Gaussien d'écart-type inconnu. Les résultats expérimentaux suggèrent que les conditions asymptotiques de la théorie ne sont pas si contraignantes que cela dans la pratique. Il faut formaliser ces constatations expérimentales. Notamment, nous pensons que le cas traité à la section 4 est le plus défavorable pour le test de la borne essentielle comme il l'est pour le test du maximum de vraisemblance et le

seuillage de la proposition 1.1. Nous travaillons aussi à améliorer la procédure de minimisation afin d'éviter les paquets d'erreurs corrélées. La conception de systèmes TFAC (Taux de Fausse Alarme Constant) utilisés pour la détection des cibles radar est un domaine d'application naturel de ce travail. Le débruitage des signaux en est un autre. A ce titre, nous travaillons à comparer et combiner l'approche proposée ici à décrite dans [2].

## Références

- [1] M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications Inc., New York, Ninth printing (1972).
- [2] D. Donoho, I. Johnstone, "Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage", *Biometrika*, **vol. 81**, 1994.
- [3] G. E. Forsythe, M. A. Malcolm, C. B. Moler, *Computer Methods for Mathematical Computations*, Prentice-Hall, 1976.
- [4] N. N. Lebedev, *Special functions and their applications*, Prentice-Hall, (1965).
- [5] D. Pastor, R. Gay, B. Groenenboom, "A Sharp Upper-Bound for the Probability of Error of the Likelihood Ratio Test for Detecting Signals in White Gaussian Noise", *IEEE Transactions on Information Theory*, **vol. 48**, **N. 1**, 2002.
- [6] D. Pastor, *A limit theorem for sequences of independent random vectors with unknown distributions and its applications to non parametric detection*, Rapport interne GET/ENST Bretagne, NRR-2004001-SC, 2004.
- [7] H. V. Poor, *An Introduction to Signal Detection and Estimation*, Springer-Verlag, 2nd Edition, 1994.

# Restauration d'images dans le cas d'un bruit Gaussien Poissonnien

Céline THEYS, Henri LANTÉRI

Laboratoire Universitaire d'Astrophysique de Nice  
UMR6525, CNRS/Université de Nice Sophia-Antipolis  
Céline.Theys@unice.fr, Henri.Lanteri@unice.fr

**Résumé** – Le sujet considéré est la reconstruction d'images dans le cas d'un bruit Gaussien Poissonnien, modèle des données astrophysiques acquises avec un capteur CCD. Nous proposons un algorithme itératif de reconstruction basé sur la vraisemblance de l'image et régularisé avec une fonction quadratique. Cet algorithme est appliqué sur des données astrophysiques et comparé en terme de moyenne et de variance de l'erreur d'estimation à des algorithmes classiques tels que ISRA ou RL.

**Abstract** – In this paper, we consider the problem of restoring astronomical images in the case of Poisson data with additive Gaussian noise, model of the data acquired with Charge Coupled Device cameras. An iterative algorithm is proposed based on the maximum likelihood with a classical penalization-regularization term to impose a smoothness property on the solution. The proposed algorithm is checked on typical astronomical images and is compared in terms of mean and variance of the error estimation with classical algorithms like ISRA or RL.

## 1 Introduction

Le problème traité dans ce papier est la restauration d'images astrophysiques. Pour de telles images, deux processus de bruit sont généralement considérés. Le premier est un processus Gaussien additif correspondant à des données de forte intensité; dans ce cas l'estimateur par maximum de vraisemblance (MV) de l'objet, sous contrainte de positivité, conduit à l'algorithme ISRA (Image Space Reconstruction Algorithm), [5]. Le second modèle adapté à des données de faible flux correspond à une transformation de Poisson de l'image, l'estimateur du MV est alors obtenu avec l'algorithme RL (Richardson Lucy), [12]. Le modèle le plus adapté aux images acquises avec un capteur CCD (Charged Coupled Device) est le modèle composite : données de Poisson et bruit additif Gaussien. Un tel modèle a déjà été analysé par Snyder et al. [16] et par Llacer et Nuñez [11].

Ce sujet s'inscrit dans le cadre des problèmes inverses, problèmes mal posés au sens de Hadamard, dont la solution devient instable pour des données bruitées. Quelque soit le modèle considéré, les méthodes itératives de maximum de vraisemblance conduisent à des solutions instables : le processus itératif doit être interrompu avant l'apparition du bruit. Une autre solution consiste à ajouter une contrainte de douceur stabilisant la solution et conduisant à une estimation par maximum a posteriori (MAP), cette technique classiquement utilisée pour les problèmes inverses est appelée régularisation dans ce contexte, [6].

Dans les papiers précédents de Snyder, la régularisation est réalisée au moyen de fonctions *sieves*, or il a été montré dans [3] que la solution du MAP donne de meilleurs résultats. L'approche utilisée par Llacer et Nuñez est celle du MAP avec des fonctions de pénalité telles que l'en-

tropie croisée de Shannon entre la solution et un a priori constant, cependant comme cela est mentionné dans [18], ni la positivité de la solution, ni la convergence de l'algorithme proposé ne sont garanties.

Nous proposons ici de développer un algorithme itératif du type MGS (Méthode du Gradient Séparé) pour estimer l'objet au sens du MV sous contrainte de positivité et de conservation de l'énergie pour un modèle Gaussien Poissonnien de l'image. Cet algorithme sera ensuite étendu à l'approche régularisée et nous proposerons d'utiliser une fonction de régularisation quadratique avec *a priori* variable. L'algorithme sera mis en œuvre sur des données astrophysiques et on mettra en évidence l'intérêt du modèle choisi par rapport aux modèles classiques en terme d'erreur de reconstruction.

## 2 Modèle Gaussien Poissonnien de l'image

On utilisera des lettres capitales pour des tableaux  $N \times N$ , des caractères gras pour les vecteurs  $N \times 1$ , l'indice  $i$  pour le pixel  $i$  de l'image, ordonnée lexicographiquement.

On peut résumer les différentes étapes conduisant aux données à traiter de la manière brève et simplificatrice suivante : la lumière provenant de l'objet  $\mathbf{x}$  se propage à travers une atmosphère turbulente, puis elle est observée par un système optique imparfait (le télescope). Cette première transformation est mathématiquement décrite par un produit de convolution entre l'objet et la réponse impulsionnelle de l'ensemble télescope/atmosphère appelée *PSF* (Point Spread Function), on note cette transformation  $H\mathbf{x}$  sous forme matricielle. Un capteur CCD réalise

une photo conversion donnant  $\mathbf{n}$  photons, transformation de Poisson de moyenne  $H\mathbf{x}$ . Enfin un bruit de lecture Gaussien s'ajoute (*read out noise*), indépendant du processus de Poisson.

Une réalisation de l'intensité de l'image  $\mathbf{y}$  dans le pixel  $i$ ,  $y_i$  peut alors être modélisée suivant :

$$y_i = n_i + b_i, \quad (1)$$

où  $b_i$  est une réalisation d'un processus Gaussien  $\mathcal{N}(g, \sigma^2)$ , indépendant de  $n_i$  : réalisation d'un processus de Poisson  $\mathcal{P}(H\mathbf{x})_i$ .

Le problème consiste à retrouver  $\mathbf{x}$  à partir des données  $\mathbf{y}$ .  $H$  est mesuré expérimentalement et les paramètres du bruit Gaussien sont des caractéristiques connues du capteur CCD.

## 2.1 Vraisemblance des données - MLE

Compte tenu de l'indépendance des processus de bruit et de l'indépendance des pixels de l'image, la fonction de vraisemblance de l'image  $y$  s'écrit :

$$L(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = \prod_i \sum_{n_i} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y_i - n_i - g)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{(H\mathbf{x})_i^{n_i}}{n_i!} \exp(-(H\mathbf{x})_i). \quad (2)$$

L'estimateur du MV de  $\mathbf{x}$  est la valeur de  $\mathbf{x}$  qui maximise (2) ou de manière équivalente qui minimise  $J_1(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = -\log(L(\mathbf{y}; \mathbf{x}))$  :

$$J_1(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = \sum_i \left( (H\mathbf{x})_i - \log\left(\sum_{n_i} \frac{(H\mathbf{x})_i^{n_i}}{n_i!} \exp\left(-\frac{(y_i - n_i - g)^2}{2\sigma^2}\right)\right) \right). \quad (3)$$

$x_i$  est donc solution de :

$$(\nabla J_1(\mathbf{y}; \mathbf{x}))_i = \sum_j (h_{ji} - h_{ji} \frac{r_j}{(H\mathbf{x})_j}) = 0 \quad (4)$$

avec

$$r_j = \frac{p_j}{q_j}, \quad (5)$$

$$p_j = \sum_{n_i} \exp\left(-\frac{(y_j - n_i - g)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{n_i}{n_i!} (H\mathbf{x})_j^{n_i} \quad (6)$$

et

$$q_j = \sum_{n_i} \exp\left(-\frac{(y_j - n_i - g)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{n_i!} (H\mathbf{x})_j^{n_i}. \quad (7)$$

$p_j$  et  $r_j$  sont deux séries convergentes que l'on peut réduire à une en utilisant, [7] :

$$r_j = \sum_{n_i} c_{n_i} (H\mathbf{x})_j^{n_i}, \quad (8)$$

avec

$$c_{n_i} = \frac{(-1)^{n_i}}{\exp\left(-\frac{(y_j - n_i - g)^2}{2\sigma^2}\right)^{n_i}} \times \begin{vmatrix} 0 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_0 a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ -2a_3 a_0 & a_2 & a_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (1-n)a_n a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \end{vmatrix} \quad (9)$$

et

$$a_n = \exp\left(-\frac{(y_j - n_i - g)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{n_i!}. \quad (10)$$

En pratique, on limitera la sommation sur  $n_i$  à  $[\max y_j + 3\sigma]$ .

## 2.2 Ajout d'un a priori - MAP

Dans le cas régularisé, on ajoutera à  $J_1(\mathbf{y}; \mathbf{x})$ , une fonction  $J_2(\mathbf{x})$ , convexe, introduisant une contrainte de douceur et un facteur de régularisation  $\gamma$  permettant de régler le poids relatif de la pénalité sur l'objet par rapport à la vraisemblance des données :  $J(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = J_1(\mathbf{y}; \mathbf{x}) + \gamma J_2(\mathbf{x})$ , le gradient s'écrit alors  $\nabla J(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = \nabla J_1(\mathbf{y}; \mathbf{x}) + \gamma \nabla J_2(\mathbf{x})$ , [17].

La discussion du choix de la fonction de régularisation et de l'*a priori* ne sera pas traité ici, on peut se reporter à [8, 13, 10, 4] pour une étude sur les régularisations quadratiques ou entropiques, avec *a priori* constant ou non. On propose d'utiliser une régularisation quadratique avec un *a priori* variable qui donne de bons résultats, [10]. Dans ce cas la fonction de régularisation s'écrit :

$$J_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - A\mathbf{x}\|^2, \quad (11)$$

où  $A$  est la matrice représentant le masque :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

et  $A\mathbf{x}$  est la notation matricielle pour l'opération de convolution entre  $\mathbf{x}$  et ce masque. Le gradient correspondant est alors :

$$\nabla J_2(\mathbf{x}) = (I + A^T A - A^T - A)\mathbf{x}. \quad (12)$$

La solution est alors implicitement biaisée vers une version "adoucie" de la solution. On peut noter que  $A$  peut représenter toute autre forme de filtre passe bas.

## 3 Algorithme

L'équation (4) étant non linéaire en  $x_i$ , on utilise une méthode itérative d'optimisation du type MGS incluant les contraintes de borne inférieure et de conservation de l'énergie [9, 10], l'équation de réactualisation de  $\hat{x}_i$  est alors :

$$\hat{x}_i^{k+1} = C^k \left( \hat{x}_i^k + \alpha_i^k \frac{\hat{x}_i^k}{V_i(\hat{\mathbf{x}}^k, \gamma)} (U_i(\hat{\mathbf{x}}^k, \gamma) - V_i(\hat{\mathbf{x}}^k, \gamma)) \right). \quad (13)$$

L'estimé initial  $\hat{\mathbf{x}}^0$  est choisi de manière à satisfaire les contraintes,  $C^k$  est un facteur de normalisation pour la conservation de l'intensité,  $\alpha_i^k > 0$  est le facteur de relaxation choisi de manière à garantir la convergence,  $k$  est le numéro de l'itération. Les fonctions  $U() > 0$  et  $V() > 0$  résultent de la décomposition de la fonction  $\nabla J()$  suivante :

$$-\nabla J(\hat{\mathbf{x}}^k, \gamma) = U(\hat{\mathbf{x}}^k, \gamma) - V(\hat{\mathbf{x}}^k, \gamma). \quad (14)$$

Si l'on effectue cette décomposition pour  $\nabla J_1()$  et  $\nabla J_2()$ , on obtient :

$$U(\hat{\mathbf{x}}^k, \gamma) = U_1(\mathbf{x}^k) + \gamma U_2(\mathbf{x}^k) \quad (15)$$

$$V(\hat{\mathbf{x}}^k, \gamma) = V_1(\mathbf{x}^k) + \gamma V_2(\mathbf{x}^k) \quad (16)$$

$U_1()$ ,  $V_1()$ ,  $U_2()$ ,  $V_2()$  sont donnés sous forme matricielle dans le tableau 1. La valeur maximale de  $\alpha_m^k$  qui garantit

Fonction	$J_1$	$J_2$
U	$U_1 = H^T \text{diag} \left( \frac{1}{(H\mathbf{x} + \mathbf{d})_i} \right) \mathbf{r}$	$U_2 = \gamma(A^T + A)\mathbf{x}$
V	$V_1 = \mathbf{a}, (\sum_j h_{j,i} = a_i)$	$V_2 = \gamma(I + A^T A)\mathbf{x}$

TAB. 1 – fonctions  $U$  et  $V$

$x_i^{k+1} \geq 0, \forall i, \forall k$  est donnée par :

$$\alpha_m^k = \min_{i \in \mathcal{C}} \left( \frac{1}{1 - \frac{U_i(\mathbf{x}^k, \gamma)}{V_i(\mathbf{x}^k, \gamma)}} \right), \quad (17)$$

où  $\mathcal{C}$  est l'ensemble des indices  $i$  tels que  $(\nabla J(\mathbf{x}^k, \gamma))_i > 0$  et  $x_i^k > m$ ; clairement on voit que  $\alpha_m^k > 1$ , donc pour  $\alpha^k = 1$ , la contrainte est toujours satisfaite. La valeur optimale du pas  $\alpha_c^k$  indépendante de  $i$  assurant la convergence doit appartenir à l'intervalle  $]0, \alpha_m^k]$  (ou  $]0, \alpha_m^k[$  si une inégalité stricte est demandée) par une procédure de recherche en ligne (voir par exemple [1, 2, 15, 14]), avec la direction de descente :

$$\rho^k = \text{diag} \left( \frac{(x_i^k - m)}{V_i(\mathbf{x}^k, \gamma)} \right) (U(\mathbf{x}^k, \gamma) - V(\mathbf{x}^k, \gamma)). \quad (18)$$

Cette direction n'est plus l'inverse du gradient mais elle reste une direction de descente pour  $J(\mathbf{x})$ . Pour assurer la convergence théorique de (13) sans une augmentation dramatique du coût de calcul, la procédure économique de recherche du pas de descente suivant l'algorithme d'Armijo [1] a été utilisée.

## 4 Application à des données astrophysiques faible flux

Cet algorithme est illustré sur une image provenant du télescope spatial Hubble (HST), <http://hubblesite.org/gallery/>, fig. 1(a). La partie contenant la structure principale a été extraite et constitue l'objet, fig. 1(c). Ces données ont été convoluées avec une réponse physiquement réaliste d'un télescope terrestre incluant l'effet de la turbulence atmosphérique, fig. 1(b). Pour stopper les itérations avant l'apparition du bruit et également pour pouvoir donner un critère quantitatif sur la qualité de la restauration,

on utilise la distance euclidienne relative entre l'objet réel  $\mathbf{x}$  et l'objet reconstruit  $\hat{\mathbf{x}}^k$  :

$$\epsilon(k) = \frac{\|\hat{\mathbf{x}}^k - \mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2}, \quad (19)$$

On note  $\epsilon_{min} = \min_k (\epsilon(k))$  et  $k_{min} = \arg \min_k (\epsilon(k))$ .

Une transformée de Poisson a ensuite été réalisée sur l'image et finalement un bruit Gaussien a été ajouté donnant l'image à restaurer. La fig. 2(a) représente l'image obtenue avec 3000 photons,  $g = 0.1, \sigma^2 = 1$ . Les images reconstruites représentées sont celles obtenues pour  $\epsilon_{min}$  et pour différents algorithmes : ISRA, fig. 2(b), RL fig. 2(d) et l'algorithme proposé noté GP fig. 2(c).

On peut noter l'amélioration très nette de la reconstruction pour GP autant de manière qualitative ("à l'œil nu") que quantitative (minimum de l'erreur sensiblement plus faible). La moins bonne reconstruction, dans ce cas, est celle obtenue sous hypothèse Gaussienne avec ISRA, hypothèse la plus éloignée des données étant donné le faible nombre de photons.

La figure 3 donne la moyenne et la variance de l'erreur d'estimation sur 50 réalisations en fonction du nombre de photons pour des caractéristiques fixes du bruit Gaussien, expérience réaliste d'une acquisition d'images avec capteurs CCD, ceci pour les trois algorithmes non régularisés ISRA, RL et GP. Le tableau 2 donne la moyenne et la variance de l'erreur d'estimation pour 1000 et 3000 photons pour les trois algorithmes régularisés avec les mêmes caractéristiques du bruit Gaussien. Le facteur de régularisation a été déterminé expérimentalement comme étant celui qui donne la plus petite erreur asymptotique (à 200 itérations). Plusieurs observations peuvent en être tirées :

L'erreur diminue lorsque le nombre de photons augmente pour les 3 algorithmes, résultat classique d'estimation. L'erreur la plus faible est pour l'algorithme GP quelque soit le nombre de photons, ce qui correspond à l'adéquation données modèle. Moins il y a de photons plus la différence en terme d'erreur de reconstruction entre les algorithmes est grande. L'introduction d'un *a priori* provoque une légère augmentation de l'erreur et une diminution de l'écart entre les algorithmes. En effet, dans le cas régularisé, le poids accordé à la vraisemblance des données est diminué au profit d'une information *a priori* dont la forme est la même pour les trois algorithmes. Tout ceci met en évidence l'intérêt du modèle composite, en particulier pour les faibles flux.

photons	1000		
algo.	ISRA	RL	GP
$\mathbf{E}(\epsilon(\mathbf{k}))$	0.68	0.71	0.64
$\mathbf{var}(\epsilon(\mathbf{k}))$	$1.00e^{-2}$	$2.34e^{-4}$	$4.73e^{-4}$
photons	3000		
algo.	ISRA	RL	GP
$\mathbf{E}(\epsilon(\mathbf{k}))$	0.54	0.58	0.53
$\mathbf{var}(\epsilon(\mathbf{k}))$	$3.24e^{-4}$	$2.04e^{-4}$	$2.65e^{-4}$

TAB. 2 – Moyenne et variance de l'erreur d'estimation (50 réal.),  $m = 0, \sigma^2 = 2$  avec régularisation.

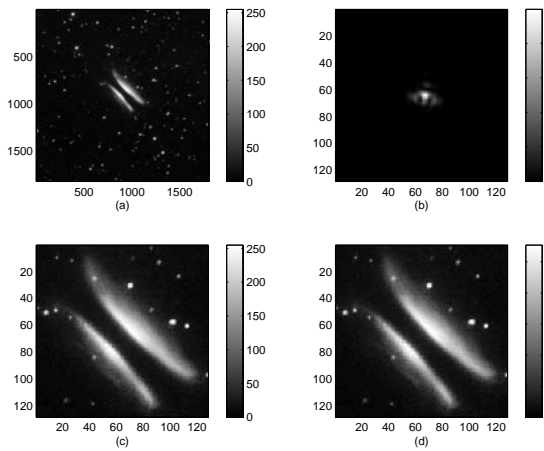


FIG. 1 – (a) Image HST (b) PSF (c) étoile (d) étoile normalisée

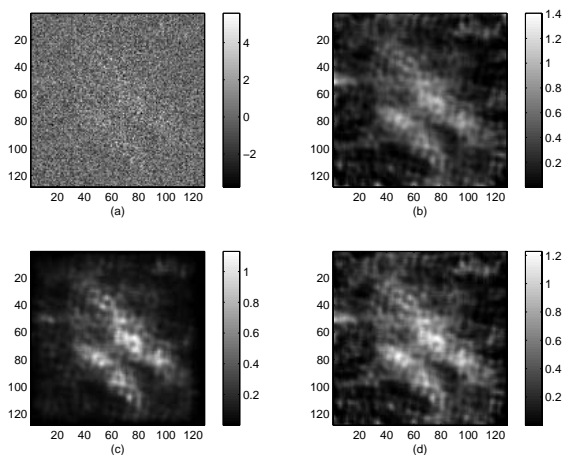


FIG. 2 – (a) Image bruitée, 3000 photons,  $m = 0.1, \sigma^2 = 1$  (b) ISRA,  $k_{min} = 2, \epsilon_{min} = 0.55$  (c) GP,  $k_{min} = 5, \epsilon_{min} = 0.46$  (d) RL,  $k_{min} = 3, \epsilon_{min} = 0.52$

## 5 Conclusion

Un algorithme de reconstruction d'images dans le cas d'un bruit Gaussien Poissonien a été proposé. Ce modèle est particulièrement adapté aux données astrophysiques acquises grâce à des capteurs CCD. Classiquement les modèles utilisés pour de telles données considèrent soit un bruit Gaussien pur, ce qui conduit à l'algorithme ISRA, soit un bruit Poissonien pur, ce qui conduit à l'algorithme RL. Les résultats de simulation mettent en évidence l'intérêt du modèle composite, en particulier à très faible flux.

## Références

- [1] L. Armijo. Minimization of functions having continuous derivatives. *Pacific Journal of Mathematics*, (16) :1–3, 1966.
- [2] D. P. Bertsekas. *Non linear programming*. Athena Scientific, 1995.

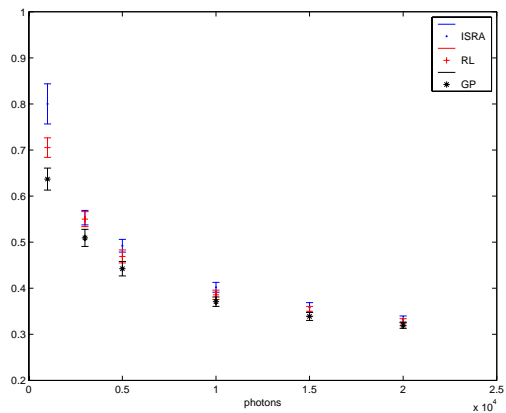


FIG. 3 – Moyenne et variance de l'erreur d'estimation (50 réal.),  $m = 0, \sigma^2 = 2$  sans régularisation.

- [3] C.S. Butler and M. I. Miller. Maximum a posteriori estimation for spect using regularization techniques on massively parallel computers. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 11(12) :84–89, 1993.
- [4] I. Csiszár. Why least squares and maximum entropy ? an axiomatic approach to inference for linear inverse problems. *The annals of statistics*, 46(19) :2032–2066, 1991.
- [5] M. E Daube-Witherspoon and G Muehllehner. An iterative image space reconstruction algorithm suitable for volume ect. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, (5) :61–66, 1986.
- [6] G. Demoment. Image reconstruction and restoration : Overview of common estimation structures and problems. *IEEE Transactions on ASSP*, 12(37) :2024–2036, 1989.
- [7] I. S. Gradshteyn and I.M. Ryzbik. *Table of Integrals, series and Products*. Academic Press, 2000.
- [8] K. Horne. Images of accretion discs - the eclipse mapping method. *Monthly notes in Royal Astronomy Society*, (213) :129–141, 1985.
- [9] H. Lanteri, M. Roche, O. Cuevas, and C. Aime. A general method to devise maximum likelihood signal restoration multiplicative algorithms with non-negativity constraints. *Signal Processing*, 54(81) :945–974, 2001.
- [10] H. Lanteri and C. Theys. Restoration of astrophysical images - the case of poisson data with additive gaussian noise. *Eurasip Journal on Applied Signal Processing - Special Issue on Applications of Signal Processing in Astrophysics and Cosmology*, to be published in 2nd Quarter 2005.
- [11] J. Llacer and J. Nuñez. Iterative maximum likelihood and bayesian algorithms for image reconstruction in astronomy. In R. L White and R. J. Allen, editors, *The restoration Of Hubble Space Telescope images*, pages 62–69. The Space Telescope Science Institute, 1990.
- [12] L. B. Lucy. An iterative technique for the rectification of observed distributions. *Astronomic Journal*, (79) :745–754, 1974.
- [13] L. B. Lucy. Optimum strategy for inverse problems in statistical astronomy. *Astronomy and Astrophysics*, (289) :983–994, 1994.
- [14] D. G. Luenberger. *Introduction to linear and non linear programming*. Addison Wesley, Reading, Massachussets, 1973.
- [15] M. Minoux. *Programmation mathématique - Théorie et algorithmes*, volume 1. Collection technique et scientifique des télécommunications, dunod edition, 1983.
- [16] D. L. Snyder, C. W. Helstrom, A. D. Lanterman, M. Faisal, and R. L. White. Compensation for readout noise in ccd images. *Journal of Optical Society of America A*, 12(2) :272–283, 1995.
- [17] A. Tikhonov and V. Arsenin. *méthodes de résolution des problèmes mal posés*. Mir Moscou, 1976.
- [18] C. H. Wu and J. M. M. Anderson. Novel deblurring algorithms for images captured with ccd cameras. *Journal of Optical Society of America A*, 7(14) :1421–1430, 1997.



# Inversion de données infrarouges issues du télescope SPITZER

Thomas RODET<sup>1</sup> Alain ABERGEL<sup>2</sup> Hervé DOLE<sup>2</sup> Alain COULAIS<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire des Signaux et Systèmes (L2S) Supélec, Plateau de Moulon, 3 rue Joliot Curie, 91192 Gif-sur-Yvette, France

<sup>2</sup>Institut d'Astrophysique Spatiale (IAS) - UMR-8617 (CNRS-UPS) Université Paris-Sud, Bâtiment 121, 91405 Orsay, France

<sup>3</sup>Laboratoire d'Étude du Rayonnement de la Matière en Astrophysique (LERMA)

Observatoire de Paris, 61 Avenue de l'Observatoire, 75014 Paris, France

Thomas.rodet@lss.supelec.fr, Alain.Abergel@ias.u-psud.fr, Hervé.Dole@ias.u-psud.fr,  
Alain.Coulais@obspm.fr

**Résumé** – Nous nous intéressons dans ce papier à l'inversion de données infrarouges issues du télescope spatial SPITZER avec l'imageur MIPS à 160 microns. Le principal problème rencontré est la perturbation des mesures sur le ciel par le dépôt d'énergie des rayons cosmiques dans le détecteur. Ces particules de haute énergie peuvent modifier temporairement les gains des capteurs en altérant la structure du semi-conducteur. Nous avons donc développé un algorithme d'estimation conjointe du gain et de l'image infrarouge du ciel. Cet algorithme repose sur la minimisation d'un critère par une approche de type gradient conjugué.

**Abstract** – This paper deals with the reconstruction of infrared data. The data were measured by NASA's SPITZER Space Telescope. The main problem comes from high energy particles "glitches". These particles disturb the data, and modify temporarily the detector gain. To solve this issue, we estimate jointly the infrared sky and the detector gain in our algorithm. It is based on a criteria minimization. This minimization is the same as an approach of conjugate gradient.

## 1 Introduction

Le rayonnement infrarouge de l'univers est très intéressant pour les astrophysiciens car non seulement il trace les milieux froids (et habituellement opaques au rayonnement visible) tels que les régions de formation stellaire, les disques autour des étoiles, ou les galaxies contenant beaucoup de poussières, mais aussi il permet d'accéder au spectre d'émission de certains espèces chimiques (molécule H<sub>2</sub> par exemple). Malheureusement, ce rayonnement est essentiellement absorbé par l'atmosphère. Dans ce contexte, l'observatoire spatial SPITZER [1] de la NASA a été lancé 25 août 2003. Ce satellite est composé de trois instruments (IRAC, IRS, MIPS). Nous nous intéresserons ici uniquement au détecteur 160  $\mu\text{m}$  de l'instrument MIPS (Multi-band Imaging Photometer for SPITZER [2]). Comme l'instrument n'est pas protégé par l'atmosphère terrestre, les mesures sont entachées d'un bruit impulsif occasionné par les particules hautes énergies que nous appellerons "glitches". La présence en grand nombre de ces "glitches" altère un nombre significatif de données. De plus, le détecteur 160  $\mu\text{m}$  est composé de capteurs en **Ge:Ga** qui ont un comportement non linéaire dissymétrique [3, 4]. Ces difficultés ont poussé les astrophysiciens à collaborer avec des chercheurs en traitement du signal pour l'aspect inversion et des spécialistes des semi-conducteurs pour comprendre le détecteur [5].

## 2 Principe de formation des mesures ( problème direct )

Le principe des acquisitions est résumé sur la figure 1.

**Conversion photons signal :** Le capteur de photons infrarouges est composé de **Ge:Ga** contraint. Ce semi-conducteur est entouré de deux électrodes et il convertit les photons infrarouges en charges électriques. Le mode de lecture des charges est spécifique à ce satellite : on observe la même zone du ciel, durant un temps  $t_{obs}$ . Dans ce laps de temps, on effectue plusieurs lectures (de 16 à 40) des charges qui s'accumulent sur les électrodes. Avant de mesurer une autre partie du ciel, on vide les charges présentes sur les électrodes. Les flux incidents sont estimés au sol à partir des courbes d'évolution des charges (points représentés à droite de la figure 1).

**Matrice de capteurs :** Le détecteur est composé d'une matrice de  $20 \times 2$  capteurs physiquement indépendants. Ils ont donc des propriétés de détection propre (gain, bruit, etc...).

**Acquisition de l'image par vignettage :** Comme la matrice de capteurs est relativement petite, les images du ciel sont obtenues par vignettage. Le télescope observe dans une certaine direction pendant le temps d'intégration, puis il se déplace légèrement afin de couvrir une zone voisine du ciel (voir figure 2).

**Problèmes dus aux particules hautes énergies :** Les "glitches" introduisent un flux intense pendant un temps inférieur à notre période d'échantillonnage. Ces "glitches" peuvent être supprimés grâce aux nombreuses mesures de l'évolution de la charge au cours du temps. Par contre, dans certains cas, les "glitches" entraînent la perte de la donnée à cause de la saturation des capteurs. Ils peuvent aussi modifier temporairement les gains des capteurs en altérant la structure du semi-conducteur.

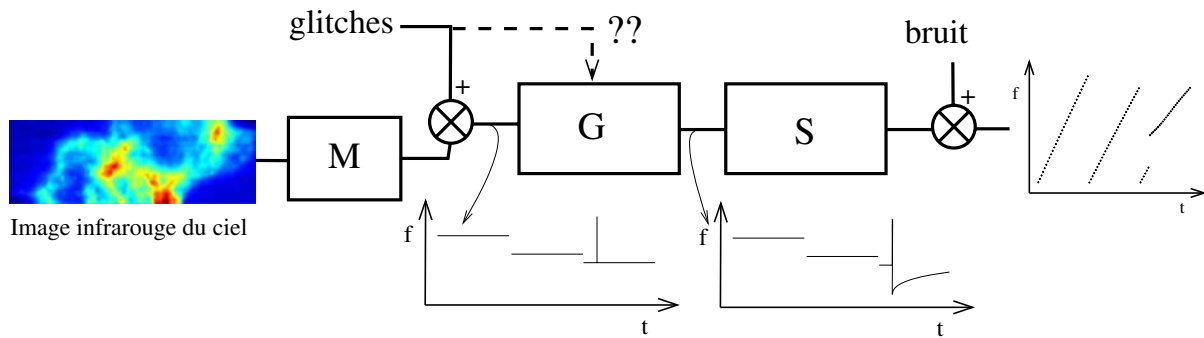


FIG. 1: Schéma d'acquisition des données :  $M$  correspond à l'opérateur de découpage de l'image en petites vignettes  $20 \times 2$ ,  $??$  à l'opérateur inconnu modifiant le gain des capteurs,  $G$  au gain détecteur et  $S$  à l'opérateur d'intégration des charges au cours du temps.

De plus, nous ne savons pas modéliser de façon physique les variations de gain car il y a trop de paramètres qui interviennent (type de particules, profondeur d'interaction etc...). Nous allons donc estimer le gain conjointement à l'image en ayant une approche similaire à [6].

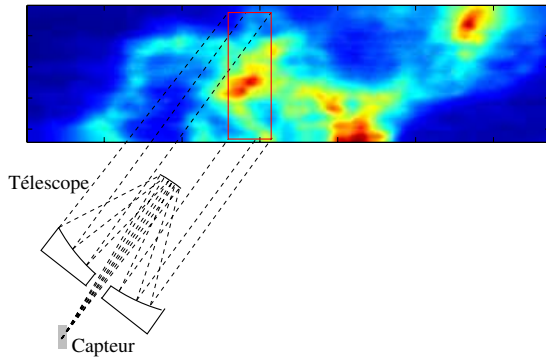


FIG. 2: Schéma de principe de l'acquisition des données par vignettage.

**Acquisition Redondante :** Afin de limiter l'effet des données manquantes, une procédure de balayage du ciel de manière redondante est mise en œuvre. Le facteur de redondance est compris entre 1 et 2 dans la plupart des données, afin de limiter le coût en terme de temps d'observation.

**Modélisation du problème direct.** Le problème direct peut se formaliser de la façon suivante :

Soient  $x$  la carte du ciel à reconstruire et  $y$  les données correspondant à l'évolution de la charge sur les électrodes du capteur au cours du temps. Comme le gain des capteurs peut varier, on le modélise par un vecteur d'inconnue  $g$ . Enfin on considère que l'on est en présence d'un bruit additif gaussien  $b$ . On a :

$$y = S \text{diag}(g) M x + b \quad (1)$$

Pour simplifier la mise en œuvre de notre approche, nous avons développé un algorithme qui estime le flux incident sur le détecteur à partir des données reçues et qui élimine les "glitches", mais pas leurs effets sur le gain détecteur. Nous réécrivons le problème direct en considérant que nos données  $y$  correspondent aux flux incidents sur le détecteur :

$$y = \text{diag}(g) M x + b \quad (2)$$

### 3 Inversion

La difficulté de l'inversion de ce problème réside l'estimation conjointe du gain et de l'image. En effet, ce problème est non linéaire, nous allons essayer de le résoudre en introduisant de l'information *a priori*.

**Introduction d'informations *a priori*.** Dans cette application, le télescope observe des Cirrus (nuages de poussières interstellaires), nous savons donc que les images que l'on cherche sont principalement composées des zones relativement lisses. En ce qui concerne le gain des capteurs nous savons qu'ils sont indépendants d'un capteur à l'autre. De plus, le gain varie à la suite d'une collision avec une particule haute énergie. Nous pouvons donc supposer que la variation du gain est lente sauf aux instants  $z$  où il y a un "glitch" car il est susceptible de varier brusquement. De plus, nous possédons une première estimation du gain par une méthode de calibrage en vol, la valeur du gain que nous cherchons est donc proche de 1. Cet *a priori* va nous permettre de lever partiellement les indéterminations de notre problème.

**Définition du critère.** Comme nous supposons que nos mesures se décrivent par des variables aléatoires gaussiennes et que nous introduisons des *a priori* gaussiens, la solution du maximum *a posteriori* est équivalente à la minimisation du critère suivant :

$$J(x, g) = \|y - \text{diag}(g) M x\|^2 + \mu \|D_s x\|^2 + \sigma \|D_{g/z} g\|^2 + \beta \|g - 1\|^2 \quad (3)$$

où  $D_s$  est la matrice des dérivées spatiales, et  $D_{g/z}$  est la matrice des dérivées temporelles du gain calculé uniquement aux instants où il n'y a pas eu de "glitches". Dans l'équation (3),  $\mu$ ,  $\sigma$  et  $\beta$  sont des hyper-paramètres fixant le compromis entre l'attache aux données et les *a priori* introduits. Pour imposer la forte régularité temporelle du gain, nous prenons:  $\sigma \gg \mu$ .

### 4 Optimisation

Le but de cette optimisation est d'estimer de manière conjointe le flux  $\hat{x}$  et le gain détecteur  $\hat{g}$ .

$$(\hat{x}, \hat{g}) = \arg \min_{x, g} J(x, g)$$

Bien que  $J(x, g)$  ne soit pas toujours convexe, nous avons décidé d'utiliser une méthode de descente pour obtenir nos estimateurs. Cette technique donne de bons résultats dans notre

cas car le critère est localement convexe. De plus, dans la plupart des cas nous pouvons initialiser l'algorithme assez près du minimum, et l'introduction d'*a priori* quadratiques tend à rendre le critère convexe. L'intérêt des techniques de descente est, qu'en générale, elles sont moins coûteuses en ressources de calculs.

**Définissons le gradient conjoint :**

$$\nabla J = \frac{\partial J(\mathbf{x}, \mathbf{g})}{\partial \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial J}{\partial \mathbf{g}} \end{pmatrix} \quad (4)$$

**Direction de descente défini par la méthode du gradient conjugué (voir [7, 8]) :**

La méthode du gradient conjugué vise à construire une suite de directions de descente conjuguées, c'est à dire orthogonales dans la métrique associée au hessien du critère. Pour déterminer, la suite de direction de descente nous utilisons la formule de Polak et Ribière [9].

Soit  $\mathbf{d}_k$  la direction de descente à l'étape  $k$  :

$$\mathbf{d}_k = \begin{cases} -\nabla J_1 & \text{si } k = 1 \\ -\nabla J_k + \gamma_k \mathbf{d}_k & \text{si } k \geq 2 \end{cases} \quad (5)$$

avec

$$\gamma_k = \frac{\langle \nabla J_{k-1} - \nabla J_k, -\nabla J_k \rangle}{\|\nabla J_{k-1}\|^2}$$

L'algorithme de minimisation est itératif, l'étape de mise à jour est la suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}^{k+1} \\ \mathbf{g}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^k \\ \mathbf{g}^k \end{pmatrix} + \alpha \mathbf{d}^k \quad (6)$$

**Détermination du pas optimum de descente  $\alpha_{opt}$  :**

$$\alpha_{opt} = \arg \min_{\alpha} J \left( \begin{pmatrix} \mathbf{x}^k \\ \mathbf{g}^k \end{pmatrix} + \alpha \mathbf{d}_k \right) \quad (7)$$

La fonction  $\phi(\alpha) = J \left( \begin{pmatrix} \mathbf{x}^k \\ \mathbf{g}^k \end{pmatrix} + \alpha \mathbf{d}_k \right)$  possède trois extréma, dont deux minima. Nous obtenons les extréma en déterminant les racines de  $\frac{d\phi}{d\alpha}$ .

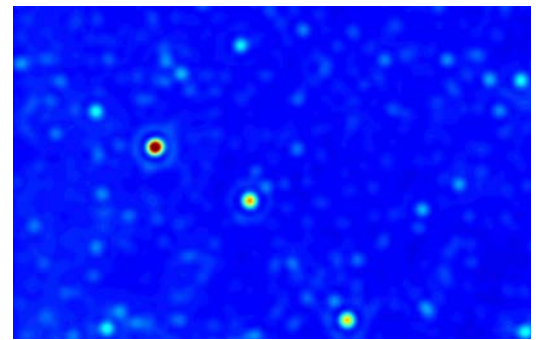
## 5 Résultats

Nous présentons dans cette partie les résultats préliminaires de notre approche sur des données simulées et sur des données réelles.

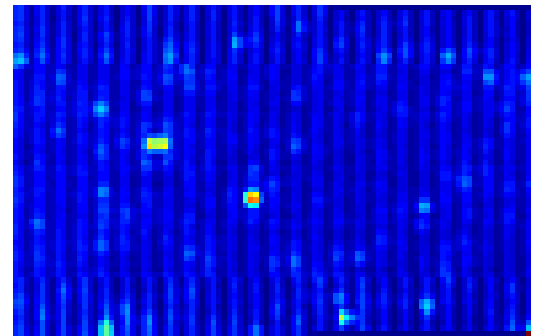
### 5.1 Étude sur des données simulées

**Procédure de simulation :** Nous avons simulé une carte du ciel infrarouge à 160 microns possédant les mêmes propriétés statistiques que le ciel observé (densité de galaxies, spectre de puissance de l'émission diffuse [10]). Nous avons convolué cette image avec la réponse impulsionnelle du télescope, le résultat est illustré sur la figure 3(a). Nous avons ensuite simulé l'acquisition de l'image en vignettes. Nous avons arbitrairement divisé par 2.5 les valeurs des gains des pixels détecteurs de la moitié du capteur. Cette modification nous permet de simuler partiellement les oscillations causées par les "glitches" (voir figure 3 (b)).

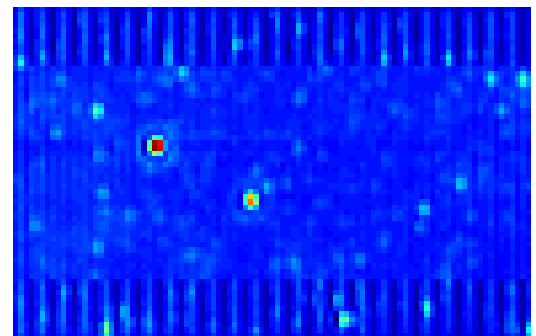
**Analyse des résultats :** La reconstruction obtenue avec la méthode actuellement utilisée par le Spitzer Science Center (NASA) [11], considère que le gain est correctement estimé lors de l'étape de calibration. Cette hypothèse n'étant pas vérifiée, nous voyons des oscillations apparaître sur l'image (voir figure 3(b)). L'estimation conjointe du gain permet de s'affranchir de ce problème, comme nous le voyons dans la partie centrale de la figure 3(c). Nous observons que les oscillations persistent sur le haut et le bas de l'image. Dans les parties haute et basse de l'image nous ne possédons pas de données redondantes, les données ne permettent donc pas d'estimer correctement le gain. Nous aurions pu compenser ce manque d'information par une augmentation de l'*a priori* de douceur de l'image. Nous ne l'avons pas fait pour ne pas dégrader la résolution au centre de l'image.



(a)



(b)



(c)

FIG. 3: (a) Image de référence sur-échantillonnée qui nous a permis de générer les données (b) Reconstruction avec l'algorithme officiel délivré par [11] (pas d'estimation du gain) (c) Reconstruction par estimation conjointe de l'image et des gains détecteur.

## 5.2 Application aux données réelles

La figure 4 représente une partie d'un Cirrus observée à la longueur d'onde  $160\ \mu\text{m}$  par le télescope SPITZER. Ces données nous ont été fournies dans le cadre d'une collaboration avec l'IAS et le Steward Observatory in the University of Arizona. Sur la figure 4 (a), le ciel est reconstruit sans estimer le gain, ni connaissances *a priori* (La méthode de traitement des données est décrite dans [11]). Nous observons dans cette image trois types de défauts :

- Des trous apparaissent sur l'image (petits rectangles bleu foncés sur la figure 4 (a)), car une série de 5 pixels détecteurs voisins sont défectueux.
- Certains pixels ont des valeurs aberrantes (les points rouges de la figure 4 (a)).
- Des oscillations sont présentes sur l'image. Elles sont causées par certains "glitches" qui modifient le gain du pixel détecteur.

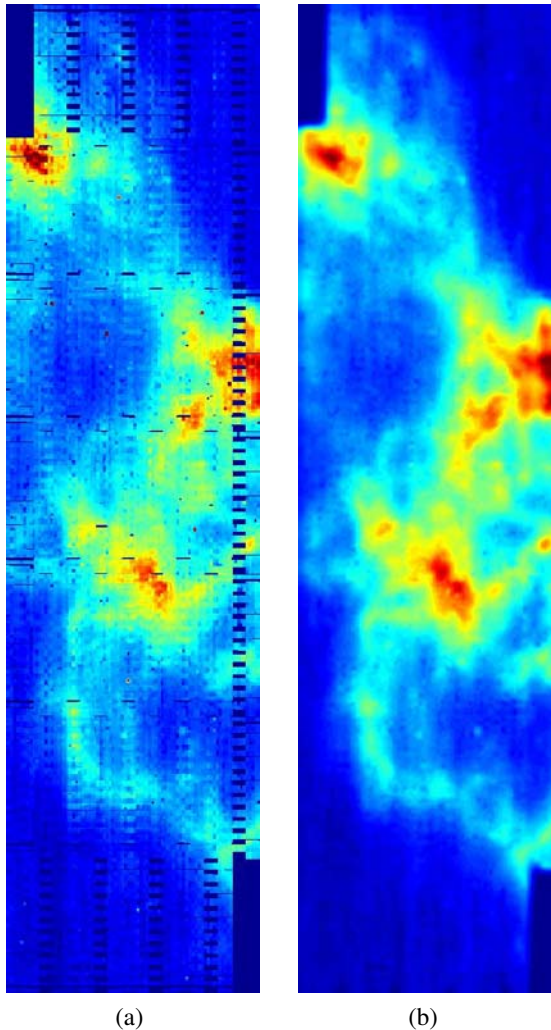


FIG. 4: Reconstruction du Cirrus ECO observé par l'instrument MIPS  $160\ \mu\text{m}$  du satellite SPITZER : (a) reconstruction avec l'algorithme officiel délivré par [11], (b) estimation conjointe du flux et du gain en utilisant un algorithme de descente dans les directions du gradient conjugué.

Pour résoudre ces différents problèmes nous avons construit le critère de l'équation (3). L'*a priori* de douceur sur l'image nous permet d'estimer la valeur du flux présente dans les trous. L'estimation du gain associé à ces *a priori* nous permet d'éliminer les oscillations comme nous l'avons illustré dans la partie 5.1. Enfin, les pixels aberrants ont été supprimés en améliorant l'algorithme de détermination du flux à partir des données brutes. En minimisant conjointement le critère de l'équation (3), nous obtenons l'image de la figure 4 (b). On peut en conclure qu'en tirant mieux partie de la redondance des données nous pouvons augmenter la qualité des images reconstruites.

## 6 Conclusion

Nous avons développé un algorithme d'estimation conjointe de l'image infrarouge du ciel et du gain détecteur. Cet algorithme repose sur la minimisation d'un critère par la méthode du gradient conjugué. Les premiers résultats sur les données simulées et sur les données réelles sont encourageants. Nous validerons notre approche sur un ensemble de données tests dans l'objectif de fournir cette approche à la communauté des astrophysiciens.

## Références

- [1] M. Werner *et al.*, « The spitzer space telescope mission », *ApJS*, vol. 154, pp. 1, 2004.
- [2] G. H. Rieke *et al.*, « The multiband imaging photometer for spitzer », *ApJS*, vol. 154, pp. 25, 2004.
- [3] A. Coulais, F. Balleux, A. Abergel, J.-F. Giovannelli et J. See, « Correction par bloc des transitoires de la caméra infrarouge ISOPHOT C-100 avec un modèle non linéaire dissymétrique », in *Actes 18<sup>e</sup> coll. GRETSI*, Toulouse, septembre 2001.
- [4] A. Coulais, J. Malaizé, J.-F. Giovannelli, T. Rodet, A. Abergel, B. Wells, P. Patrashin, H. Kaneda et B. Fouks, « Non-linear transient models and transient corrections methods for ir low-background photo-detectors », in *ADASS-13*, Strasbourg, octobre 2003.
- [5] B. I. Fouks, « Nonstationary behaviour of low background photon detectors », in *ESA SP-356 Photon Detectors for Space Instrumentation*, décembre 1992, pp. 167–174.
- [6] H. Carfantan et J. Idier, « Auto-calibration des barrettes CCD en imagerie satellite par une méthode bayésienne », Toulouse, avril 2001, CNES-CCT.
- [7] J. Nocedal et S. J. Wright, *Numerical Optimization*, Series in Operations Research. Springer Verlag, New York, 2000.
- [8] J. C. Gilbert, *Optimisation Différentiable : Théorie et Algorithmes*, Notes de cours. INRIA, Rocquencourt, 1999.
- [9] E. Polak, *Computational methods in optimization*, Academic Press, New York, NY, USA, 1971.
- [10] H. Dole, G. Lagache et J.-L. Puget, « Predictions for Cosmological Infrared Surveys from Space with the Multiband Imaging Photometer for SIRTIF (MIPS) », *ApJ*, pp. 585–617, 2003.
- [11] K. D. Gordon *et al.*, « Reduction algorithms for the multiband imaging photometer for spitzer », *PASP*, p. 503, mai 2005.

# Approche de Suivi d'Objet par Courbes de Niveau

A. GANOUN<sup>1,2</sup>, R. CANALS<sup>1</sup>, S. TREUILLET<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire d'Electronique, Signaux, Images - Universite d'Orleans - 12 rue de Blois, 45067 Orléans Cedex 2

<sup>2</sup>Faculté d'Ingénierie, Université de Garyounis, Benghazi, LIBYE

<sup>3</sup>Laboratoire de Vision et Robotique - Université d'Orléans - 12 rue de Blois, 45067 Orléans Cedex 2

Ali.Ganoun@univ-orleans.fr, Raphael.Canals@univ-orleans.fr, Sylvie.Treuillet@univ-orleans.fr

**Résumé** – Beaucoup d'approches ont été développées pour résoudre le problème de suivi de cible, dont l'approche statistique basée sur la méthode des courbes de niveau. Deux des principaux problèmes de suivi de cible en temps réel sont le coût de calcul, et la robustesse de l'algorithme pour le suivi des objets déformables. Dans cet article nous présentons deux techniques pour résoudre ces deux problèmes. La première est une méthode rapide pour diminuer le coût de calcul de l'algorithme standard, basée sur l'utilisation du signe de la fonction de vitesse au lieu d'employer sa valeur, et l'utilisation d'une zone spécifique près de la courbe de niveau zéro. La deuxième technique c'est quand nous calculons la force statistique en chaque point, nous considérons l'effet moyen des points voisins au lieu de l'effet du seul point traité.

**Abstract** – Many approaches were developed to solve the target tracking problem, from which the statistical framework based on the Level Set Method (LSM). Two of the problems related to the real time target tracking problem are the computational cost, and the robustness of the algorithm to track deformable targets. In this paper we present two techniques to solve these two problems. The first is a fast method to decrease the computational cost of the standard algorithm, based on the use of the sign of the speed function that moves the propagating interface instead of using its value, and the use of a specific zone near the zero level set. The second technique is to use the average effect of the neighbouring points for calculating the statistical force acting at each point instead of the effect of only one point.

## 1. Introduction

La méthode des courbes de niveau, présentée par Osher et Sethian [1], est basée sur l'équation différentielle partielle de courbe de niveau à valeur initiale. Cette méthode réalise le suivi de l'évolution d'une fonction implicite dépendante du temps dont le niveau zéro correspond toujours à la position de l'interface de propagation définissant le contour de l'objet à suivre. Les principales raisons de l'utilisation du LSM sont diverses et variées [2], [3] : sa flexibilité, sa stabilité, sa gestion automatique d'éventuels changements de topologie, tels que la division ou la fusion.

Un problème avec l'algorithme standard est qu'il est trop lent pour les applications temps réel. En effet, cet algorithme nécessite la mise à jour et le calcul de la fonction pour tous les points de l'image et pas uniquement pour la courbe de niveau zéro. Par conséquent, le développement d'un algorithme rapide et efficace est de grande importance. Parmi les algorithmes rapides relatifs à l'approche LSM, on trouve la « Fast Marching Method » (FMM) [2], mais qui n'est pas adaptée à notre besoin, la « Narrow Band Method » (NBM) [4], [5], et la « Signed Function Method » (SFM) [6].

Un autre problème lié à l'approche LSM est celui de l'initialisation. Généralement, le suivi débute par la détermination du contour de l'objet à suivre ; nous avons constaté que si le contour initial n'est pas précis, l'algorithme de suivi cible risque fortement d'échouer. C'est la raison pour laquelle nous avons développé un algorithme qui peut résoudre ce problème en employant l'effet moyen des points voisins au lieu de celui du seul point traité.

Cet article est organisé comme suit : la section 2 est consacrée à la méthode des courbes de niveau et explique comment le coût calculatoire peut être réduit afin d'atteindre des objectifs de fonctionnement temps réel. Dans la section 3, nous présentons la manière dont nous utilisons également le voisinage du point traité pour augmenter la robustesse de notre approche. Les résultats expérimentaux sur images réelles sont présentés en section 4, suivis d'une conclusion en section 5.

## 2. La Méthode des Courbes de Niveau

Dans la méthode des courbes de niveau, nous déformons une image donnée avec une équation différentielle partielle (EDP) que nous résolvons afin d'obtenir la solution à notre problème. L'idée centrale est de suivre l'évolution d'une fonction  $\Phi(\gamma, t)$  dont le niveau zéro ( $\Phi = 0$ ) correspond toujours à la position de l'interface de propagation  $\gamma$  [1], l'EDP étant donnée par :

$$\Phi_t + F |\nabla \Phi| = 0 \quad (1)$$

où  $F$  est la fonction de vitesse dans la direction normale à l'interface de propagation (Fig. 1). Dans cette dernière équation, la surface fermée  $\gamma$  est représentée implicitement par la courbe de niveau zéro de la fonction  $\Phi(\gamma, t)$ .



Une approche pour obtenir la nouvelle courbe de niveau zéro est d'employer la technique d'itération formulée dans [2]:

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Delta t \left[ F \left| \nabla \Phi^n \right| \right] \quad (2)$$

où  $\Delta t$  est le pas de discrétisation temporel et  $n$  le numéro de l'itération. La phase d'itération commence après la phase d'initialisation de l'algorithme qui consiste à trouver la courbe initiale de niveau zéro  $\Phi^0$ , et à calculer la fonction de vitesse qui déplace l'interface vers sa nouvelle position. Pour chaque point  $(x,y)$ , nous calculons cette fonction  $F$  qui reste alors identique durant toute la phase d'itération [9], [10]:

$$\bar{F} = \log\left(\frac{P_{in}}{P_{out}}\right) \bar{n} \quad (3)$$

$P_{in}$  et  $P_{out}$  sont les probabilités pour que ce point  $(x,y)$  dans  $I^{n+1}$  soit respectivement à l'intérieur ou à l'extérieur de la région à suivre, et  $\bar{n}$  est la normale en ce point. Si l'intensité en ce point correspond mieux à la distribution de la région  $R_1$  que celle de la région complémentaire  $R_1^c$ , alors ce point se déplacera suivant  $\bar{n}$ .

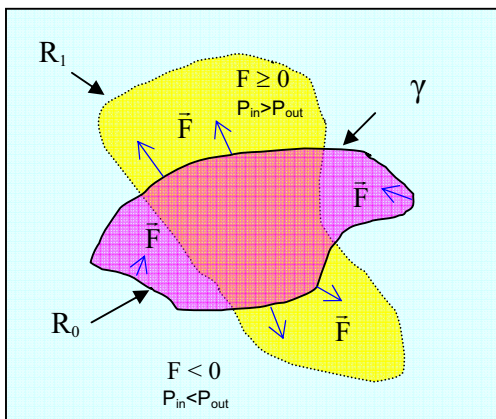


Fig.1 : La surface fermée et la fonction F

Comme nous l'avons expliqué auparavant, l'algorithme standard est trop lent pour les applications temps réel ; c'est la raison pour laquelle nous considérons l'algorithme rapide SFM décrit dans [6]. Le SFM est basé sur deux approches : celle de la fonction signée et celle du cadre spécifique, inspirée de la NBM.

La première approche du SFM vise à employer le signe de la fonction de vitesse  $F$  au lieu de calculer sa valeur, comme donné dans les équations (1) et (2), [6], [10], [11], [12]. Comme le coût calculatoire de l'algorithme dépend en grande partie du temps nécessaire à la phase d'itération, le SFM diminue le temps de cette phase. Ainsi, pour tous les points, si le signe de  $F$  est positif, au lieu de calculer la valeur de  $\Phi^{n+1}$  qui croît progressivement vers  $+\infty$  au fur et à mesure de chaque itération, nous lui attribuons simplement une valeur positive arbitraire (+1) ; et si le signe de  $F$  est négatif, au lieu de calculer la valeur de  $\Phi^{n+1}$  qui décroît progressivement vers

$-\infty$  au fur et à mesure de chaque itération, nous lui attribuons directement une valeur négative arbitraire (-1). Nous pouvons ainsi observer l'interface de propagation se déplacer rapidement au fil des itérations, jusqu'à atteindre, en quelques itérations, sa position finale correspondant à  $R_1$ , lorsque plus aucun changement de  $\Phi^n$  n'a lieu.

La deuxième approche du SFM, le cadre spécifique, est semblable à la NBM [2], [4] dans laquelle nous calculons l'évolution des courbes de niveau uniquement dans une zone spécifique de quelques pixels à l'intérieur et à l'extérieur de la courbe de niveau zéro, au lieu de calculer l'évolution des courbes de niveau en tous les points de l'image. En fait, cette approche est basée sur l'hypothèse que nous connaissons l'étendue maximale de mouvement d'une image à la suivante dans la séquence. L'évaluation des courbes de niveau est faite uniquement pour les points à l'intérieur de la zone spécifique qui est habituellement très petite par rapport à l'espace global. Néanmoins, le coût calculatoire de la gestion de cette zone étant important, il semble alors plus judicieux d'opter pour une zone rectangulaire avec une marge  $\delta$  d'une dizaine de pixels autour de la courbe de niveau zéro. Le choix de  $\delta$  réalisé de cette manière pour cette approche du cadre spécifique n'est pas optimal, car d'autres techniques plus sophistiquées peuvent être utilisées, mais il est suffisant si sa valeur n'est pas trop faible.

### 3. L'approche de voisinage

Pour expliquer l'approche de voisinage, nous commençons par présenter la technique employée pour calculer  $P_{in}$  et  $P_{out}$  telle qu'elle est donnée dans [10], avec la référence à la figure 1 et aux équations (1), (2) et (3). A partir de ces équations, on peut présenter l'équation de suivi sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = & \left[ \inf_{\{z: \|z\| \leq \delta, (x+z, y+z) \in R_0\}} \left( I^{n+1}(x, y) - I^n(x+z, y+z) \right)^2 \right] \left\| \nabla \Phi \right\| \\ & - \left[ \inf_{\{z: \|z\| \leq \delta, (x+z, y+z) \in R_0^c\}} \left( I^{n+1}(x, y) - I^n(x+z, y+z) \right)^2 \right] \left\| \nabla \Phi \right\| + [\lambda_L \kappa_\Phi(x, y)] \left\| \nabla \Phi \right\| \\ = & F_1 - F_2 + \alpha \end{aligned} \quad (4)$$

où  $\lambda_L$  est une constante et  $\kappa_\Phi$  la fonction de courbure de la courbe fermée  $\gamma$ .  $\alpha$  est une force liée à la courbure de  $\gamma$  et est assez petite. Généralement,  $\alpha$  est négligée et la force  $F_1$  au point  $(x,y)$  est trouvée en déterminant la valeur minimale de la différence entre les points  $I^{n+1}(x,y)$  et  $I^n(x+z,y+z)$  dans la zone  $z: \|z\| \leq \delta, (x+z, y+z) \in R_0$ . De même, la force  $F_2$  au point  $(x,y)$  correspond à la valeur minimale de la différence entre les points  $I^{n+1}(x,y)$  et  $I^n(x+z,y+z)$  dans la zone  $z: \|z\| \leq \delta, (x+z, y+z) \in R_0^c$ . Ainsi la force finale sera correcte si la définition de  $R_0$  est précise, ce qui permettra à l'algorithme de trouver la région  $R_1$  correcte ; dans le cas contraire, l'algorithme fournira des résultats erronés.

Dans le cas de notre approche, la force  $F_1$  est maintenant définie comme la différence entre le point  $I^{n+1}(x,y)$  et la moyenne des points  $I^n(x+z,y+z)$  dans la zone définie par  $z: \|z\| \leq \delta, (x+z, y+z) \in R_0$ , puis la force  $F_2$  comme la différence entre le point  $I^{n+1}(x,y)$  et la moyenne des points  $I^n(x+z,y+z)$  avec  $z: \|z\| \leq \delta, (x+z, y+z) \in R_0^c$ . L'effet introduit par des points erronés devient alors négligeable

puisque la moyenne des points dans la zone de recherche est proche de la valeur correcte, car nous supposons que le nombre de ces points mal placés - quelques points de  $R_0$  situés dans  $R_1^c$ , ou quelques points de  $R_1^c$  dans  $R_0$  - est plus petit que le nombre de points correctement classés dans la région de recherche.

#### 4. Résultats expérimentaux

L'algorithme des courbes de niveau standard et l'algorithme SFM ont été implantés sur un PC 2 GHz équipé de Matlab. De nombreuses séquences d'images 8 bits ont été utilisées pour tester les algorithmes. Les temps d'exécution du SFM sont de l'ordre de 19 à 23 fois plus faibles que ceux de l'algorithme standard, suivant le type d'image à traiter, avec un nombre d'itérations environ 7 fois moins important.

La figure 2 illustre parfaitement la robustesse de l'algorithme SFM lié à l'approche de voisinage par rapport à l'algorithme SFM. A partir des deux images de synthèse, il semble très difficile de déterminer précisément les contours de la région  $R_0$  dans l'image 1. A cause de ce problème d'initialisation, l'algorithme SFM seul est incapable de fournir un résultat cohérent avec la réalité (image gauche en bas). Par contre, notre approche permet de passer outre ces erreurs de détermination de  $R_0$  et d'aboutir à un résultat tout à fait correct de  $R_1$  (image droite en bas). A noter le faible nombre d'itération de l'algorithme SFM par rapport à l'algorithme standard.

Nous présentons ensuite les résultats obtenus sur deux séquences d'images réelles (Fig. 3 et 4). Avant de lancer le suivi d'objet, il faut passer par une phase d'initialisation du contour de l'objet. Celle-ci est réalisée grâce à une approche itérative de Fast Marching (FM) combinant l'information de gradient et celle de statistique de région présente dans l'image. Pour chaque séquence, seules trois images acquises à des instants différents sont présentées pour illustrer l'efficacité de notre algorithme. Bien que le résultat de l'initialisation ne soit pas tout à fait correct, l'algorithme arrive à suivre les objets de manière efficace dans les séquences avec un nombre restreint d'itérations.

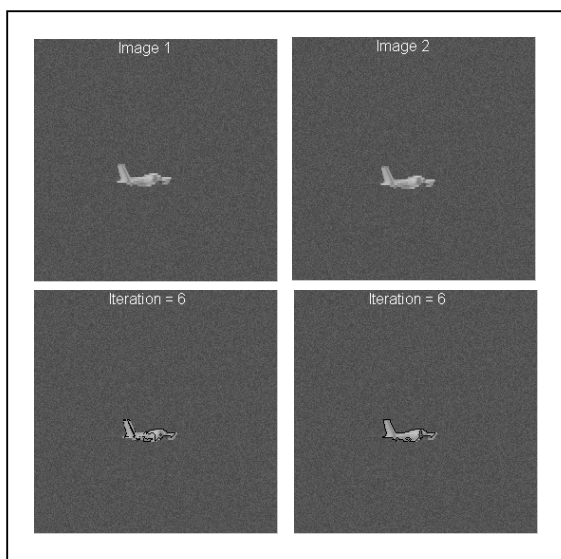


Fig.2 : Le résultat de l'algorithme SFM

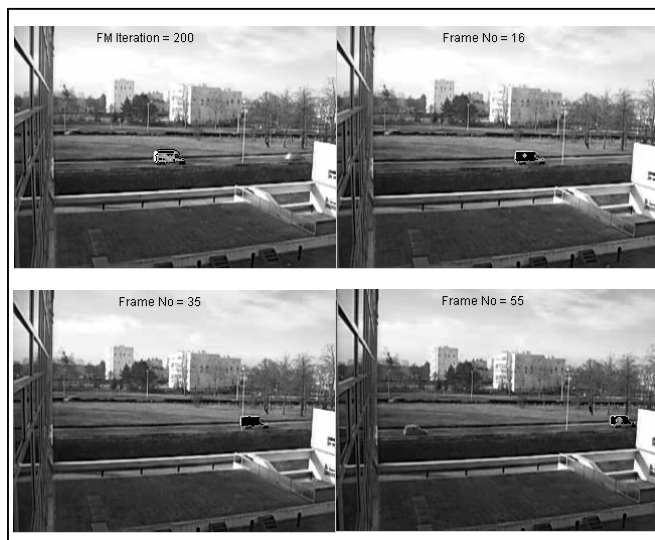


Fig.3 : Le résultat de suivi d'un objet dans une séquence d'images

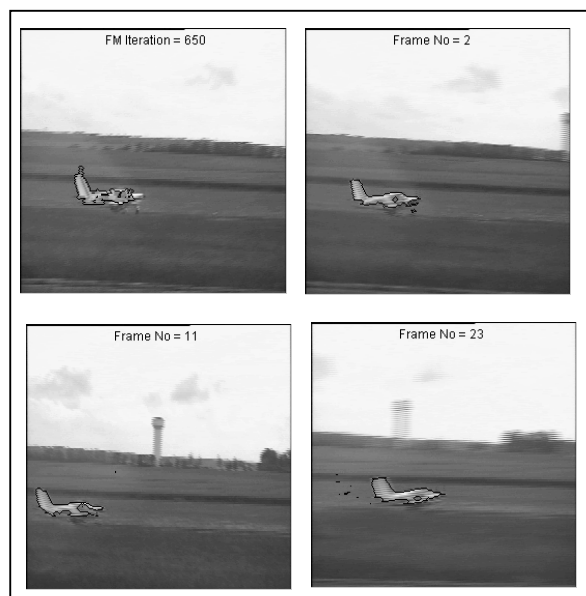


Fig.4 : Le résultat de suivi d'un objet dans une séquence d'images

## 5. Conclusion

Nous avons présenté ici une technique basée sur la méthode des Courbes de Niveau pour suivre un objet dans une séquence d'images. L'approche SFM utilisée dans l'algorithme a permis de réduire considérablement le nombre d'itérations nécessaire pour aboutir à notre résultat. L'association d'une approche de voisinage a amélioré la robustesse de l'algorithme de suivi.

Dans cette technique, la détermination initiale de l'objet à suivre n'est plus une étape primordiale pour obtenir des résultats cohérents. Les résultats expérimentaux valident la nouvelle approche et montrent son efficacité.

La prochaine étape est l'implantation de cette approche dans un système embarqué en vue d'un fonctionnement temps réel pour une application de suivi de cible.

## Références

- [1] S. Osher, J. Sethian, "Fronts Propagating With Curvature Dependent Speed : Algorithms Based On Hamilton-Jacobi Formulations", *Jour. Computing Phys.*, 79, pp.12-49, 1988.
- [2] J. Sethian, "*Level Set Methods*", Cambridge University Press, 1996.
- [3] R. Fedkiw, G. Sapiro, C. Shu, Shock Capturing, Level Sets, And Based Methods In Computer Vision And Image Processing: A Review Of Osher's Contributions", *Jour. of Computational Physics*, 185, pp. 309-341, 2003.
- [4] D. Adalsteinsson, J. Sethian, "A Fast Level Set Method For Propagating Interfaces", *Jour. Computing Phys.*, Vol. 118, pp. 269-277, 1995.
- [5] D. Peng, B. Merriman, S. Osher, H. Zhao, M. Kang, "A PDE-based fast local level set method", *Jour. Computing Phys.*, Vol. 155, November 1999.
- [6] A. Ganoun, R. Canals, "A new fast Level Set Method", *6th NORDIC Signal Processing Symposium*, 9 - 11/6/2004, ESPOO, FINLAND.
- [7] A. Mansouri, T. Chomaud, J. Konrad, "A Comparative Evaluation Of Algorithms For Fast Computation Of Level Set PDEs with Applications To Motion Segmentation", *In Proc. International Conf. on Image Processing*, vol III, pp. 636-639, 2001.
- [8] B. Nilsson, A. Heyden, "A Fast Algorithm For Level Set-Like Active Contours", *Pattern Recognition Letters* 24 ( 2003 ) 1331-1337.
- [9] S. Zhu, A. Yuille, "Region Competition : Unifying Snakes, Region Growing, and Bayes/MDL for Multi-band Image Segmentation", *IEEE Trans. Pattern Analysis And Machine Intelligence* Vol. 18, No 9, pp.884-900, Sept 1996.
- [10] A. Mansouri, "Region Tracking Via Level Set Pdes Without Motion Computation", *IEEE Trans. Pattern Analysis And Machine Intelligence* Vol. 24, No 7, July 2002.
- [11] C. Rasmussen, G. Hager, "Probabilistic data Association Methods for Tracking Complex Visual Objects", *IEEE Trans. Pattern Analysis And Machine Intelligence* Vol. 23, No 6, pp. 560-576, June 2001.
- [12] E. Sifakis, C. Garcia, and G. Tziritas, "Bayesian Level Sets for Image Segmentation", *Journal of Visual Communication and Image Representations*. No 13, 44-64, 2002.



# Une nouvelle approche des bornes Bayésiennes

Alexandre RENAUX<sup>1</sup>, Philippe FORSTER<sup>2</sup>, Pascal LARZABAL<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire SATIE / UMR 8029

ENS Cachan 61, avenue du Président Wilson 94235 Cachan Cedex, France

<sup>2</sup>Laboratoire GEA

IUT Ville d'Avray, 1 Chemin Desvallières, 92410 Ville d'Avray, France

RenauX@satie.ens-cachan.fr, Philippe.Forster@cva.u-paris10.fr, Larzabal@satie.ens-cachan.fr

**Résumé** – Ce papier traite des bornes minimales de l'erreur quadratique moyenne dans un cadre Bayésien. Nous exprimons l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur de la moyenne conditionnelle, qui est la meilleure borne Bayésienne, sous la forme d'un problème d'optimisation sous un continuum de contraintes. La discrétisation de ce continuum conduit à une méthode permettant l'unification des bornes classiques. En outre, l'introduction de nouvelles contraintes permet d'obtenir des bornes jusqu'à lors inexplorées. C'est ainsi que cette approche nous permet d'élaborer une version Bayésienne de la borne d'Abel.

**Abstract** – This paper deals with minimal bounds on the mean square error in the Bayesian context. We express the minimum mean square error of the conditional mean estimator as the solution of a continuum constrained optimization problem. And, by sampling these constraints, we obtain the classical Bayesian bounds. Moreover, this method enables us to derive new bounds as the Bayesian version of the deterministic Abel bound.

## 1 Introduction

Nous étudions le problème de l'établissement des bornes minimales de l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) dans le cadre d'une *modélisation aléatoire des paramètres*, complétant ainsi les travaux réalisés précédemment sur les bornes déterministes [1]. Dans le cadre de la théorie Bayésienne, il est bien connu que l'Estimateur de la Moyenne Conditionnelle (EMC) donne l'EQM minimale. L'obtention d'une forme analytique de cette EQM reste très difficile voir impossible. Il est dès lors intéressant d'avoir à sa disposition d'autres bornes inférieures de l'EQM d'un estimateur afin d'en apprécier les performances. Ces bornes doivent rester pertinentes lorsque le scénario devient critique (faible Rapport Signal sur Bruit (RSB) et/ou nombre d'observations), ce qui n'est pas le cas de la borne de Cramér-Rao Bayésienne. D'où le récent regain d'intérêt de la communauté pour l'établissement de telles bornes [2].

Le but de cet article est de présenter une approche unifiée de l'obtention des bornes Bayésiennes sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes. En effet, nous exprimons tout d'abord l'EQM de l'EMC (meilleure borne Bayésienne) à l'aide d'un problème d'optimisation sous un continuum de contraintes. Puis par discrétisation de ce continuum, nous obtenons une méthode pour créer des bornes minimales. Ainsi, nous retrouvons les bornes Bayésiennes classiques et nous illustrons la richesse du concept par l'introduction d'une nouvelle borne.

## 2 EQM Bayésienne minimale

### 2.1 Optimisation sous contraintes

Soient  $\mathbf{x} \in \Omega$  un vecteur d'observation et  $\theta \in \Theta$  un paramètre aléatoire scalaire à estimer. Soient  $f(\mathbf{x}, \theta)$  et  $g(\mathbf{x}, \theta)$  deux fonctions de  $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit

$$\langle f(\mathbf{x}, \theta), g(\mathbf{x}, \theta) \rangle = \int_{\Omega} \int_{\Theta} f(\mathbf{x}, \theta) g(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x}, \quad (1)$$

un produit scalaire de ces deux fonctions. Sa norme sera notée  $\|f(\mathbf{x}, \theta)\|^2 = \langle f(\mathbf{x}, \theta), f(\mathbf{x}, \theta) \rangle$ .

*Théorème 1* : Soient  $u(\mathbf{x}, \theta)$ ,  $g_0(\mathbf{x}, \theta), \dots, g_K(\mathbf{x}, \theta)$ , un jeu de fonctions de  $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  et  $c_0, c_1, \dots, c_K$ ,  $K+1$  nombres réels. Rappelons le résultat déjà utilisé dans [1] : la valeur minimale de  $\|u(\mathbf{x}, \theta)\|^2$  avec les  $K+1$  contraintes  $\langle u(\mathbf{x}, \theta), g_i(\mathbf{x}, \theta) \rangle = c_i$  pour  $i = 0, \dots, K$  est donnée par

$$\min \|u(\mathbf{x}, \theta)\|^2 = \mathbf{c}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{c}, \quad (2)$$

avec  $\mathbf{c} = [c_0, c_1, \dots, c_K]^T$  et  $G_{m,n} = \langle g_m(\mathbf{x}, \theta), g_n(\mathbf{x}, \theta) \rangle$ .

### 2.2 Nouvelle formulation de l'EQM minimale

L'EQM de l'EMC est la solution du problème d'optimisation sous contrainte suivant

$$\begin{cases} \min \int_{\Omega} \int_{\Theta} v^2(\mathbf{x}, \theta) p(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x} \\ \text{sous la contrainte } v(\mathbf{x}, \theta) = \hat{\theta}(\mathbf{x}) - \theta \end{cases} \quad (3)$$

D'un autre côté, en posant  $v(\mathbf{x}, \theta) = \frac{u(\mathbf{x}, \theta)}{\sqrt{p(\mathbf{x}, \theta)}}$ , le théorème

\* Cette étude a été partiellement financée par le contrat Européen NEWCOM no. 507325

1 donne la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \min_{\Omega \Theta} \int \int v^2(\mathbf{x}, \theta) p(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x} \\ \text{sous les contraintes pour } i = 0, \dots, K \\ \int \int_{\Omega \Theta} v(\mathbf{x}, \theta) g_i(\mathbf{x}, \theta) \sqrt{p(\mathbf{x}, \theta)} d\theta d\mathbf{x} = c_i \end{cases} \quad (4)$$

Le théorème suivant montre que la contrainte du problème d'optimisation (3) est équivalente à un continuum (c'est à dire  $K \rightarrow \infty$ ) de contraintes appropriées du problème d'optimisation (4). Soit  $F$  l'ensemble des fonctions  $f(\mathbf{x}, \theta)$  telles que  $\int \int_{\Omega \Theta} f(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x} = 1$  et  $w(\mathbf{x}, \theta, h, s) =$

$$\left( \frac{f(\mathbf{x}, \theta+h)}{f(\mathbf{x}, \theta)} \right)^s - \left( \frac{f(\mathbf{x}, \theta-h)}{f(\mathbf{x}, \theta)} \right)^{1-s} \text{ alors}$$

Théorème 2 :

$$\left[ \begin{array}{l} \forall f(\mathbf{x}, \theta) \in F, \forall h \text{ et } \forall s \\ \int \int_{\Omega \Theta} v(\mathbf{x}, \theta) w(\mathbf{x}, \theta, h, s) f(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x} = \\ h \int \int_{\Omega \Theta} \left( \frac{f(\mathbf{x}, \theta-h)}{f(\mathbf{x}, \theta)} \right)^{1-s} f(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x} \end{array} \right] \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow v(\mathbf{x}, \theta) = q(\mathbf{x}) - \theta,$$

où  $q$  est une fonction de  $\mathbf{x}$  seulement. La démonstration est fournie en appendice.

L'équation (5) met en jeu un continuum de contraintes. Nous allons restreindre ce continuum à un jeu discret de contraintes ( $K < \infty$ ) par un choix fini de paramètres  $h$  et  $s$ . Par cet échantillonnage des contraintes, la solution du problème d'optimisation (4) va donner des bornes plus basses que l'EQM de l'EMC.

### 3 Bornes Bayésiennes

Dans toute la suite on imposera  $f(\mathbf{x}, \theta) = p(\mathbf{x}, \theta)$  la densité de probabilité jointe du problème.

#### 3.1 Bornes de Cramér-Rao et de Bhattacharyya Bayésiennes

Par dérivations successives de l'intégrale du théorème 2 par rapport à  $h$  (en  $h = 0$ ) et avec  $s = 1$ , il vient  $\int \int_{\Omega \Theta} v(\mathbf{x}, \theta) \frac{\partial^i f(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta^i} d\theta d\mathbf{x} = \delta_{1i}$  où  $\delta_{1i}$  est le symbole de Kronecker. On peut dès lors utiliser la formulation (4) en utilisant le jeu des  $K + 1$  contraintes suivant

$$\mathbf{g} = \frac{1}{\sqrt{p(\mathbf{x}, \theta)}} \left[ p(\mathbf{x}, \theta), \frac{\partial p(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta}, \dots, \frac{\partial^K p(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta^K} \right]^T \quad (6)$$

$$\mathbf{c} = [0, 1, 0, \dots, 0]^T. \quad (7)$$

Le théorème 1 donne alors le minorant de l'EQM de l'EMC suivant

$$\begin{aligned} EQM_{EMC} &\geq \mathbf{c}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{c} \\ &= [1, 0, \dots, 0] \mathbf{B}^{-1} [1, 0, \dots, 0]^T, \end{aligned} \quad (8)$$

avec

$$B_{i,j} = \int \int_{\Omega \Theta} \frac{1}{p(\mathbf{x}, \theta)} \frac{\partial^i p(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta^i} \frac{\partial^j p(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta^j} d\theta d\mathbf{x}. \quad (9)$$

On retrouve la borne de Bhattacharyya Bayésienne [3]. Et, si on se réduit au cas particulier  $K = 1$ , on obtient  $EQM_{EMC} \geq \left( \int \int_{\Omega \Theta} \frac{1}{p(\mathbf{x}, \theta)} \frac{\partial p(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} d\theta d\mathbf{x} \right)^{-1}$  qui n'est autre que la borne de Cramér-Rao Bayésienne (BCRB) [3].

#### 3.2 Bornes de Barankin Bayésienne et de Bobrovsky-Zakai

De manière similaire, par une discrétisation du paramètre  $h$  de l'intégrale intervenant dans le théorème 2 et en posant  $s = 1$ , on obtient le jeu des  $K + 1$  contraintes suivant

$$\mathbf{g} = \frac{1}{\sqrt{p(\mathbf{x}, \theta)}} \begin{bmatrix} p(\mathbf{x}, \theta) \\ p(\mathbf{x}, \theta + h_1) \\ \vdots \\ p(\mathbf{x}, \theta + h_K) \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{c} = [0, h_1, \dots, h_K]^T = [0, \mathbf{h}^T]^T. \quad (11)$$

Le théorème 1 donne alors le minorant suivant

$$\begin{aligned} EQM_{EMC} &\geq \mathbf{c}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{c} \\ &= \mathbf{h}^T (\mathbf{D} - \mathbf{1}\mathbf{1}^T)^{-1} \mathbf{h}, \end{aligned} \quad (12)$$

avec  $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T$  et

$$D_{i,j} = \int \int_{\Omega \Theta} \frac{p(\mathbf{x}, \theta + h_i) p(\mathbf{x}, \theta + h_j)}{p(\mathbf{x}, \theta)} d\theta d\mathbf{x}. \quad (13)$$

Par maximisation sur le vecteur  $\mathbf{h}$ , on obtient une borne, que nous appellerons borne de Barankin Bayésienne par analogie avec le cas déterministe. Bien que n'ayant jamais été étudiée, cette borne est un cas particulier de la borne hybride proposée par Reuven-Messer dans [4]. Elle est donnée par

$$EQM_{EMC} \geq \max_{\mathbf{h}} \mathbf{h}^T (\mathbf{D} - \mathbf{1}\mathbf{1}^T)^{-1} \mathbf{h}. \quad (14)$$

Si on se réduit au cas particulier  $K = 1$ , on obtient  $EQM_{EMC} \geq \max_h \frac{h^2}{\int \int_{\Omega \Theta} \frac{p^2(\mathbf{x}, \theta+h)}{p(\mathbf{x}, \theta)} d\theta d\mathbf{x} - 1}$  qui est la borne de Bobrovsky-Zakai (BBZ) [5].

#### 3.3 Borne de Weiss-Weinstein

Enfin, par une discrétisation des paramètres  $h$  et  $s$  de de l'intégrale intervenant dans le théorème 2, on obtient le jeu des  $K + 1$  contraintes suivant

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{g}}{\sqrt{p(\mathbf{x}, \theta)}} &= \begin{bmatrix} 1 \\ L^{s_1}(\mathbf{x}|\theta + h_1, \theta) - L^{1-s_1}(\mathbf{x}|\theta - h_1, \theta) \\ \vdots \\ L^{s_K}(\mathbf{x}|\theta + h_K, \theta) - L^{1-s_K}(\mathbf{x}|\theta - h_K, \theta) \end{bmatrix} \\ \mathbf{c} &= \begin{bmatrix} 0 \\ h_1 E[L^{1-s_1}(\mathbf{x}|\theta - h_1, \theta)] \\ \vdots \\ h_K E[L^{1-s_K}(\mathbf{x}|\theta - h_K, \theta)] \end{bmatrix} = [0, \boldsymbol{\xi}^T], \end{aligned} \quad (15)$$

avec  $L(\mathbf{x}|\theta_1, \theta_2) \triangleq \frac{p(\mathbf{x}, \theta_1)}{p(\mathbf{x}, \theta_2)}$ .

Le théorème 1 donne alors le minorant suivant

$$EQM_{EMC} \geq \mathbf{c}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{c} = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\xi}, \quad (16)$$

avec

$$W_{i,j} = E \left[ \begin{array}{c} (L^{s_i}(\mathbf{x}|\theta + h_i, \theta) - L^{1-s_i}(\mathbf{x}|\theta - h_i, \theta)) \times \\ (L^{s_j}(\mathbf{x}|\theta + h_j, \theta) - L^{1-s_j}(\mathbf{x}|\theta - h_j, \theta)) \end{array} \right]. \quad (17)$$

Par maximisation sur les éléments  $h$  et  $s$ , on retrouve la borne de Weiss-Weinstein [6]

$$EQM_{EMC} \geq \max_{h_1, h_2, \dots, h_K} \max_{s_1, s_2, \dots, s_K} \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\xi}. \quad (18)$$

### 3.4 Obtention de nouvelles bornes

Grâce à l'introduction d'un jeu de contraintes appropriées, cette approche permet d'obtenir de nouvelles bornes. C'est ainsi que nous établissons une borne plus performante que celle de BBZ, tout en restant d'une complexité équivalente. En effet, en combinant les contraintes de la borne de BCRB et les contraintes de la borne de BBZ, i.e. en posant

$$\mathbf{g} = \frac{1}{\sqrt{p(\mathbf{x}, \theta)}} \left[ p(\mathbf{x}, \theta), \frac{\partial p(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta}, p(\mathbf{x}, \theta + h) \right]^T \quad (19)$$

$$\mathbf{c} = [0, 1, h]^T, \quad (20)$$

on obtient directement par application du théorème 1 et maximisation sur  $h$  le minorant suivant

$$EQM_{EMC} \geq \max_h \frac{B_{CRB}^{-1} - 2\Psi + B_{BZ}^{-1}}{(B_{CRB} \times B_{BZ})^{-1} - \Psi^2}, \quad (21)$$

où  $B_{CRB}$  est la BCRB,  $B_{BZ}$  est la BBZ (en omettant la maximisation sur  $h$ ), et

$$\Psi = \frac{1}{h} \int_{\Omega} \int_{\Theta} \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} p(\mathbf{x}, \theta + h) d\theta d\mathbf{x}. \quad (22)$$

Cette borne correspond à la version Bayésienne à l'ordre un de la borne d'Abel [7].

## 4 Simulation

Le but de cette partie est de comparer, la BCRB, la BBZ et la borne introduite ci-dessus dans un contexte d'analyse spectrale. Le modèle d'observations est le suivant

$$\mathbf{x} = \rho \mathbf{s} + \mathbf{b}, \quad (23)$$

où  $\mathbf{x}$  est le vecteur ( $N \times 1$ ) des observations,  $\rho^2$  est le Rapport Signal sur Bruit (RSB),  $\mathbf{s} = [1, e^{j\theta}, \dots, e^{j(N-1)\theta}]^T$  est le signal pur,  $\mathbf{b}$  est le vecteur bruit supposé circulaire, Gaussien de moyenne nulle et de covariance  $\mathbf{I}_N$ , et  $\theta$  est la pulsation à estimer. La densité de probabilité a priori de  $\theta$  est prise Gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma_\theta^2$ .

La simulation est réalisée avec  $N = 10$  observations et une variance a priori  $\sigma_\theta^2 = 0.5 \text{ rad}^2/\text{sec}^2$ . Sur la figure 1

nous représentons la BCRB, la BBZ et la borne introduite ci-dessus en fonction du RSB. Dans la région de transition entre la zone asymptotique et la zone a priori, on observe que la borne proposée est plus pertinente que la BBZ. C'est ainsi que la borne proposée donne une meilleure prédiction du décrochement par rapport à la BBZ (5dB dans ce cas).

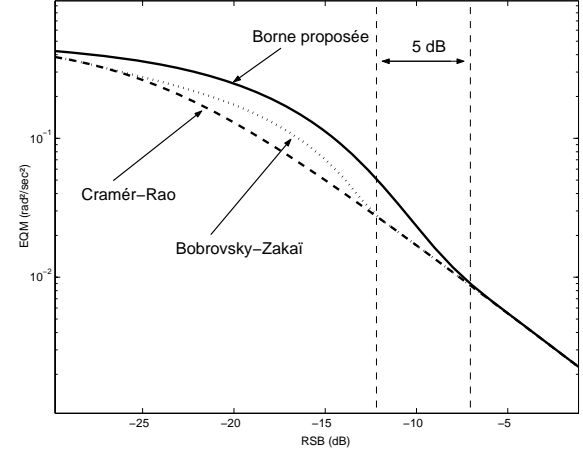


FIG. 1 – Borne de Cramér-Rao Bayésienne, borne de Bobrovsky-Zakai, et borne proposée en fonction du RSB

Il est intéressant de noter que ce résultat est obtenu avec une complexité de calcul sensiblement identique à la complexité de calcul de la BBZ.

## 5 Conclusion

Ce travail présente une approche unifiée pour l'obtention de bornes Bayésiennes du type inégalité de covariance (également appelée famille Weiss-Weinstein). Par le biais d'un problème d'optimisation sous contraintes continues nous obtenons l'erreur quadratique de l'estimateur de la moyenne conditionnelle. Par un échantillonnage judicieux de ces contraintes nous revisitons les bornes Bayésiennes classiques. L'intérêt principal de cette méthode réside dans le fait que par un choix judicieux de nouvelles contraintes, il est possible de créer de nouvelles bornes. Dans ce sens, nous introduisons et étudions une borne plus pertinente que la borne de Bobrovsky-Zakai pour une charge de calcul similaire.

## 6 Appendice

Afin de démontrer le théorème 2, nous allons tout d'abord démontrer les deux lemmes suivant

*Lemme 1 :*

$$\left[ \forall f(\mathbf{x}, \theta) \in F, \int_{\Omega} \int_{\Theta} v(\mathbf{x}, \theta) \frac{\partial f(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} d\theta d\mathbf{x} = 1 \right] \quad (24)$$

$$\Leftrightarrow v(\mathbf{x}, \theta) = q(\mathbf{x}) - \theta.$$

Lemme 2 :

$$\left[ \int_{\Omega \Theta} v(\mathbf{x}, \theta) (f(\mathbf{x}, \theta + h) - f(\mathbf{x}, \theta)) d\theta d\mathbf{x} = h \right] \quad (25)$$

$$\Leftrightarrow v(\mathbf{x}, \theta) = q(\mathbf{x}) - \theta.$$

Démonstration du lemme 1 :

$$\forall f(\mathbf{x}, \theta) \in F, \int_{\Omega \Theta} v(\mathbf{x}, \theta) \frac{\partial f(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} d\theta d\mathbf{x} = 1, \text{ donc}$$

$$\forall f(\mathbf{x}, \theta) \in F \int_{\Omega \Theta} \frac{\partial v(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} f(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x} = -1, \quad (26)$$

L'équation (26) est valable pour toute fonction  $f(\mathbf{x}, \theta)$  telle que  $\int_{\Omega \Theta} f(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x} = 1$ . Donc, en posant  $f(\mathbf{x}, \theta) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \theta - \theta_0)$ , où  $\delta(\cdot)$  est la distribution de Dirac, on obtient  $\forall \mathbf{x}_0$  et  $\forall \theta_0$

$$\left. \frac{\partial v(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\mathbf{x}_0, \theta_0} = -1 \Rightarrow v(\mathbf{x}, \theta) = q(\mathbf{x}) - \theta, \quad (27)$$

où  $q(\mathbf{x})$  est fonction de  $\mathbf{x}$  seulement.

D'un autre coté, si on a  $v(\mathbf{x}, \theta) = q(\mathbf{x}) - \theta$ , alors

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \Theta} v(\mathbf{x}, \theta) \frac{\partial f(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} d\theta d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega \Theta} (q(\mathbf{x}) - \theta) \frac{\partial f(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} d\theta d\mathbf{x} \\ &= \underbrace{\int_{\Omega} [(q(\mathbf{x}) - \theta) f(\mathbf{x}, \theta)]_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{x}}_{=0} + \int_{\Omega \Theta} f(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x} \quad (28) \\ &= 1, \end{aligned}$$

terminant ainsi la preuve.

Démonstration du lemme 2 :  $\forall f(\mathbf{x}, \theta) \in F$  et  $\forall h$ , on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \Theta} v(\mathbf{x}, \theta) (f(\mathbf{x}, \theta + h) - f(\mathbf{x}, \theta)) d\theta d\mathbf{x} = h \\ & \Rightarrow \int_{\Omega \Theta} v(\mathbf{x}, \theta) \frac{\partial f(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} d\theta d\mathbf{x} = 1 \quad (29) \\ & \Rightarrow v(\mathbf{x}, \theta) = q(\mathbf{x}) - \theta, \end{aligned}$$

où la dernière implication est donnée par le lemme 1.

D'un autre coté, si on a  $v(\mathbf{x}, \theta) = q(\mathbf{x}) - \theta$ , alors

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \Theta} v(\mathbf{x}, \theta) f(\mathbf{x}, \theta + h) d\theta d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega \Theta} (q(\mathbf{x}) - \theta) f(\mathbf{x}, \theta + h) d\theta d\mathbf{x} \quad (30) \\ &= \int_{\varphi=\theta+h} \int_{\Omega \Theta} (q(\mathbf{x}) - \varphi) f(\mathbf{x}, \varphi) d\varphi d\mathbf{x} + h, \end{aligned}$$

qui conduit à

$$\int_{\Omega \Theta} (q(\mathbf{x}) - \theta) (f(\mathbf{x}, \theta + h) - f(\mathbf{x}, \theta)) d\theta d\mathbf{x} = h, \quad (31)$$

terminant ainsi la preuve.

Démonstration du théorème 2 :  $\forall f(\mathbf{x}, \theta) \in F, \forall h$  et  $\forall s$  on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \Theta} v(\mathbf{x}, \theta) w(\mathbf{x}, \theta, h, s) f(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x} \\ &= h \int_{\Omega \Theta} \left( \frac{f(\mathbf{x}, \theta+h)}{f(\mathbf{x}, \theta)} \right)^{1-s} f(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x} \quad (32) \\ & \Rightarrow \int_{s=1} \int_{\Omega \Theta} v(\mathbf{x}, \theta) (f(\mathbf{x}, \theta + h) - f(\mathbf{x}, \theta)) d\theta d\mathbf{x} = h \\ & \Rightarrow v(\mathbf{x}, \theta) = q(\mathbf{x}) - \theta, \end{aligned}$$

où la dernière implication est donnée par le lemme 2.

D'un autre coté, si on a  $v(\mathbf{x}, \theta) = q(\mathbf{x}) - \theta$ , alors

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \Theta} v(\mathbf{x}, \theta) \left( \frac{f(\mathbf{x}, \theta+h)}{f(\mathbf{x}, \theta)} \right)^s f(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega \Theta} (q(\mathbf{x}) - \theta) \left( \frac{f(\mathbf{x}, \theta+h)}{f(\mathbf{x}, \theta)} \right)^s f(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x} \quad (33) \\ &= \int_{\Omega \Theta} (q(\mathbf{x}) - \varphi) \left( \frac{f(\mathbf{x}, \varphi-h)}{f(\mathbf{x}, \varphi)} \right)^{1-s} f(\mathbf{x}, \varphi) d\varphi d\mathbf{x} \\ &+ h \int_{\Omega \Theta} \left( \frac{f(\mathbf{x}, \varphi-h)}{f(\mathbf{x}, \varphi)} \right)^{1-s} f(\mathbf{x}, \varphi) d\varphi d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

qui conduit à

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \Theta} v(\mathbf{x}, \theta) w(\mathbf{x}, \theta, h, s) f(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x} \\ &= h \int_{\Omega \Theta} \left( \frac{f(\mathbf{x}, \theta-h)}{f(\mathbf{x}, \theta)} \right)^{1-s} f(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x}, \quad (34) \end{aligned}$$

terminant ainsi la preuve.

## Références

- [1] P. Forster and P. Larzabal, "Sur les bornes minimales pour l'estimation de paramètres déterministes," in *Proceedings GRETSI*, (Toulouse, France), pp. 707–710, 2001.
- [2] W. Xu, A. B. Baggeroer, and C. D. Richmond, "Bayesian bounds for matched-field parameter estimation," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 52, pp. 3293–3305, Dec. 2004.
- [3] H. L. V. Trees, *Detection, Estimation and Modulation Theory*, vol. 1. New York : Wiley, 1968.
- [4] I. Reuven and H. Messer, "A Barankin-type lower bound on the estimation error of a hybrid parameter vector," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 43, pp. 1084–1093, May 1997.
- [5] B. Z. Bobrovsky and M. Zakai, "A lower bound on the estimation error for certain diffusion processes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 22, pp. 45–52, Jan. 1976.
- [6] E. Weinstein and A. J. Weiss, "Lower bounds on the mean square estimation error," *Proceedings of the IEEE*, vol. 73, pp. 1433–1434, Sept. 1985.
- [7] J. S. Abel, "A bound on mean-square-estimate error," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 39, pp. 1675–1680, Sept. 1993.

# Estimation robuste de l'orientation locale par l'opérateur IRON

F. MICHELET<sup>1</sup>, C. GERMAIN<sup>1</sup>, P. BAYLOU<sup>1</sup>

<sup>1</sup>LAPS UMR 5131 - CNRS - Université Bordeaux I - ENSEIRB - ENITAB, 351 Cours de la Libération, 33405 Talence Cedex

[franck.michelet@laps.u-bordeaux1.fr](mailto:franck.michelet@laps.u-bordeaux1.fr), [christian.germain@laps.u-bordeaux1.fr](mailto:christian.germain@laps.u-bordeaux1.fr)

**Résumé** – Cet article traite de l'estimation de l'orientation locale en tout point d'une texture directionnelle. Nous proposons un nouvel opérateur orientable spécifiquement dédié à l'estimation robuste de l'orientation locale dans une texture directionnelle bruitée. Nous obtenons une estimation de l'orientation locale à la fois plus précise et plus robuste au bruit que celles fournies par les opérateurs classiques d'estimation de l'orientation. Nous présentons des résultats à la fois sur des textures de synthèse et sur des images naturelles.

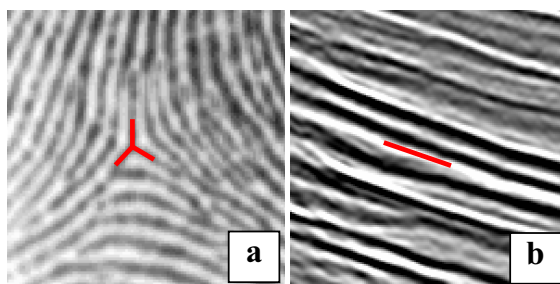
**Abstract** – This paper focuses on local orientation estimation at any point of a directional texture. We propose a new orientation estimation operator dedicated to the robust orientation estimation of a directional texture perturbed by an additive noise. We achieve a local orientation estimation which is more accurate and less noise sensitive than classical orientation estimation operators. We show results on both synthetic textures and natural images

## 1. Introduction

Cet article aborde l'estimation locale de l'orientation des textures directionnelles, c'est-à-dire des textures qui sont composées d'éléments longiformes et dont l'orientation est un paramètre prépondérant de leur caractérisation.

Deux types de méthodes permettent de déterminer l'orientation locale dans ces textures. Les premières consistent à exploiter la topologie locale de la texture pour en calculer l'orientation. C'est notamment le cas pour les estimateurs du gradient, comme celui de Deriche [1], ou encore pour les opérateurs de type gradient/vallonnement [5].

Les autres méthodes consistent le plus souvent à rechercher, par essais successifs, l'orientation correspondant à la plus forte réponse énergétique d'un filtre orienté. Les travaux utilisant les filtres de Gabor [3], ou les filtres orientables [2][7] appartiennent à cette classe de méthodes.



**Figure 1: (a) orientations locales multiples  
(b) orientation locale unique**

C'est également sur ce principe que s'appuie notre opérateur IRON (Isotropic and Recursive Oriented Network) introduit dans [6].

Cet opérateur a été initialement conçu pour estimer les orientations dans le contexte où plusieurs orientations locales apparaissent simultanément en un même lieu (Figure 1a).

Nous montrerons ici qu'en calculant un attribut approprié le long des lignes du réseau, IRON s'avère également très performant pour l'estimation robuste de l'orientation d'une texture directionnelle dans le cas où une seule orientation apparaît en un même lieu (Figure 1b).

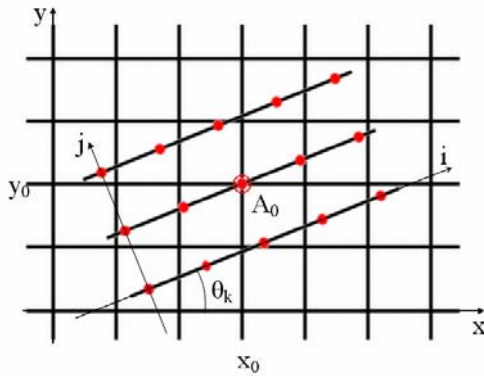
Après avoir rappelé la structure générale de l'opérateur IRON, nous lui associerons un nouvel attribut d'homogénéité fondé sur la variance. Enfin, nous confronterons les résultats d'estimation de l'orientation obtenus avec IRON, doté de cet attribut, à ceux fournis par d'autres opérateurs.

## 2. IRON : un réseau orienté et une implantation récursive

Pour estimer l'orientation locale en chaque pixel de l'image, le principe de notre opérateur IRON consiste à calculer un attribut textural le long des lignes d'un réseau orienté. Cet attribut, calculé pour chaque orientation testée, dépend des niveaux de gris rencontrés sur l'image le long de ces lignes. Selon l'attribut choisi, le minimum ou le maximum de la réponse angulaire de l'opérateur indique l'orientation recherchée. La précision angulaire dépend du nombre  $N$  d'orientations testées.

En chaque point de l'image  $A_\theta(x_0, y_0)$ , on applique  $N$  réseaux d'orientation respective  $\theta_k$ . Chaque réseau est constitué de  $L$  lignes parallèles et chaque ligne comprend  $p$  points. La distance entre chacune des lignes du réseau, qui est aussi celle entre deux points consécutifs sur une ligne, est égale à la période d'échantillonnage de l'image (Figure 2).

Les lignes du réseau sont développées de part et d'autre du point central du réseau de manière à obtenir une estimation de l'orientation *modulo*  $\pi$ .



**Figure 2 : Réseau symétrique de 3 lignes et 5 points par ligne, orienté d'angle  $\theta_k$**

Notons qu'à l'exception des cas triviaux où  $\theta=0$  modulo  $\pi/2$ , les points du réseau ne coïncident pas avec les points de la grille des pixels. Nous devons donc a priori calculer les valeurs de niveau de gris pour tous les points du réseau à l'aide d'une interpolation 2-D.

Afin de réduire le temps de calcul, au lieu de calculer les rotations de notre réseau sur l'image, nous effectuons des rotations de l'image et nous n'utilisons ensuite que des réseaux horizontaux et verticaux sur les images ainsi tournées.

Ceci nous permet, lorsque l'attribut s'y prête, de calculer récursivement notre attribut textural. D'autre part, la rotation de l'image est effectuée par la méthode en trois passes décrite dans [4] et ne requiert que des interpolations 1-D, peu coûteuses en temps de calcul.

### 3. Attributs calculés sur le réseau IRON

L'orientation locale en un point d'une image correspond à l'orientation de la tangente à la ligne d'isoniveau en ce point. L'orientation locale correspond donc à l'orientation présentant le désordre minimum ou l'homogénéité la plus forte.

Nous avons développé plusieurs attributs d'homogénéité à calculer sur chaque ligne du réseau :

- L'attribut **E** consiste à calculer les écarts de niveaux de gris entre les points successifs sur les lignes du réseau.

$$E(x, y, \theta) = \sum_{i=1}^{p-1} |v_{i,\theta} - v_{i+1,\theta}| \quad (1)$$

Cet attribut est très peu coûteux en temps de calcul mais il se montre néanmoins très perturbé par la présence d'un bruit blanc gaussien.

- L'attribut **Med** fondé sur les écarts à la médiane des niveaux de gris de chaque ligne.

$$Med(x, y, \theta) = M_{i=1}^p \left( M_{k=1}^p (v_{k,\theta}) - v_{i,\theta} \right) \quad (2)$$

$M_{i=1}^p(x_i)$  est la médiane des éléments  $x_i$  et  $v_{i,\theta}$  est le niveau de gris interpolé du  $i^{ème}$  point de la ligne considérée, sur le réseau orienté d'angle  $\theta_k$ .

Il s'est montré plus robuste au bruit et il est également le plus précis et le plus sélectif dans le contexte de l'estimation d'orientations locales multiples [8].

Toutefois, cet opérateur peut se montrer biaisé dans les zones de forte modulation d'orientation et il ne peut pas être calculé récursivement.

- L'attribut variance **V** est fondé sur la variance des niveaux de gris le long de chaque ligne **j** du réseau.

$$V(x, y, \theta) = \frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^p \left( v_{i,\theta} - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p v_{k,\theta} \right)^2 \quad (3)$$

Les différentes valeurs sont ensuite combinées pour donner l'indicateur global **V<sub>R</sub>** du réseau :

$$V_R(x, y, \theta) = \sum_{j=1}^L a_j \times V_j(x, y, \theta) \quad (4)$$

Dans le présent article, le processus de combinaison utilisé est la somme des attributs calculé sur chaque ligne, ce qui correspond aux  $a_j$  identiquement égaux à 1.

Dans le cas de l'estimation des orientations locales d'une texture directionnelle bruitée par un bruit blanc gaussien, l'attribut **V** se montre à la fois le plus robuste au bruit et peu coûteux à calculer [8]. C'est par conséquent cet attribut qui a été retenu ici pour estimer les orientations dans des images perturbées par ce type de bruit.

## 4. Résultats

Nous confrontons ici, IRON à d'autres méthodes d'estimation de l'orientation. Ces méthodes sont les filtres de Gabor [3], les filtres orientables [2] et le gradient de Deriche [1].

Afin de procéder à une comparaison équitable de ces méthodes, nous utilisons des paramètres aussi identiques que possible pour chacune d'entre elles.

Ainsi, pour les filtres de Gabor, les filtres orientables et notre opérateur IRON, le pas angulaire retenu est 1°.

Les filtres de Gabor et les filtres orientables ont un support de calcul de 15×15 pixels et notre réseau est composé de 11 lignes et 11 points par ligne, ce qui correspond à un support de calcul circulaire de diamètre 15 pixels quand on procède à la rotation de l'opérateur. On utilise également un gradient de Deriche avec  $\alpha=1$  pour lequel 99,99% de l'énergie du filtre est contenue dans un disque de diamètre 15 pixels. La taille du support de calcul de chacun de ces opérateurs est donc comparable.

### 4.1 Textures synthétiques

#### 4.1.1 Paramètres des textures

Une texture directionnelle présentant une orientation uniforme peut être localement modélisée par une fonction de profil **h** qui détermine les variations d'amplitude dans la direction orthogonale à l'orientation de la texture. Ainsi, pour chaque pixel  $(x, y)$ , l'intensité **I** de l'image est définie par :

$$I_{\theta_0}(x, y) = h(t_{\theta_0}) \text{ avec } t_{\theta_0} = x \cdot \sin(\theta_0) - y \cdot \cos(\theta_0)$$

L'orientation de la texture est  $\theta_0$ . Une telle texture, de profil **h** sinusoïdal avec  $\theta_0=22.5^\circ$ , est présentée en Figure 3a.

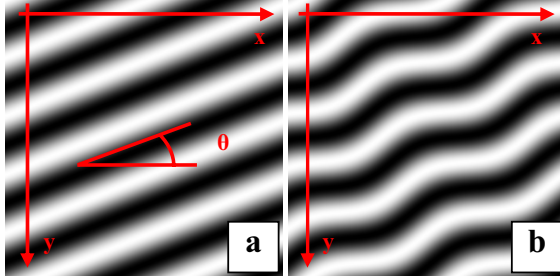


Figure 3 : Textures orientées

L'orientation n'est cependant pas nécessairement identique en tout point de l'image, c'est pourquoi nous considérons également un autre modèle textural faisant intervenir une modulation d'orientation :

$$I_{\theta_0, \theta_1}(x, y) = h(t_{\theta_0} + m(t_{\theta_1})) \quad (5)$$

La fonction de modulation est notée  $m$  et agit dans la direction  $\theta_1$ . L'orientation principale de la texture est  $\theta_0$ .

La texture correspondant à une fonction de modulation  $m(t_{\theta_1})$  est présentée en Figure 3b.

$$m(t_{\theta_1}) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_{\text{mod}}}(t_{\theta_1})\right) \text{ avec } \theta_1 = \theta_0 + \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

$A$  est l'amplitude de la modulation et  $T_{\text{mod}}$  sa période.

L'estimation de l'orientation est réalisée sur ces deux textures, de période 20 pixels, perturbées par un bruit blanc gaussien à divers rapports signal à bruit (RSB).

#### 4.1.2 Estimation de l'erreur

Afin d'évaluer la précision des différentes méthodes, nous calculons l'Ecart Angulaire Moyen (EAM), défini par :

$$EAM = \frac{1}{n} \sum_{(x,y)} \Delta(\hat{\theta}(x, y), \theta(x, y)) \quad (7)$$

où  $n$  est la taille de l'échantillon (i.e. le nombre de pixels  $(x, y)$  considérés),  $\hat{\theta}$  représente l'orientation estimée et l'opérateur  $\Delta$  est défini par :

$$\Delta(\theta_1, \theta_2) = \min(|\theta_1 - \theta_2|, \pi - |\theta_1 - \theta_2|) \quad (8)$$

L'indicateur d'erreur EAM ne peut être calculé que sur des textures synthétiques, lorsque l'orientation théorique  $\theta$  est connue.

L'indicateur EAM reflète à la fois le biais et la variance de l'estimation de l'orientation.

#### 4.1.3 Résultats

Nous commençons par comparer les différents opérateurs sur les deux précédentes textures (Figure 3), tout d'abord en l'absence de bruit, puis pour des valeurs de RSB allant de 20dB à 0dB.

Le critère de comparaison est l'EAM, exprimé en degrés, qui est calculé sur l'ensemble de l'image (Tableau 1).

L'orientation de la première texture est 22.5°, et comme le pas angulaire choisi pour les filtres orientables est de 1°, l'EAM minimal pour ces méthodes est 0.5°.

Le gradient de Deriche n'a pas cette contrainte, et il peut donner des résultats plus précis. C'est d'ailleurs ce que l'on constate dans le cas non bruité pour la première texture.

Dans le cas bruité, que ce soit pour de faibles valeurs de bruit ou pour de fortes valeurs, notre opérateur IRON, utilisant la variance comme attribut textural, donne de meilleurs résultats que les trois autres méthodes, et ce sur les deux textures étudiées.

Tableau 1 : EAM (en degrés) pour les différentes méthodes d'estimation de l'orientation

Texture a						
RSB (dB)	-	20	10	5	1	0
Deriche	0.02	3.84	7.71	11.85	16.52	17.67
Gabor	0.5	2.45	4.94	7.85	11.31	14.81
Orientables	3.41	4.56	7.15	10.67	15.54	20.98
IRON	0.5	0.73	1.61	2.99	6.25	12.94

Texture b						
RSB (dB)	-	20	10	5	1	0
Deriche	0.75	3.79	7.70	11.80	16.40	21.79
Gabor	2.37	3.34	5.34	8.05	11.27	15.05
Orientables	4.44	5.46	9.46	11.09	15.66	20.54
IRON	0.75	0.99	1.8	3.49	6.18	10.86

## 4.2 Image naturelle

Afin de confirmer la validité de notre approche, nous procédons maintenant à une estimation de la carte d'orientation d'une image naturelle. L'image utilisée est un extrait d'une empreinte digitale (Figure 4a). Cette image présente du bruit lié au processus d'acquisition ainsi que des imperfections de la peau qui peuvent nuire à la caractérisation de l'empreinte.

La carte d'orientation associée à chaque point de l'image un code couleur correspondant à l'orientation locale en ce point. Le code couleur utilisé est indiqué sur la palette d'orientation (Figure 4b).

L'examen des cartes d'orientation révèle que l'estimation fournie par notre opérateur est indépendante de la topologie de l'image, alors que le gradient de Deriche (Figure 5a) donne généralement des résultats erronés sur les points de crête et de vallée de l'image. De la même façon, les filtres de Gabor (Figure 5b) et les filtres orientables (Figure 5c) commettent des erreurs d'estimation aux points d'inflexion présents dans l'image.

On constate également que le gradient de Deriche et les filtres orientables sont sensibles aux imperfections cutanées présentes sur l'image. Les filtres de Gabor sont peu affectés par ces variations structurales et l'opérateur IRON y est quasiment insensible.

Enfin, l'estimation de l'orientation fournie par IRON correspond, aux erreurs de mesure près, aux orientations mesurées manuellement sur l'image.



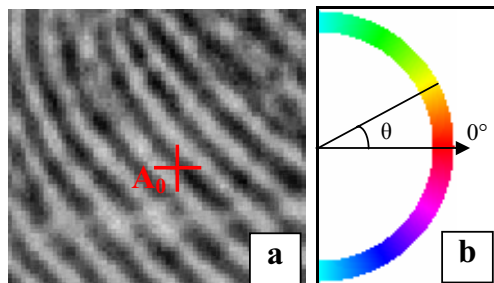


Figure 4: Empreinte digitale (extrait) et palette de couleurs pour les cartes d'orientation

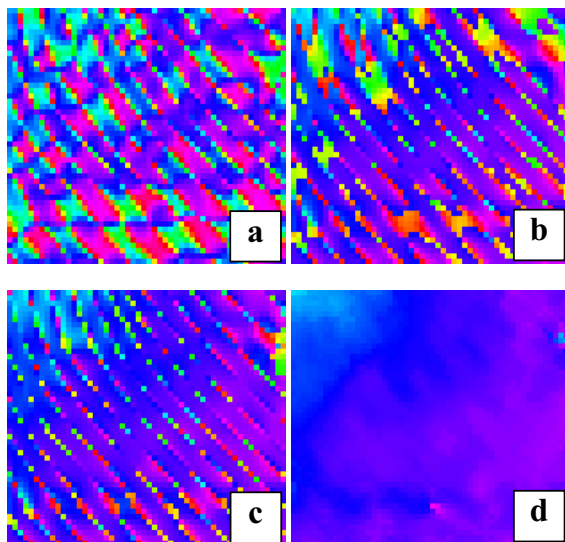


Figure 5: Estimations de la carte d'orientation

Afin de pouvoir comparer la précision des opérateurs orientables, on observe la réponse angulaire des filtres de Gabor (Figure 6a), des filtres orientables (Figure 6b) et de l'opérateur IRON (Figure 6c) au point  $A_0$  de l'image précédente. Pour l'opérateur IRON, on trace l'inverse de l'attribut calculé  $V_R$  afin que le maximum de la réponse angulaire corresponde à l'orientation recherchée.

Ces trois opérateurs sont symétriques et donc leur réponse angulaire est  $\pi$ -périodique. Elle est par conséquent tracée de  $-\pi/2$  à  $+\pi/2$ .

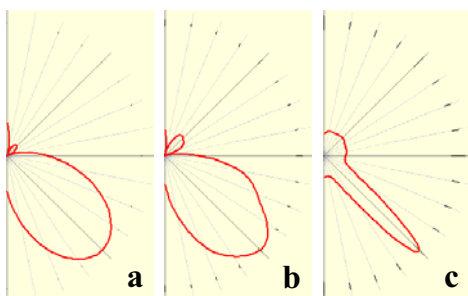


Figure 6: Réponse angulaire des opérateurs orientables au point  $A_0$

Les trois méthodes d'estimation fournissent une réponse peu biaisée au point  $A_0$ , estimée à  $-45^\circ$ . On remarque néanmoins l'opérateur IRON fournit une réponse plus précise que des filtres de Gabor et des filtres orientables.

## 5. Conclusion

Nous avons présenté une nouvelle méthode pour l'estimation de l'orientation locale dans les textures directionnelles bruitées. Cette méthode s'appuie sur une adaptation de l'opérateur IRON, initialement conçu pour détecter et caractériser des configurations locales présentant des orientations multiples. Nous avons adapté l'attribut textural calculé le long de chaque ligne de notre réseau orientable afin d'améliorer la robustesse de l'estimation.

Appliqué sur des textures de synthèse pour l'estimation des orientations, notre opérateur s'est montré à la fois plus précis et plus robuste au bruit que les opérateurs classiquement utilisés. L'analyse de la carte d'orientation obtenue sur une image naturelle a également révélé que notre opérateur se montre robuste aux perturbations naturelles qui y sont présentes. Enfin, l'étude des réponses angulaires a confirmé la précision de notre opérateur.

## Références

- [1] R. Deriche, *Fast algorithms for low-level vision*; IEEE Trans. on PAMI, vol. 12 n°1: 78-87, janv. 1990.
- [2] W.T. Freeman, E.H. Adelson, *The design and use of steerable filters*; IEEE Trans. on PAMI, vol.13 n°9: 891-906, sept. 1991.
- [3] J. Bigün, J. Hans du Buf, *N-folded symmetries by complex moments in Gabor space and their application to unsupervised texture segmentation*, IEEE Trans. on PAMI, Vol 16, n°1, 1994.
- [4] M. Unser, P. Thénevaz, L. Yaroslavsky, *Convolution-Based Interpolation for Fast, High-Quality Rotation of Images*, IEEE Trans. on Image Processing, vol.4, n°10, oct. 1995.
- [5] F. Le Pouliquen, *Opérateurs discrets pour l'estimation adaptative et optimale de l'orientation – Application à l'imagerie sismique*, PhD Thesis, Université de Bordeaux I, jan. 2003.
- [6] F. Michelet, C. Germain, P. Baylou, JP. Da Costa, *Local Multiple Orientation Estimation: Isotropic and Recursive Oriented Network*, Proceedings of ICPR 2004, Cambridge, août 2004.
- [7] M. Jacob, M. Unser, *Design of steerable filters for feature detection using Canny like criteria*, IEEE Trans. on PAMI., vol.26, n°8, août 2004.
- [8] F. Michelet, C. Germain, J.P. Da Costa, O. Lavielle, P. Baylou, *Isotropic and Recursive Oriented Network for Local Multiple Orientations Estimation*, soumis à Signal Processing.



# Estimation semi-paramétrique par minimisation de l'entropie des résidus, application en traitement d'images

Eric WOLSZTYNSKI, Eric THIERRY, Luc PRONZATO

Laboratoire I3S

Les Algorithmes, 2000, route des lucioles - bât. Euclide B BP.121, 06903 Sophia Antipolis - Cedex, France

{wolsztyn, et, pronzato}@i3s.unice.fr

**Résumé** — Nous considérons un problème d'estimation semi-paramétrique en régression non linéaire, où le paramètre de nuisance (de dimension infinie) est la densité  $f$  du bruit additif, dont on suppose uniquement qu'elle est symétrique en 0. Nous proposons ici une extension au cas multivariable de l'estimateur présenté dans [7] qui minimise l'entropie de l'échantillon symétrisé des résidus. Des résultats en traitement d'images illustrent les bonnes propriétés de cette méthode d'estimation.

**Abstract** — We consider a semiparametric estimation problem in nonlinear regression, for which the infinite-dimensional nuisance parameter is the density  $f$  of the additive noise. We only suppose  $f$  to be symmetric about 0. We propose a multivariate extension of the estimator presented in [7] that minimizes the entropy of the symmetrized residuals. Some results in image processing illustrate the properties of the minimum entropy estimation method.

## 1 Introduction

Ce travail reprend l'estimateur par Minimum d'Entropie (ME) présenté dans [7] dans le contexte de l'estimation semiparamétrique pour des modèles de régression non linéaire. Nous considérons  $n$  observations données pour les points de mesure (déterministes ou aléatoires)  $X_i \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^q$  par

$$Y_i = \eta(\bar{\theta}, X_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

où  $(\varepsilon_i)$  est une suite de variables aléatoires i.i.d. de densité inconnue  $f$ ,  $\eta(\theta, x)$  est une fonction connue, bornée sur  $\Theta \times \mathcal{X}$  et deux fois continûment différentiable en  $\theta$  pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , et  $\bar{\theta} \in \text{int}(\Theta)$  est la vraie valeur (inconnue) du vecteur de paramètres  $\theta \in \Theta = \text{int}(\bar{\Theta}) \subset \mathbb{R}^p$  que l'on cherche à estimer.  $f$  est supposée symétrique en 0, régulière et de support infini. L'approche que nous proposons consiste à minimiser une estimée de l'entropie des résidus (fonctions de  $\theta$ )

$$e_i(\theta) = Y_i - \eta(\theta, X_i) = \varepsilon_i + \eta(\bar{\theta}, X_i) - \eta(\theta, X_i) \quad (2)$$

dont la densité à  $X_i$  fixé est donnée par

$$f_{e, X_i}(u) = f(u - \eta(\bar{\theta}, X_i) + \eta(\theta, X_i)).$$

On peut montrer [8] grâce à des résultats classiques de théorie de l'information que l'entropie de Shannon  $H(f_e^s) = - \int f_e^s(e) \log f_e^s(e) de$  de la loi marginale des résidus (symétrisés), donnée par

$$f_e^s(u) = \int_{\mathcal{X}} \frac{1}{2} [f_{e, X_i}(u) + f_{e, X_i}(-u)] \mu(dx), \quad (3)$$

est minimale en  $\theta = \bar{\theta}$ , où elle coïncide avec l'entropie de  $f$ . Quand la densité  $f$  est inconnue,  $f_{e, X}$  et  $f_e^s$  sont également inconnues, et le critère  $H(f_e^s)$  ne peut pas être utilisé. Le critère d'estimation de  $\theta$  sera alors une estimée de l'entropie des résidus (symétrisés).

Dans ce qui suit nous supposons que l'information de Fisher de  $f$  est finie et que la matrice d'information de Fisher, pour une mesure  $\mu$  sur  $x$ , est de rang plein pour tout  $\theta$  dans un voisinage de  $\bar{\theta}$ .

Nous supposons vérifiée la condition d'identifiabilité  $\int_{\mathcal{X}} [\eta(\theta, x) - \eta(\bar{\theta}, x)]^2 \mu(dx) = 0 \Rightarrow \theta = \bar{\theta}$ .

## 2 Un premier estimateur

Un premier estimateur, proposé dans [7], minimise l'entropie empirique d'une estimée de la densité des résidus. On utilise dans la méthode l'échantillon symétrisé des résidus car l'entropie est invariante par translation, ce qui ne permet pas l'estimation de composantes constantes dans un modèle de régression. Les  $2n$  résidus  $\pm e_i(\theta)$  permettent ainsi d'obtenir une estimée symétrique de leur densité  $f_e^s$  en utilisant des techniques de lissage. On peut considérer en particulier l'estimateur à noyaux

$$\hat{f}_n^\theta(u) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n [K_{h_n}(u - e_i(\theta)) + K_{h_n}(u + e_i(\theta))]. \quad (4)$$

La fonction noyau  $K_{h_n}(\cdot) = 1/h_n K(\cdot/h_n)$  utilisée est symétrique en 0 (on considère des noyaux réguliers usuels, par exemple la loi normale centrée réduite). La dépendance en  $\theta$  du critère est donc exprimée dans la construction de  $\hat{f}_n^\theta$ . L'estimateur par substitution de l'entropie de  $f_e^s$  est ensuite obtenu par

$$\hat{H}_n(\theta) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \hat{f}_n^\theta(e_i(\theta)) U_n[e_i(\theta)], \quad (5)$$

où  $U_n$  est une troncature lisse des grandes valeurs des résidus (voir [7]).  $\hat{H}_n(\theta)$  est deux fois continûment différentiable en  $\theta \in \text{int}(\Theta)$ . Des exemples pour des résidus univariés sont donnés dans [7] et [8]. La convergence en probabilité de l'estimateur par ME  $\hat{\theta}_{ME}^n = \arg \min_{\theta} \hat{H}_n(\theta)$  pour le problème de position (sous certaines conditions sur les queues de distribution) est donnée dans [9], ainsi que la convergence en probabilité de  $\nabla_{\theta}^2 \hat{H}_n(\hat{\theta}_{ME}^n)$  vers  $\nabla_{\theta}^2 H(\theta) = i(f)$ , l'information de Fisher pour la position,  $i(f) = \int (f'/f)^2 f$ .

L'adaptativité (au sens de Bickel) de  $\hat{\theta}_{ME}^n$ , c'est-à-dire la propriété que l'estimateur demeure *asymptotiquement efficace*, au sens du Maximum de Vraisemblance (MV) dans le cadre paramétrique, quand  $n \rightarrow \infty$  et malgré le manque de connaissance sur le paramètre de nuisance  $f$  de dimension infinie, reste une question ouverte (une définition de l'adaptativité est donnée dans [2], [4]). Nous pouvons montrer [8], toujours pour le modèle de position, qu'en

partitionnant l'échantillon des données, la procédure d'estimation par minimum d'entropie des résidus coïncide avec l'approche en deux étapes de Stone-Bickel. Dans le cas de l'optimisation directe (sans partition des données), la normalité asymptotique de  $\nabla_{\theta}^2 \hat{H}_n(\hat{\theta}_{ME}^n)$  reste cependant à prouver.

## 3 Cas de données multivariées

Lorsque la dimension  $d$  des observations dépasse 2 ou 3, les estimateurs à noyaux deviennent peu performants pour des échantillons de taille raisonnable. Cette chute des performances est due à la difficulté de la sélection du paramètre de lissage  $h$  (ou de la matrice  $H$  selon l'approche choisie), qui doit être rapidement trop grand pour continuer à être performant [6].

Nous envisageons une approche qui utilise l'estimateur par  $k^e$  plus proche voisin (kPPV) de l'entropie d'un échantillon, présenté pour le cas multivariable dans [3], où une preuve de la convergence en probabilité est donnée pour des conditions faibles sur  $f$ . L'entropie est estimée à partir de l'information apportée directement par la répartition des points de l'échantillon, ce qui permet de se passer de l'estimation de  $f_e^s$  (bien que cet estimateur de l'entropie puisse s'interpréter comme un estimateur par substitution à noyaux uniformes). Considérons les résidus symétrisés  $\pm e_j(\theta)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Soit  $\rho_{i,k}(\theta)$  la distance euclidienne entre l'un de ces points  $z_i(\theta)$ ,  $i = 1, \dots, 2n$ , et son  $k^e$  plus proche voisin. L'estimateur de  $\theta$  par ME que nous suggérons minimise alors

$$H_{k,n}(\theta) = \log \bar{\rho}_k(\theta)^d + \log [c_1(d)(2n-1)] - \psi(k), \quad (6)$$

où  $\bar{\rho}_k(\theta) = (\prod_{i=1}^{2n} \rho_{i,k}(\theta))^{1/(2n)}$  est la moyenne géométrique des  $k$ -distances à tous les points  $z_i(\theta)$ ,  $\psi(k) = \Gamma'(k)/\Gamma(k)$  est la fonction digamma, et  $c_1(d) = 2\pi^{d/2}/(d\Gamma(d/2))$  est le volume de la boule unité de  $\mathbb{R}^d$ . Notons que seul le premier terme de (6) intervient dans l'estimation de  $\theta$ .

Le choix du paramètre  $k$  ne semble pas aussi critique que celui du paramètre de lissage  $h$  dans la méthode des noyaux. La sélection de  $k$  n'implique pas d'étape d'optimisation, au contraire des approches par noyaux adaptatives (aux données) optimales classiques. Dans le cadre de l'estimation de  $\theta$ , il est néanmoins nécessaire de choisir  $k > p$ ,

de manière à éviter les singularités possibles.

## 4 Simulations

Nous présentons ici des résultats de simulations obtenus pour des problèmes de traitement d'image, où l'on effectue une recherche exhaustive pour  $\theta$  sur une grille finie. L'entropie est un critère naturel dans ce contexte, cette quantité décrivant selon la théorie du codage la longueur minimale de description nécessaire pour les données considérées (image des différences à transmettre). Minimiser l'entropie des erreurs entre deux signaux ou deux images revient donc à sélectionner les valeurs des paramètres pour lesquelles le taux de compression maximal est obtenu.

Nous considérons dans chaque exemple deux copies bruitées d'une même image. La deuxième image a cependant subi un changement homogène d'intensité lumineuse, ce qui correspond à une translation des valeurs des niveaux de couleur de chaque pixel. Dans ce contexte, il est donc préférable de ne pas symétriser l'échantillon des résidus, de manière à bénéficier de la propriété d'invariance par translation de l'entropie.

Les observations correspondent à un bloc de pixels de taille fixée pris dans la première image, (cf. Figs 1,a puis 1,c). Considérons le problème de retrouver les coordonnées du bloc qui lui correspond dans la deuxième image (la deuxième copie peut donc être "décalée" par rapport à la première ; nous choisissons ici de ne pas lui faire subir de décalage, ce qui ne change pas le problème). Nous appellerons ce bloc le bloc optimal ; ses coordonnées forment le vecteur de paramètres  $\theta$ , de dimension 2. La dimension des observations est donnée par le nombre de canaux de couleurs de l'image. Nous considérons ici soit des images en noir et blanc (données de dimension 1, Figs 1,a et 1,b, images  $176 \times 144$ ), soit des images en couleurs (données de dimension 3, Figs 1,c et 1,d, images  $352 \times 288$ ). Nous considérons de plus la présence de pixels "aberrants" dans l'image de référence et/ou dans l'image de travail (la deuxième copie).

Dans le premier exemple, les données univariées sont contaminées par un bruit gaussien de variance 10. La deuxième copie a subi une variation d'intensité lumineuse de 10 unités. Les observations  $Y$

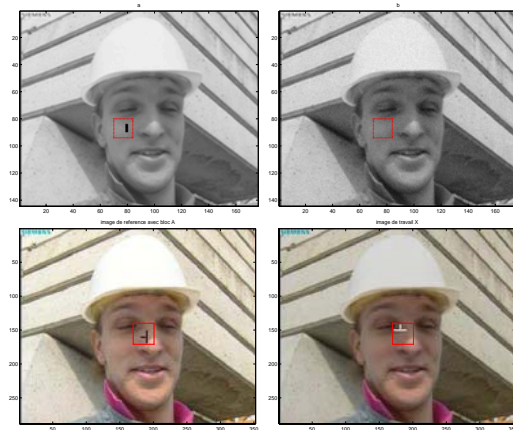


FIG. 1 – images a, b, c, d avec blocs optimaux

sont un bloc  $A$  de taille  $15 \times 15$ , dont le coin supérieur gauche a pour coordonnées  $\theta = (80, 70)^t$  dans l'image de référence.  $A$  comporte un ensemble de taille  $(2 \times 6)$  de valeurs aberrantes (pixels noirs). Les valeurs des paramètres des différents estimateurs par minimum d'entropie sont  $k = 5$  et  $h_n = 2.345\hat{\sigma}(2n)^{-1/5}$  où  $\hat{\sigma}$  est l'écart-type de l'échantillon (paramètre de lissage optimal, au sens de l'erreur quadratique intégrée moyenne, pour des noyaux gaussiens, voir [1]). Nous comparons dans cet exemple les approches avec puis sans symétrisation des résidus. La Table 1 contient les moyennes des estimées obtenues respectivement par ME avec kPPV et ME par substitution (MEs), Hellinger (DHM), moindres carrés (MC), et M-estimateur de Huber (M-est), pour 100 répétitions de la même expérience, pour des résidus symétrisés (S) puis non-symétrisés (NS).

TAB. 1 – moyennes des estimées pour 100 répétitions avec une image  $N(0, 10)$ , blocs  $15 \times 15$ , bruit gaussien  $\mathcal{N}(0, 10)$ , résidus symétrisés (S) puis non-symétrisés (NS).  $\bar{\theta} = (80, 70)^t$ .

	kPPV	MEs	DHM	M-est	MC
S	81.11	<b>80.00</b>	74.64	82.15	86.29
	64.98	<b>69.99</b>	84.48	64.45	65.87
NS	80.04	<b>80.01</b>	74.09	81.89	86.34
	71.47	<b>70.09</b>	86.00	64.43	65.84

Dans le deuxième exemple, les données de di-

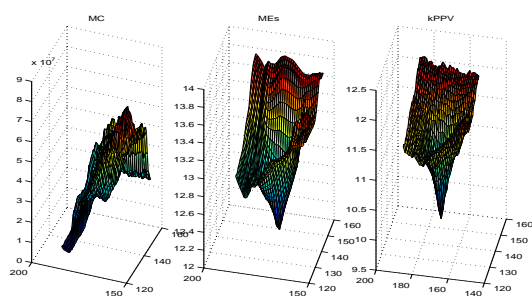


FIG. 2 – critères vs  $\theta$  pour une image couleur et des blocs  $32 \times 32$ ;  $\bar{\theta} = (140, 170)^t$ .

mension 3 sont contaminées par un bruit gaussien de variance 10, et les blocs optimaux dans les deux images comportent des pixels aberrants (de positions et de couleurs différentes). Les observations  $Y$  sont un bloc  $A$  de taille  $32 \times 32$ , dont le coin supérieur gauche a pour coordonnées  $\bar{\theta} = (140, 170)^t$  dans l'image de référence. La deuxième image a subi une variation d'intensité lumineuse de 40 unités.

La Figure 2 montre un tracé des critères en fonction des coordonnées  $\theta = (\theta_1, \theta_2)^t$ . Elle illustre de gauche à droite le comportement des moindres carrés (MC), du critère de l'entropie par substitution MEs utilisant des produits d'estimateurs à noyaux univariés avec  $h_n^j = \sigma_j(2n)^{-1/(d+4)}$  pour chaque composante  $j$  des données [5] (on utilise ici la valeur exacte de l'écart-type du bruit, et non l'estimée de celui des résidus), et le comportement robuste du critère utilisant les  $k^e$  plus proches voisins (kPPV), pour lequel le minimum est facilement identifiable.

Les premiers résultats que nous avons obtenus suggèrent que l'estimation semiparamétrique par minimum d'entropie est une approche très robuste et qui semble efficace pour des échantillons de taille raisonnable. L'approche par plus proches voisins permet d'appliquer le critère d'entropie minimale à des données de dimension supérieure à 1 tout en conservant des performances intéressantes. L'estimateur est en particulier peu sensible aux changements d'intensité entre deux images.

## Références

- [1] A. Berline and L. Devroye. *A comparison of kernel density estimates*. Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, 38(3) :3–59, 1994.
- [2] P.J. Bickel. *On adaptive estimation*. Annals of Statistics, 10 :647–671, 1982.
- [3] M.N. Gorla, N.N. Leonenko, V.V. Mergel, and P.L. Novi Inverardi. *A new class of random vector entropy estimators and its applications in testing statistical hypotheses*. Journal of Nonparametric Statistics, 2005.
- [4] C. Manski. *Adaptive estimation of nonlinear regression models*. Econometric Reviews, 3(2) :145–194, 1984.
- [5] D.W. Scott. *Multivariate Density Estimation : Theory, Practice, and Visualization*. Wiley, 1992.
- [6] B.A. Türlach. *Fast implementation of density-weighted average derivative estimation*. Computationally Intensive Statistical Methods, 26 :28–33, 1994.
- [7] E. Wolsztynski, E. Thierry, and L. Pronzato. *Estimation semiparamétrique adaptative par minimum d'entropie*. In Proc. 36e Journées Françaises de Stat, Montpellier, 2004.
- [8] E. Wolsztynski, E. Thierry, and L. Pronzato. *Minimum-entropy estimation in semiparametric models*. Signal Processing, 2005.
- [9] E. Wolsztynski, E. Thierry, and L. Pronzato. *Consistency of a minimum-entropy estimator of location*. Internal Report No I3S/RR-2004-38-FR, 30 pages, [www.i3s.unice.fr/~mh/RR/rapports.html](http://www.i3s.unice.fr/~mh/RR/rapports.html), 2004.

# Régressions par machines à vecteurs supports pour la prédiction de séries chaotiques

Herwig WENDT, Patrick FLANDRIN, Patrice ABRY

Laboratoire de Physique, UMR 5672, CNRS, Ecole Normale Supérieure de Lyon,  
46, allée d'Italie, 69364, Lyon cedex 7, France.  
prénom.nom@ens-lyon.fr

**Résumé** – Nous nous intéressons à la prédiction de séries temporelles chaotiques à partir de régressions réalisées à l'aide de machines à vecteurs supports (SVM). Après avoir rappelé le principe de ces régressions par SVM, nous détaillons le schéma de prédiction. Nous illustrons ses performances par une mise en oeuvre, d'une part, sur des données synthétiques produites par le système dynamique de Hénon et, d'autre part, sur des données expérimentales issues de la base de données de Santa Fe communément utilisées comme référence dans les problèmes de prédictions de séries temporelles. Nous comparons positivement nos résultats à ceux proposés antérieurement dans la littérature.

**Abstract** – We consider the problem of chaotic time series prediction by means of support vector machines (SVM) for regression estimation. After a short review of the principles of SVM for regression estimation, we detail the prediction procedure and illustrate its performance on the synthetic time series produced by the Hénon map, and on the real world time series of Santa Fe Data Set A, often considered as a reference in benchmarking time series predictors. A comparison of our results with others reported in literature demonstrates the excellent performance of the approach.

## 1 Motivation

Du fait de leur propriété de *sensibilité aux conditions initiales*, les séries temporelles produites par des systèmes dynamiques chaotiques présentent une difficulté particulière pour la prédiction de leurs valeurs futures. Il est notoirement connu que les méthodes usuelles de prédiction, modélisation linéaire ARMA, par exemple, ont des performances médiocres lorsqu'elles sont appliquées aux séries chaotiques (voir, par exemple, [1, 15]).

Diverses approches non linéaires, reposant principalement sur les *réseaux de neurones* (voir, par exemple, [11, 13, 14]) ou des statistiques d'ordres supérieurs [6], ont ensuite été proposées dans la littérature. Plus récemment, la technique des *machines à vecteurs supports* ("support vector machines", SVM) a également été envisagée [7, 8]. C'est à cette dernière approche que nous nous intéressons ici. Nous utilisons un schéma de prédiction par régressions réalisées par SVM. Sur des séries synthétiques issus de systèmes dynamiques chaotiques ainsi que sur des séries expérimentales, nous qualifions les performances de notre outil et les comparons à celles citées dans la littérature.

## 2 Machines à vecteurs supports

Les machines à vecteurs supports constituent des estimateurs non linéaires universels de fonctions, dont les fondements reposent sur la Théorie Statistique de l'Apprentissage. La formulation du problème d'estimation, introduite dans [3], peut recevoir une solution efficace qui laisse peu de paramètres libres à choisir. Les SVM travaillent à partir de classes de fonctions hypothèses  $\mathcal{H}_{\text{SVM}}$  consistant en hyperplans  $(\mathbf{w}, b)$  d'un espace

$\mathcal{F}$  de *caractéristiques*. Celui-ci est implicitement défini, à partir de l'espace original, par une transformation non linéaire, construite via un noyau  $K(\cdot, \cdot)$  (*astuce du noyau*).

### 2.1 Théorie Statistique de l'Apprentissage

Dans le cadre de la Théorie Statistique de l'Apprentissage [12], l'objectif est d'*estimer* une fonction  $y = f(\mathbf{x})$  à partir d'un nombre limité d'échantillons  $S = \{(\mathbf{x}_1, y_1), \dots, (\mathbf{x}_n, y_n)\} \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{Y}$ , et d'hypothèses faites sur les propriétés de  $\mathcal{H}$ . La classification, avec  $y_i \in \mathbb{Y} = \{-1, 1\}$ , et la régression, avec  $y_i \in \mathbb{Y} \subseteq \mathbb{R}$  constituent deux exemples typiques de tels problèmes.

Le meilleur estimateur  $\hat{f}(\mathbf{x}) = h^*(\mathbf{x}) \in \mathcal{H}$  de  $f$  est celui qui minimise le risque  $R[h]$ , mesuré via l'espérance mathématique d'une fonction de coût  $L(y, h(\mathbf{x}))$  :

$$R[h] = \int L(y, h(\mathbf{x})) dP(\mathbf{x}, y). \quad (1)$$

Cependant, la distribution jointe  $P(\mathbf{x}, y)$  est inconnue a priori et généralement inaccessible, il faut donc approximer (1). La Théorie Statistique de l'Apprentissage fournit alors des résultats sous forme d'inégalités,

$$R[h] \leq \frac{1}{n} \sum_{(\mathbf{x}_i, y_i) \in S} L(y_i, h(\mathbf{x}_i)) + Q(n, h, \delta), \quad (2)$$

où  $Q(n, h, \delta)$  consiste en un terme de confiance, fonction du nombre  $n$  d'observations, de la capacité de la sous-classe  $\mathcal{H}_k \subset \mathcal{H}$  qui contient l'hypothèse  $h$ , et de la probabilité  $1 - \delta$  avec laquelle l'inégalité (2) est valide. La procédure de minimisation du risque structurel ("structural risk minimisation", SRM) procède par partage de  $\mathcal{H}$  en sous-classes emboîtées  $\mathcal{H}_k : \mathcal{H}_1 \subset$

$\mathcal{H}_2 \subset \dots \subset \mathcal{H}_M$  de capacités croissantes, ce qui permet de chercher l'hypothèse  $h^* \in \mathcal{H}$  qui minimise (2).

Dans le cadre des SVM, l'hyperplan  $(\mathbf{w}^*, b^*)$  optimal de  $\mathcal{H}_{\text{SVM}}$  est ensuite obtenu via la résolution de :

$$h^*(\mathbf{w}^*, b^*, \mathbf{x}) = \arg \min_{(\mathbf{w}, b)} C \sum_{(\mathbf{x}_i, y_i) \in S} L(y_i, h(\mathbf{w}, b, \mathbf{x}_i)) + \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2, \quad (3)$$

où  $C$  est une constante à choisir.

## 2.2 Régressions par SVM

Pour la classification, essentiellement considérée dans la littérature SVM, on utilise la fonction de coût  $L_{0/1}$ . Ici, nous nous intéressons à la régression. Dans ce cas, des fonctions de coût linéaire ou quadratique  $L_\epsilon$  sont utilisées, ne prenant en compte que les déviations  $|y_i - h(\mathbf{x}_i)| > \epsilon$  supérieures à  $\epsilon$ , où  $\epsilon$  devient un autre paramètre à fixer. Que ce soit avec  $L_{0/1}$  ou avec  $L_\epsilon$ , l'équation (3) peut être réécrite comme un problème dual de Lagrange [4]. Cette reformulation, qui constitue la base de l'algorithme des SVM, se ramène à un problème de programmation quadratique, de solution unique et pour lequel des méthodes de résolution efficaces existent.

Pour le problème de la régression, la solution de l'équation (3) prend la forme :

$$h^*(\mathbf{x}) = \hat{f}(\mathbf{x}) = \sum_{(\mathbf{x}_i, y_i) \in S} \alpha_i^* K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) + b^*. \quad (4)$$

Les  $\alpha_i^*$  sont les multiplicateurs de Lagrange impliqués dans la solution du problème dual de Lagrange de (3). Quand  $\epsilon > 0$ , un nombre important des  $\alpha_i^*$  sont égaux à zéro, et (4) fournit alors une représentation creuse. Les  $\mathbf{x}_i$  correspondant aux  $\alpha_i^* \neq 0$  sont appelés les *vecteurs de support*.

## 3 Prédiction de signaux chaotiques

### 3.1 Séries chaotiques

Nous nous intéressons maintenant à des séries produites par des systèmes dynamiques chaotiques, dont le caractère non linéaire et la sensibilité aux conditions initiales rendent particulièrement difficile la prédiction, même à court terme [1, 7]. Sous-jacent au système dynamique, existe un modèle non linéaire  $y(k) = f(y(k-\kappa_1), y(k-\kappa_2), \dots, y(k-\kappa_m))$ ,  $\kappa_i \in \mathbb{N}^+$ , que nous tentons d'approcher par SVM pour effectuer une prévision du futur de la série temporelle observée  $\{y(k)\}_{k=1}^N \in \mathbb{R}$ .

Les systèmes dynamiques sont souvent efficacement étudiés via leur espace des phases. Le célèbre théorème de Takens (voir, par exemple, [1]) assure une reconstruction non ambiguë de cet espace par la méthode des *vecteurs de retard* :  $\mathbf{x}(k) = [y(k), y(k-\tau), \dots, y(k-(m-1)\tau)] \in \mathbb{R}^m$ , où  $m$  et  $\tau$  constituent respectivement la dimension de plongement et le retard. A condition que ces paramètres soient convenablement choisis, la topologie de l'espace des phases réel est respectée, on peut alors envisager d'estimer la fonction  $f : \mathbf{x}(k) \rightarrow y(k+1)$  à partir des observations  $y$  [1].

Nous sélectionnons  $\tau$  par un argument d'information mutuelle (voir, par exemple, [1]). Le paramètre  $m$  est soit choisi à partir d'arguments théoriques, soit traité comme un paramètre libre du schéma de prédiction.

### 3.2 Schéma de prédiction

A partir de  $N$  observations,  $\{y(k)\}_{k=1}^N \in \mathbb{R}$ , sont construits  $n = N - (m-1)\tau - 1$  échantillons  $S = \{(\mathbf{x}(k), y(k+1))\}_{k=(m-1)\tau+1}^{N-1} \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ . Le schéma de prédiction à un pas  $\hat{y}(k+1) = \hat{f}(\mathbf{x}(k))$  par SVM est alors de la forme (4),

$$\hat{y}(k+1) = \sum_{i=(m-1)\tau+1}^{N-1} \alpha_i^* K(\mathbf{x}(i), \mathbf{x}(k)) + b^*, \quad k \geq N, \quad (5)$$

dont les  $\alpha_i^*$  sont obtenus par résolution du problème dual de Lagrange de (3).

Nous utilisons la boîte à outils SVM standard SVMlight [5] (svm.light.joachims.org), sans apporter de modification spécifique pour la prédiction de séries temporelles. Les paramètres libres,  $C$ ,  $\epsilon$  et la taille du noyau (fixé gaussien), éventuellement la dimension de plongement  $m$ , sont sélectionnés à partir d'une recherche exhaustive dans l'espace des paramètres pour optimiser les performances de la prédiction sur l'ensemble de *validation*. Les  $N$  observations disponibles sont donc partagées entre deux ensembles d'entraînement et de validation de tailles respectives  $N_e$  et  $N_V$ . Les valeurs pour lesquelles l'erreur de prédiction à un pas sur l'ensemble de validation est minimale sont retenues pour la prédiction finale.

Une fois les paramètres fixés, nous réalisons la prédiction en utilisant la totalité des  $N$  observations disponibles. Les prédictions à plusieurs pas, i.e., pour les valeurs ( $k \geq N+1$ ), sont réalisées par itération de la prédiction à un pas (5), en utilisant les vecteurs estimés  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  aux itérations précédentes et non les observations elles-mêmes.

## 4 Expérimentations

### 4.1 Séries temporelles

Nous appliquons cette approche à la prédiction, d'une part, d'une série issue du système dynamique de Hénon, en régime chaotique (cf. figure 1 en haut à gauche) :

$$y(k+1) = 1 - 1.4y(k)^2 + 0.3y(k-1), \quad (6)$$

avec  $a = 1.4$ ,  $b = 0.3$  et, d'autre part, aux données expérimentales réelles constituées par les fluctuations chaotiques de l'intensité d'un laser dans l'infrarouge, *Santa Fe Data Set A* [15]. Cette dernière série constitue une référence souvent utilisée pour étalonner les performances des méthodes de prédictions.

Pour la série **Hénon**,  $N = 500$ ,  $N_e = 450$ ,  $N_V = 50$ , l'équation (6) indique que les observations  $y(k+1)$  sont complètement déterminées par leurs deux prédécesseurs immédiats,  $y(k)$  et  $y(k-1)$ . Les paramètres de plongement sont donc fixés a priori ( $\tau = 1$  et  $m = 2$ ).

Pour la série **Santa Fe Data Set A**,  $N = 1000$  (les 1000 premières observations de la série),  $N_e = 900$ ,  $N_V = 100$ , l'information mutuelle indique  $\tau = 1$ . La recherche exhaustive, effectuée pour  $m$  à partir d'un intervalle de valeurs choisi par un argument géométrique ("false nearest neighbours"; voir, par exemple, [1]) sélectionne  $m = 18$ .

### 4.2 Résultats

Nous présentons les résultats obtenus dans les tableaux 1 et 2 et les comparons à ceux obtenus par d'autres auteurs. Les

performances des prédictions à un pas et itérées sont exprimées en erreur quadratique moyenne normalisée (NMSE) :

$$\text{NMSE} = \frac{\sum_{k \in \mathcal{T}} (y(k) - \hat{y}(k))^2}{\sum_{k \in \mathcal{T}} (y(k) - \bar{y}_{\mathcal{T}})^2} \approx \frac{1}{\hat{\sigma}_{\mathcal{T}}^2 N} \sum_{k \in \mathcal{T}} (y(k) - \hat{y}(k))^2,$$

où  $\mathcal{T}$  dénote l'ensemble d'épreuve de  $N$  points, et  $\bar{y}_{\mathcal{T}}$  et  $\hat{\sigma}_{\mathcal{T}}^2$  dénotent respectivement la moyenne et la variance empiriques de  $\mathcal{T}$  [15].

**La série de Hénon.** Les résultats pour la série de Hénon sont obtenus à partir des prédictions itérées sur 50 échantillons, moyennées sur 50 ensembles d'épreuve différents. Nous constatons que, quoique l'ensemble d'entraînement utilisé dans notre prédiction SVM soit beaucoup plus court que ceux mis en oeuvre pour obtenir les meilleurs résultats disponibles à notre connaissance dans la littérature, les performances que nous obtenons sont supérieures de presque deux ordres de grandeur (cf. tableau 1).

TAB. 1 – Comparaison des performances de prédicteurs sur la série de Hénon. La longueur de l'ensemble d'entraînement est donnée en points. Les résultats sont obtenus par moyenne des prédictions sur 50 ensembles d'épreuve différents de 50 échantillons.

Référence	Méthode	$N$	Préd. un pas
	SVM Gauss	500	$7.7 \cdot 10^{-7}$
[9]	RBF Net	4000	$7.4 \cdot 10^{-5}$
[13]	Neural Net	5000	$3.4 \cdot 10^{-5}$

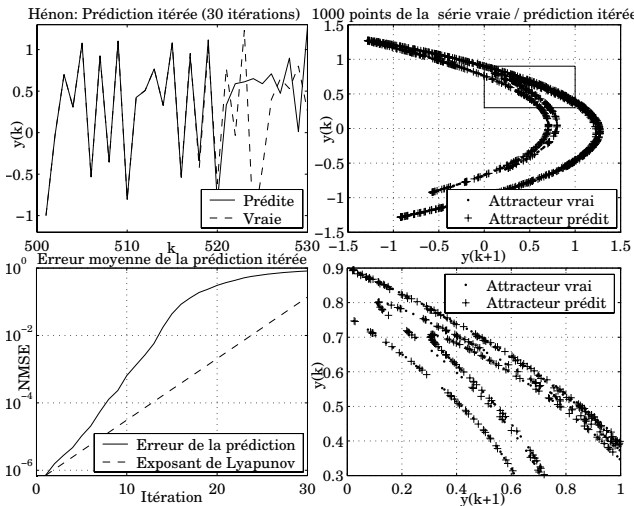


FIG. 1 – **Série de Hénon.** En haut, à gauche, séries de Hénon réelle et prédite, en bas, à gauche, évolution de l'erreur quadratique moyenne en fonction de l'horizon de prédiction et comparaison à la croissance de l'erreur initiale déterminée par l'exposant de Lyapunov global théorique. A droite, en haut, attracteurs de Hénon, reconstitués à partir de 1000 échantillons de la série observée et de la série prédite par itération successive, et agrandissement de la région des attracteurs matérialisée par un rectangle (en bas).

La figure 1 propose une prédiction typique sur la série de Hénon. Nous observons que la prédiction s'écarte de la vraie série après environ 18 itérations (en haut à gauche). C'est aussi

la valeur pour laquelle l'erreur de prédiction est proche de 1. L'évolution de cette erreur de prédiction est comparée à la croissance de l'erreur initiale déterminée par l'exposant de Lyapunov global théorique ( $\lambda_{\text{Hénon}} \approx 0.42$ ) (en bas à gauche). Néanmoins, la prédiction, au delà de l'échantillon 18, continue d'explorer l'espace des phases de façon identique à la série réelle. En effet, la colonne de droite compare les attracteurs reconstitués à partir de 1000 points de la vraie série de Hénon (en haut), et d'une prédiction itérée de 1000 points (en bas). Le prédicteur a complètement saisi les dynamiques du système puisque les deux attracteurs ne peuvent pas être distingués, contrairement aux résultats présentés dans [2], où l'attracteur présente des déformations visibles.

**Santa Fe Data Set A.** Les prédictions sont obtenues pour des ensembles d'épreuve proposés dans la littérature pour Data Set A (5 ensembles de 100 observations, correspondant aux observations 1001 à 1100, 2181 à 2280, 3871 à 3970, 4001 à 4100 et 5181 à 5280). Dans le tableau 2, nous observons que la performance du prédicteur à un pas obtenue par la régression à l'aide de SVM, évaluée sur l'ensemble d'épreuve 1, est comparable à l'état de l'art et que la qualité de la prédiction itérée dépend fortement de l'ensemble d'épreuve considéré. Bien que la performance de la prédiction itérée obtenue par SVM soit dégradée d'un ordre de grandeur pour les ensembles 2 et 3, elle reste supérieure d'un ordre de grandeur comparée au meilleur résultat de l'ensemble 4, et comparable à l'état de l'art pour les ensembles 1 et 5.

Nous soulignons que notre prédicteur est entraîné exclusivement sur les 1000 premières observations, et ce pour tous les ensembles d'épreuves. De plus, nous travaillons directement à partir de la série temporelle, sans aucune technique additionnelle du type de celles considérées dans [10].

La figure 2 illustre le Data Set A et le premier ensemble d'épreuve (en haut, à gauche) et les prédictions itérées, sur 100 points, pour les cinq ensembles d'épreuve considérés. Nous remarquons que la prédiction par SVM est capable de prédire la brutale diminution de l'intensité du laser pour deux des trois cas (ensemble 1 et 5), bien qu'il existe seulement un exemple d'un tel effondrement dans l'ensemble d'entraînement. Par contre, pour l'ensemble 2, le prédicteur échoue à prédire la diminution de l'intensité et la prédiction n'est précise que pour les 50 premières itérations. Nous observons un comportement similaire pour l'ensemble 3 : bien que la prédiction soit de haute précision pendant les 60 premières itérations, une diminution de l'intensité qui n'existe pas est prédite après 80 itérations. Nous constatons aussi que la prédiction itérée et la vraie série ne peuvent pas être distinguées pour l'ensemble 4.

## 5 Conclusions et perspectives

Quoique la régression par SVM pour la prédiction de séries temporelles soit appliquée ici de façon très directe, les performances sont excellentes pour les séries considérées. Nous envisageons donc diverses modifications, susceptibles d'en améliorer les performances. D'une part, l'usage de noyaux plus flexibles que l'usuel noyau gaussien ouvre une direction prometteuse. D'autre part, des stratégies locales, déjà envisagées dans la littérature, sont en cours d'investigation et peuvent fa-

TAB. 2 – Data Set A : Comparaison des performances des prédicteurs sur les ensembles d'épreuve (observations 1001-1100, 2181-2280, 3871-3970, 4001-4100, 5181-5280). Le résultat pour la prédiction à un pas est présenté pour les observations 1001 à 1100. Les autres résultats sont obtenus par prédictions itérées.

Réf.	Méthode	Préd. un pas	1001-1100	
[10] [11] [13] [14]	SVM Gauss	$9.20 \cdot 10^{-3}$	$4.46 \cdot 10^{-2}$	
	Local Linear	-	$7.7 \cdot 10^{-2}$	
	Neural Net	-	$6.6 \cdot 10^{-2}$	
	Neural Net	<b><math>2.76 \cdot 10^{-3}</math></b>	<b><math>1.94 \cdot 10^{-2}</math></b>	
	Neural Net	$2.3 \cdot 10^{-2}$	$2.73 \cdot 10^{-2}$	
Réf.	2181-2280	3871-3970	4001-4100	5181-5280
[10] [11] [14]	$3.93 \cdot 10^{-1}$	$4.31 \cdot 10^{-1}$	<b><math>8.89 \cdot 10^{-4}</math></b>	$4.81 \cdot 10^{-2}$
	$1.74 \cdot 10^{-1}$	$1.83 \cdot 10^{-1}$	$6.0 \cdot 10^{-3}$	$1.11 \cdot 10^{-1}$
	<b><math>6.1 \cdot 10^{-2}</math></b>	<b><math>8.6 \cdot 10^{-2}</math></b>	$4.79 \cdot 10^{-1}$	<b><math>3.8 \cdot 10^{-2}</math></b>
	$6.5 \cdot 10^{-2}$	$4.87 \cdot 10^{-1}$	$2.3 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-1}$

cilement être incorporées dans notre schéma de prédiction. De plus, une alternative fiable à la recherche systématique pour l'optimisation des valeurs des paramètres libres, permettra de rendre la procédure de prédiction plus efficace et accessible, y compris pour des utilisateurs profanes.

## Références

- [1] H.D.I. Abarbanel, *Analysis of observed chaotic data*, first ed., Springer, New York, 1996.
- [2] A. Aussem, *Dynamical recurrent neural networks towards prediction and modeling of dynamical systems*, Neurocomputing **28** (1999), no. 3, 207–232.
- [3] C. Cortes and V. Vapnik, *Support vector networks*, Machine Learning **20** (1995), 1–25.
- [4] R. Fletcher, *Practical methods of optimization*, second ed., John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1987.
- [5] T. Joachims, *Making large-scale svm learning practical*, Advances in Kernel Methods - Support Vector Learning, B. Schölkopf, C. Burges and A. Smola (ed.) (1999), 169–184.
- [6] Olivier Michel and Patrick Flandrin, *Application of methods based on higher-order statistics for chaotic time series analysis*, Signal Proc. **53** (1996), no. 2-3, 133–148.
- [7] K. Müller, A. Smola, G. Rätsch, B. Schölkopf, O. Kohlmorgen, and V. Vapnik, *Predicting time series with support vector machines*, Artificial Neural Networks - ICANN 97 (M. Hasler W. Gerstner, A. Germond and J.-D. Nicoud, eds.), Springer, 1997.
- [8] S. Mukherjee, E. Osuna, and F. Girosi, *Nonlinear prediction of chaotic time series using support vector machines*, IEEE Workshop on Neural Networks for Signal Processing VII (N. Morgan J. Principe, L. Giles and E. Wilson, eds.), IEEE Press, 1997, p. 511.
- [9] A.E. Omidvar, *Configuring radial basis function network using fractal scaling process with application to chaotic time series prediction*, Chaos, Sol. and Fract. **22** (2004), no. 4, 757–766.

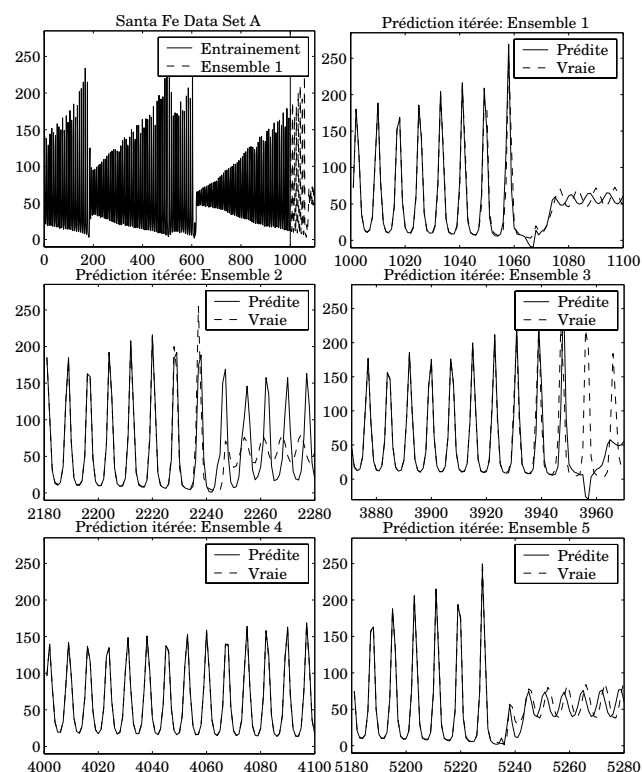


FIG. 2 – Santa Fe Data Set A : En haut : à gauche, ensemble d'entraînement et premier ensemble d'épreuve (observations 1001-1100) , à droite, premier ensemble d'épreuve prédit par itération successive. Au centre : les observations 2181-2280 (à gauche) et 3871-3870 (à droite) obtenues par prédiction itérée. En bas : les observations 4001-4100 (à gauche) et 5181-5280 (à droite) obtenues par prédiction itérée.

- [10] T. Sauer, *Time series prediction by using delay coordinate embedding*, Time series prediction : Forecasting the future and understanding the past (A.S. Weigend and N.A. Gershenfeld, eds.), Addison-Wesley, 1994, pp. 175–193.
- [11] M. Small and C. K. Tse, *Minimum description length neural networks for time series prediction*, Physical Review E **66** (2002), no. 6, 066701.
- [12] V. Vapnik, *The nature of statistical learning theory*, Springer Verlag, New York, 1995.
- [13] B.W. Wah and M. Qian, *Violation guided neural-network learning for constrained formulations in time-series predictions*, Int'l Journal on Computational Intelligence and Applications **1** (2001), no. 4, 383–398.
- [14] E.A. Wan, *Time series prediction by using a connectionist network with internal delay lines*, Time series prediction : Forecasting the future and understanding the past (A.S. Weigend and N.A. Gershenfeld, eds.), Addison-Wesley, 1994, pp. 195–217.
- [15] A.S. Weigend and N.A. Gershenfeld (eds.), *Time series prediction : Forecasting the future and understanding the past*, Addison-Wesley, 1994.



# Estimation paramétrique multirésolution de mouvements transparents

Vincent AUVRAY<sup>1,2</sup>, Patrick BOUTHEMY<sup>1</sup>, Jean LIÉNARD<sup>2</sup>

<sup>1</sup>IRISA/INRIA, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France

<sup>2</sup>General Electric Healthcare, 283 rue de la Minière, 78530 Buc, France

Vincent.Auvray@irisa.fr, patrick.bouthemy@irisa.fr, jean.lienard@med.ge.com

**Résumé** – Nous présentons une nouvelle méthode permettant d’estimer les mouvements dans des images avec transparence. Il s’agit d’une estimation par blocs basée sur une minimisation multirésolution. Elle est initialisée par la technique du downhill simplex. Un post-traitement original, effectuant des estimations séparées des mouvements sur des différences d’images recalées de manière appropriée, améliore la qualité des mouvements estimés. L’algorithme se conclut par une étape de régularisation. Nous démontrons sur un grand nombre de simulations réalistes que nous atteignons une précision d’un quart de pixel sur des images non bruitées. Le cas des images bruitées est étudié, avec des résultats satisfaisants sur des images cliniques peu contrastées. Nous présentons également une expérimentation sur des images cliniques réelles.

**Abstract** – A new framework dealing with motion estimation in transparent images is presented. It relies on a block-oriented estimation involving an efficient multiresolution minimization. A downhill simplex method provides an appropriate initialization to this scheme. The estimated velocity vectors are greatly improved by an original postprocessing stage which performs a single motion estimation on differences of warped images. Finally, a regularization step is carried out. It is demonstrated on a large set of simulations that a quarter-pixel accuracy can be attained on noise-free images. The case of noisy images is also addressed and provides satisfactory results, even in the case of low-contrasted medical images. An experiment on a real clinical image sequence is also reported with promising results.

## 1 Introduction

Les images médicales acquises par rayons X ont une structure très particulière puisque leur processus de formation est gouverné par le phénomène de transparence. A la différence des images vidéo, il n’y a pas d’occultation lorsqu’un objet en couvre un autre mais une addition des niveaux de gris. Nous ne pouvons donc pas appliquer directement les hypothèses et modèles de mouvements classiques à ce type d’image mais devons explicitement prendre en compte la transparence. Nous proposons d’estimer les mouvements contenus dans ces séquences transparentes par une approche exploitant des modèles paramétriques et une estimation multirésolution du mouvement.

Le calcul des mouvements transparents a déjà fait l’objet de nombreuses études, principalement dans le cadre d’images vidéo contenant des effets de transparence particuliers: reflets dans un miroir ou sur l’eau, objet en mouvement vu au travers d’un rideau ou d’une barrière...

Un premier ensemble de travaux adapte des techniques d’estimation classiques au cas de la transparence [1]. Une autre approche consiste à modéliser explicitement la transparence en utilisant l’équation fondamentale introduite par Shizawa et Mase [2]. Si l’on considère deux couches d’image  $I_1$  et  $I_2$  se déplaçant avec les vitesses relatives  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , supposées constantes entre  $t - 1$  et  $t + 1$ , l’image composite  $I = I_1 + I_2$  vérifie en tout point  $\vec{p}$  (les mouvements étant en fait orientés vers le passé):

$$\begin{aligned} r(\vec{p}, \vec{u}, \vec{v}) \\ = I(\vec{p} + \vec{u} + \vec{v}, t - 1) + I(\vec{p}, t + 1) \\ - I(\vec{p} + \vec{u}, t) - I(\vec{p} + \vec{v}, t) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Cette équation peut être étendue au cas de  $n$  couches en faisant intervenir  $n + 1$  images, toujours sous l’hypothèse d’invariance du mouvement. Nous nous limitons par la suite au cas de deux couches, mais notre algorithme peut s’adapter facilement à  $n$  couches transparentes.

De nombreuses méthodes permettant d’estimer les mouvements transparents ont été construites sur cette équation, que ce soit en minimisant une fonction d’énergie comprenant un terme de régularisation [3], en introduisant une décomposition des vitesses en ondelettes ou sur une base de B-splines [4], en utilisant des champs de Markov ou une mise en correspondance par blocs [5]. Une alternative consiste à formuler le problème dans l’espace des fréquences [6], mais il faut alors supposer le mouvement constant sur un intervalle de temps beaucoup plus long (quelques dizaines d’images).

Cet article est structuré comme suit. Le section 2 développe la structure de l’estimateur multirésolution proposé. La section 3 décrit une importante étape de post-traitement et des résultats expérimentaux sont présentés dans la section 4.

## 2 Estimation de mouvements en transparence

### 2.1 Contrainte de mouvement transparent

L’équation (1) n’est en fait exacte que si nous supposons que  $I_1$  se déplace avec la vitesse  $\vec{u}$  non seulement au point  $\vec{p}$  à la date  $t$ , mais aussi au point  $\vec{p} + \vec{v}$  à la date  $t - 1$ . Il en va de même pour  $I_2$  en  $\vec{p}$  et  $\vec{p} + \vec{u}$ . Ceci implique en pratique que (1) n’est rigoureusement respectée sur une région donnée que

si les couches  $y$  sont en translation.

C'est pourquoi nous choisissons de traiter le problème de mouvements complexes en divisant l'image en petits blocs, sur lesquels le mouvement est considéré comme translationnel. L'expression  $J$  à minimiser sur chaque bloc  $B_i$  est donnée par:

$$J(\vec{u}^i, \vec{v}^i) = \sum_{\vec{p} \in B_i} r(\vec{p}, \vec{u}^i, \vec{v}^i)^2 \quad (2)$$

où  $r(\vec{p}, \vec{u}^i, \vec{v}^i)$  est donné par l'équation (1)

Dans la pratique, nos expériences ont montré que des blocs de taille  $32 \times 32$  offraient un bon compromis entre le respect de l'hypothèse de translation d'une part, et le nombre de pixels nécessaires à une estimation fiable du mouvement d'autre part.

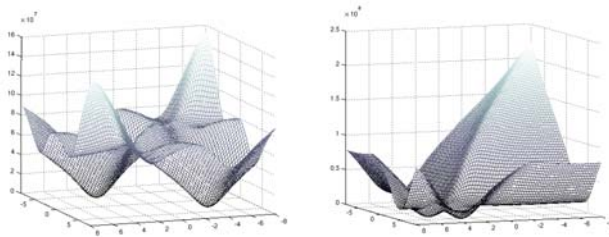


FIG. 1: Deux tracés de la fonction  $J(u, v)$  réduite au sous-espace  $(u_x, v_x)$ . Vraies vitesses: gauche:  $u = (3, 0)$ ,  $v = (-4, 0)$ , droite:  $u = (3, 0)$  et  $v = (5, 0)$ .

Deux tracés de la fonction  $J(\vec{u}, \vec{v})$  sont représentés sur la figure 1 afin d'illustrer ses propriétés. Nous avons construit une séquence de trois images en déplaçant deux couches selon la direction  $x$  avec des vitesses connues. Ainsi, le graphique peut être limité à l'espace  $(u_x, v_x)$ . Notons que ces fonctions présentent deux minima symétriques puisque  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  jouent des rôles similaires dans l'équation (1). Cette ambiguïté ne pose pas de problème pour l'heure car nous ne cherchons pas à associer  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  à des couches spécifiques.

## 2.2 Estimation multirésolution de mouvements transparents

Considérant trois images successives contenant deux mouvements transparents, nous estimons leurs vitesses en minimisant  $J(\vec{u}, \vec{v})$ . Si les amplitudes des déplacements étaient petites, nous pourrions travailler sur une version linéarisée de  $J$  et la minimiser avec un algorithme itératif de minimisation classique. Cependant, comme nous pouvons rencontrer des mouvements importants, nous utilisons un schéma multirésolution basé sur une décomposition pyramidale gaussienne des trois images consécutives. Au niveau de résolution le plus grossier, les déplacements sont assez petits pour permettre une minimisation par un algorithme de gradient conjugué de la fonction  $J(\vec{u}, \vec{v})$  linéarisée autour de  $(\vec{0}, \vec{0})$ . Nous obtenons ainsi une première approximation  $(\vec{u}^L, \vec{v}^L)$  des deux mouvements. Nous procédons de la même manière au niveau inférieur  $L - 1$ , mais cette fois en linéarisant  $J$  autour de  $(2\vec{u}^L, 2\vec{v}^L)$ . Cette méthode est ensuite itérée à travers la décomposition pyramidale jusqu'à son niveau le plus fin.

## 2.3 Initialisation par l'algorithme du simplex

Cette stratégie de minimisation est efficace et rapide, mais elle est sensible à son initialisation, et ce d'autant plus que nous travaillons avec des images médicales obtenues par rayons X qui sont peu contrastées et très bruitées.

Nous nous appuyons sur la méthode du downhill simplex pour initialiser correctement notre estimation itérative. Cet algorithme minimise des fonctions non linéaires dans un espace de dimension  $n$  quelconque en déplaçant itérativement  $n + 1$  points de cet espace vers un minimum. Ainsi, pour minimiser  $J$  dans l'espace de dimension quatre  $(\vec{u}, \vec{v})$ , nous considérons cinq échantillons de couples de vitesses  $(\vec{u}, \vec{v})$ . A chaque itération, nous remplaçons l'échantillon correspondant à la plus grande valeur de  $J$  par un nouvel échantillon recherché sur une droite perpendiculaire à l'hyperplan contenant les  $n$  autres points [7]. Cet algorithme fournit une initialisation appropriée de notre problème de minimisation.

Les coûts de calcul restent faibles puisque nous utilisons l'algorithme du simplex seulement au niveau le plus grossier de la pyramide de résolution.

## 3 Étape de post-traitement

### 3.1 Recalage et estimation mono-mouvement

Nous remarquons sur les diagrammes de la fonction  $J$  sur la Fig.1 que le minimum global peut être difficile à atteindre quand les vitesses des deux couches sont proches (exemple de droite). (Au passage, si les vitesses sont quasiment identiques, le problème de la transparence disparaît car nous sommes ramenés à l'étude d'un mouvement unique!) Pour surmonter ce problème, nous avons mis au point l'étape de post-traitement suivante.

L'étape d'estimation multirésolution fournit les vitesses estimées  $(\vec{u}_{me}, \vec{v}_{me})$ . Supposons que  $\vec{u}_{me}$  soit une estimée correcte, nous pouvons faire disparaître implicitement la couche correspondante (disons  $I_1$ ) sans l'identifier.

Recalons  $I(\vec{p}, t)$  et  $I(\vec{p}, t - 1)$  vers l'instant  $t + 1$  selon les déplacements  $\vec{u}_{me}$  et  $2\vec{u}_{me}$  respectivement. La position de  $I_1$  est censée être la même dans les deux images recalées, ainsi que dans  $I(\vec{p}, t + 1)$ . Nous formons les deux cartes de différence suivantes, qui permettent de supprimer la couche  $I_1$ :

$$\begin{aligned} K_\alpha(\vec{p}, t + 1) &= I(\vec{p} + \vec{u}_{me}, t) - I(\vec{p} + 2\vec{u}_{me}, t - 1) \\ &= I_2(\vec{p} + \vec{u}_{me}, t) - I_2(\vec{p} + 2\vec{u}_{me}, t - 1) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} K_\beta(\vec{p}, t + 1) &= I(\vec{p}, t + 1) - I(\vec{p} + \vec{u}_{me}, t) \\ &= I_2(\vec{p}, t + 1) - I_2(\vec{p} + \vec{u}_{me}, t) \end{aligned} \quad (4)$$

On remarque alors que:

$$K_\alpha(\vec{p}, t + 1) = K_\beta(\vec{p} + \vec{u}_{me}, t) \quad (5)$$

Comme les cartes  $K_\beta$  ne font intervenir que  $I_2$ , l'équation du mouvement classique peut s'écrire pour ces cartes selon:

$$K_\beta(\vec{p}, t + 1) = K_\beta(\vec{p} + \vec{v}, t) \quad (6)$$

D'où:

$$K_\alpha(\vec{p}, t + 1) = K_\beta(\vec{p} + \vec{u}_{me} - \vec{v}, t + 1) \quad (7)$$

En appliquant une méthode d'estimation robuste mono-mouvement (telle que [8]) entre les deux cartes  $K_\alpha$  et  $K_\beta$  des instants  $t + 1$ , nous estimons en fait le mouvement  $\vec{s} = \vec{u}_{me} - \vec{v}$ , ce qui permet de réestimer  $\vec{v}$  comme  $\vec{v}_{pp} = \vec{u}_{me} - \vec{s}$ . De même, nous réestimons  $\vec{u}_{pp}$  à partir de  $\vec{t} = \vec{v}_{me} - \vec{u}$ . Ainsi, si une vitesse seulement est correctement estimée, cette méthode permet de recalculer la seconde. Il reste alors à choisir les meilleurs estimées parmi les quatre paires possibles  $(\vec{u}_{me}, \vec{v}_{me})$ ,  $(\vec{u}_{me}, \vec{v}_{pp})$ ,  $(\vec{u}_{pp}, \vec{v}_{me})$  et  $(\vec{u}_{pp}, \vec{v}_{pp})$ .

### 3.2 Stratégie de choix

Une stratégie intuitive consisterait à sélectionner les estimées  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  correspondant à la plus petite valeur du critère  $J$  de la relation (2). De fait, cela donne de bons résultats sur des images non bruitées, mais ne fonctionne plus sur des images bruitées. En effet, l'expression de  $J$  est formée de la somme algébrique de quatre images. Si les images originales sont entachées d'un bruit de variance  $\sigma^2$ ,  $J$  est affecté par un bruit de variance  $4\sigma^2$ , ce qui rend le choix très peu fiable.

Nous proposons d'appliquer un schéma de régularisation. Nous souhaitons privilégier les couples de vitesse qui minimisent raisonnablement (2), tout en étant cohérents avec les vitesses des blocs voisins.

Pour cela, nous avons utilisé un procédé d'estimation alternée. Dans un premier temps, nous calculons deux modèles affines de mouvement (un pour chaque couche) compatibles avec les mouvements estimés sur les blocs, puis nous choisissons sur chaque bloc celui des quatre couples de vitesses candidates qui est le plus proche des modèles de mouvement estimés. Sur chaque bloc, les deux déplacements moyens correspondant aux modèles affines de mouvements estimés sont évalués et comparés (en utilisant la norme  $L_2$ ) aux quatre paires de candidats, et l'on retient la paire qui en est la plus proche.

Cet algorithme itératif fonctionne bien pourvu qu'il soit correctement initialisé. Les expériences que nous avons menées nous ont conduits à initialiser les couples de vecteurs de vitesse sur les blocs par  $(\vec{u}_{me}, \vec{v}_{me})$ . Ces vecteurs de vitesse sont regroupés au préalable en deux groupes  $\{\vec{u}_{me}\}$  et  $\{\vec{v}_{me}\}$ , correspondant aux deux couches impliquées, par une technique de clustering. Cette opération est indispensable pour s'assurer que  $u$  et  $v$  correspondent bien à la même couche de bloc en bloc.

La Fig.2 résume la structure de l'algorithme complet:

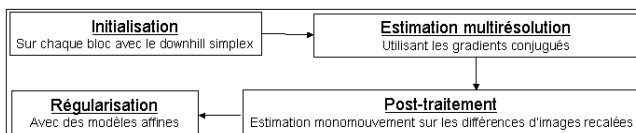


FIG. 2: Structure globale de la méthode d'estimation de mouvements transparents.

## 4 Résultats expérimentaux

### 4.1 Synthèse d'images cliniques réalistes

Nous avons synthétisé des séquences d'images par rayons X réalistes pour évaluer la performance de notre méthode en con-

naissant la réalité terrain. Pour ce faire, nous avons utilisé deux images cliniques (correspondant aux deux couches) enregistrées sur un système d'imagerie par rayons X, que nous avons déplacées par des champs de mouvements translationnels et affines connus. L'amplitude des mouvements est tirée aléatoirement tout en assurant des déplacements maximaux de 8 pixels en chaque point. L'intensité des images est multipliée par un facteur simulant le rayonnement utilisé lors de l'examen: plus la dose de rayons X simulée est haute, plus l'intensité et le contraste des images sont importants.

Puisque la physique des rayons X implique une transparence multiplicative, les deux couches déplacées sont multipliées entre elles, puis nous considérons le logarithme de l'image composite pour obtenir une situation de transparence additive.

Les images 12 bits finales sont corrompues par un bruit indépendant gaussien dont l'écart type dépend de la dose simulée. Nous présentons les résultats obtenus sur des images non bruitées (à titre de référence), sur des images correspondant à de fortes doses ( $\sigma = 10$ , typique des examens diagnostiques) et sur des images correspondant à de faibles doses ( $\sigma = 20$ , typique des examens interventionnels). Le niveau moyen des intensités des images simulées est de l'ordre de 500.

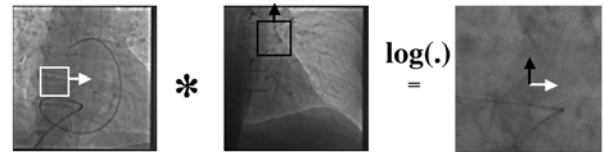


FIG. 3: Génération d'images transparentes

### 4.2 Résultats

Nous avons comparé quatre versions de notre algorithme pour évaluer les contributions des différents modules. *ME* n'accomplit que les deux premières étapes: initialisation et estimation multirésolution. *PP* inclut l'étape de post-traitement mais retient la meilleure paire de vitesses selon les valeurs de la fonction  $J$  seulement, sans accomplir de régularisation. *RE* effectue la régularisation et garde les couples sélectionnés sur chaque bloc selon le critère présenté au paragraphe 3.2, alors que *PR* retient au final les vecteurs de mouvement sur chaque bloc correspondant effectivement aux modèles affines estimés. Dans les expériences présentées ci-dessous, une des deux couches a subi un mouvement affine et l'autre une translation. Le temps de calcul pour estimer les vecteurs de vitesse est d'environ 10 secondes pour des images  $288 \times 288$  sur un Pentium IV à 2.4 GHz avec 1Go de mémoire. Le tableau 1 contient les erreurs moyennes d'estimation sur les vecteurs de vitesse pour 250 générations aléatoires d'exemples traités.

Nous observons que l'étape de post-traitement améliore la qualité des estimées sur les images bruitées, dès lors que la sélection de la paire candidate est effectuée comme expliqué en 3.2 (méthode *RE*).

Il se trouve que pour cette évaluation, le meilleur choix serait de conserver les vecteurs de vitesse correspondant aux mouvements affines estimés (méthode *PR*). Elle assure une précision subpixelique sur les images bruitées caractéristiques d'exams fluoroscopiques. Cela s'explique par le fait que les modèles de

TAB. 1: Erreur d'estimation moyenne en pixels pour différents niveaux de bruit et différentes versions de l'estimateur (voir texte principal).

Bruit	0	10	20
ME	0.33	0.72	1.59
PP	0.3	0.77	1.69
RE	0.25	0.62	1.43
PR	0.20	0.34	0.87

mouvements utilisés sont exacts pour ces séquences d'images simulées, ce qui ne serait pas le cas pour des séquences d'images réelles.

Nous avons également appliqué notre algorithme à des images médicales réelles. Nous présentons des premiers résultats sur une séquence cardiaque fluoroscopique acquise à 30 images/s. Elle représente une zone d'environ  $5\text{cm} \times 5\text{cm}$  à droite du coeur. Deux images de cette séquence sont reproduites à la figure 4, ainsi que les mouvements transparents calculés.

Le coeur (qui apparaît sombre) bat sur la droite de l'image sur un fond fixe correspondant aux côtes et à la colonne vertébrale. Les tissus clairs des poumons à gauche suivent les mouvements du coeur. L'amplitude du mouvement sur un cycle est de 25 pixels. Les images ont un faible contraste et sont affectées par un bruit important ( $\sigma \simeq 20$ ).

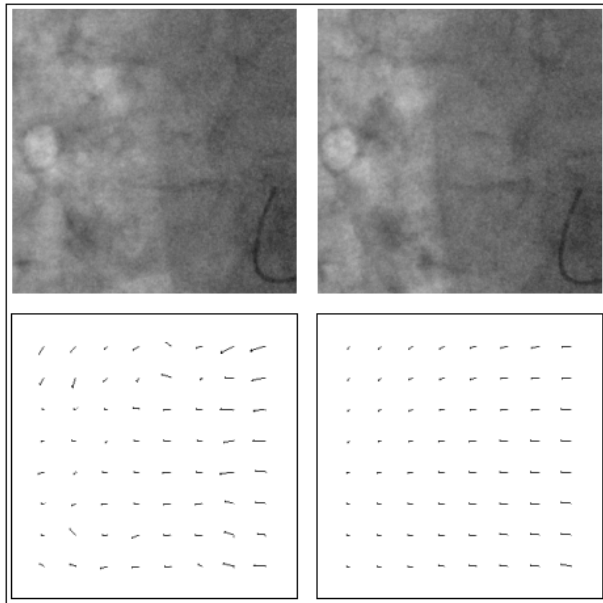


FIG. 4: Haut: Images 1 et 8 de la séquence. Bas: Vitesses estimées sur les trois premières images. Gauche: Estimation finale sur chaque bloc utilisant l'algorithme RE (par souci de visibilité, seul un vecteur est représenté pour chaque bloc car la deuxième couche est statique), droite: modèle affine estimé.

Nos estimations sont cohérentes avec les mouvements observés sur la séquence. Deux mouvements ont été estimés, et ils correspondent à la vérité anatomique: le fond, qui est statique (et n'apparaît donc pas sur les champs de vecteurs tracés à la figure 4), et le mouvement du coeur proche d'un modèle affine. L'amplitude du mouvement estimé décroît bien dans la zone des poumons selon la distance au coeur. Ces

images sont bruitées, peu contrastées, et contiennent des mouvements complexes. En outre, les mouvements ne sont pas parfaitement constants sur trois images successives. Même dans ce cas difficile, la méthode d'estimation proposée donne des résultats intéressants.

## 5 Conclusion

Nous avons décrit une nouvelle méthode complète d'estimation multirésolution de mouvements transparents pour deux couches. Elle contient en particulier une initialisation efficace et un post-traitement original qui améliorent la qualité de l'estimation multirésolution seule. Nous avons montré sur un grand nombre de simulations que nous atteignons une précision de l'ordre du quart de pixel sur des images non bruitées. Nous avons étudié l'estimation sur images bruitées avec des résultats satisfaisants pour des niveaux de bruit temporel réaliste, et ce pour des images cliniques peu contrastées. Nous avons également traité des données réelles avec des résultats fort encourageants.

Nous allons mener plus d'expériences sur des images réelles acquises par rayons X, et étudier des configurations de transparence plus complexes. Nous pensons en particulier étudier le cas, fréquent cliniquement, d'images transparentes contenant trois couches, mais avec au plus deux couches en chaque point.

## Références

- [1] M. Irani, B. Rousso, et S. Peleg, "Computing occluding and transparent motions," *International Journal of Computer Vision*, vol. 12, no. 1, pp. 5–16, 1994.
- [2] M. Shizawa et K. Mase, "Simultaneous multiple optical flow," in *Int. Conf. on Pattern Recognition*, Atlantic City, 1990, vol. 1, pp. 274–278.
- [3] J. Toro, F. Owens, et R. Medina, "Multiple motion estimation and segmentation in transparency," in *Proc. of the IEEE Int. Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Istanbul, juin 2000, pp. 2087–2090.
- [4] M. Pingault, E. Bruno, et D. Pellerin, "A robust multi-scale B-spline function decomposition for estimating motion transparency," *IEEE Trans. on Image Processing*, vol. 12, no. 11, pp. 1416–1426, nov. 2003.
- [5] I. Stuke, T. Aach, C. Mota, et E. Barth, "Estimation of multiple motions using block-matching and Markov random fields," in *SPIE Conf. Visual Communications and Image Processing VCIP'2004*, San Jose, janvier 2004, pp. 274–278.
- [6] M. Pingault et D. Pellerin, "Motion estimation of transparent objects in the frequency domain," *Signal Processing*, vol. 84, no. 4, pp. 709–719, avril 2004.
- [7] W.H.Press et al, *Numerical recipes in C : The Art of Scientific Computing*, chapter Downhill Simplex Method in Multidimensions, pp. 408–412, Cambridge University Press, 1988-1992.
- [8] J.-M. Odobez et P. Bouthemy, "Robust multiresolution estimation of parametric motion models," *Journal of Visual Communication and Image Representation*, vol. 6, no. 4, pp. 348–365, décembre 1995.

# Estimation des données occultées : modèles statistiques à noyau

Barbara ROMANIUK<sup>1</sup>, Michel DESVIGNES<sup>2</sup>, Maxime BÉRAR<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Laboratoire CRéSTIC LERI, URCA  
Rue des Crayères, BP 1035, 51687 Reims Cedex 2, France

<sup>2</sup>Laboratoire LIS  
961, Rue de la houille blanche, BP 46 St Martin d'Heres, France

Barbara.Romaniuk@leri.univ-reims.fr, michel.desvignes@lis.inpg.fr, berar@lis.inpg.fr

**Résumé** – Dans cet article nous proposons d'utiliser des modèles statistiques non linéaires dans le cadre de la reconnaissance de formes. Les objets que nous visons à reconnaître sont définis par des ensemble ordonnés de points. Nous présentons ici deux modèles : le premier repose sur la définition d'une fonction de projection explicite, le second est inspiré de l'analyse en composantes principales à noyau (Kernel Principal Component Analysis). Ces travaux ont pour objectif l'estimation de la position d'objets partiellement visibles. Les deux modèles ont été validés en céphalométrie avec de bons résultats.

**Abstract** – In this paper, we deal with the pattern recognition problem using non-linear statistical models based on Kernel Principal Component Analysis. Objects that we try to recognize are defined by ordered sets of points. We present here two types of models: the first one uses an explicit projection function, the second one uses the Kernel trick. The present work attempts to estimate the localization of partially visible objects. Both are applied to the cephalometric problem with good results.

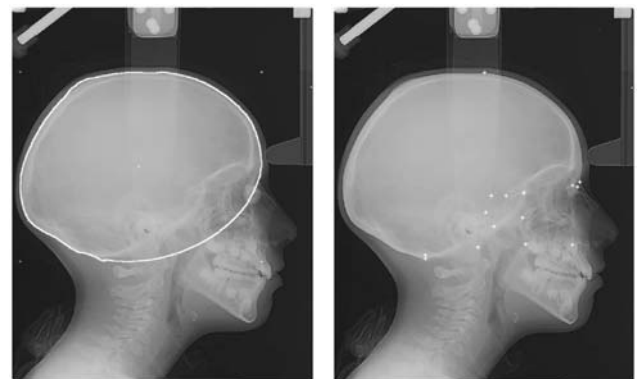
## 1 Introduction

Notre approche s'inscrit dans le cadre de la reconnaissance de formes statistique. L'un des pionniers en analyse de formes est Kendall[5]. Il assimile une forme à l'information restante après alignement de deux objets. Cette définition est réutilisée par Cootes[2] dans les modèles de formes et d'apparence. Composés d'une forme moyenne et de la variabilité autorisée autour de cette forme moyenne, ces deux types de modèles utilisent l'Analyse en Composantes Principales (ACP). Un modèle de profil d'intensité intervient en plus dans le modèle d'apparence. Ce dernier reste valable sous l'hypothèse d'une distribution linéaire. Quelques travaux récents proposent des modèles d'intensité non linéaires basés sur des classifieurs de type K plus proches voisins et sur la sélection de caractéristiques locales similaires à l'analyse de texture[3] ou sur le recalage sur l'image d'un modèle inspiré de l'algorithme de filtrage particulaire[1]. Ces derniers restent cependant applicables si les caractéristiques recherchées sont localisées sur des contours bien marqués dans l'image.

Dans cet article nous nous intéressons plus particulièrement à l'application en céphalométrie. Son objectif est de localiser des points anatomiques sur les radiographies crâniennes en vue d'un diagnostic médical. La définition anatomique des points céphalométriques est cependant difficilement applicable sur les radiographies. Le repérage s'avère difficile et est sujet à une variabilité d'environ 2 millimètres. Les hypothèses nécessaires à l'utilisation des modèles d'apparence n'y sont pas vérifiées[4].

Dans notre problème, nous disposons d'une base d'images radiographiques expertisées (points anatomiques appelés points céphalométriques) et de connaissances *a priori* (la position des points recherchés est relative à la forme du crâne). Le contour crânien est détecté automatiquement dans chaque image. L'ensemble d'apprentissage est composé des points céphalométri-

ques et des points issus de l'échantillonnage du contour crânien (c.f. figure 1).



Contour crânien détecté automatiquement.

Points anatomiques (expertise humaine).

FIG. 1: Base d'apprentissage en céphalométrie

Nous proposons d'aborder le problème d'estimation de points caractéristiques par une approche statistique. Notre modèle doit être capable de retrouver les points anatomiques sur une image inconnue. Sachant que le contour crânien peut être détecté sur toutes les images, le problème que nous posons est celui d'identifier l'occultation partielle d'une observation à partir de la partie visible. L'idée majeure consiste à utiliser la variabilité, l'observation moyenne ainsi que les relations spatiales existantes entre les caractéristiques de l'observation. Nous présentons ici la comparaison de deux modèles non linéaires. Les deux modèles sont appris dans un espace caractéristique non linéaire. Le premier modèle est basé sur l'ACP à noyau (Kernel PCA) et repose sur une projection implicite, le second sur une projection explicite.

## 2 Méthodologie

En céphalométrie une observation est partiellement connue. Elle est composée des coordonnées des points issues de l'échantillonnage du contour crânien détecté automatiquement ainsi que de celles des points céphalométriques dont la position est supposée inconnue. Le problème que nous visons à résoudre est de déterminer la partie inconnue de l'observation en utilisant un modèle statistique non linéaire et la partie connue de l'observation. Soit  $X$  l'observation à reconstruire (les données connues sont placées en tête de l'observation). Le modèle statistique permet alors de déterminer les paramètres de variabilité de l'observation étudiée par rapport à une observation moyenne. Trouver la partie inconnue de  $X$  est équivalent à trouver la forme appartenant au modèle dont les premières coordonnées sont données par la partie connue de  $X$ .

Nous proposons dans ce cadre deux modèles non linéaires différents. Le premier est un modèle implicite basé sur l'ACP à noyau. Le second en revanche est un modèle explicite basé sur les rapports d'aires algébriques de triangles.

### 2.1 Modèle implicite basé sur l'ACP à noyau

#### 2.1.1 L'ACP à noyau - Kernel PCA

L'ACP à noyau consiste en une projection des données dans une espace caractéristique de grande dimensionnalité  $\mathcal{F}$ , puis en une ACP dans  $\mathcal{F}$ . La fonction de projection est non linéaire. Dans un problème de localisation, la forme moyenne explicitée dans  $\mathcal{F}$  doit être projetée dans l'espace d'origine. Le choix de la fonction de projection inverse s'avère problématique.

Soit  $n$  le nombre d'observations présentes dans l'ensemble d'apprentissage. Soient  $X_i$   $i \in \{1, \dots, n\}$  les observations. Soit  $\varphi$  la fonction de projection non linéaire telle que :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n &\mapsto \mathcal{F} \\ X &\mapsto \varphi(X) \end{aligned}$$

Soit  $k(X_i, X_j)_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2}$  un noyau de Mercer. Ce noyau peut être utilisé pour calculer une matrice  $K$  définie positive. Il permet de reformuler une projection en terme de produit scalaire :  $k(X_i, X_j) = \langle \varphi(X_i), \varphi(X_j) \rangle$ .

Le noyau que nous utiliserons est le noyau gaussien :  $k(X, Y) = \exp \frac{-\|X-Y\|^2}{2\sigma^2}$ .

Dans son algorithme Scholkopf remplace le calcul de la matrice de variance-covariance dans  $\mathcal{F}$  (ACP) par celui de la matrice  $K$  (matrice de Gram). Cet algorithme se résume à trois étapes :

- 1. Calcul de la matrice  $K$  :  $K_{ij} = \langle \varphi(X_i), \varphi(X_j) \rangle$ .
- 2. Calcul des valeurs propres et vecteurs propres de  $K$ . Leur normalisation :  $\lambda_k \langle \alpha^k, \alpha^k \rangle = 1$ .
- 3. Calcul des projections sur les composantes principales :  $\beta_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k k(X_i, X)$ .

L'algorithme de Scholkopf s'arrête là. Afin de résoudre le problème de retroprojection dans l'espace d'origine il est intéressant de définir la fonction que nous serons amenés à minimiser par rapport à  $\varphi$ . Cette fonction est :

$$P_l \varphi(X) = \sum_{i=1}^l \beta_i V^i.$$

Cet algorithme est valable pour des observations centrées :

$$\sum_{i=1}^n \varphi(X_i) = 0.$$

Le centrage des données est facile à assurer dans l'espace d'origine, beaucoup plus difficile dans l'espace  $\mathcal{F}$ , puisque l'on ne peut pas calculer explicitement la moyenne des observations projetées dans cet espace. Il existe cependant une solution à ce problème. Il s'agit de calculer la matrice de Gram à la place de la matrice  $K$ . La matrice à diagonaliser devient alors :

$$G = K - 1_n K - K 1_n + 1_n K 1_n,$$

où  $1_{nij} = \frac{1}{n}$  pour tout  $\{i, j\} \in \{1, \dots, n\}^2$ .

#### 2.1.2 Projection implicite et pseudo-inverses utilisant l'astuce noyau

Chaque observation est composée de  $m$  coordonnées points caractéristiques (contour crânien échantillonné et points anatomiques). Notre objectif est d'identifier  $p$  coordonnées inconnues d'une observation quelconque, où  $p < \frac{m}{2}$ . Pour ceci nous sommes amenés à travailler dans trois espaces différents (figure 2). Le premier est l'espace image (espace d'origine) de dimension  $m$  (nombre de coordonnées des observations), le second est l'espace caractéristique  $\mathcal{F}$  de dimension  $L > m$ , le troisième est l'espace Kernel PCA de dimension  $n$ . Ce type de schéma a été proposé dans [6]. Nous proposons ici d'étudier la projection directe entre l'espace Kernel PCA et l'espace image (projection 5, figure 2), projection non étudiée jusqu'à présent. Cette étude nous conduit à expliciter des pseudo-inverses en effectuant des minimisations multidimensionnelles.

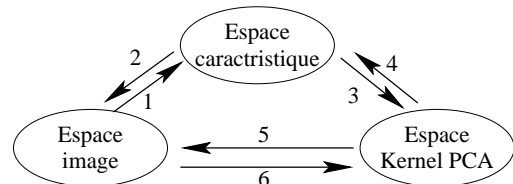


FIG. 2: Trois différents espaces.

Soient  $X$  une observation dans l'espace image et  $X_i$  la  $i^{\text{ème}}$  observation dans l'ensemble d'apprentissage. Soient  $\varphi$  la fonction non linéaire de projection entre l'espace image et l'espace Kernel PCA et  $\beta$  les coordonnées d'une observation dans l'espace Kernel PCA. Soit  $Z_{kpca}$  la pré-image, qui correspond à l'observation  $X$  reconstruite dans l'espace image à partir de l'espace Kernel.

#### Pseudo-inverse utilisant $\beta$

Considérant une observation  $X_{kpca}$  dans l'espace Kernel PCA nous pouvons calculer son image  $Z_{kpca}$  en minimisant :

$$\|X_{kpca} - \beta\|^2,$$

avec  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_l)$  les projections de  $X_{kpca}$  sur  $l$  composantes principales :  $\beta_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k k(X_i, X_{kpca})$ . En développant cette équation nous obtenons la pseudo-inverse utilisant  $\beta$  :

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i k(X_i, Z_{kpca}) - \beta \right\|^2. \quad (1)$$

### Pseudo-inverse utilisant $Z_{kpca}$

Il est possible de reformuler la pseudo-inverse précédente en exprimant  $k(X_i, Z_{kpca})$  en fonction de  $\beta$ . Nous savons que :

$$\beta_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k k(X_i, Z_{kpca}).$$

En réécrivant les  $\beta_k$  en utilisant un formalisme matriciel on obtient :

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^n & \cdots & \alpha_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k(X_1, Z_{kpca}) \\ \vdots \\ k(X_n, Z_{kpca}) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Soit  $B$  la matrice :

$$B_{ij} = \langle \alpha^i, \alpha^j \rangle.$$

$\alpha^i$  sont les pseudo-vecteurs propres de la matrice  $K$  calculés par rapport à ses vecteurs propres  $V^i$  et ses valeurs propres  $\lambda^i$  :

$$\begin{aligned} \alpha^i &= \frac{V^i}{\sqrt{\lambda^i}}, \\ \langle \alpha^i, \alpha^j \rangle &= \frac{\langle V^i, V^j \rangle}{\sqrt{\lambda^i \lambda^j}}. \end{aligned}$$

Nous savons que les  $V^i$  forment une base orthonormée. Nous obtenons alors :

$$\langle \alpha^i, \alpha^i \rangle = \frac{1}{\lambda^i} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda^1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda^n} \end{bmatrix}.$$

Nous en déduisons  $B^{-1}$ . Nous pouvons alors calculer  $\alpha^{-1}$  :

$$\alpha^{-1} = \alpha^t B^{-1}.$$

L'équation (2) devient :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^n & \cdots & \alpha_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k(X_1, Z_{kpca}) \\ \vdots \\ k(X_n, Z_{kpca}) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

La pseudo-inverse associée à  $Z_{kpca}$  est alors définie par :

$$\left\| k(X_j, Z_{kpca}) - \sum_{i=1}^n \alpha_i^j \lambda^j \beta^j \right\|^2. \quad (4)$$

## 2.2 Modèle explicite

Le deuxième modèle est explicite. Il est basé sur l'élaboration d'une fonction de projection explicite entre l'espace image et l'espace de caractéristique dans lequel la variabilité est modélisée.

### Fonction de projection

La première étape consiste en la détection de la forme de référence (contour crânien). Cette forme est ensuite échantillonnée en  $p$  points équidistants  $P_i, i \in \{1, \dots, p\}$ .

L'espace caractéristique non linéaire est alors défini par les rapports de surfaces de triangles obtenus à partir de l'échantillonnage précédent. Les coordonnées d'un point de l'image  $M(x, y)$  sont  $\beta, \gamma$  et  $\delta$  calculés pour chaque triangle possible :

$$\beta = \frac{P_j MP_k}{P_i P_j P_k} \quad \gamma = \frac{P_k MP_i}{P_i P_j P_k} \quad \delta = \frac{P_i MP_j}{P_i P_j P_k}$$

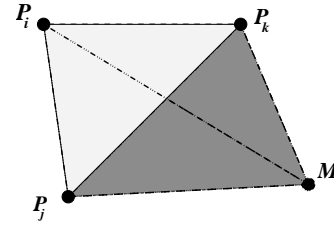


FIG. 3: Nouvelles coordonnées d'un point  $M$

où  $\overline{P_i P_j P_k}$  est l'aire algébrique du triangle  $P_i P_j P_k$ .

Ces coordonnées vérifient :

$$\beta \times \overrightarrow{MP_i} + \gamma \times \overrightarrow{MP_j} + \delta \times \overrightarrow{MP_k} = \vec{0}.$$

Soit  $l$  le nombre de triangles obtenus à partir de l'ensemble des points  $P_i$ . Les nouvelles coordonnées de  $M$  sont :

$$\vartheta = [\beta_1 \gamma_1 \delta_1 \dots \beta_l \gamma_l \delta_l]^t = A' M,$$

où  $A'$  est une matrice utilisée pour projeter les données de l'espace cartésien dans notre nouvel espace caractéristique.

Le point fort de cette projection est le fait que les données sur lesquelles nous travaillons ne doivent pas être nécessairement centrées. Cette projection assure leur invariance vis à vis des transformations affines, propriété très intéressante lorsqu'on travaille dans le cadre d'une application médicale.

### Modélisation de la variabilité et des relations spatiales

L'apprentissage est effectué sur une base composée de  $N$  images expertisées. Pour chaque image nous détectons la forme de référence et on l'échantillonne. Pour chaque image  $i$  nous disposons d'un ensemble de points  $\{P_k^i\}_{k \in \{1, \dots, p\}}$  d'une matrice  $A^i$  et d'un ensemble de  $m' = \frac{m}{2}$  coordonnées de points anatomiques  $\{C_j^i\}$ . On calcule la position moyenne de chaque point caractéristique. Soit  $\vartheta^i$  le vecteur représentant les coordonnées dans de nouvel espace d'un point caractéristique dans l'image  $i$ . La position moyenne de ce point est donnée par :

$$\hat{\vartheta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vartheta^i.$$

La variance  $\hat{\sigma}$  des vecteurs  $\vartheta^i$  est aussi calculée. Nous en déduisons une matrice de pondération  $P$  :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{\sigma}_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\hat{\sigma}_{3l}} \end{bmatrix}.$$

La matrice  $P$  permet de donner plus d'importance aux coordonnées robustes : Lorsque l'échantillonnage de la forme de référence donne un nombre important de points, seuls certains sont importants. On propose alors d'appliquer une ACP sur la matrice de covariance des vecteurs  $\vartheta^i$ . Seuls les  $d'$  composantes sont retenues. Ces composantes correspondent aux valeurs propres les plus élevées, elle forment la matrice  $\Phi$ .

### Estimation des points

Soit  $\vartheta$  le vecteur représentant les points caractéristique  $C$  dans le nouvel espace. Estimer  $C$  dans une nouvelle image consiste en la résolution du système :  $\hat{\vartheta} = A' C$ , où  $\hat{\vartheta}$  est le vecteur moyen appris et  $A'$  la matrice définie relativement aux caractéristiques de la nouvelle image. On résout ce problème en

utilisant les moindres carrés pondérés. La position estimée  $\tilde{C}$  du point  $C$  dans une image inconnues est donnée par l'équation :

$$\tilde{C} = (A'^t P^t \Phi \Phi^t P A')^{-1} A'^t P^t \Phi \hat{\theta}.$$

### 3 Résultats

En céphalométrie, le contour crânien est échantillonné en 6 points, soit 12 coordonnées. Nous avons testé les méthode pour l'estimation de 14 points céphalométriques sur 80 images et ceci avec l'approche *leave-one-out*. Dans la méthode utilisant les noyaux on a utilisé la méthode de Powell pour la minimisation.

pts	$E_x$	$E_y$	$\sigma_x$	$\sigma_y$
NA	3.8	4.2	2.93	3.37
M	3.9	4.2	2.83	3.44
FM	4.1	4.0	3.10	3.36
SE	4.6	3.5	3.37	3.63
TPS	4.8	3.8	3.77	3.54
CLP	4.9	4.3	3.45	3.79
SSO	4.8	3.9	3.70	3.47
BA	5.8	3.8	3.76	3.50
CT	5.4	3.3	3.52	2.90
OP	7.2	4.8	4.78	3.65
OB	6.5	4.5	4.56	3.38
PTS	4.6	3.3	3.23	3.25
PTI	4.5	3.2	3.42	2.51
BR	7.4	5.1	4.87	3.88
Moyenne	5.2	4.0	3.66	3.41
(2)				

TAB. 1: Erreur moyenne et écart type (en millimètres) associés à la méthode basée sur la pseudo-inverse utilisant  $\beta$  (calcul effectué avec un noyau gaussien et  $\sigma = 0.005$ ).

pts	$E_x$	$E_y$	$\sigma_x$	$\sigma_y$
NA	0.6	1.6	0.73	1.83
M	1.1	1.7	0.94	1.84
FM	1.3	1.6	1.00	1.78
SE	2.1	2.3	1.68	1.91
TPS	2.3	2.2	1.87	1.63
CLP	2.5	2.3	1.85	1.70
SSO	2.8	2.5	2.17	1.94
BA	4.1	2.3	3.22	1.82
CT	3.4	2.0	2.67	1.61
OP	4.9	2.2	4.37	1.87
OB	4.6	2.1	4.04	1.73
PTS	2.5	2.2	2.09	1.77
PTI	3.4	2.3	2.83	1.82
BR	4.5	1.2	3.70	0.90
Moyenne	2.9	2.0	2.93	1.78
(1)				

TAB. 2: Erreur moyenne et écart type (en millimètres) associés à la méthode basée sur une fonction de projection explicite.

Le tableau 1 présente les résultats obtenus en utilisant la pseudo-inverse utilisant  $\beta$  et l'astuce noyau. Le tableau 2 présente

les résultats obtenus en utilisant la fonction de projection explicite (données invariantes par transformations affines). Les résultats obtenus montrent que la deuxième méthode donne de meilleurs résultats approchant la variabilité inter-experte. La méthode utilisant les noyaux est moins performante du fait de la minimisation numérique qui ne converge pas toujours dans le cadre général. Des améliorations utilisant les expressions analytiques des noyaux dans ce formalisme sont en cours de réalisation. L'avantage de la méthode basée sur les noyaux réside dans le fait que la fonction de projection n'a pas à être explicité et calculé.

### 4 Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté et comparé deux méthodes de reconstruction des parties invisibles d'un objet en utilisant une approche statistique. Le cadre statistique offre un moyen élégant pour résoudre ce problème, en utilisant aussi bien la variabilité autorisée par le modèle que les relations spatiales existantes entre les différentes caractéristiques de l'objet modélisé. Il apparait que les modèles basés sur les Kernel PCA sont intéressants pour résoudre ce problème, même si une fonction de projection explicite dans  $\mathcal{F}$  donne de meilleurs résultats. La définition d'une telle fonction est un problème difficile.

### Remerciements

Nous remercions le Docteur Marie-Josèphe Deshayes et la société Télécrâne Innovation pour la base d'images, l'expertise et les connaissances *a priori*.

### Références

- [1] M. de Bruijne and M. Nielsen. *Image Segmentation by Shape Particle Filtering*. ICPR, Cambridge, United Kingdom, 2004.
- [2] T.F.Cootes, G.J. Edwards, C.J.Taylor. *Active Appearance Models* IEEE PAMI, Vol. 23 (6), pp. 681-685, 2001.
- [3] B. van Ginneken, A.F. Frangi, J.J. Staal, B.M. ter Haar Romeny, M.A. Viergever. *Active Shape Model segmentation with optimal features*. IEEE Transactions on Medical Imaging, vol. 21, p.924-933, 2002.
- [4] T.J. Hutton, S.Cunningham, P. Hammond. *An Evaluation of Active Shape Models for the Automatic Identification of Cephalometric Landmarks*. European Journal of Orthodontics, Vol. 22(5), pp. 499-508, 2000.
- [5] D.G. Kendall. *Shape manifold, Procrustean metrics and complex projective spaces*. Bull. London Math. Soc., Vol. 16, pp. 81-121, 1984.
- [6] S. Romdhani, A. Psarrou, S. Gong. *Multi-View Nonlinear Active Shape Model using Kernel PCA*. Proceedings of the 10<sup>th</sup> British Machine Vision Conference, September 1999, Nottingham, England.
- [7] B. Schölkopf, A. Smola. *Learning With Kernels*. Cambridge, MIT Press, 2002.



# Estimation imprécise de densité de probabilité par transfert imprécis de comptage.

Olivier Strauss

LIRMM, Université Montpellier II, 161, rue Ada, 34392 Montpellier Cedex 5, France  
e-mail : Olivier.Strauss@lirmm.fr

**Résumé** — Un histogramme *quasi-continu* (HQC) est un outil de représentation et d'analyse statistique apparenté aux méthodes du noyau. Il permet de réaliser des estimations statistiques de moments, de modes ou de fractiles. Cette aptitude est due à la possibilité de reconstruire une estimation de la densité de probabilité en n'importe quel point de la droite réelle, comme l'aurait permise une méthode du noyau. Cependant, la discrétisation de la droite, propre aux histogrammes, crée une altération de la répartition locale des données se traduisant par une imprécision de la densité estimée. Nous proposons, dans cet article, une méthode d'estimation de cette densité imprécise basée sur une intégrale de Choquet.

**Abstract** — A *quasi-continuous* histogram (QCH) is a statistical tool related to the kernel density estimation. It allows statistical estimates of moments, modes or quartils. This property is ensued from the possibility to estimate the density of probability in any point like would have allowed a kernel estimate. However, the discretization creates a deterioration of the local distribution of the data. It results an inaccuracy of the estimated density. We propose, in this article, a method to estimate the imprecision of this density by using a Choquet integral.

## 1. Introduction.

Un histogramme quasi-continu (HQC) est un histogramme construit sur une partition floue de la droite réelle. C'est un outil de représentation et d'analyse statistique dont les fondements reposent sur la théorie des sous-ensembles flous grossiers [1]. Les HQC permettent de réaliser des opérations statistiques de base telles que l'estimation de modes, de moments et de fractiles [2,3]. Les estimations produites par les HQC sont à la fois rapides et robustes.

La possibilité de réaliser des opérations d'estimation avec des HQC provient du lien étroit qui existe entre histogramme et densité de probabilité, ou plus exactement entre comptage et densité de probabilité. Ce lien étroit est une des bases des travaux de B. Silverman sur l'estimation de densité par la méthode du noyau [4].

Le principe des HQC est très proche de celui de la méthode du noyau en ce sens que des noyaux sont utilisés pour estimer une grandeur statistique locale. Ces deux méthodes diffèrent cependant en quatre points essentiels :

- les noyaux utilisés pour construire un histogramme quasi-continu sont des noyaux flous donc non-sommatifs,
- la représentation des données par HQC ne se limite pas à la reconstruction de la densité de probabilité sous-jacente mais permet aussi des manipulations statistiques des données [5],
- les noyaux sont répartis, comme pour un histogramme classique, de façon arbitraire sur la droite mais représentation par HQC répercute de façon explicite ce caractère arbitraire,
- la représentation par HQC permet de prendre en compte une connaissance a priori sur l'imprécision ou l'incertitude relative des données traitées.

Parce qu'il est réalisé sur une partition floue de la droite réelle, un HQC peut être vu comme un emboîtement de plusieurs histogrammes binaires ayant le même nombre de cellules mais des résolutions différentes. De cette propriété découle qu'il est possible de réaliser une estimation de la densité des données qui serait accumulé sur un noyau différent de ceux utilisés pour

réaliser la partition. Ce que l'on appelle le transfert de comptage est un des outils de base de l'estimation statistique utilisant des HQC.

La technique de transfert de comptage que nous avons utilisé jusqu'à présent est inspirée de la méthode de transfert de croyance pignistique proposé par Smets [6]. Cette technique présente de nombreux avantages car elle peut être représentée localement par une fonctionnelle. C'est sur cette propriété que nous nous appuyons pour réaliser la détection des modes d'une distribution empirique [3]. Cependant, cette méthode de transfert ne permet pas de répercuter l'altération produite par le partitionnement de la droite réelle sur l'estimation de la densité. Nous en proposons une nouvelle généralisation basée sur une intégrale de Choquet transformant l'altération dû à l'échantillonnage en imprécision sur la densité estimée. Nous lui avons donné le nom de transfert pignistique imprécis. Dans le cadre de cet article, les données sont supposées précises, ou d'imprécision inconnue.

## 2. Accumulation de données précises dans un histogramme quasi-continu.

Soient  $n$  observations réelles précises  $x_1 \dots x_n$ . Construire un histogramme à partir de ces observations consiste à partitionner un intervalle de référence réel  $\Omega = [x_{\min}, x_{\max}]$  en  $p$  cellules  $C_k$  et à compter le nombre  $a_k$  d'observations appartenant à chaque cellule.  $a_k$  est l'accumulateur associé à  $C_k$ . Lorsque toutes les cellules de l'histogramme sont de même largeur, l'histogramme est dit régulier. La largeur d'une cellule  $C_k$  est  $\Delta$ , appelée pas ou granularité de l'histogramme.

En substituant, à la partition binaire de la droite réelle, une partition floue, on obtient un histogramme quasi-continu (HQC). Nous nous plaçons, dans cet article, dans le cas d'une partition floue forte régulière de fonction d'appartenance triangulaire, c'est à dire un ensemble de nombres flous (ou intervalles ou cellules),  $(C_k)_{k=1 \dots p}$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_k \mu_{C_k}(x) = 1 \quad (1)$$

$\Delta = \int \mu_{C_k}(x) dx$  est la granularité de l'histogramme,  $m_k$  est le mode de l'intervalle  $C_k$  et  $\mu_{C_k}(x)$  est l'appartenance de la valeur réelle  $x$  à la cellule  $C_k$ . La première et la dernière cellule de la partition sont de granularité infinie pour respecter la propriété (1) (Fig. 1).

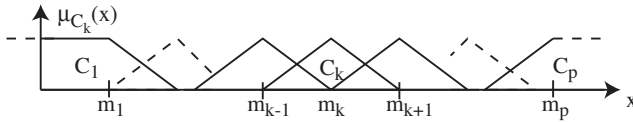


Figure 1 : Partition floue forte de  $\mathbb{R}^2$

L'accumulation des données dans un histogramme quasi-continu n'est autre qu'une généralisation de l'accumulation des données dans un histogramme classique. Soit  $a_k$  l'accumulateur associé à la cellule  $C_k$  :

$$a_k = \sum_{i=1}^n \mu_{C_k}(x_i) \quad (2)$$

### 3. Estimation de densité de probabilité.

#### 3.1 Comptage, probabilité et densité.

La probabilité d'un événement peut être approchée par le rapport du nombre de cas favorables à cet événement au nombre total d'événements considéré. Dans le cas binaire précis, soient  $(x_i)$  les observations et une quantité  $W \subset \mathbb{R}$  de granularité  $\Gamma$ ,  $P(W;(x_i))$ , la probabilité de  $W$  basée sur les observations  $(x_i)$  est donnée par :

$$P(W;(x_i)) = \frac{nb(x_i \in W)}{nb(x_i)} = \frac{nb(W;(x_i))}{nb(\Omega;(x_i))} \quad (3)$$

Si  $W$  est un sous-ensemble flou, alors on utilise la formule (2) pour estimer  $nb(W;(x_i))$ .

Le principe de la méthode du noyau consiste à déplacer un noyau de granularité fixé sur la droite réelle et à réaliser une estimation locale de la densité. Si on veut réaliser une estimation de la densité en chaque point de la droite réelle à partir d'un histogramme quasi-continu, il faut être capable de transférer le comptage réalisé sur la partition  $(C_k)$  sur tout sous-ensemble  $W$  de la droite réelle.

#### 3.2 Principe du transfert de comptage.

La méthode pignistique précise consiste à transférer l'accumulateur de chaque cellule de la partition vers le sous-ensemble  $W$  au prorata du recouvrement de  $W$  et  $C_k$ . Le transfert pignistique s'écrit :

$$nb(W;(x_i)) = \sum_{k=1}^p a_k \left( \frac{|W \cap C_k|}{|C_k|} \right) \quad (4)$$

Ce type de transfert considère que l'échantillonnage réalise un mélange uniforme des votes à chaque niveau de confiance. Si

$a_k$  est le comptage associé à  $C_k$ , alors la densité locale supposée dans la cellule  $C_k$  est  $a_k/\Delta$ . L'utilisation de cette méthode repose sur une hypothèse d'indépendance des cellules voisines. Or, si on considère la partition floue forte comme un emboîtement d'intervalles binaires associés à des mesures de confiance croissantes [7], cette hypothèse n'est vraie que si le niveau de confiance requis est inférieur à 0,5 (coupes de niveau  $\alpha > 0,5$ ). A partir de la valeur  $\alpha = 0,5$ , les coupes de niveau  $\alpha$  des cellules de la partition ont des intersections non-nulles ce qui invalide l'hypothèse d'indépendance. Il est souhaitable, pour éviter un biais des estimations, de prendre en compte ce couplage pour estimer le transfert de comptage.

L'approche classique considérerait comme connue la probabilité de couplage des cellules voisines. Ce couplage pourrait alors être pris en compte en utilisant une régularisation probabiliste bayésienne. Le transfert obtenu resterait précis mais cette précision serait arbitraire puisque le couplage dépend des données.

La nouvelle généralisation de la méthode pignistique que nous proposons exploite la représentation emboîtée de l'histogramme grâce à une intégrale de Choquet [8]. Cette méthode provoque un transfert imprécis qui suppose l'uniformité pour chaque sous-ensemble issu du découpage emboîté en  $\alpha$ -coupe (base du transfert pignistique) mais suppose inconnu le couplage probabiliste entre les intervalles. L'estimation de comptage produite est donc imprécise. A la valeur précise  $nb(W;(x_i))$  de l'estimation de  $nb(W;(x_i))$ , on doit substituer l'intervalle :

$$\widehat{Nb}(W;(x_i)) = [\underline{nb}(W;(x_i)), \overline{nb}(W;(x_i))] \quad (5)$$

Pour réaliser une estimation supérieure de  $\widehat{nb}(W;(x_i))$  par une intégrale de Choquet on définit  $a_{(k)}$  la série des accumulateurs triés, telle que  $a_{(1)} \geq a_{(2)} \geq \dots \geq a_{(p)}$ . On en déduit les coalitions<sup>1</sup> floues  $E_{(k)}$  :

$$E_{(k)} = C_{(1)} \cup \dots \cup C_{(k)} \quad (6)$$

et la mesure de confiance (ou capacité)  $v(E_{(k)};W)$  :

$$v(E_{(k)};W) = \frac{|E_{(k)} \cap W|}{|UC \cap W|} \frac{|W|}{\Delta} \text{ avec } UC = \bigcup_k C_k \quad (7)$$

Alors le transfert flou supérieur s'écrit :

$$\overline{nb}(W;(x_i)) = \sum_{k=1}^p a_k (v(E_{(k)};W) - v(E_{(k-1)};W)) \quad (8)$$

On pose par convention  $v(E_{(0)};W) = 0$ .

L'estimation inférieure utilise les propriétés de complémentarité de l'intégrale de Choquet :

$$\underline{nb}(W;(x_i)) = -\overline{nb}(W;-(x_i)) \quad (9)$$

1. Union d'ensembles élémentaires recouvrant une partie de  $\Omega$  dont les mesures associées sont cohérentes.

Pour transformer un comptage imprécis en probabilité imprécise, il suffit d'utiliser la généralisation de l'équation (3) proposé dans [9] :

$$\begin{aligned}\bar{P}(W;(x_i)) &= \frac{\bar{nb}(W;(x_i))}{\bar{nb}(W;(x_i)) + \underline{nb}(W^c;(x_i))}, \\ \underline{P}(W;(X_i)) &= \frac{\underline{nb}(W;(x_i))}{\underline{nb}(W;(x_i)) + \bar{nb}(W^c;(x_i))}\end{aligned}\quad (10)$$

#### 4. Expérimentations.

Nous avons procédé à un grand nombre d'expérimentations dont nous proposons ici deux illustrations.

La première série d'illustrations utilise un lot de données classiques extrait du livre de Silverman [4] et concernant les éruptions du geyser Old Faithful. Nous comparons la reconstruction imprécise de la densité de probabilité obtenue par notre méthode à des reconstructions obtenues avec 6 types de noyaux monomodaux symétriques ayant la même granularité que l'histogramme. Nous avons choisi ici de créer un histogramme de 30 cellules (ce choix influe surtout sur la séparation des modes [3]) donc la granularité est  $\Delta=2$  minutes. Les noyaux que nous utilisons pour cette expérimentation sont les suivants :

- noyau d'Epanechnikov :  $k(u) = \frac{3}{4}(1-u^2)$
- noyau cosinus :  $k(u) = \frac{\pi}{4}\cos\left(u\frac{\pi}{2}\right)$
- noyau hyperlisse :  $k(u) = \exp((-1)/(1-u^2))$
- noyau triangle :  $k(u) = 1-|u|$
- noyau exponentiel :  $k(u) = \frac{1}{2}\exp(-|u|)$
- noyau gaussien :  $k(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$ .

Les noyaux sont bien sûr évalués sur un support  $[-1, 1]$ .

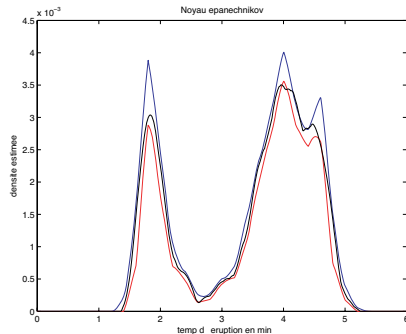


Figure 2 : comparaison avec le noyau d'Epanechnikov.

Sur les résultats présentés, l'estimation par noyau précis est donnée par la courbe noire continue tandis que les estimations supérieures et inférieures sont données respectivement par les

courbes bleues (sup.) et rouges (inf.).

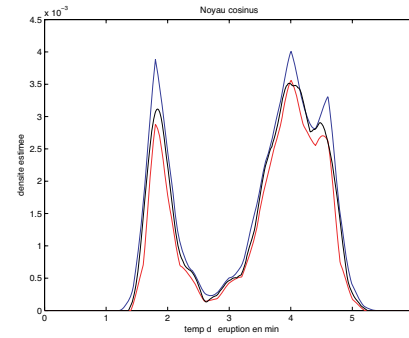


Figure 3 : comparaison avec le noyau cosinus

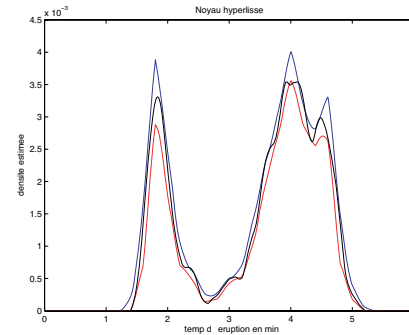


Figure 4 : comparaison avec le noyau hyperlisse

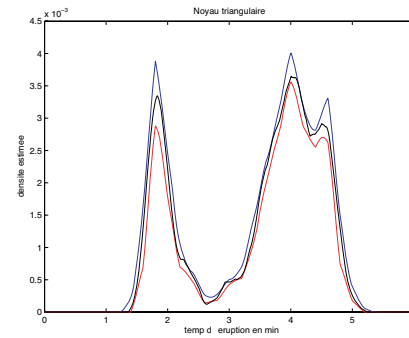


Figure 5 : comparaison avec le noyau triangle

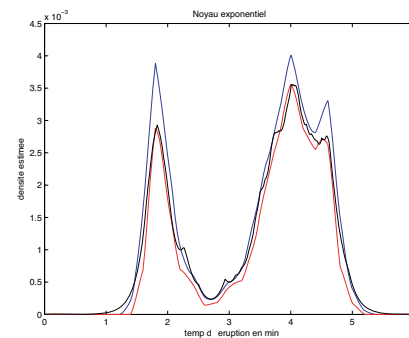


Figure 6 : comparaison avec le noyau exponentiel

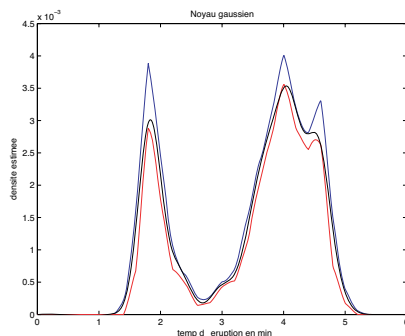


Figure 7 : comparaison avec le noyau gaussien

Cette série d'expérience montre que l'estimation obtenue par transfert de comptage est tout à fait cohérente avec celle qu'on obtiendrait avec un noyau monomodal symétrique de même granularité.

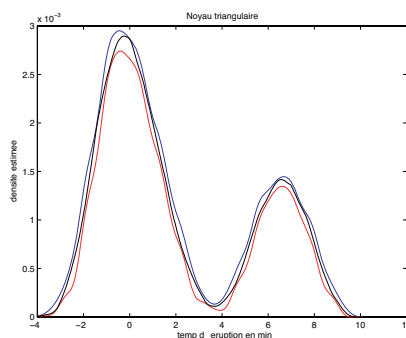


Figure 8 : estimation avec 15 cellules.

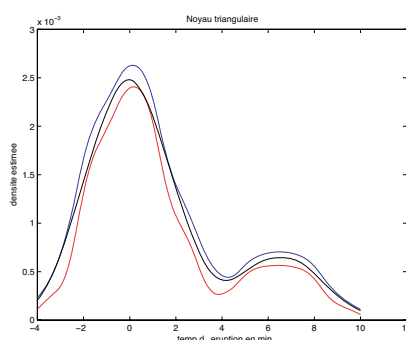


Figure 9 : estimation avec 9 cellules.

Dans la seconde expérience, nous avons simulé une distribution bimodale de 400 échantillons. Nous avons réalisé une estimation de la densité par un noyau triangulaire d'une part et un transfert pignistique imprécis issu d'un histogramme quasi-continu de 15 cellules et 9 cellules d'autre part (ce choix est arbitraire). Comme on peut le voir sur les figure 8 et 9, l'estimations par noyau triangulaire est en effet toujours incluse entre les deux bornes données par l'estimation par transfert pignistique imprécis. Cet encadrement découle d'une exploitation correcte des propriétés des quantité floues triangulaires [10]. De plus, on

peut voir que le fait d'augmenter la granularité du partitionnement a pour effet d'augmenter l'imprécision d'estimation de la densité de probabilité et aussi de rendre plus difficile la séparation des deux modes.

## 5. Conclusion et perspectives.

Nous avons présenté une nouvelle méthode d'estimation de densité de probabilité basée sur la technique des histogrammes quasi-continus. Cette méthode permet de répercuter l'altération produite par le partitionnement (flou) de la droite réelle sur la précision de l'estimation de la densité. De nombreux points n'ont pas été abordés dans cet article dont le traitement spécifique des première et dernière cellules (de granularité infinie), l'estimation de densité de probabilité basées sur des données dont on connaît l'imprécision et/ou l'incertitude ainsi que l'utilisation des distributions de probabilité imprécises pour l'estimation de grandeurs statistiques (fractile imprécis, mode imprécis, moment imprécis, test statistique imprécis, etc.).

## 6. Références.

- [1] D. Dubois, H. Prade, "Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets", *International Journal of General Systems*, n°17, pp. 191-200, 1990.
- [2] O. Strauss, F. Comby, M.J. Aldon. Rough histograms for robust statistics. *Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition*, vol2, pp. 688-691. Sept. 2000.
- [3] F. Comby, O. Strauss, M.J. Aldon, "Possibility theory and rough histograms for motion estimation in a video sequence", *IWVF'01: 4th International Workshop on Visual Form*, Capri, Italy, May 28-30 2001.
- [4] B.W. Silverman, "Density estimation for statistics and data analysis", Chapman & Hall/CRC, London 1986.
- [5] T. Runkler, J. Bezdek, "Alternating cluster estimation: A new tool for clustering and function approximation". *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 7(4):377--393, 1999.
- [6] P. Smets, "The transferable belief model", *Artificial Intelligence* (66), pp. 191-243, 1994.
- [7] D. Dubois, H. Prade, "Possibility theory: an approach to computerized rocessing of uncertainty", Plenum Press, London, 1985
- [8] J.-L. Marichal, An axiomatic approach of the discrete Choquet integral as a tool to aggregate interacting criteria, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 8 (6) pp. 800-807, 2000.
- [9] O. Strauss, F. Comby, "Les histogrammes quasi-continus", *XXXVèmes Journées de Statistiques*, Lyon, 2-6 juin 2003, pp. 847-850..
- [10] D. Dubois, L. Foulloy, G. Mauris, H. Prade, Probabilty-possibility transformation, triangular fuzzy sets, and probabilistic inequalities, *Reliable Computing*, vol. 10, pp. 273-297, 2004.

# Probabilité de décrochement d'un estimateur autodidacte du résidu de porteuse

Philippe CIBLAT<sup>1</sup>, Mounir GHOGHO<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications (ENST)

46 rue Barrault, 75013 Paris, France

Tél : +33 1 45 81 77 28 - Fax : +33 1 45 89 00 20

<sup>2</sup>Université de Leeds, Ecole de Génie électrique

LS2 9JT, Leeds, Royaume-Uni

Tél : +44 113 343 2009 - Fax : +44 113 343 2032

philippe.ciblat@enst.fr, m.ghogho@leeds.ac.uk

**Résumé** – Dans le contexte des communications numériques, nous nous sommes intéressés au problème de l'estimation autodidacte du résidu de fréquence porteuse par le biais d'un estimateur de type NLLS (Non-Linear Least Square). À faible Rapport Signal-à-Bruit ou à faible nombre d'échantillons, cet estimateur peut ne pas converger, autrement dit, peut « décrocher ». Nous nous sommes donc concentrés à évaluer théoriquement la probabilité d'apparition de ce décrochement. Estimer un résidu de porteuse de manière autodidacte via un estimateur NLS revient à vouloir estimer une harmonique perturbée par un bruit multiplicatif et additif. Or, dans la littérature existante, des expressions analytiques de la probabilité d'apparition du décrochement sont disponibles uniquement dans le contexte de l'estimation d'une harmonique seulement perturbée par un bruit additif. Le résultat nouveau de ce papier réside dans l'obtention d'une expression analytique de la probabilité de décrochement. Cette expression ne dépend que de la constellation des symboles émis et permet ainsi d'observer les évolutions du phénomène de décrochement en fonction de l'efficacité spectrale du système de communication.

**Abstract** – We address the problem of blind carrier frequency-offset (CFO) estimation in QAM, PSK and PAM communications systems. We study the performance of a standard CFO estimate which consists of first raising the received signal to the  $M$ th power, where  $M$  is an integer depending on the type and size of the symbol constellations, and then applying the nonlinear least squares (NLLS) estimation approach. At low SNR, the NLLS method fails to provide an accurate CFO estimate because of the presence of outliers. In this paper, we derive a closed-form expression for the outlier probability. This enables us to predict the estimation performance, namely the Mean Square Error (MSE), well for all SNR values. For a given SNR, the new results also give insight into the minimum number of samples required in the CFO estimation procedure in order to ensure that the MSE on estimation is not significantly affected by the outliers.

## 1 Introduction

Dans le contexte des communications numériques, on émet une suite de données appartenant à une constellation de type modulation en amplitude (MDA) ou en phase (MDP) ou en quadrature (MAQ). A la réception, ces données sont perturbées par un bruit gaussien, un canal de propagation et un décalage probable de la phase et de la fréquence. Le décalage en fréquence, appelé résidu de porteuse, est soit dû à l'effet Doppler soit à une désynchronisation entre les oscillateurs locaux de l'émetteur et du récepteur. Par souci de simplicité, nous supposons que le canal de propagation se réduit à un trajet direct. Par conséquent, le signal reçu  $y(n)$  à temps discret (après passage dans le filtre adapté et échantillonnage à la cadence des données) se modélise de la manière suivante :

$$y(n) = s(n)e^{2i\pi(\phi_0 + \phi_1 n)} + b(n), \quad N = 0, \dots, N-1 \quad (1)$$

avec  $s(n)$  la suite des données i.i.d. inconnue du récepteur et associée à une constellation MDA ou MDP ou MAQ. Le processus  $b(n)$  représente le bruit additif gaussien considéré centré, circulaire, blanc et de variance  $\sigma^2 = \mathbb{E}[|b(n)|^2]$ . Enfin  $N$  désigne le nombre d'échantillons disponibles. La phase et le résidu de porteuse, notés respectivement  $\phi_0$  et  $\phi_1$ , sont in-

connus. Dans ce papier, nous nous focalisons sur le problème de l'estimation de  $\phi_1$ .

Pour estimer de manière autodidacte la fréquence  $\phi_1$ , il est intéressant d'utiliser les propriétés de non-circularité des constellations numériques [8, 1, 3, 2, 9, 10]. En effet, chaque constellation usuelle de symboles admet une symétrie de rotation d'angle  $2\pi/M$  avec  $M$  un entier propre à chaque constellation. Par exemple  $M = 2$  pour une MDA,  $M = 4$  pour une MAQ et  $M = P$  pour une MDP à  $P$  états [6]. Ceci implique que

$$\mathcal{S} := \mathbb{E}[s(n)^M] \neq 0$$

Afin de profiter de cette propriété, il convient d'introduire le signal  $y(n)^M$  qui se décompose ainsi

$$y(n)^M = \mathcal{S}e^{2i\pi M(\phi_0 + \phi_1 n)} + e(n) \quad (2)$$

avec

$$e(n) = (s(n)^M - \mathcal{S})e^{2i\pi M(\phi_0 + \phi_1 n)} + \sum_{m=0}^{M-1} C_M^m s(n)^m b(n)^{M-m} e^{2i\pi m(\phi_0 + \phi_1 n)}. \quad (3)$$

et  $C_M^m = \frac{M!}{m!(M-m)!}$ . Le processus  $e(n)$  est par construction centré et donc assimilable au bruit. De plus sa covariance et

sa pseudo-covariance valent respectivement

$$\begin{aligned}\sigma_e^2 &= \mathbb{E}[|e(n)|^2] = (\mathbb{E}[|s(n)|^{2M}] - |\mathcal{S}|^2) \\ &+ \sum_{m=0}^{M-1} (C_M^m)^2 \mathbb{E}[|s(n)|^{2m}] \mathbb{E}[|b(n)|^{2(M-m)}],\end{aligned}$$

et

$$\tilde{\sigma}_e^2 = \mathbb{E}[e(n)^2] = (\mathbb{E}[s(n)^{2M}] - \mathcal{S}^2) e^{2i\pi 2M\phi_0}. \quad (4)$$

Ainsi l'élévation à la puissance  $M$  du signal reçu permet de transformer le modèle initial (1) représentant une harmonique  $\phi_1$  perturbée par un bruit additif  $b(n)$  et multiplicatif  $s(n)$  en un modèle (2) représentant une harmonique  $M\phi_1$  uniquement perturbée par un bruit additif  $e(n)$  [8, 10, 2]. Etant donné l'Eq. (3),  $e(n)$  n'est pas gaussien. Néanmoins il reste courant pour estimer  $\phi_1$  de mettre en œuvre le périodogramme [8, 10, 2]. C'est pourquoi, nous considérons l'estimateur NLLS (Non-Linear Least Square)  $\hat{\phi}_{1,N}$  suivant

$$\hat{\phi}_{1,N} = \frac{1}{M} \arg \max_{\phi \in [-1/2, 1/2]} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y(n)^M e^{-2i\pi \phi n} \right|^2. \quad (5)$$

Afin que l'estimateur soit consistant,  $\phi_1$  est supposé compris entre  $-1/2M$  et  $1/2M$ . Bien que la fonction à maximiser ne soit pas convexe, il est possible d'obtenir le maximum de cette fonction en procédant de la manière suivante [4] :

- une étape dite *grossière* permettant de détecter le pic autour de la fréquence  $M\phi_1$ . Cette étape est réalisée via une Transformée de Fourier discrète (FFT) de taille  $N$ .
- une étape dite *fine* examinant la fonction de coût autour du pic détecté par l'étape précédente. Un algorithme du gradient permet de mettre en place cette étape.

A faible Rapport Signal-à-Bruit (RSB) ou à faible nombre d'échantillons, l'étape grossière peut conduire à la détection d'un pic se situant loin du point-cible  $M\phi_1$ . L'étape fine, alors mal initialisée, fournit des estimateurs aberrants. Ce phénomène porte le nom d'« effet de décrochement » [4].

La vraie Erreur Quadratique Moyenne (EQM) de l'estimateur NLLS s'écrit alors

$$\text{EQM} = \frac{p}{12} + (1-p)\text{EQM}_{s.d.},$$

où  $p$  est la probabilité d'échec de l'étape grossière et est appelée « probabilité de décrochement » et où  $\text{EQM}_{s.d.}$  est l'EQM quand l'effet de décrochement n'est pas pris en compte [4].

Une expression analytique pour  $\text{EQM}_{s.d.}$  a été développée dans [3] et [10] pour des modulations MAQ, dans [9] pour des modulations MDP, et dans [2] pour des modulations MDA. Cependant, aucun calcul concernant la probabilité de décrochement  $p$  n'est disponible dans la littérature. L'objectif de ce papier est donc d'obtenir une expression analytique de la probabilité d'apparition de cet effet de décrochement.

Les travaux antérieurs consacrés au calcul de probabilité de décrochement se sont uniquement préoccupés de l'estimation d'une harmonique perturbée par un bruit gaussien (à valeurs complexes) et circulaire [4]. Comme déjà mentionné, le bruit additif  $e(n)$  n'est pas gaussien (cf. Eq. (3)). Néanmoins, pour mener à bien le calcul analytique de la probabilité de décrochement, nous imposons à  $e(n)$  de suivre une loi gaussienne. Cette modélisation est également motivée par le fait que les performances de l'estimation d'un signal déterministe en présence d'un bruit blanc sont les plus mauvaises quand le bruit suit une

loi gaussienne [7]. Donc l'hypothèse gaussienne conduira à une borne supérieure du terme  $\text{EQM}_{s.d.}$ . Bien que ce résultat ne tienne pas compte de l'effet de décrochement, les simulations montrent que l'EQM totale est encore la plus mauvaise quand le bruit  $e(n)$  est considéré gaussien. Cependant, nos simulations montrent que cette borne supérieure est pertinente dans la plupart des scénarios pratiques. Même après avoir imposé l'hypothèse gaussienne sur  $e(n)$ , les résultats présentés dans [4] ne sont pas applicables car  $e(n)$  n'est toujours pas circulaire (cf. Eq. (4)). En conséquence, les expressions disponibles dans la littérature ne peuvent être utilisées dans notre problème. Il convient donc dans la section suivante de fournir une expression analytique nouvelle pour la probabilité de décrochement quand le bruit  $e(n)$  est modélisé par un processus blanc gaussien à moyenne nulle et non-circulaire.

## 2 Probabilité de décrochement

La Transformée de Fourier discrète de taille  $N$ , notée  $Y(k)$ , est appliquée au signal  $y(n)^M$ . Par conséquent, on a

$$Y(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y(n)^M e^{-2i\pi kn/N}.$$

Par souci de simplicité, nous supposons que la fréquence  $M\phi_1$  est une fréquence de Fourier  $k_0/N$  avec  $k_0$  un entier compris entre  $-N/2 + 1$  et  $N/2$ . Nous supposons également que  $N$  est un entier pair.

En remplaçant  $y(n)^M$  par l'expression (2), on trouve, pour  $-N/2 + 1 \leq k \leq N/2$ , que

$$|Y(k)| = \begin{cases} |\mathcal{S} e^{2i\pi M\phi_0} + E(k_0)| & \text{si } k = k_0 \\ |E(k)| & \text{si } k \neq k_0 \end{cases},$$

avec

$$E(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e(n) e^{-2i\pi kn/N}.$$

Sans perte de généralité, nous considérons que  $k_0 = 0$ .

Dans la suite, nous avons besoin de la loi de probabilité du vecteur aléatoire  $\mathbf{E} = [E(-N/2 + 1), \dots, E(N/2)]$ . Comme  $e(n)$  est supposé être un processus i.i.d. gaussien,  $\mathbf{E}$  peut être modélisé par un vecteur gaussien. Par ailleurs  $\mathbf{E}$  est de moyenne nulle, de fonction de corrélation  $\sigma_E^2(k, k') = \mathbb{E}[E(k)E(k')]$  et de fonction de pseudo-corrélation  $\tilde{\sigma}_E^2(k, k') = \mathbb{E}[E(k)E(k')]$ . On obtient que

$$\sigma_E^2(k, k') = \frac{\sigma_e^2}{N} \delta_{k,k'} \quad \text{et} \quad \tilde{\sigma}_E^2(k, k') = \frac{\tilde{\sigma}_e^2}{N} \delta_{k+k',0} \quad (6)$$

avec

$$\begin{aligned}\sigma_e^2 &= (\mathbb{E}[|s(n)|^{2M}] - |\mathcal{S}|^2) \\ &+ \sum_{m=0}^{M-1} (C_M^m)^2 \mathbb{E}[|s(n)|^{2m}] \mathbb{E}[|b(n)|^{2(M-m)}]\end{aligned}$$

et

$$\tilde{\sigma}_e^2 = (\mathbb{E}[s(n)^{2M}] - \mathcal{S}^2) e^{2i\pi 2M\phi_0}.$$

L'effet de décrochement est associé à un échec de l'étape grossière qui se produit lorsque la FFT présente son pic maximal ailleurs qu'au point  $k = k_0 = 0$ . Comme  $E(k)$ , pour  $k$  non-nul, est indépendant de  $E(0)$  (cf. Eq. (6)), la probabilité



d'apparition de l'effet de décrochement, notée  $p$ , peut s'écrire de la manière suivante :

$$1 - p = \text{Prob}(\forall k \neq 0, |Y(k)| < |Y(0)|) \\ = \int p_1(x)p_2(x)dx.$$

où  $p_1(x) = \text{Prob}(\forall k \neq 0, |Y(k)| < x)$  et où  $p_2(x) = p_{|Y(0)|}(x)$  est la densité de probabilité de la variable aléatoire  $|Y(0)|$ .

Comme les variables  $|E(k)|$  sont i.i.d. lorsque leurs indices ne sont pas opposés, on a

$$p_1(x) = \text{Prob}(|E(N/2)| < x) \\ \times (\text{Prob}(\forall k \neq 0, N/2, |E(k)| < x, |E(-k)| < x))^{N/2-1}.$$

Soient  $q_1(x) = \text{Prob}(|E(N/2)| < x)$  et  $r_1(x) = \text{Prob}(|E(k)| < x, |E(-k)| < x)$ .

En passant par les coordonnées polaires, on obtient que

$$q_1(x) = \frac{1}{\sqrt{u}|\sigma_e^2|} R(|r|, u\sigma_e^2 N x^2) \quad (7)$$

avec

$$R(a, y) = \int_0^y e^{-z} I_0(az) dz,$$

$r = \tilde{\sigma}_e^2 / \sigma_e^2$ ,  $u = 1/(\sigma_e^4 - |\tilde{\sigma}_e^2|^2)$  et  $I_0(z)$  désignant la fonction de Bessel modifiée de première espèce.

En procédant de la même manière, c'est-à-dire, en passant par les coordonnées polaires, on obtient que

$$r_1(x) = \int_0^x \int_0^x 4\rho_1\rho_2 e^{-u\sigma_e^2 N(\rho_1^2 + \rho_2^2)} I_0(2u|\tilde{\sigma}_e^2| N \rho_1 \rho_2) d\rho_1 d\rho_2.$$

Grâce à l'Eq. (6) de [5], on a la forme simplifiée suivante

$$r_1(x) = (1 - e^{-N\frac{x^2}{\sigma_e^2}}) \\ + e^{-N\frac{x^2}{\sigma_e^2}} \left[ Q\left(\sqrt{2uN}\frac{\tilde{\sigma}_e^2}{\sigma_e}x, \sqrt{2uN}\sigma_e x\right) \right. \quad (8)$$

$$\left. - Q\left(\sqrt{2uN}\sigma_e x, \sqrt{2uN}\frac{\tilde{\sigma}_e^2}{\sigma_e}x\right) \right] \quad (9)$$

avec  $Q(\alpha, \beta) = \int_\beta^\infty z e^{-(z^2 + \alpha^2)/2} I_0(\alpha z) dz$  la fonction Marcum.

Le calcul de  $p_2(x)$  se conduit encore en passant par les coordonnées polaires, il advient que

$$p_2(x) = 2\sqrt{uN}x e^{-(u\sigma_e^2 N x^2 + uwN)} \\ \times P(\tilde{\sigma}_e^2 x^2 / N, 2v(\tilde{\sigma}_e^2 - \sigma_e^2)x / N; N^2 u) \quad (10)$$

avec

$$P(a, b; z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{z\Re[ae^{-2i\theta} - be^{i\theta}]} d\theta, \\ v = \mathcal{S}e^{2i\pi M\phi_0}$$

et

$$w = |v|^2 \sigma_e^2 - \Re[\tilde{\sigma}_e^2 \bar{v}^2].$$

En réunissant les Eqs. (7), (8) et (10), et en appliquant le changement de variable d'intégration  $y^2 = u\sigma_e^2 N x^2$ , on obtient la formule finale suivante

$$p = 1 - \frac{2}{u\sigma_e^4} e^{-uwN} \\ \times \int_0^\infty y e^{-y^2} R(|r|, y^2) \left[ (1 - e^{-\frac{y^2}{u\sigma_e^2}}) + e^{-\frac{y^2}{u\sigma_e^2}} \right. \\ \left. \left[ Q\left(\sqrt{2}ry, \sqrt{2}y\right) - Q\left(\sqrt{2}y, \sqrt{2}ry\right) \right] \right]^{N/2-1} \\ \times P(ry^2 / uN^2, 2v|\tilde{\sigma}_e^2 - \sigma_e^2|y / (|\sigma_e|\sqrt{uN}N); N^2 u) dy$$

On remarque que cette équation est différente de celle donnée dans [4]. On retrouve l'expression de [4] lorsque  $\tilde{\sigma}_e^2 = 0$ , c'est-à-dire, lorsque  $E(k)$  représente un processus i.i.d circulaire. La contrainte  $\tilde{\sigma}_e^2 = 0$  est vérifiée uniquement quand une constellation MDP est employée. On notera que pour les constellations MAQ,  $E(k)$  n'est ni i.i.d. ni circulaire et de ce fait l'expression fournie par [4] n'est plus valable et doit être remplacé par notre expression.

### 3 Simulations

Sur la figure 1, nous affichons les probabilités de décrochement théorique et empirique en fonction du Rapport Signal-à-Bruit  $E_b/N_0$  ( $E_b/N_0 = \mathbb{E}[|s(n)|^2] / (\log_2(P)\mathbb{E}[|b(n)|^2])$ ) pour différentes constellations MAQ et MDP où  $P$  est le nombre de bits par symbole ainsi que pour le cas où l'amplitude  $s(n)$  est constante et déterministe. Dans ce dernier cas, l'expression de la probabilité de décrochement était calculée dans [4] et est utilisée ici comme une référence. Il faut noter que, dans ce cas, le signal transmis ne transporte pas d'information, et donc le Rapport Signal-à-Bruit ne peut être défini comme ci-dessus. Nous fixons alors  $\text{RSB} = |s|^2 / \mathbb{E}[|b(n)|^2]$ . La probabilité de décrochement empirique est obtenue en moyennant sur 10.000 réalisations. Nous remarquons que les courbes théoriques et empiriques sont en correspondance pour les constellations MDP quelque soit le RSB et pour les constellations MAQ à faible RSB. A RSB élevé, nous observons un effet de pallier pour les constellations MAQ dès que la taille de la constellation dépasse strictement quatre. La prédiction théorique, dans ce dernier cas, est légèrement pessimiste (ceci est certainement dû à l'hypothèse gaussienne réalisée sur  $e(n)$ ). Cet effet de pallier est provoqué par l'auto-bruit induit par les constellations MAQ, qui est lui-même engendré par la non-nullité de  $\sigma_e^2$  et  $\tilde{\sigma}_e^2$  dans le cas non-bruité.

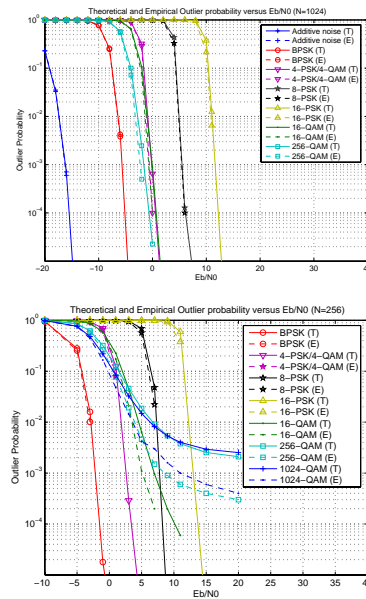


FIG. 1 – Probabilité de décrochement théorique et empirique en fonction de  $E_b/N_0$  (haut :  $N = 1024$ ; bas  $N = 256$ )

Sur la Figure 2, la probabilité de décrochement est tracée en fonction de  $N$ . Nous remarquons que les courbes théoriques et empiriques sont proches. Nous observons également que la probabilité de décrochement est indépendante du nombre d'états de la constellation MAQ considérée (dès que ce nombre est strictement supérieur à quatre). Ceci est dû au fait que pour les constellations MAQ,  $M = 4$  quelque soit la taille de cette constellation. En revanche, pour les constellations MDP,  $M$  est égal à la taille de la constellation. Par conséquent, les performances se dégradent quand  $M$  augmente.

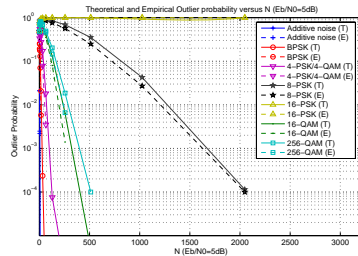


FIG. 2 – Probabilité de décrochement théorique et empirique en fonction de  $N$  ( $E_b/N_0 = 5\text{dB}$ )

Les Figures 3 et 4 présentent l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) en fonction de  $E_b/N_0$  et  $N$  respectivement. Le nombre de réalisations de Monte-Carlo est fixé à 1.000.000. Pour obtenir l'EQM qui prend en compte l'effet de décrochement, nous avons utilisé l'approche décrite dans [4], et que nous avons rappelée dans la section d'Introduction. L'expression pour l'EQM négligeant l'effet de décrochement est disponible dans [3] et est donnée par  $\text{EQM}_{\text{s.d.}} = \frac{3}{32\pi^2} \frac{\sigma_e^2 - \mathbb{R}\{\sigma_e^2\}}{|S|^2 N^3}$ .

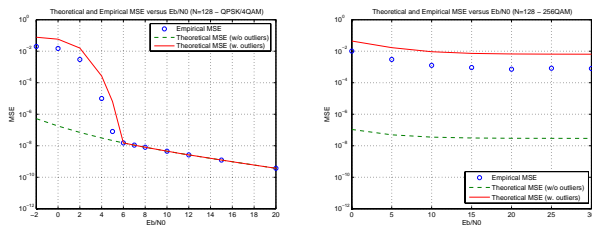


FIG. 3 – EQM théorique et empirique en fonction de  $E_b/N_0$  (gauche MAQ-4 ; droite MAQ-256)

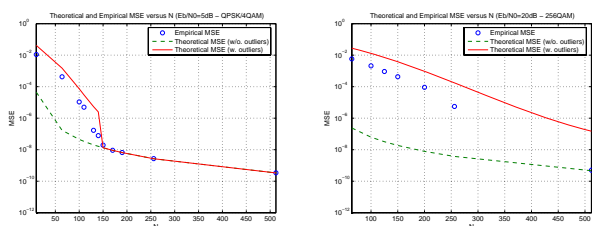


FIG. 4 – EQM théorique et empirique en fonction de  $N$  (gauche MAQ-4 ; droite MAQ-256)

Nous observons que l'EQM théorique est maintenant en accord avec l'EQM empirique. D'après la Figure 3, pour la constel-

lation MAQ-4, le seuil  $\text{RSB}_s$  (c'est-à-dire, le RSB en dessous duquel l'estimateur NLLS est inopérant) est d'environ 6 dB quand  $N = 128$ . Pour une constellation MAQ-256 et  $N = 128$ , la probabilité de décrochement ne s'annule pas en l'absence de bruit ; ceci est dû à l'auto-bruit. Néanmoins, quand  $N$  augmente, la probabilité de décrochement décroît et l'écart entre l'EQM empirique et théorique évaluée sans prendre en compte l'effet de décrochement diminue (cf. Figure 4). Il faut noter que l'EQM empirique pour la constellation MAQ-256 et  $N = 512$  est éloignée de l'EQM théorique (malgré l'effet de décrochement pris en compte). Ceci s'explique par le fait que le nombre de réalisations est « seulement » d'un million alors qu'il aurait dû être d'une centaine de millions afin d'obtenir une estimation pertinente de l'EQM !

## Références

- [1] O. BESSON et P. STOICA, « Nonlinear least-squares approach to frequency estimation and detection for sinusoidal signals with arbitrary envelope », *Digital Signal Processing*, vol. 9, n° 1, p. 45–56, Janvier 1999.
- [2] P. CIBLAT, P. LOUBATON, E. SERPEDIN et G.B. GIANNAKIS, « Performance of blind carrier frequency offset estimation for non-circular transmissions through frequency-selective channels », *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 50, n° 1, p. 130–140, Janvier 2002.
- [3] M. GHOGHO, A. SWAMI et T. DURRANI, « Blind estimation of frequency offset in the presence of unknown multipath », *International Conference on Personal Wireless Communications*, p. 104–108, 2000.
- [4] D.C. RIFE et R.R. BOORSTYN, « Single-tone parameter estimation from discrete-time observations », *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 20, n° 5, p. 591–598, Septembre 1974.
- [5] M.K. SIMON et M.S. ALOUINI, « A simple single integral representation of the bivariate Rayleigh distribution », *IEEE Com. Letters*, vol. 2, n° 5, p. 128–130, Mai 1998.
- [6] H. STEENDAM et M. MOENECLAAY, « Low-SNR limit of the Cramer-Rao Bound for estimating the carrier phase and frequency of a PAM, PSK, or QAM waveform », *IEEE Com. Letters*, vol. 5, n° 5, p. 218–220, Mai 2001.
- [7] A. SWAMI, « Cramer-Rao bounds for deterministic signals in additive and multiplicative noise », *EURASIP Signal Processing*, vol. 53, p. 231–244, Septembre 1996.
- [8] A.J. VITERBI et A.M. VITERBI, « Non-linear estimation of PSK-modulated carrier phase with application to burst digital transmissions », *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 29, p. 543–551, Juillet 1983.
- [9] Y. WANG, E. SERPEDIN et P. CIBLAT, « Optimal Blind Carrier Recovery for M-PSK Burst Transmissions », *IEEE Trans. on Communications*, vol. 51, n° 9, p. 1571–1581, Septembre 2003.
- [10] Y. WANG, E. SERPEDIN et P. CIBLAT, « Optimal blind nonlinear least-squares carrier phase and frequency offset estimation for general QAM modulations », *IEEE Trans. on Wireless Communications*, vol. 2, n° 5, p. 1040–1054, Septembre 2003.



# Estimation des dérivées d'un signal multidimensionnel avec applications aux images et aux vidéos

Michel FLIESS<sup>1</sup>, Cédric JOIN<sup>2</sup>, Mamadou MBOUP<sup>3</sup>, Alexandre SEDOGLAVIC<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Équipe ALIEN, INRIA Futurs & Équipe MAX, LIX (CNRS, UMR 7161),  
École polytechnique, 91128 Palaiseau, France.

<sup>2</sup>Équipe ALIEN, INRIA Futurs & CRAN (CNRS, UMR 7039),  
Université Henri Poincaré (Nancy I), BP 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy, France.

<sup>3</sup>Équipe ALIEN, INRIA Futurs & UFR de Mathématiques et Informatique,  
Université René-Descartes (Paris V), 45 rue des Saints-Pères, 75270 Paris cedex 06, France.

<sup>4</sup>Équipe ALIEN, INRIA Futurs & LIFL (CNRS, UMR 8022), USTL, 59655 Villeneuve d'Ascq, France.

Michel.Fliess@polytechnique.fr, Cedric.Join@cran.uhp-nancy.fr  
mboup@math-info.univ-paris5.fr, Alexandre.Sedoglavic@lifl.fr

**Résumé** — On étend des techniques récentes d'estimations de dérivées de signaux transitoires bruités au multidimensionnel, c'est-à-dire aux images et vidéos. On présente des simulations numériques, avec débruitage et détection de contours.

**Abstract** — Recent techniques for estimating derivatives of noisy transient signals are extended to the multidimensional case, *i.e.*, to image and video processing. Numerical simulations are provided for noise removal and edge detection.

## 1 Introduction

La citation suivante, empruntée à [4], résume l'actualité du débruitage des images : *The search for efficient image denoising methods still is a valid challenge, at the crossing of functional analysis and statistics. In spite of the sophistication of the recently proposed methods, most algorithms have not yet attained a desirable level of applicability. All show an outstanding performance when the image model corresponds to the algorithm assumptions, but fail in general and create artifacts or remove image fine structures.* Cette communication en propose une approche nouvelle, par extension de techniques [10, 11] d'estimations des dérivées de signaux transitoires bruités. Quoique le passage du monodimensionnel au multidimensionnel nécessite un langage mathématique assez différent, les estimations des dérivées partielles s'y obtiennent aussi par des formules, de nature algébrique, où les intégrales itérées permettent d'atténuer les bruits les plus divers, additifs et/ou multiplicatifs, sans souci des propriétés statistiques. Nous en analysons brièvement la complexité informatique, qui se compare très favorablement aux approches existantes. Plusieurs simulations numériques, avec, notamment, une détection de contours (voir [12] et [11] pour un premier exemple de détection de ruptures avec un signal monodimensionnel), illustrent notre propos.

Avec des images et des vidéos bruités, nos méthodes permettent de retrouver les invariants géométriques standard (voir [5]), comme la courbure et la torsion. Nous les utiliserons pour une compréhension plus fine. D'autres thèmes de la littérature, si riche et diverse, sur les images

et les vidéos (voir, par exemple, [1, 2, 3, 6, 8, 13, 14, 15, 16]) pourront, alors, bénéficier de nos calculs<sup>1</sup>.

Soulignons enfin, comme en [11], que notre démarche repose sur une vision renouvelée des fondements théoriques du signal (voir [9]).

## 2 Cadre mathématique

### 2.1 Images et vidéos

Une *vidéo*, ou une *image animée*  $I$ , est une distribution vectorielle  $I := (I_1, \dots, I_m)$  (au sens de [17]) sur  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$ . Les coordonnées  $x_1, \dots, x_m$  de  $\mathbb{R}^m$  (resp.  $y_1, \dots, y_p$  de  $\mathbb{R}^p$ ) sont les *variables d'espace* (resp. les *composantes chromatiques*), celle  $t$  de  $\mathbb{R}$  le *temps*. En général,  $m$  est égal à 2 ou 3, et  $p$  à 1 ou 3. La vidéo est dite *monochromatique* (resp. *polychromatique*) si  $p = 1$  (resp.  $p > 1$ ). Si  $\partial I / \partial t \equiv 0$ ,  $I$  est une *image fixe*. Faisons les hypothèses — raisonnables en pratique — suivantes :

- les projections du support de  $I$  sur  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}$  sont respectivement compactes et fermées dans  $\mathbb{R}_+$  ;
- en presque tout point de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ ,  $I$  est localement égale (cf. [17]) à une fonction analytique des variables d'espace et de temps.

<sup>1</sup>Des exemples préliminaires sur la compression, le zoom, le tautouage, les vidéos, sont disponibles auprès de l'un des auteurs (CJ).

## 2.2 Formules intégrales

### 2.2.1 Polynômes

L'utilisation d'intégrales pour l'interpolation est, à notre connaissance, nouvelle. Pour  $x_i = \xi_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $t = \tau$ , supposons, pour simplifier, la composante  $I_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, m$ , de  $I$  localement, par exemple sur le pavé

$$\Pi_{i \in \{1, \dots, m\}} [\xi_i, \xi_i + h_i] \times [\tau, \tau + k] \quad (1)$$

égale à une fonction polynômiale. Alors, tout coefficient  $c$  de ce polynôme est donné par une somme finie

$$c = \sum_{\text{finie}} \frac{\int \mathfrak{I}_\ell}{\int \varpi} \quad (2)$$

où

- $\mathfrak{I}_\ell$  appartient au  $D$ -module [7]

$$\text{span}_{\mathbb{R}[x_1, \dots, x_m, t, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial t}]}(I_\ell)$$

- $\varpi \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m, t]$ ,
- $\int$  désigne une intégrale, éventuellement itérée, sur un chemin dans le pavé (1).

*Exemple 1* Posons  $m = 2$  et

$$I_\ell = c_{00} + c_{10}x_1 + c_{01}x_2 + c_{11}x_1x_2 + c_{20}x_1^2 + c_{02}x_2^2$$

Alors,

$$c_{11} = 4 \left( \frac{\frac{I_\ell(\xi_1+h_1, \xi_2+h_2)}{h_1 h_2} - \frac{\int_{\xi_2}^{\xi_2+h_2} I_\ell(\xi_1+h_1, x_2) dx_2}{h_1 h_2^2} + \frac{\int_{\xi_2}^{\xi_2+h_2} \int_{\xi_1}^{\xi_1+h_1} I_\ell(x_1, x_2) dx_1 dx_2}{h_1^2 h_2^2} - \frac{\int_{\xi_1}^{\xi_1+h_1} I_\ell(x_1, \xi_2+h_2) dx_1}{h_1^2 h_2} \right) \quad (3)$$

Les formules pour les autres coefficients sont analogues.

*Remarque 1* Il est immédiat de vérifier que la formule (2) n'est pas unique. En particulier, l'ordre d'itérations des intégrales est arbitraire. Nous laissons au lecteur le soin de réécrire (3) ainsi.

### 2.2.2 Fonctions analytiques

Supposons dorénavant  $I_\ell$  localement égale à une fonction analytique  $F_\ell$ . L'estimée  $[c]_{e_N}(h_1, \dots, h_m, k)$  du coefficient  $c$  d'un monôme de degré  $d$  du développement de Taylor de  $F$  en  $x_i = \xi_i$ ,  $t = \tau$ , s'obtient en remplaçant en (2)  $I_\ell$  par le jet  $F_N$ , d'ordre  $N$ , c'est-à-dire par le développement de Taylor tronqué à l'ordre  $N$ .

L'importance pratique de la proposition suivante, qui généralise [10], est claire.

**Proposition 2.1** — Si  $N \geq d$ , alors

$$\begin{aligned} c &= \lim_{h_1, \dots, h_m, k \downarrow 0} [c]_{e_N}(h_1, \dots, h_m, k), \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} [c]_{e_N}(h_1, \dots, h_m, k). \end{aligned}$$

## 3 Compléments divers

### 3.1 Nature des bruits

Les intégrales utilisées dans nos estimateurs se comportent comme des filtres passe-bas, atténuant les bruits, considérés comme des phénomènes à fluctuations très rapides par rapport au signal d'origine. Les deux faits suivants tranchent avec le point de vue classique :

- il n'est pas nécessaire de connaître les propriétés statistiques des bruits<sup>2</sup> ;
- ils peuvent être additifs et/ou multiplicatifs<sup>3</sup>.

### 3.2 Complexité informatique

Dans l'approche traditionnelle par moindres carrés, le nombre d'opérations nécessaires est  $O(\nu^2 n)$ , où  $n$  est le nombre de pixels de l'image et  $\nu$  la largeur de la fenêtre. Cette complexité rend prohibitif l'utilisation de *grands* filtres, c'est-à-dire avec  $\nu$  grand. Notre méthode est, de plus, *séparable* : les intégrales itérées se calculent sur des segments de droites et non sur des hypersurfaces.

La taille du système linéaire à résoudre est égale au nombre de coefficients intervenant dans le développement de Taylor tronqué à l'ordre  $N$ , mais elle est indépendante du nombre de mesures servant à calculer ces intégrales. Par contre, avec les moindres carrés, cette taille dépend du nombre de mesures effectuées et influence négativement le conditionnement.

Enfin, les expressions de type (2) s'obtiennent et se manipulent aisément avec les divers systèmes de *calcul formel* (Maple, Mathematica, etc).

## 4 Simulations numériques

Nous utilisons les images<sup>4</sup> de *Lena* et du *Pentagone*<sup>5</sup>. Alors,  $m = 2$ ,  $p = 1$ ,  $0 \leq x_1, x_2 \leq 1024$ ,  $0 \leq y = y_1 \leq 255$ .

### 4.1 Calculs numériques

Une méthode de type trapèze fournit les intégrales simples de (2). Pour les intégrales itérées<sup>6</sup>, on utilise la formule de Cauchy :

$$\underbrace{\int_{\xi-h}^{\xi} dt \cdots \int_{\xi-h}^t}_{i \text{ fois}} I(\tau) d\tau = \int_{\xi-h}^{\xi} \frac{(\xi - \tau)^{i-1}}{(i-1)!} I(\tau) d\tau \quad (4)$$

afin d'implanter les calculs au point  $\xi$  sur une fenêtre glissante de *petite* taille, comme en [10, 11].

### 4.2 Débruitage et détection de contours

À partir des images bruitées (1) et (2), on obtient, comme indiqué plus haut, les débruitages (3) et (5). Le tableau ci-dessous présente les normes  $L_2$  des images originales et les distances — en pourcentage de l'original pour cette norme — des images bruitées et débruitées avec les originales<sup>7</sup> :

<sup>2</sup>Ils peuvent être blancs ou colorés, gaussiens ou non.

<sup>3</sup>La relation triviale  $wI = I + (w-1)I$ , où  $w$  est un bruit, permet de passer du multiplicatif à l'additif.

<sup>4</sup>Une telle communication écrite impose des images fixes et monochromatiques.

<sup>5</sup>The USC-SIPI Image Database, [sipi.usc.edu/database/](http://sipi.usc.edu/database/)

<sup>6</sup>Voir, par exemple, [18] pour des méthodes plus élaborées.

<sup>7</sup>Les défauts en traitement d'images de ce type de distance sont connus. Ajoutons qu'une telle norme  $L_2$  est peu naturelle dans le cadre mathématique ébauché ici.

Image	originale	bruitée	débruitée
Lena	100%	229%	88%
Pentagone	100%	268%	141%

Les figures (4) et (6) représentent le passage<sup>8</sup> par 0 du laplacien  $\partial^2 I / \partial x_1^2 + \partial^2 I / \partial x_2^2$ .

*Remarque 2* Le calcul et l'estimation, analogues, des dérivées partielles temporelles  $\partial^\nu I / \partial t^\nu$ ,  $\nu \geq 1$ , permet la détection de mouvements pour les vidéos.



FIG. 1 – Image avec bruit multiplicatif gaussien, de moyenne 1 et d'écart-type  $1/5$ , uniformément réparti.

## Références

- [1] G. Aubert, P. Kornprobst, *Mathematical Problems in Image Processing*, Springer, New York, 2002.
- [2] M. Barlaud, C. Labit (Eds.), *Compression et codage des images et des vidéos*, Lavoisier, Paris, 2002.
- [3] A. Bovik (Ed.), *Handbook of Image and Video Processing*, Academic Press, San Diego, 2000.
- [4] A. Buades, B. Coll, J.-M. Morel, On image denoising methods, *Prépublication 2004-15*, CMLA, ENS-Cachan, 2004.
- [5] F. Cazals, M. Pouget. Estimating differential quantities using polynomial fitting of osculating jets, *Computer Aided Geometric Design*, 22, 2005, 121-146.
- [6] B. Chalmond, *Éléments de modélisation pour l'analyse d'images*, Springer, Paris, 2000.
- [7] S.C. Couthino, *A Primer of Algebraic D-Modules*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

<sup>8</sup>Ces passages sont déterminés, ici, par changements de signe et non par seuillage. Tous les contours sont donc représentés. Les trois niveaux de gris correspondent à des seuillages sur la norme du gradient.



FIG. 2 – Image avec bruit additif coloré, de moyenne 0 et d'écart-type 15, uniformément réparti.

- [8] F. Davoine, S. Pateux (Eds.), *Tatouage de documents audiovisuels numériques*, Lavoisier, Paris, 2004.
- [9] M. Fliess, *Réflexions sur la question fréquentielle en traitement du signal*, manuscrit, 2005.
- [10] M. Fliess, C. Join, M. Mboup, H. Sira-Ramírez, *Compression différentielle de transitoires bruités*, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I, 339, 2004, 821-826.
- [11] M. Fliess, C. Join, M. Mboup, H. Sira-Ramírez, *Analyse et représentation de signaux transitoires : application à la compression, au débruitage et à la détection de ruptures*, Actes 20<sup>e</sup> coll. GRETSI, Louvain-la-Neuve, 2005.
- [12] M. Fliess, M. Mboup, H. Mounier, H. Sira-Ramírez, *Questioning some paradigms of signal processing via concrete examples*, in *Algebraic Methods in Flatness, Signal Processing and State Estimation*, H. Sira-Ramírez, G. Silva-Navarro (Eds.), Editorial Lagares, México, 2003, pp. 1-21.
- [13] B. Jähne, *Digital Image Processing*, 5<sup>th</sup> ed., Springer, Berlin, 2002.
- [14] J.S. Lim, *Two-Dimensional Signal and Image Processing*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1990.
- [15] S. Mallat, *Une exploration des signaux en ondelettes*, Éditions École polytechnique, Palaiseau, 2000.
- [16] W.K. Pratt, *Digital Image Processing*, 3<sup>rd</sup> ed., Wiley, New York, 2001.
- [17] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, 2<sup>e</sup> éd., Hermann, Paris, 1966.
- [18] A. Stroud, *Approximate Calculation of Multiple Integrals*, Prentice Hall, New York, 1971.



FIG. 3 – Image débruitée à partir de la figure (1).



FIG. 5 – Image débruitée à partir de la figure (2).



FIG. 4 – Contours et trois niveaux de gris obtenus à partir d'une image originale de Lena, avec bruit blanc additif, de moyenne 20 et d'écart-type 10.



FIG. 6 – Contours et trois niveaux de gris obtenus à partir d'une image originale de pentagone, avec bruit coloré additif, de moyenne 20 et d'écart-type 10.

# Récepteur aveugle basé sur la décomposition PARAFAC pour des canaux de communication non-linéaires

A.Y. KIBANGOU<sup>1</sup>, G. FAVIER<sup>1</sup>, M.M. HASSANI<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire I3S/CNRS/UNSA  
2000 Route des lucioles, B.P. 121, 06903 Sophia Antipolis Cedex, France

<sup>2</sup>Laboratoire d'Electronique et Instrumentation  
B.P. 2390, 40000 Marrakech, Maroc  
kibangou@i3s.unice.fr, favier@i3s.unice.fr  
hassani@ucam.ac.ma

**Résumé** – Dans cet article, nous proposons une nouvelle approche d'égalisation aveugle basée sur une modélisation tensorielle d'un système de communication non-linéaire SIMO du type Wiener. Le tenseur cubique formé par les signaux reçus s'exprime comme une décomposition du type PARAFAC avec comme dimensions le temps, l'espace et la redondance introduite par un précodage. Les conditions d'unicité de cette décomposition sont établies et une solution d'égalisation aveugle sans ambiguïté est proposée.

**Abstract** – In this paper, we present a new approach for blind equalization of Wiener SIMO nonlinear channels. The received signals form a cubic tensor the dimensions of which are time, space and redundancy induced by a linear precoder. The equalization process is based on the PARAFAC decomposition of this three-way array. The uniqueness conditions are provided, then a solution for blind equalization without ambiguity is derived.

## 1 Introduction

Depuis la fin des années 90, quelques solutions ont été apportées au problème de l'égalisation aveugle de canaux de communication non-linéaires. Outre les méthodes basées sur l'utilisation de réseaux neuronaux, trois principales approches ont été considérées. Elles étendent aux systèmes non-linéaires des résultats établis dans le cas linéaire. La première est déterministe [1]. Les auteurs y montrent que, sous certaines conditions, des égaliseurs linéaires de type FIR peuvent réaliser une égalisation du type forçage à zéro de canaux SIMO non-linéaires. La méthode proposée dans ce travail pionnier présente cependant un certain nombre de limitations liées au rang et à la structure de la matrice associée au canal, d'une part, et à la mémoire du noyau de Volterra associé au canal, d'autre part. Certaines de ces restrictions ont été récemment relaxées dans la seconde approche basée sur l'exploitation des statistiques du second ordre [2]. Toutefois, comme pour la plupart des algorithmes d'égalisation basés sur l'exploitation des statistiques du second ordre, cette approche requiert une complexité de calcul importante. Enfin, la troisième approche [3] est aussi basée sur les statistiques du second ordre, mais requiert que chaque sous-canal soit linéarisé par un filtre de Volterra d'ordre et de mémoire connus. Cette condition est très restrictive. Dans les trois principales approches sus-citées, les systèmes de communication considérés sont de type SIMO, cette structure étant obtenue soit en utilisant un réseau d'antennes soit en sur-échantillonnant la sortie du système. Il est bien connu que dans ce cas, afin de pouvoir déterminer un égaliseur, les différents sous-canaux ne doivent avoir aucun facteur commun.

Dans cet article, nous proposons une nouvelle approche d'éga-

lisation aveugle basée sur une modélisation tensorielle d'un système de communication SIMO du type Wiener, dont les différents sous-canaux ont un facteur commun.

Depuis le début des années 2000, une attention particulière est accordée à l'utilisation des techniques de décomposition tensorielle dans les télécommunications. Ainsi, différents algorithmes d'estimation aveugle, de canal et/ou du signal, basés sur une décomposition tensorielle du type PARAFAC sont proposés dans la littérature [4, 5]. Ceux-ci se restreignent au cas de systèmes linéaires. A notre connaissance, l'approche que nous proposons est une première application de la décomposition PARAFAC pour des fins d'égalisation de canaux non-linéaires.

Dans la section 2, nous traitons de la modélisation tensorielle du système de communication considéré, des conditions d'unicité de la décomposition PARAFAC ainsi que de l'estimation de ses différents facteurs. La méthode est ensuite illustrée par un exemple dans la section 3, avant de conclure.

## 2 Modélisation et estimation

Nous considérons un système de communication non-linéaire, à temps discret, d'entrée  $x$  et de sorties  $y_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, K_a - 1$ , où  $K_a$  désigne le nombre de capteurs utilisés au niveau du récepteur. Le signal émis par une station mobile, une fois reçu au niveau d'un des capteurs, est tout d'abord converti en fréquences optiques, au niveau d'un point d'accès radio (RAP, *Radio Access Point*), puis transmis via une fibre optique à une station de base où s'effectue le traitement des données en bande de base (Figure 1).

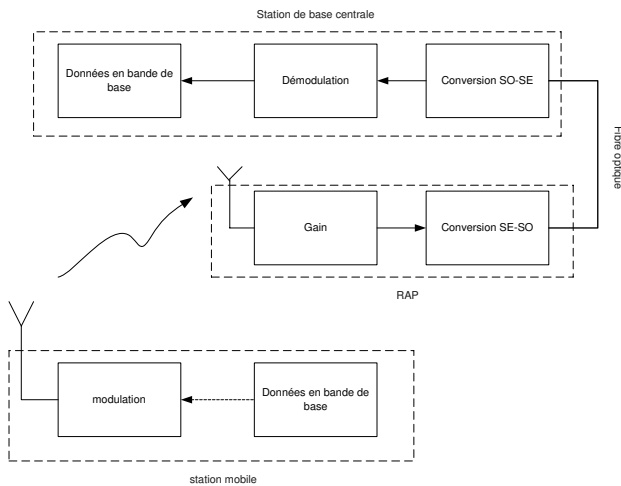


FIG. 1 – Schéma fonctionnel du système.

Lorsque la longueur de la fibre est relativement courte (quelques kilomètres) et la fréquence radio de quelques GHz, les effets de dispersion de la fibre et le bruit inhérent au laser sont négligeables [6]. Dans ce cas, la distorsion non-linéaire introduite par la conversion du signal électrique (SE) en un signal optique (SO) devient prépondérante [7]. Sachant que plusieurs capteurs sont utilisés, le système peut alors être vu comme un système SIMO du type Wiener, chaque sous canal  $k$  étant constitué par la mise en cascade d'un canal linéaire  $h_k$  et d'une non-linéarité statique représentée par un polynôme  $P_k$  de degré  $P$  et de coefficients  $c_{p,k}$ ,  $p = 1, \dots, P$ . Sous l'hypothèse que la source est à bande étroite par rapport aux antennes de réception, la réponse impulsionnelle du canal de transmission  $h_k$  est donnée par [5] :  $h_k(i) = \alpha_k h(i)$ , où  $\alpha_k$  est le gain complexe de l'antenne considérée. Le modèle de Volterra décrivant ce système s'écrit alors :

$$y_k(nM - i) = \sum_{p=1}^P \sum_{i_1, \dots, i_p=0}^{M-1} h_{p,k}(i_1, \dots, i_p) \times \prod_{j=1}^p x(nM - i - i_j) + w_k(nM - i), \quad i = 0, \dots, M-1, \quad (1)$$

où  $n = 0, 1, \dots, N-1$  désigne le numéro du bloc de symboles transmis, chaque bloc comportant  $M$  symboles, et :

$$h_{p,k}(i_1, \dots, i_p) = \beta_{k,p} \prod_{j=1}^p h(i_j), \quad \beta_{k,p} = c_{p,k} \alpha_k^p. \quad (2)$$

En supposant que la séquence transmise  $x(\cdot)$  soit obtenue à partir de la séquence informative via un précodage simple tel que pour  $i = 0, \dots, M-1$ , le symbole  $x(nM - i)$  ne soit non nul et égal à  $u(n)$  que lorsque  $i = M-1$  [8], la relation (1) devient :

$$y_k(nM - i) = \sum_{p=1}^P h_{p,k}(M-1-i, \dots, M-1-i) u^p(n) + w_k(nM - i), \quad i = 0, \dots, M-1. \quad (3)$$

Ce précodage correspond à une insertion de  $(M-1)$  symboles nuls entre chaque symbole informatif. Les paramètres du mo-

dèle de Volterra (1) se réduisent donc aux seuls coefficients diagonaux. Notons que l'information contenue dans les signaux reçus  $y_k(nM - i)$ ,  $i = 0, \dots, M-1$ , est redondante car ces signaux dépendent de la même entrée  $u(n)$ .

En notant :

$$\begin{aligned} h_{p,k,i} &= h_{p,k}(M-1-i, \dots, M-1-i), \\ y_{k,n,i} &= y_k(nM - i), \\ w_{k,n,i} &= w_k(nM - i), \end{aligned}$$

pour  $k = 0, 1, \dots, K_a-1$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$  et  $i = 0, 1, \dots, M-1$ , où  $N$  représente le nombre de blocs transmis, nous avons :

$$y_{k,n,i} = \sum_{p=1}^P \beta_{k,p} h^p(M-1-i) u^p(n) + w_{k,n,i}. \quad (4)$$

Nous pouvons reconnaître en (4) l'écriture scalaire de la décomposition PARAFAC du tenseur cubique  $\mathbb{Y}$ , d'éléments  $y_{k,n,i}$ , le nombre de facteurs de cette décomposition étant égal au degré  $P$  du polynôme de la non-linéarité statique. Dans le cas sans bruit, en fixant respectivement une des dimensions du tenseur, l'écriture matricielle correspondante est :

$$\mathbf{Y}_{k..} = \mathbf{H} \mathbf{D}_k(\mathbf{B}) \mathbf{U}, \quad k = 0, \dots, K_a-1, \quad (5)$$

$$\mathbf{Y}_{..n} = \mathbf{B} \mathbf{D}_n(\mathbf{U}^T) \mathbf{H}^T, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (6)$$

$$\mathbf{Y}_{..i} = \mathbf{U}^T \mathbf{D}_i(\mathbf{H}) \mathbf{B}^T, \quad i = 0, \dots, M-1, \quad (7)$$

où  $\mathbf{D}_k(\cdot)$  est l'opérateur qui forme une matrice diagonale avec la  $(k+1)$ -ème ligne de la matrice en argument,  $\mathbf{Y}_{k..}$ ,  $\mathbf{Y}_{..n}$  et  $\mathbf{Y}_{..i}$  sont de dimensions respectives  $(M \times N)$ ,  $(K_a \times M)$  et  $(N \times K_a)$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{U}$  sont des matrices de Vandermonde de dimensions respectives  $(M \times P)$  et  $(P \times N)$ , et  $\mathbf{B}$  la matrice de dimensions  $(K_a \times P)$ , telles que :

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \begin{pmatrix} h(M-1) & h^2(M-1) & \dots & h^P(M-1) \\ h(M-2) & h^2(M-2) & \dots & h^P(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(0) & h^2(0) & \dots & h^P(0) \end{pmatrix} \\ \mathbf{U} &= \begin{pmatrix} u(0) & u(1) & \dots & u(N-1) \\ u^2(0) & u^2(1) & \dots & u^2(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u^P(0) & u^P(1) & \dots & u^P(N-1) \end{pmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} \beta_{0,1} & \beta_{0,2} & \dots & \beta_{0,P} \\ \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \dots & \beta_{1,P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{K_a-1,1} & \beta_{K_a-1,2} & \dots & \beta_{K_a-1,P} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En tenant compte des conditions d'unicité de cette décomposition [9] et de la structure de Vandermonde des matrices  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{U}$ , nous déduisons le théorème suivant :

**Théorème :** Soit  $k_{\mathbf{B}}$  le rang de Kruskal de  $\mathbf{B}$ , i.e. le nombre maximal de colonnes de  $\mathbf{B}$  tel que tout ensemble de  $k_{\mathbf{B}}$  colonnes de  $\mathbf{B}$  soient linéairement indépendantes. Si le signal  $u$  prend au moins  $P \leq N$  valeurs distinctes non nulles et si le canal est tel qu'au moins  $P \leq M$  de ses coefficients  $h(i)$  soient distincts, alors la décomposition PARAFAC est unique, à une matrice de permutation et une matrice diagonale près, si  $k_{\mathbf{B}} \geq 2$ .

**Preuve :** Il est établi que l'unicité de la décomposition PARAFAC est garantie lorsque  $k_B + k_H + k_{U^T} \geq 2P + 2$  [9, 10]. En tenant compte de la structure Vandermonde, le fait qu'au moins  $P$  coefficients  $h(i)$  de la matrice  $\mathbf{H}$  soient distincts,  $P \leq M$ , garantit qu'elle soit de rang colonne complet. Par conséquent, on a :  $k_H = P$ . De même, si le signal  $u$  prend au moins  $P \leq N$  valeurs distinctes non nulles, cela implique que  $k_{U^T} = P$ . Par suite, la condition d'unicité se ramène à :  $k_B \geq 2$ .

On peut noter que suivant la construction de la matrice  $\mathbf{B}$ , il est nécessaire d'utiliser au moins deux capteurs différents parmi les  $K_a$  capteurs pour réaliser la condition  $k_B \geq 2$ .

L'unicité démontrée dans le théorème est à une matrice de permutation et un facteur d'échelle près. En d'autres termes, tout autre ensemble de matrices  $\bar{\mathbf{H}}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}$  et  $\bar{\mathbf{U}}^T$  pouvant reconstituer les matrices  $\mathbf{Y}_{k..}$ ,  $k = 0, \dots, K_a - 1$  est relié à l'ensemble de matrices  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{U}^T$  par :

$$\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H}\mathbf{\Pi}\mathbf{\Delta}_1, \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}\mathbf{\Pi}\mathbf{\Delta}_2, \quad \bar{\mathbf{U}}^T = \mathbf{U}^T\mathbf{\Pi}\mathbf{\Delta}_3,$$

où  $\mathbf{\Pi}$  est une matrice de permutation et les  $\mathbf{\Delta}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  sont des matrices diagonales telles que

$$\mathbf{\Delta}_1\mathbf{\Delta}_2\mathbf{\Delta}_3 = \mathbf{I}.$$

Il est à noter que  $P$  étant fini, l'ensemble des matrices de permutation est aussi fini. Cependant, toute permutation sur les lignes de  $\mathbf{U}$  rend ambiguë l'estimation de la séquence informative émise ; d'où la nécessité de trouver un moyen pour lever cette ambiguïté. En tenant compte de la structure de la matrice  $\mathbf{U}$ , nous définissons le critère suivant :

$$\varrho_p = \frac{\min |\mathbf{U}_{p.}|}{\max |\mathbf{U}_{p.}|}, \quad (8)$$

où  $\max |\mathbf{U}_{p.}|$  et  $\min |\mathbf{U}_{p.}|$  désignent respectivement le plus grand et le plus petit des modules des éléments de la  $p$ -ème ligne de  $\mathbf{U}$ . Ce critère décroît strictement avec l'ordre de la non-linéarité et est invariant par rapport à tout facteur d'échelle affectant une ligne donnée. En conséquence, une fois la matrice  $\mathbf{U}$  estimée, le calcul de  $\varrho_p$  correspondant à chacune des lignes permet de définir la matrice de permutation à appliquer à  $\mathbf{U}$  de sorte que ses lignes soient dans un ordre qui assure la décroissance de  $\varrho_p$ . Par suite, la décomposition PARAFAC est unique à une matrice diagonale près. En d'autres termes, tout autre ensemble de matrices  $\bar{\mathbf{H}}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}$  et  $\bar{\mathbf{U}}^T$  pouvant reconstituer les matrices  $\mathbf{Y}_{k..}$ ,  $k = 0, \dots, K_a - 1$  est relié à l'ensemble de matrices  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{U}^T$  par :

$$\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H}\mathbf{\Delta}_1, \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}\mathbf{\Delta}_2, \quad \bar{\mathbf{U}}^T = \mathbf{U}^T\mathbf{\Delta}_3,$$

avec  $\mathbf{\Delta}_1\mathbf{\Delta}_2\mathbf{\Delta}_3 = \mathbf{I}$ . En utilisant un correcteur de gain, toute ambiguïté sur l'estimation de  $\mathbf{U}$  peut être complètement levée [4], permettant ainsi l'extraction de la séquence informative formée par la première ligne de  $\mathbf{U}$ .

L'estimation des matrices  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{B}$  peut être effectuée en utilisant l'algorithme des moindres carrés alternés (*Alternating Least Squares (ALS)*) dont le principe est d'estimer, au sens des moindres carrés, un sous ensemble de paramètres en utilisant les estimés antérieurs des autres sous ensembles de paramètres, puis de réitérer le processus pour un autre sous ensemble de paramètres jusqu'à la convergence de l'algorithme. Les matrices  $\mathbf{Y}_{k..}$  étant données, leur concaténation permet d'écrire :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{0..} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{K_a-1..} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}D_0(\mathbf{B}) \\ \vdots \\ \mathbf{H}D_{K_a-1}(\mathbf{B}) \end{pmatrix} \mathbf{U}. \quad (9)$$

En notant  $\tilde{\mathbf{Y}}_{k..}$  la version bruitée de  $\mathbf{Y}_{k..}$ , et en considérant les estimés précédents de  $\mathbf{H}$  et de  $\mathbf{B}$ , notés  $\hat{\mathbf{H}}$  et  $\hat{\mathbf{B}}$ , le problème des moindres carrés est alors formulé comme suit :

$$\min_{\mathbf{U}} \left\| \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_{0..} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{Y}}_{K_a-1..} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{H}}D_0(\hat{\mathbf{B}}) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{H}}D_{K_a-1}(\hat{\mathbf{B}}) \end{pmatrix} \mathbf{U} \right\|_F^2, \quad (10)$$

où  $\|\cdot\|_F$  est la norme de Frobenius. La solution à ce problème est donnée par :

$$\hat{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{H}}D_0(\hat{\mathbf{B}}) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{H}}D_{K_a-1}(\hat{\mathbf{B}}) \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_{0..} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{Y}}_{K_a-1..} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

où  $\dagger$  indique la pseudo-inverse.

De même, les estimés au sens des moindres carrés des matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  sont donnés par :

$$\hat{\mathbf{H}}^T = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{B}}D_0(\hat{\mathbf{U}}^T) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{B}}D_{N-1}(\hat{\mathbf{U}}^T) \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_{..0} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{Y}}_{..N-1} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\hat{\mathbf{B}}^T = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{U}}^TD_0(\hat{\mathbf{H}}) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{U}}^TD_{M-1}(\hat{\mathbf{H}}) \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_{..0} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{Y}}_{..M-1} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

### 3 Résultats de simulation

Considérons le système caractérisé par une non-linéarité représentée par le polynôme  $P$  de degré trois tel que

$$P(u) = u + 0.3u^2 + 0.1u^3$$

et une partie linéaire définie par  $h_k(i) = \alpha_k h(i)$  avec

$$h = (1 \quad 0.5 \quad -0.2)^T.$$

Pour différentes valeurs de  $\alpha_k$ , i.e. différents capteurs, et  $N = 500$  blocs de symboles du type PAM-4, la figure 2 montre le taux d'erreur par symbole  $Pe$  en fonction du rapport signal à bruit (RSB), pour trois valeurs différentes de  $K_a$ . L'évaluation des performances a été réalisée à l'aide d'une simulation du type Monte-Carlo avec 100 expériences indépendantes. Nous pouvons noter que le taux d'erreur décroît lorsque le nombre de capteurs croît. Dans un environnement fortement bruité, la diversité introduite par les capteurs n'améliore que faiblement le taux d'erreur. Cette amélioration devient significative lorsque le niveau de bruit diminue.

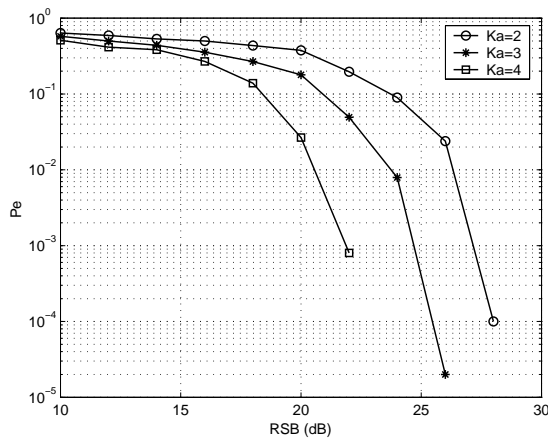


FIG. 2 – Taux d'erreur d'estimation des symboles en fonction du RSB ( $N=500$ ).

Nous comparons ensuite la méthode d'égalisation proposée avec un égaliseur non aveugle, i.e. en supposant le canal connu, du type forçage à zéro de l'erreur d'égalisation. En utilisant trois antennes de réception, nous pouvons noter que les performances sont relativement proches (Figure 3).

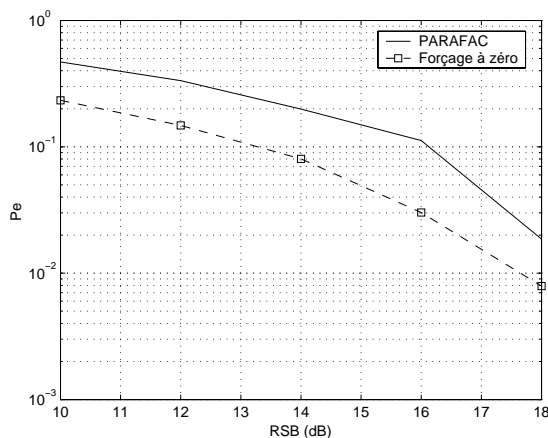


FIG. 3 – Taux d'erreur d'estimation des symboles en fonction du RSB ( $N=500$ ),  $K_a = 3$ .

## 4 Conclusion

Dans cet article, nous avons montré qu'en utilisant un pré-codage simple, un système non-linéaire SIMO du type Wiener peut être modélisé comme un tenseur cubique dont les dimensions sont le temps, l'espace et la diversité liée à la redondance introduite par le pré-codage. Le tenseur formé par les signaux reçus s'exprime naturellement comme une décomposition du type PARAFAC. Les conditions garantissant l'unicité de cette décomposition, à des facteurs d'échelle près, ont été établies. La séquence d'information transmise peut ainsi être estimée sans ambiguïté. L'écueil majeur de l'approche proposée est la réduction du taux d'information transmise. Une perspective de ce travail vise à rechercher un pré-codage plus efficace permet-

tant un taux de transmission plus élevé tout en assurant une décomposition PARAFAC du tenseur des signaux reçus.

## Références

- [1] G. B. Giannakis and E. Serpedin. Linear multichannel blind equalizers of nonlinear FIR Volterra channels. *IEEE Trans. Signal Processing*, 45(1) :67–81, January 1997.
- [2] R. Lopez-Valcarce and S. Dasgupta. Blind equalization of nonlinear channels from second-order statistics. *IEEE Trans. Signal Processing*, 49(12) :3084–3097, 2001.
- [3] G. V. Raz and B. Van Veen. Blind equalization and identification of nonlinear and IIR systems- A least squares approach. *IEEE trans. Signal Processing*, 48(1) :192–200, January 2000.
- [4] N.D. Sidiropoulos, G.B. Giannakis, and R. Bro. Blind PARAFAC receivers for DS-CDMA systems. *IEEE Trans. Signal Processing*, 48(3) :810–823, March 2000.
- [5] A. De Baynast and L. De Lathauwer. Détection autodi-dacte pour des systèmes à accès multiples basée sur l'analyse PARAFAC. In *Proc. of GRETSI'03*, Paris, September 2003.
- [6] W.I. Way. Optical fiber based microcellular systems. An overview. *IEICE Trans. Commun.*, E76-B(9) :1091–1102, September 1993.
- [7] X.N. Fernando and A. B. Sesay. Higher order adaptive filter based predistortion for nonlinear distortion compensation of radio over fiber links. In *Proc. of the Intern. Conf. on Communications (ICC' 2000)*, vol. 1/3, pages 367–371, New-Orleans, LA, USA, June 2000.
- [8] R. Lopez-Valcarce, X. Song, and S. Dasgupta. Blind equalization of nonlinear channels from second-order statistics using precoding and channel diversity. In *Proc. ICASSP*, vol. 4, pages 2073–2076, Salt-Lake city, UT, USA, 2001.
- [9] J.B. Kruskal. Three-way arrays : rank and uniqueness of trilinear decompositions, with application to arithmetic complexity and statistics. *Linear Algebra Applicat.*, 18 :95–138, 1977.
- [10] T. Jiang and N. Sidiropoulos. Kruskal permutation lemma and the identification of CANDECOMP/PARAFAC and bilinear models with constant modulus constraints. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 52(9) :2625–2636, September 2004.



# Sélection de segments pertinents dans des enregistrements SEMG en conditions expérimentales perturbées

G. FARAH<sup>1,2</sup>, D. HEWSON<sup>1</sup>, J. DUCHÊNE<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Université de Technologie de Troyes, ISTIT CNRS, 12 rue Marie Curie, 10010 Troyes Cedex

<sup>2</sup>Renault Technocentre, 1 avenue du Golf, 78288 Guyancourt Cedex

{georges.farah, david.hewson, jacques.duchene}@utt.fr, georges.farah@renault.com

**Résumé** – L’objet de cet article est de proposer une méthode d’extraction de segments pertinents dans des enregistrements électromyographiques de surface (SEMG) en conditions expérimentales perturbées. Nous montrons l’intérêt de l’algorithme CEM pour segmenter les SEMG en classes de bruit de grande amplitude, bouffées d’activité et activité posturale de base. Nous utilisons la modélisation AR afin de classifier les activités EMG exploitables. Un taux de succès de 96% montre l’efficacité de la méthode pour des signaux SEMG enregistrés sur des passagers soumis à des accélérations latérales.

**Abstract** – *The aim of this paper is to extract relevant activities from surface electromyography recordings (SEMG) under difficult experimental conditions with a small signal to noise ratio. We demonstrate that the CEM algorithm is able to segment SEMG signals into high amplitude artifacts, SEMG activity and background postural activity classes. SEMG activities are then identified using the AR modeling. This method produces 96% detection when applied to SEMG recorded on passengers subjected to lateral accelerations.*

## 1. Introduction

Dans le monde automobile, le confort est devenu un critère de qualité qui intéresse tous les constructeurs afin de satisfaire aux demandes et aux besoins de leurs clients. Dans ce contexte, le confort concerne non seulement la qualité d’amortissement ou la ventilation, mais aussi la réduction de la fatigue induite [1] ou la qualité du maintien latéral des sièges. Ce dernier type de confort peut être évalué en utilisant l’électromyographie de surface (SEMG). Même si le SEMG est considéré comme un outil d’évaluation objective du confort, il existe certains problèmes liés à son enregistrement qui rendent difficile le traitement et l’analyse des données.

Les signaux enregistrés sont contaminés par des bruits liés aux conditions expérimentales et présentent souvent un rapport signal sur bruit défavorable. Les enregistrements des activités musculaires posturales sont contaminés par le complexe cardiaque QRS. Les appareils électroniques de mesure génèrent un bruit que nous supposons blanc. Certaines composantes de basses fréquences provenant des mouvements de caisse du véhicule interviennent également dans le signal SEMG. Enfin, des composantes de grande amplitude probablement dues aux contacts des électrodes ou à des jeux de câblage peuvent apparaître lors de l’enregistrement. Ces bruits se manifestent par une très grande variance du signal avec des amplitudes s’approchant de la saturation des amplificateurs de mesure.

Plusieurs méthodes existent pour la détection des complexes QRS. La plupart sont fondées sur les dérivées première ou/et seconde du signal et un seuillage adapté [2]. Le bruit blanc est souvent éliminé par estimation de son niveau sur les hautes fréquences du spectre de puissance ou par la technique des ondelettes [3]. Le bruit basses fréquences quant à lui s’élimine par filtrage passe-haut. L’élimination des bruits de grande amplitude pourra être considérée comme un problème de segmentation.

Le problème lié à ce type de traitement est l’absence de connaissance a priori sur les différentes classes recherchées. Les algorithmes utilisés sont souvent fondés sur des estimations locales et des tests de type GLR [4]. Ces algorithmes présentent par contre un défaut lié au temps de calcul, et aux besoins en ressources mémoire. Une méthode de classification automatique, l’algorithme EM (Expectation-Maximization) a montré ses capacités à séparer les classes dans un modèle de mélange [5]. L’algorithme EM est une technique itérative de maximisation de la loi de vraisemblance en présence de données incomplètes. L’algorithme CEM [5] (Classification Expectation-Maximization) est une version classifiante et rapide de EM. Intuitivement, CEM paraît intéressant pour la séparation entre bruits de grande amplitude, activités musculaires EMG et activités posturales de base, chacune de ces trois classes étant définie par sa variance. Une fois le signal segmenté, les activités EMG exploitables seront identifiées à partir de leur contenu spectral.

L’objectif de cette étude est de proposer une méthode de sélection de segments pertinents dans des enregistrements électromyographiques de surface en conditions expérimentales perturbées. Nous montrons l’apport de l’algorithme CEM dans la séparation des classes. Nous utilisons ensuite la modélisation AR afin de classifier les EMG exploitables. Enfin, la méthode est validée sur des signaux SEMG enregistrés sur des passagers soumis à des accélérations latérales.

## 2. Méthodes

### 2.1 Recueil de données

Dans le cadre d’une étude sur le maintien latéral et la perception de roulis, des essais sur piste ont été réalisés afin

de comparer différents types de véhicules. 18 sujets masculins ont participé à l'étude, avec les caractéristiques anthropométriques suivantes : âge  $43 \pm 8$ , taille  $180 \pm 7$  et poids  $83 \pm 14$ . Les sujets, en tant que passagers, faisaient un tour de piste à vitesse constante (110 km/h), la piste étant choisie afin de refléter une conduite sur route nationale avec virages. 40% du temps correspond à des virages à gauche, 20% à des virages à droite et 40% à une conduite en ligne droite. Les signaux SEMG posturaux ont été enregistrés à l'aide d'électrodes de surface Red Dot TM 2330 pour le niveau dorsal, et Red Dot TM 2238 au niveau de la nuque, de l'abdomen et des cuisses. Le signal cardiaque ECG a été enregistré en même temps pour tous les sujets au niveau du sternum.

L'acquisition des signaux a été réalisée à l'aide d'une carte NI DAQ 6036E connectée sur un PC portable autonome afin de supprimer les rayonnements électromagnétiques pouvant provenir du secteur. Les signaux ont été échantillonnés à 2000 Hz, amplifiés par un facteur 5000, et filtrés passe bande 20-500Hz pour l'EMG et 2-100Hz pour l'ECG. Sous ces conditions expérimentales, les bruits se superposant à l'EMG étaient le complexe QRS, le bruit blanc, les bruits de basses fréquences et les bruits de grande amplitude.

## 2.2 Principe de l'algorithme CEM

L'algorithme EM (Expectation-Maximization) est une technique itérative de maximisation de la loi de vraisemblance en présence de données incomplètes. On l'attribue généralement à Dempster, Laird et Rubin [6]. Nous expliquons cet algorithme sur un modèle de mélange, c'est-à-dire un ensemble de classes chacune définie par ses paramètres.

Soit un échantillon  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  pour lequel chacune des réalisations  $x_i$  appartient à une classe de l'ensemble  $\{C_k, k = 1 \dots m\}$ . Chacune des classes  $C_k$  est définie par son vecteur de paramètres  $\Theta_k$  et sa probabilité a priori  $\pi_k$ . Le problème consiste alors à estimer le vecteur paramètres  $\Theta = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m, \Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_m]$  par maximisation de la loi de vraisemblance. L'algorithme sera : (a) Solution initiale de paramètres  $\Theta$ , (b) Calcul des probabilités a posteriori, (c) Calcul des nouveaux paramètres qui maximisent la vraisemblance, (d) retour à (b) jusqu'à la convergence.

La difficulté réside dans la maximisation de la log-vraisemblance

$$\log(L(\Theta/X)) = \sum_{i=1}^n \log \left( \sum_{j=1}^m \pi_j f(x_i/\Theta_j) \right)$$

avec  $f(x_i/\Theta_j)$  la probabilité que  $x_i$  provienne de la classe  $C_j$ . L'idée est d'introduire alors  $n$  données manquantes  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  avec  $(y_i = k)$  si la réalisation  $x_i$  est générée par la classe  $C_k$  ( $Y$  et  $X$  sont de même dimension  $n$ ). La maximisation de la log-vraisemblance  $\log(L(\Theta/X, Y))$  devient alors envisageable.

L'algorithme CEM est une version classifiante de l'EM, et consiste à ajouter une étape de classification à chaque itération. Les probabilités a posteriori dans ce cas seront égales à 0 ou 1 selon la règle du maximum a posteriori (MAP). Un des grands avantages de CEM par rapport à EM est sa rapidité, ce qui fait qu'il est généralement utilisé dans le cas où des contraintes de temps sont imposées, pour un

fonctionnement en temps réel par exemple. Pour plus de précisions sur EM/CEM, se référer à [5].

L'algorithme CEM appliqué aux modèles de mélange sera dans le cas général :

(a) *Initialisation* :  $\Theta^0 = [\pi_1^0, \pi_2^0, \dots, \pi_m^0, \Theta_1^0, \Theta_2^0, \dots, \Theta_m^0]$

(b) *Estimation* : calcul des probabilités a posteriori

$$\hat{z}_{ik}^{(t)} = \frac{\pi_k^{(t)} f(x_i; \Theta_k^{(t)})}{\sum_{l=1}^m \pi_l^{(t)} f(x_i; \Theta_l^{(t)})}$$

(c) *Classification* : Affectation selon le critère MAP :

$$u_{ik}^{(t)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{z}_{ik}^{(t)} = \max_l(\hat{z}_{il}^{(t)}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(d) *Maximisation* : Maximisation de la vraisemblance

$$\text{classifiante} : \Theta^{(t+1)} = \arg \max_{\Theta} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m u_{ik}^{(t)} \log(\pi_k^{(t)} f(x_i; \Theta_k^{(t)}))$$

Revenir à (b) jusqu'à la stabilité de la partition  $U$ .

Le problème de l'algorithme CEM est sa forte dépendance aux conditions initiales. Afin de pallier ce problème, des versions stochastiques de l'algorithme ont été proposées [7]. Une autre possibilité est d'estimer les paramètres de façon non précise, et de les optimiser par CEM.

## 2.3 Séquence de traitement

Dans ce paragraphe, nous décrivons la démarche proposée pour un signal SEMG afin d'en extraire les segments pertinents d'activité musculaire. Au début, nous procédons à une élimination des complexes QRS, puis nous détectons les bruits de grande amplitude avant d'éliminer le bruit blanc et les bruits basses fréquences. Une étape de classification est nécessaire afin de détecter les activités exploitables correspondant à un spectre EMG. Dans la suite, nous désignons par GA les bruits de grande amplitude, PA les activités phasiques et BA l'activité posturale de base.

### 2.3.1 Elimination des complexes QRS

Un signal ECG filtré à bande étroite entre 10 et 20 Hz conserve la forme des complexes QRS. La distribution du signal filtré est gaussienne dans laquelle les pics des QRS apparaissent comme valeurs extrêmes. Un seuil fixé à deux écarts types est suffisant pour les détecter. Le signal est mis à zéro aux alentours des pics, et sur une durée approximative de 100ms, ce qui correspond à la durée du QRS [8].

### 2.3.2 Détection des grandes amplitudes

La première étape consiste à décider si un bruit de grande amplitude existe dans le signal. Le rapport des variances entre un GA et le reste du signal est bien supérieur à celui constaté entre les PA et le BA. De ce fait, la présence de GA implique un minimum dans l'histogramme du logarithme d'énergie (FIG.1). Cette condition n'est pas suffisante car un mélange des classes PA et BA avec un SNR favorable présente aussi un minimum. Pour lever cette ambiguïté, il suffit en plus de tester si la valeur est supérieure à un certain seuil (ici le seuil de linéarité d'amplification). Du coup, un signal comporte une classe GA s'il dépasse le seuil de

linéarité et si un minimum dans l'histogramme de l'énergie existe.

Dans le cas où la classe GA existe, il semble raisonnable d'appliquer CEM deux fois, la première fois pour détecter les GA et la deuxième fois pour détecter les PA. Les lois des trois classes à trouver sont supposées gaussiennes, une condition largement satisfaite pour les PA et les BA. L'algorithme CEM aura alors à trouver trois classes gaussiennes de moyennes nulles et de variances inconnues. Toutes les distributions d'amplitude étant centrées autour de zéro, nous avons choisi de segmenter les signaux à partir de leur distribution d'énergie. Les classes dans ce cas suivent des lois de chi2 centrées. En effet, si  $x_i \sim N(0, \sigma^2)$ , alors

$y = \sum_{i=1}^n x_i^2$  suit une loi de chi2 de densité

$$f(y) = \frac{1}{(2\sigma^2)^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}$$

Chacune des classes d'énergie est définie par sa variance  $\sigma^2$ .

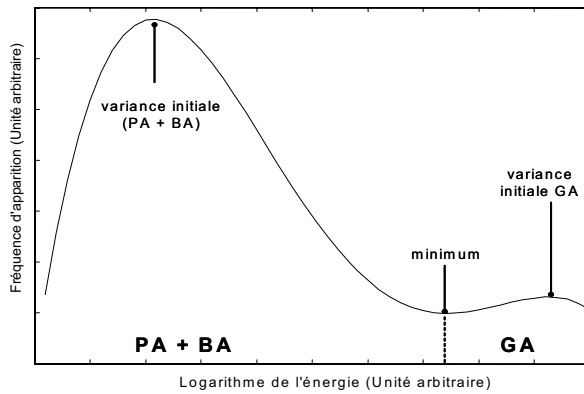


FIG. 1 : Histogramme du logarithme d'énergie

L'algorithme complet pour trouver 2 classes de loi chi2 sera:

(a) Estimation des énergies du signal sur des fenêtres de  $n$  points, ce qui donne un mélange de  $N$  points  $y = \sum_{i=1}^n x_i^2$

(b) Initialisation :  $\Theta^0 = [\pi_1^0, \pi_2^0, \sigma_1^0, \sigma_2^0]$  vecteur initial de paramètres,  $\{k = 1, 2 \text{ et } j = 1 \dots N\}$

(c) Estimation :  $\hat{z}_{jk}^{(t)} = \frac{\pi_k^{(t)} f(y_j; \sigma_k^{(t)})}{\sum_{l=1}^2 \pi_l^{(t)} f(y_j; \sigma_l^{(t)})}$

(d) Classification :  $u_{jk}^{(t)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{z}_{jk}^{(t)} = \max_l(\hat{z}_{jl}^{(t)}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(e) Maximisation :  $\sigma_k^2 = \frac{\sum_j y_j u_{jk}^{(t)}}{N \sum_j u_{jk}^{(t)}}$  et  $\pi_k = \frac{1}{N} \sum_j u_{jk}^{(t)}$

Revenir à (c) Jusqu'à la stabilité de la partition  $U$ .

Quand l'algorithme CEM est appliqué à la séparation des classes GA et PA, afin d'accéder la convergence, les

variances initiales sont estimées à partir de l'histogramme des énergies quand un minimum existe (FIG.1). Dans le cas contraire, nous affectons la classe PA à l'ensemble du mélange.

Concernant la séparation des classes PA et BA, 99% du signal d'énergie sont conservés afin d'éliminer les valeurs extrêmes non éliminées par CEM (si GA existait) ou lissées par estimation d'énergie (si GA n'existait pas). Les conditions initiales pour CEM seront définies en fonction des caractéristiques expérimentales.

### 2.3.3 Elimination du bruit blanc et des bruits de basses fréquences

Une décomposition en ondelettes est utilisée afin d'éliminer le bruit blanc [3]. Après une décomposition en 8 niveaux à l'aide des ondelettes de Daubechies5, le signal est reconstruit en éliminant les deux derniers niveaux de détails et en définissant un seuil selon la méthode SURE sur les autres niveaux.

### 2.3.4 Classification

Une fois le signal segmenté, une modélisation AR est utilisée afin de détecter les segments EMG exploitables. Nous nous fondons sur le fait qu'un spectre EMG admet un pôle de grand module pour une phase correspondant à une fréquence aux alentours de 50Hz. Un EMG exploitable appartenant à la classe PA correspond à une activité musculaire phasique. Un segment EMG non exploitable est rejeté.

## 3. Résultats

Les complexes QRS sont tout d'abord éliminés dans l'ECG, et les parties correspondantes dans les signaux SEMG sont mises à zéro (enregistrements synchronisés). Nous avons appliqué l'algorithme CEM une première fois pour détecter les GA avec une fenêtre d'estimation d'énergie de 0,15 seconde, durée obtenue à l'aide d'une courbe COR, correspondant à un taux de 98,7% de bonne détection et un taux de fausse alarme de 8%. Après élimination des valeurs extrêmes du signal d'énergie dépourvu des GA (1%), Nous avons appliqué CEM une deuxième fois avec des fenêtres d'estimation d'énergie de 0,5 seconde correspondant à la durée limite de stationnarité (après application de run test [9]). Dans ce dernier cas, le choix des conditions initiales doit tenir compte des conditions de parcours de la piste : étant donné que 40% de la piste correspond à une conduite sans virage, nous avons estimé la variance des BA par le 20<sup>ème</sup> percentile de l'énergie estimée, et celle des PA par le 80<sup>ème</sup> percentile, ce qui correspond au pourcentage théorique d'activité des muscles sensibles aux virages à droite. Nous avons ensuite appliqué les ondelettes de Daubechies5 pour éliminer le bruit blanc ainsi que les bruits basses fréquences. La figure 2 illustre un exemple de décomposition d'un signal en trois classes : les bruits de grande amplitude, les activités phasiques et les activités posturales de base. Le test de sélection des segments exploitables (signaux de durée 0,5 seconde) était fondé sur la position de la coordonnée (module – phase) du pôle de plus grand module pour un modèle AR d'ordre 20. Nous avons choisi un ordre élevé afin d'obtenir une bonne approximation d'un spectre EMG [10]. Cent segments de la classe PA, aléatoirement choisis, ont été

expertisés comme EMG exploitables ou bouffées de bruit. En parallèle, les coordonnées du pôle de plus grand module ont été calculées. Nous avons remarqué qu'un domaine étroit à l'intérieur du cercle unité, limité en module ( $>0.7$ ) et en phase (fréquences entre 30 et 80 Hz selon les muscles) correspond à des segments EMG exploitables. A l'extérieur, le segment correspond à du bruit. L'application de cette méthode sur un échantillon de 100 segments, choisis aléatoirement dans la classe PA donne un pourcentage de bonne détection de 96% pour un taux de fausse alarme de 9%.

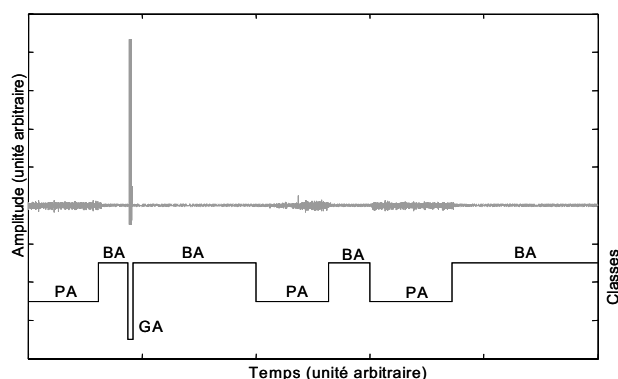


FIG. 2 : Histogramme du logarithme d'énergie

#### 4. Discussion

La méthode proposée a montré son efficacité pour l'extraction de segments d'activité musculaire exploitables enregistrés lors de conditions expérimentales perturbées. L'algorithme CEM semble adapté à ce genre de traitement du fait qu'il permet de segmenter les signaux enregistrés sans connaissance a priori des variances de chacune des classes. Cette segmentation n'est pourtant pas aveugle du fait de l'hypothèse d'une distribution gaussienne des amplitudes de chacune des classes. La statistique utilisée est dérivée de l'énergie du signal, correspondant à une loi de  $\chi^2$ . Des statistiques dérivées de l'amplitude ne pouvaient pas être utilisées à cause du passage à zéro de toutes les classes, et donc de leur chevauchement.

La fenêtre de 0,15 seconde pour la détection des GA donne un pourcentage de détection très satisfaisant de 98,7% contre un taux de fausse alarme de 8%, résultat tout à fait acceptable. L'algorithme CEM étant sensible aux conditions initiales, nous nous sommes fondés sur les conditions expérimentales pour définir des conditions initiales aussi proches que possible de la valeur théorique. L'application du CEM deux fois a permis de séparer les activités phasiques des activités posturales de base, cette opération pouvant être utile dans des applications traitant des réponses phasiques d'activité musculaire.

Après segmentation, nous avons classifié les segments EMG exploitables en nous fondant sur la modélisation AR et sur la valeur de la phase du pôle de plus grand module. Bien que cette méthode ait donné de bons résultats, elle a conduit à un taux de fausses alarmes de 9%.

Les méthodes déjà présentées peuvent avoir différentes applications : tout problème de segmentation avec des classes séparables - initialement ou après transformation (i.e.

énergie) - peut être traité à l'aide du CEM. La méthode de classification AR était choisie pour son adaptation à l'EMG, et d'autres méthodes sont envisageables selon les applications.

#### 5. Conclusion

Une méthode d'extraction des segments pertinents d'activité musculaire dans des enregistrements en conditions expérimentales perturbées a été proposée. Cette méthode montre l'efficacité de l'algorithme CEM pour la segmentation/classification. Nous avons utilisé des lois de  $\chi^2$  pour chacune des classes et défini les conditions initiales en nous fondant sur les conditions expérimentales. La méthode semble satisfaisante avec 98,7% comme taux de bonne détection pour un taux de fausse alarme de 8%.

La modélisation AR a montré de plus sa capacité à détecter les segments EMG exploitables. Cette méthode semble aussi satisfaisante avec 96% de bonne détection pour un taux de fausse alarme de 9%.

#### Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier la société automobile Renault pour son support dans le cadre de cette étude et pour l'assistance technique lors de la campagne d'essais sur piste, application directe de la méthode proposée.

#### Références

1. Lamotte, T., et al., *Surface electromyography as a tool to study the head rest comfort in cars*. Ergonomics, 1996. **39**(5): p. 781-96.
2. Novak, D., *Processing of ECG signal using wavelets*, in *Czech Technical University*. 2000: Prague.
3. Carre, P., et al., *Denoising of the uterine EHG by an undecimated wavelet transform*. IEEE Trans Biomed Eng, 1998. **45**(9): p. 1104-13.
4. Basseville, M. and I. Nikiforov, *Detection of Abrupt Changes - Theory and applications*, ed. P. Hall. 1993.
5. Govaert, G., *Analyse des données*, ed. Lavoisier. 2003, Paris.
6. Dempster, A.P., N.M. Laird, and D.B. Rubin, *Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM-Algorithm*. Journal of the Royal Statistical Society, 1977(Series B39): p. 1-38.
7. Celeux, G. and G. Govaert, *A classification EM algorithm for clustering and two stochastic versions*. Computational Statistics & Data Analysis, 1992. **14**: p. 315-332.
8. Hauelsen, J., et al., *Selective averaging of QRS complexes in magnetocardiograms*. International Journal of Bioelectromagnetism, 2000. **2**(2).
9. Bendat, J. and A. Piersol, *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, ed. Wiley. 1971.
10. Inbar, G.F. and A.E. Noujaim, *On surface EMG spectral characterization and its application to diagnostic classification*. IEEE Trans Biomed Eng, 1984. **31**(9): p. 597-604.

# Prédiction précoce de la syncope chez l'homme par réseaux de neurones

M. FEUILLOY<sup>1,2</sup>, D. SCHANG<sup>1</sup>, J. O. FORTRAT<sup>3</sup>, S. POGGI<sup>4</sup>, E. BELLARD<sup>3</sup>, P. NICOLAS<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ESEO, Ecole Supérieure d'Electronique de l'Ouest,  
4, rue Merlet de la Boulaye, BP 30926, 49009 Angers Cedex 01, France

<sup>2</sup>LERIA, Université d'Angers, UPRES-EA 2645,  
2, bd Lavoisier, 49045 Angers Cedex 01, France

<sup>3</sup>Laboratoire de physiologie, UPRES-EA 2170,  
rue haute de Reculée, 49035 Angers, France

<sup>4</sup>ALCTRA,  
60, bd Henri Barbusse, 93100 Montreuil, France  
mathieu.feuilloy@eseo.fr, daniel.schang@eseo.fr, jofortrat@chu-angers.fr,  
sylvain.poggi@alctra.fr, explovasc@chu-angers.fr, pascal.nicolas@univ-angers.fr

**Résumé** — Cette étude propose d'améliorer les performances d'un test médical lié à l'apparition de syncopes chez l'homme. Cette prédiction repose sur l'utilisation d'un réseau de neurones artificiels et de la méthode d'Analyse en Composantes Principales.

**Abstract** — This study proposes a method to improve the outcome prediction of a syncope human test. The use of an artificial neural network and the Principal Component Analysis method to reduce the data dimension allow to compare very favorably with other approaches.

## 1 Introduction

La syncope est une perte soudaine de la conscience, et constitue un problème clinique fréquent qui affecte 3% de la population, en touchant aussi bien des individus âgés que jeunes. Dans le domaine de la cardiologie, elle peut représenter jusqu'à 6% des hospitalisations. Malgré un bilan cardiaque complet, l'apparition de syncopes ne peut être prédite et est expliquée uniquement dans 60% des cas. Le test d'inclinaison, dénommé "TILT-test" [1], est un outil d'évaluation clinique de patients présentant des symptômes de la syncope inexpliquée, dont l'utilisation est très largement employée. Après une période de repos de 10 minutes où le patient est allongé à l'horizontale sur la table de TILT-test, cette dernière s'incline automatiquement suivant un angle compris entre 60° et 90° pendant une période pouvant atteindre 45 minutes. Ce test reproduit les conditions provoquant la syncope, mais le problème majeur en est sa durée. Pour des raisons de coût, de nombreuses études tentent de la réduire.

L'objectif de notre travail s'inscrit dans ce cadre et cherche à prédire si le patient va faire une syncope ou non, en s'affranchissant totalement de la procédure d'inclinaison. Il s'agit donc à partir d'un ensemble de mesures effectuées sur le patient en position allongée de classer ce patient dans la catégorie "syncopéur" ou "non syncopéur".

Classiquement, les paramètres utilisés pour évaluer la qualité des résultats obtenus sont :

- la sensibilité qui est le pourcentage de patients parmi les syncopéurs qui sont fidèlement classés comme syncopéurs,
- la spécificité qui est le pourcentage de patients parmi les non syncopéurs qui sont effectivement classés comme non syncopéurs.

Ces deux quantités servent à définir l'indice  $ROC = \sqrt{(1 - \text{spécificité})^2 + (1 - \text{sensibilité})^2}$  que l'on cherchera à rendre le plus petit possible de manière à obtenir conjointement les meilleures sensibilité et spécificité dans le but d'éviter les "faux négatifs" et les "faux positifs".

Sur ce même problème du TILT-test, Pitzalis *et al.* [2] se sont intéressés aux 15 premières minutes du basculement. Ils obtiennent sur une étude rétrospective de 238 patients une spécificité de 93% et une sensibilité de 58%, respectivement 85% et 80% sur une étude prospective de 80 patients. Cette prédiction est réalisée à partir de l'analyse de la pression artérielle systolique. De même, Mallat *et al.* [3] ont réduit le temps de basculement à 6 minutes. Ainsi, rétrospectivement ils ont obtenu sur un groupe de 110 patients, 100% de spécificité et 88,6% de sensibilité suite à l'observation de la fréquence cardiaque. Sur un corpus inconnu de 109 individus les valeurs prédictives deviennent 96,4% en spécificité et 87,3% en sensibilité. Ces études demandent toujours une durée du TILT-test d'une vingtaine de minutes et surtout nécessitent le basculement du patient. Ainsi, dans le but de réduire encore la durée de l'examen, [4] et [5] ont proposé de

TAB. 1: description des variables présélectionnées

variables présélectionnées	“ syncopeurs ” (45 patients)	“ non syncopeurs ” (41 patients)
<i>Age</i>	41 ± 15 ans	45 ± 15 ans
<i>Sexe</i> , hom. / fem.	22 / 23	22 / 19
<i>BSA</i>	surface corporelle (m <sup>2</sup> )	
<i>VolPlas</i>	volume plasmatique (m <sup>2</sup> ) de la surface corporelle	
<i>F<sub>rep</sub></i>	fréquence cardiaque (bat/min)	
<i>PAS<sub>rep</sub></i>	pression artérielle systolique (mm Hg)	
<i>PAD<sub>rep</sub></i>	pression artérielle diastolique (mm Hg)	
<i>PP<sub>rep</sub></i>	pression pulsée (mm Hg)	
<i>TBW</i>	eau totale (l)	
<i>LW/FW</i>	rapport masse grasse / masse grasse	
<i>Ht<sub>mes</sub></i>	hématocrite (%)	
<i>Hb</i>	hémoglobine (g/l)	

prédire l'apparition d'une syncope en position couchée, durant sa phase de repos, soit avant le basculement du patient. Ces études s'emploient à analyser un signal d'impédancemétrie thoracique, signal variant en fonction de l'éjection cardiaque battement par battement. La première étude de Bellard *et al.* [4] a été réalisée uniquement de façon rétrospective en se fondant sur un seuil temporel lié à la fin de l'éjection ventriculaire. La spécificité et la sensibilité étaient alors de 63% et 68% sur un groupe de 71 individus. La deuxième étude de Schang *et al.* [5], disposant d'un corpus de 129 patients, a établi une prédiction suivant des caractéristiques recueillies sur le signal d'impédancemétrie thoracique, en plus des variables concernant l'âge et le sexe. Ce modèle reposant sur les réseaux de neurones leur a permis d'atteindre rétrospectivement 100% en spécificité et 100% en sensibilité sur un groupe de 70 patients. Prospectivement, sur les 59 patients restants, le modèle a atteint 73% en spécificité et 69% en sensibilité.

L'analyse proposée ici doit permettre d'améliorer les résultats de prédiction dans la phase de repos du patient et cela afin de les amener au niveau des études considérant les premières minutes du basculement.

## 2 Données

La base de données de patients utilisée provient du service de cardiologie du CHU d'Angers. Elle contient 86 individus ayant déjà effectué une syncope. On observe une répartition équilibrée entre les sexes et une diversité concernant l'âge des patients (TAB. 1). Ces derniers ont tous réalisé un TILT-test dans des conditions similaires, entre 14 heures et 17 heures dans une chambre à lumière tamisée et à température comprise entre 24° et 25°C. Après une période de repos de 10 minutes durant laquelle ils étaient allongés, les patients étaient alors basculés à 70° pour une durée de 45 minutes [6]. En cas d'apparition de syncope ou de pré-syncope (pâleur excessive, sueur), les patients étaient alors ramenés dans la position horizontale mettant fin au test. Dans le cas où les troubles apparaissaient, les patients étaient alors considérés comme syncopeurs.

Dans notre base de données, 52% des patients se sont révélés positifs au TILT-test. Une multitude de variables médicales étant à notre disposition (135 variables), les

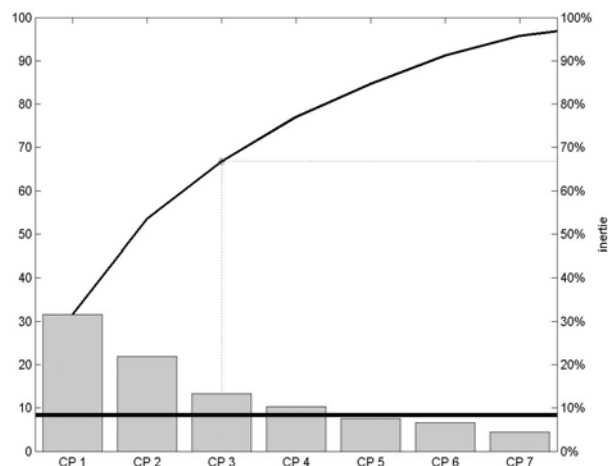


FIG. 1: représentation de l'inertie expliquée par les 7 premiers axes principaux

médecins nous ont orientés vers une présélection de paramètres (TAB. 1).

## 3 Méthodes

### 3.1 Pré-traitement des données et sélection des variables

Les variables ayant des domaines de variation très différents, et afin d'éviter de biaiser le classifieur, il a fallu les normaliser : chaque variable a une valeur moyenne nulle et un écart type de 1. Etant très sujet au bruit, ces données rendent la classification difficile par des méthodes classiques (modèles exploitant des frontières de décision construites suivant des équations de premier et second degré), où les meilleurs résultats obtenus en prospection n'égalaien pas les travaux précédemment réalisés par [4] et [5]. Ainsi, une classification statistique mettant en œuvre la règle de décision bayésienne suivant une frontière de décision linéaire atteint 57% en spécificité et 67% en sensibilité. Pour une frontière quadratique les résultats atteignent 79% en spécificité et 67% en sensibilité, ce qui est assez éloigné d'une précision rigoureuse de l'apparition d'une syncope. Toutefois, ces méthodes nous ont permis de faire ressortir les variables les plus influentes, au nombre de trois : “*Age*”, “*PAD<sub>rep</sub>*” et “*Ht<sub>mes</sub>*”.

La projection de données par l'Analyse en Composantes Principales (ACP) optimise la démarche précédente, qui consiste à diminuer le nombre d'entrées discriminantes. L'apport de l'ACP permet de réduire la dimension de l'espace d'entrée en conservant le maximum d'information, par un choix judicieux de l'espace de projection. Une décroissance régulière des valeurs propres représentée par l'inertie sur chacun des axes factoriels (FIG. 1) indique que les données sont peu structurées et rend difficile le choix de la dimension de l'espace de projection.

La règle de Kaiser [7] préconise de calculer la moyenne des valeurs propres et de conserver celles qui dépassent

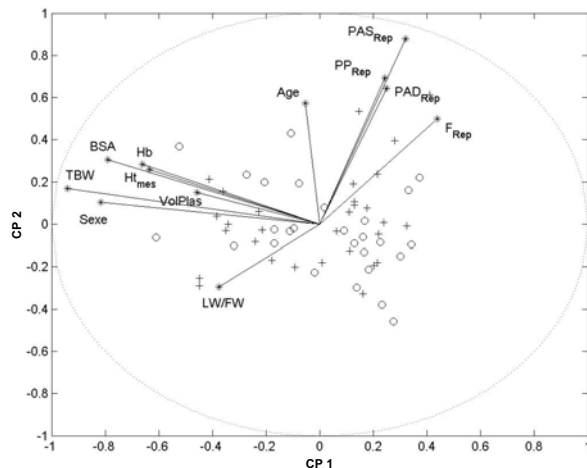


FIG. 2: représentation bidimensionnelle des variables et du groupe rétrospectif de patients ('+' - syncopé, 'o' - non syncopé) projetés sur les deux premiers axes principaux

cette moyenne. Cette méthode empirique est admise uniquement par sa simplicité ; dans la pratique, elle possède une généralisation peu robuste. En effet, la règle de Kaiser nous aurait conduits à conserver les quatre composantes principales qui assureraient 77% de l'information des données. Or les apprentissages et phases de tests ont abouti à de meilleures performances en fixant à trois le nombre de composantes principales retenues, exprimant cette fois-ci 67% de l'inertie totale.

### 3.2 Réseau de neurones

La méthode de classification statistique utilisant le classifieur de Bayes [8] citée au paragraphe précédent, se heurte à un problème important dans l'estimation des densités de probabilité conditionnelles. Le classifieur de Bayes détermine les probabilités *a posteriori*  $P(C_i|x)$  en fonction des probabilités *a priori*  $P(C_i)$  et des densités de probabilité conditionnelles  $P(x|C_i)$ . Cette relation est la *formule de Bayes* définie de la manière suivante :

$$P(C_i|x) = \frac{P(x|C_i)P(C_i)}{\sum_j P(x|C_j)P(C_j)}$$

Les probabilités *a priori* peuvent être obtenues simplement, contrairement aux densités. En effet, notre échantillon de données est trop faible pour obtenir une bonne estimation de ces densités de probabilité, cela nuit à la robustesse du classifieur engendrant de fortes erreurs de prédiction. Afin d'éviter cela, notre classifieur ne doit pas passer par ces estimations pour déterminer la probabilité d'appartenance d'un individu aux classes. C'est pourquoi, nous avons utilisé une méthode de classification dite *directe* qui permet également de résoudre le problème de classification qu'occasionnait la non séparabilité linéaire des données. Ainsi, nous avons utilisé un réseau de neu-

rones de type perceptron multi-couches [8].

L'architecture donnant les meilleurs résultats après de nombreux essais consiste en une couche cachée de 8 neurones à fonction d'activation de type sigmoïde et un neurone en sortie. Les données ont été partagées, 2/3 pour l'apprentissage, soit un corpus de 57 patients, et 1/3 pour estimer la généralisation, soit 29 patients. La figure 2 montre la relation entre les classes et les données d'apprentissage, ainsi que la corrélation entre les variables.

Afin d'optimiser la généralisation et minimiser le dilemme biais/variance, une base de validation de 19 patients prélevée sur la base d'apprentissage a permis d'interrompre le processus de modification des poids du réseau de neurones lorsque l'erreur de validation quittait son minimum.

Pour la recherche d'un minimum sur la fonction d'erreur d'apprentissage, l'algorithme très performant de "Levenberg-Marquardt" [9] a été choisi. Il offre l'avantage de converger très rapidement vers un minimum en limitant les fluctuations désagréables de l'erreur de validation, optimisant alors la fin de l'apprentissage en assurant une meilleure généralisation. La modification des poids  $w_i$  se fait de la manière suivante :

$$w_i = w_{i-1} - [H(w_{i-1}) + \mu_i I]^{-1} \nabla J(w_{i-1})$$

Le pas d'apprentissage  $\mu_i$  est un terme proportionnel à la variation des poids à l'itération précédente, ainsi, lorsque ce dernier est faible, l'algorithme de modification des poids tend à fonctionner de façon analogue à la *méthode de Newton*. Lorsque le pas d'apprentissage  $\mu_i$  devient très grand, notre formule de modification des poids s'approche de celle de la *méthode du gradient simple*. Dans ce cas, la complexité du calcul est fortement réduite car le calcul de la matrice hessienne  $H$  n'est plus nécessaire.

Les traitements et expérimentations ont été effectués sous MatLab® (The Mathworks Inc., South Natic, MA, USA).

## 4 Résultats

L'utilisation de nouvelles variables et leurs traitements effectués apporte une amélioration significative des résultats dans la phase de prospection (TAB. 2). En effet, sans distinction concernant le choix du nombre de composantes principales à conserver, et lorsque le patient ne quitte pas la position couchée, les résultats sont toujours meilleurs que ceux de l'étude [5], qui exploitait également cette unique position. Ainsi, dans chacun des cas (TAB. 2) et suivant l'étude prospective, les ROC obtenus sont toujours inférieurs à celui l'étude de [5], soit 0.41. De plus, ces résultats de l'étude prospective confirment l'observation effectuée sur la difficulté pour choisir le nombre de composantes principales à conserver.

De plus, nos performances rejoignent celles des études exploitant les premières minutes de basculement (TAB. 3),

TAB. 2: performances de la méthode

Nombre de Composantes Principales	Groupe rétrospectif			Groupe prospectif		
	ROC	Spé.	Sens.	ROC	Spé.	Sens.
1 CP	0,35	67	90	0,38	64	87
2 CPs	0,16	94	85	0,35	71	80
<b>3 CPs</b>	<b>0,06</b>	<b>94</b>	<b>100</b>	<b>0,19</b>	<b>86</b>	<b>87</b>
4 CPs	0	100	100	0,29	79	80
5 CPs	0	100	100	0,29	79	80
6 CPs	0	100	100	0,39	71	73
7 CPs	0	100	100	0,34	79	73

où pour un test rétrospectif les résultats sont meilleurs. Nous obtenons un ROC de 0.06 contre 0.11 dans l'étude [3] et suivant des données prospectives les performances de la méthode sont approximativement équivalentes, nous parvenons à un ROC de 0.19, pour 0.14 dans le cas le plus favorable des études [2] et [3]. Par contre, pour la prédiction en position couchée et sur des données inconnues à l'outil de classification (TAB. 4), l'indice de ROC a diminué de plus de la moitié par rapport à l'étude [5], signifiant une augmentation importante de la prédiction.

TAB. 3: comparaison entre les différentes approches suivant un groupe rétrospectif

Position du patient	couchée			basculée	
	notre étude	[5]	[4]	[3]	[2]
Spécificité (%)	<b>94</b>	100	63	100	93
Sensibilité (%)	<b>100</b>	100	68	89	58
ROC	<b>0,06</b>	0,00	0,49	0,11	0,43

TAB. 4: comparaison entre les différentes approches suivant un groupe prospectif

Position du patient	couchée			basculée	
	notre étude	[5]	[4]	[3]	[2]
Spécificité (%)	<b>86</b>	73	—	96	85
Sensibilité (%)	<b>87</b>	69	—	87	80
ROC	<b>0,19</b>	0,41	—	0,14	0,25

## 5 Conclusions

L'intérêt de la méthode proposée réside donc dans les performances obtenues dans la prédiction de la syncope et ce, dès la position couchée. Seuls les méthodes nécessitant le basculement du patient produisent des résultats légèrement meilleurs. Cette étude peut contribuer à éviter bien des désagréments au patient en lui évitant de subir les symptômes liés à la pré-syncope (douleurs thoraciques, palpitations). De plus, avec la prise en compte de nouveaux paramètres, la combinaison d'autres techniques de sélection de variables et de classification, nous pouvons espérer renforcer ces résultats en rendant la méthode plus reproductible.

## Références

- [1] D. G. Benditt, D. W. Ferguson, B. P. Grubb, W. N. Kapoor, J. Kugler, B. B. Lerman, J. D. Maloney, A. Raviele, B. Ross, R. Sutton, M. J. Wolk et D. L. Wood. *Tilt table testing for assessing syncope*. Am. Coll. Cardiol, 1996;28:263-275.
- [2] M. Pitzalis, F. Massari, P. Guida, M. Iacoviello, F. Mastropasqua, B. Rizzon, C. Forleo et P. Rizzon. *Shortened head-up tilting Test guided by systolic pressure reduction in neurocardiogenic syncope*. Circulation, 2002;105:146-148.
- [3] Z. Mallat, E. Vicaut, A. Sangar, J. Verscueren, G. Fontaine et R. Frank. *Prediction of head-up tilt test result by analysis of early heart rate variations*. Circulation, 1997;96:581-584.
- [4] E. Bellard, J. O. Fortrat, D. Schang, J. M. Dupuis, J. Victor et G. Leftheriotis. *Changes in the transthoracic impedance signal predict the outcome of 70° head-up tilt test*. Clinical Science, 2003;104:119-126.
- [5] D. Schang, G. Plantier, E. Bellard et G. Leftheriotis. *Prévention de la syncope chez l'homme*. Grets, 2003.
- [6] R. A. Kennt, J. Bayliss, A. Ingram et R. Sutton. *Head-up tilt: a useful test for investigating unexplained syncope*. Lancet, 1986;1:1352-1354.
- [7] H. F. Kaiser. *A note on Guttman's lower bound for the number of common factors*. Brit. J. Statist. Psychol., 1961;14:1-2.
- [8] C. M. Bishop. *Neural networks for pattern recognition*. Oxford University Press, 1995.
- [9] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling et B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1992.



# Segmentation compétitive de l'hippocampe et de l'amygdale à partir de volumes IRM

M. CHUPIN<sup>1</sup>, D. HASBOUN<sup>1,2</sup>, É. BARDINET<sup>1</sup>, S. BAILLET<sup>1</sup>, L. GARNERO<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Neurosciences Cognitives et Imagerie Cérébrale, CNRS UPR640,  
Hôpital de la Salpêtrière, 47 bvd de l'hôpital, 75651 PARIS CEDEX 13

<sup>2</sup>Unité de Neuroradiologie, Hôpital de la Salpêtrière,  
47 bvd de l'hôpital, 75651 PARIS CEDEX 13

marie.chupin@chups.jussieu.fr

**Résumé** – L'hippocampe et l'amygdale sont deux structures cérébrales intervenant dans plusieurs fonctions cognitives fondamentales. Leur segmentation est un outil essentiel pour mesurer leur atteinte dans certaines pathologies neurologiques, mais elle est rendue difficile par leur complexité. Nous considérons leur segmentation simultanée par une méthode de déformation homotopique compétitive de régions, celle-ci est guidée par des connaissances anatomiques relationnelles, et non des a priori statistiques, pour pouvoir considérer des structures atrophiées. Rapide, l'algorithme donne des résultats satisfaisants pour les deux structures par rapport à la segmentation manuelle et à la littérature.

**Abstract** – The hippocampus and the amygdala are two cerebral structures that play a central role in main cognitive processes. Their segmentation is a unique tool to measure their atrophy in specific neurological illnesses, but their complexity makes it difficult. Their simultaneous segmentation is considered here through a competitive homotopic region deforming method. It is driven by relational anatomical knowledge, with no statistical prior in order to be able to consider atrophic structures. This fast algorithm gives satisfying results for the two structures with respect to manual segmentation and performs well compared to published methods.

## 1. Introduction

Le rôle de l'hippocampe (H) et l'amygdale (A) est central dans des processus cognitifs fondamentaux (mémoire, émotions...) et dans plusieurs pathologies neurologiques (épilepsie, maladie d'Alzheimer, schizophrénie...). Leur segmentation automatique s'inscrit dans la détection précoce des troubles neurologiques et l'analyse de l'évolution anormale des structures.

L'hippocampe et l'amygdale forment un complexe anatomo-fonctionnel de petite taille, aux frontières mal définies. Leur segmentation manuelle, seule référence actuellement, suit un protocole rigoureux [1]. Malgré deux heures de travail pour chaque structure, elle est peu reproductible entre observateurs. L'automatisation de cette procédure grâce à un algorithme robuste et fiable apparaît donc comme un enjeu essentiel. Néanmoins, les méthodes déjà proposées dans la littérature pour résoudre ce problème souffrent de la mauvaise définition anatomique des deux structures. Un point central dans ces méthodes concerne la nature des a priori qui sont introduits afin de pallier l'incertitude des limites. De nombreuses méthodes basées sur un modèle reposent sur des a priori de forme globale ou de déformation. Ces informations sont dérivées soit d'une base d'apprentissage statistique via un modèle [2][3][4][5][6][7] ou un atlas [8], soit d'un individu particulier [9][10]. Or, de telles contraintes issues d'échantillons particuliers peuvent

s'avérer inadaptées pour les données cliniques, dans lesquelles tout type d'atrophie peut être rencontré, augmentant de façon considérable la variabilité anatomique. Par ailleurs, les méthodes ne reposant pas sur un modèle font souvent appel à une initialisation manuelle [11][12] dont l'influence sur la reproductibilité doit être établie. Enfin, beaucoup de méthodes publiées sont insuffisamment évaluées, même sur des jeunes sujets sains.

La segmentation est envisagée dans le cadre de la routine clinique : elle doit donc être robuste, rapide, nécessiter peu d'interactions avec l'observateur, et donner des résultats corrects sur des contrôles et des patients. Nous présentons ici une extension d'une méthode de déformation compétitive de régions, permettant la segmentation simultanée de l'hippocampe et de l'amygdale à partir de deux graines. Des connaissances anatomiques a priori sont introduites pour guider la déformation. Elles sont dérivées de points de repères détectés automatiquement au cours des déformations. La détection et la contrainte reposent sur des motifs anatomiques stables au bord des structures segmentées. La méthode est évaluée sur des jeunes sujets sains.

## 2. Méthode

Ce processus de déformation de régions peut être interprété comme un problème de classification de voxels au bord des objets en cours de segmentation, qui ont pour objectifs l'hippocampe et l'amygdale. Comme dans [13] pour

le cortex, les régions se déforment en suivant des transformations préservant la topologie donnée par la scène initiale (deux graines), dans un formalisme markovien.

Nous avons de plus introduit des contraintes anatomiques, dérivées de connaissances utilisées par les neuroanatomistes pour la segmentation manuelle. Ceci avait déjà été proposé dans [14] dans un formalisme différent. Dans notre cas, l'information, locale, est dérivée de structures anatomiques voisines ou internes à l'hippocampe et l'amygdale : l'alveus, la fimbria, le gyrus parahippocampique, la corne temporale du ventricule latéral et le limen insulae. Des points de repère sont détectés automatiquement au bord des objets en cours de déformation. Les règles utilisent des motifs définis à la fois dans le champ d'étiquette et l'IRM, uniquement sur le 26-voisinage d'un voxel ; le formalisme markovien est ainsi respecté. De plus, ces motifs sont également présents lorsque les structures sont atrophiées. La segmentation est contrainte en considérant les positions anatomiques des structures par rapport aux points de repère. Le voisinage de chaque point de repère peut alors être partagé en plusieurs zones ayant des probabilités d'appartenance différentes à chaque structure d'intérêt. La contrainte est introduite dans la régularisation.

## 2.1 Initialisation

L'initialisation repose sur l'extraction d'une région d'intérêt (RI) parallélépipédique contenant les deux structures et le positionnement des deux graines selon un protocole précis. La scène initiale comporte trois régions : deux cubes, un autour de chaque graine, et le fond.

La segmentation suit les déformations alternées des fronts des objets : à chaque étape, on considère l'hippocampe puis l'amygdale. Pour chaque front, la déformation correspond à l'optimisation de la classification de voxels sélectionnés dans le voisinage du front actuel et dénommés voxels candidats. Cette procédure, inscrite dans une modélisation bayésienne, est guidée par la minimisation d'une énergie globale.

## 2.2 Déformations

A chaque étape de la croissance globale, les voxels candidats sont déterminés au bord de l'objet considéré. Il s'agit des points simples [15] parmi les voisins du front de l'objet. L'interface entre les deux objets se déformant est détectée lors de cette étape préliminaire : il s'agit des voxels candidats de l'objet en cours de déformation qui sont classés dans l'autre objet. On la considère comme une méta-région lors de la compétition.

Enfin, les points de repère définissant les a priori anatomiques sont détectés. Cette détection repose sur des règles sur les intensités relatives et les positions relatives sur le 26-voisinage des voxels candidats. Une fois les points de repère détectés, on définit grâce à eux trois méta-régions (MR) parmi les voxels candidats : voxels probables pour l'hippocampe, voxels improbables pour l'hippocampe et voxels improbables pour l'amygdale.

Chaque déformation du front est obtenue grâce à l'optimisation de la classification des voxels candidats. Le but de la classification est alors de déterminer si chaque voxel candidat appartient à l'hippocampe ( $O_H$ ), à l'amygdale ( $O_A$ ) ou au fond ( $F_{HA}$ ). Elle est dictée par la minimisation d'une fonction d'énergie calculée sur l'ensemble des voxels de la

région d'intérêt.  $E_{RI}$  est la somme des énergies pour les méta-régions détectées au début de l'étape courante. Elle s'écrit :

$$E_{RI} = \sum_{MR} \left[ \sum_{v \in O_H \cap MR} E^{O_H \cap MR}(v) + \sum_{v \in O_A \cap MR} E^{O_A \cap MR}(v) \right] + \left[ \sum_{v \in O_H - \{MR\}} E^{O_H}(v) + \sum_{v \in O_A - \{MR\}} E^{O_A}(v) + \sum_{v \in F_{HA}} E^{F_{HA}}(v) \right] \quad (1)$$

Les énergies sont calculées différemment pour chaque méta-région, afin d'introduire la contrainte anatomique.

La minimisation de l'énergie de l'IRM est entreprise grâce à un algorithme d'optimisation de type modes conditionnels itérés (ICM) [16] sur l'ensemble des voxels candidats de l'objet en cours de déformation. Lors de cette procédure, la valeur de l'énergie globale est comparée pour les classifications possibles de chaque voxel candidat. Comme les voxels candidats sont considérés de façon séquentielle, ceci revient à comparer les énergies locales deux à deux pour chacun. Chaque voxel candidat est alors classé dans l'objet qui minimise son énergie locale.

Par exemple, pour l'hippocampe, la classification se fait en considérant deux sous-ensembles parmi les voxels candidats. Pour les voxels n'appartenant pas à l'interface, on compare les énergies de  $O_H$  et de  $F_{AH}$ . Pour les voxels de l'interface dans chaque objet, on compare les énergies de  $O_H$  et de  $O_A$ .

## 2.3 Énergie

L'énergie est composée de cinq termes. Deux termes caractérisent l'attache aux données : globale, par rapport à l'intensité moyenne de l'objet, et locale, par rapport aux gradients au niveau des bords. Trois termes caractérisent la régularisation : régularité de la frontière (Ising) et prévention d'une trop forte croissance, en utilisant des contraintes sur les le volume et la surface (tolérance établie en considérant la variabilité interindividuelle). Les termes d'énergie sont définis différemment pour le fond, car certaines caractéristiques (intensité moyenne, volume...) n'ont pas de sens. L'influence relative des termes est ajustée par des paramètres inclus dans les termes d'énergie.

$$E^O(v) = E_G^O(v) + E_L^O(v) + E_I^O(v) + E_V^O(v) + E_S^O(v) \quad (2)$$

### 2.3.1 Attache aux données globale

Elle compare l'intensité au voxel  $v$ ,  $i(v)$ , et l'intensité moyenne sur l'objet  $O$ ,  $\tilde{i}^O$ , avec une tolérance donnée par  $\sigma_G^O$ . Comme une intensité moyenne n'a pas de sens pour le fond, son énergie est construite pour exclure les intensités correspondant à l'hippocampe et l'amygdale :

$$\begin{cases} E_G^O(v) = \left( \frac{i(v) - \tilde{i}^O}{\sigma_G^O} \right)^2 \\ E_G^{F_{HA}}(v) = \frac{1}{E_G^{O_{HA}} + \varepsilon} \end{cases} \quad (3)$$

### 2.3.2 Attache aux données locale

$E_L$  permet la détection de voxels créant des motifs de fort gradient avec  $O$ . Les gradients sont définis par rapport à  $\sigma_L^O$ , tolérance en intensité locale autour de  $\hat{i}^O(v)$ , intensité

moyenne locale de  $O$ .  $E_L$  est tronquée afin de neutraliser son effet pour les intensités incluses dans la plage d'intensité locale  $\hat{i}^o(v) \pm \sigma_L^o$ , afin de ne pas favoriser les faibles gradients. Pour le fond,  $E_L$  est construit comme  $E_{G_{HA}}^o$ :

$$if \left| i(v) - \hat{i}^o(v) \right| \geq \sigma_L^o, E_L^o(v) = \left( \frac{i(v) - \hat{i}^o(v)}{\sigma_L^o} \right)^2, \quad (4)$$

$$else, E_L^o(v) = 1$$

### 2.3.3 Régularisation

Cette régularisation markovienne compare le nombre de voisins de  $v$  classés dans  $O$ ,  $N^o(v)$ , à sa valeur moyenne,  $\tilde{N}$ , avec une tolérance donnée par  $\sigma_i$ . L'utilisation d'une fonction non linéaire permet de pénaliser les configurations les plus irrégulières.

$$E_i^o(v) = \left( \frac{\tilde{N} - \gamma^o(v) \cdot N^o(v)}{\sigma_i} \right)^5 \quad (5)$$

$\gamma^o$  introduit la contrainte anatomique selon la méta-région : probable,  $\gamma^o = 2$ , improbable,  $\gamma^o = 0,5$ , neutre,  $\gamma^o = 1$ .

Une anisotropie est introduite pour l'hippocampe hors de la méta-région interface. Elle vise à favoriser la croissance vers la queue, en renforçant le poids de 4 voisins particuliers  $V_4^T$  dans le 26-voisinage de  $v$ . Ces voxels sont toujours classés dans l'hippocampe lorsque  $v$  doit être classé dans l'hippocampe pour assurer une propagation correcte dans la queue. Pour augmenter la robustesse,  $V_4^T$  est considéré globalement ( $\delta_o$  est la fonction caractéristique de l'objet  $O$ ) :

$$N_{anisotrope}^{O_H}(v) = N^{O_H}(v) + 4 \cdot \delta_{O_H}(V_4^T(v)) \quad (6)$$

### 2.3.4 Volume et Surface

Leur rôle est d'empêcher que les objets ne grossissent lorsque leur volume (nombre de voxels,  $V$ ) et surface (nombre de voxels surface,  $S$ ) atteignent des valeurs irréalistes au delà de seuils donnés ( $V^*$  and  $S^*$ ), avec une tolérance définie par  $\sigma_v^o$  et  $\sigma_s^o$ . Comme ces caractéristiques géométriques n'ont pas de sens pour le fond, une force de pression a été introduite, qui permet de favoriser la croissance ( $\theta$  positif). L'expression est identique pour  $S$ .

$$\begin{cases} if V(v) < V^*, E_v^o(v) = 0, else, E_v^o(v) = \left( \frac{V(v) - V^*}{\sigma_v^o} \right)^2 \\ E_{v_{HA}}^{B_{HA}}(v) = \theta \end{cases} \quad (7)$$

### 2.3.5 Estimation des paramètres

Plusieurs paramètres sont introduits dans la définition de la fonction d'énergie. La plupart sont communs pour les deux objets ; ils sont fixés d'après une étude empirique sur un ensemble de sujets ( $\varepsilon$ ,  $\theta$ ) ou selon des propriétés géométriques intrinsèques ( $\sigma_i$ ,  $\tilde{N}$ ). Parmi les paramètres dépendant de l'objet, les seuils et tolérances en volume et en surface nécessaires pour éviter de grossières sur-segmentations ont été fixés selon des valeurs moyennes standard en prenant en compte la variabilité maximale. Les paramètres pour la détection des points de repère sont dérivés de propriétés géométriques et radiométriques intrinsèques.

Les paramètres radiométriques dépendent intrinsèquement du sujet. Ils sont dérivés d'une analyse automatique de l'histogramme sur la région d'intérêt.

## 3. Résultats

Nous avons testé notre méthode sur huit IRM de jeunes sujets sains (âge < 35 ans) acquises sur un scanner GE Signa, 1,5 Tesla. La séquence est une IR-FSPGR, d'orientation axiale (coupes de 1,3 mm ou 1,5 mm), la résolution dans les coupes étant de 0,9375x0,9375 mm<sup>2</sup>. La segmentation manuelle suit le protocole établi par un neuroanatomiste [1], et est considérée comme la référence.

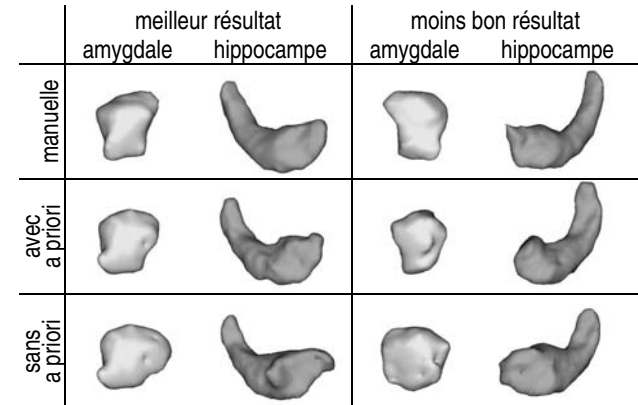


FIG. 1 : rendus 3D des segmentations manuelle, automatique avec et sans contrainte des a priori anatomiques

Nous avons comparé les segmentations avec et sans a priori avec la segmentation manuelle qualitativement (figure 1) et quantitativement. L'évaluation quantitative est basée sur plusieurs indices comparant la segmentation  $S$  avec la référence  $R$  (tableau 1).

TAB. 1 : indices quantitatifs

$RV(O^S, O^R)$	$K(O^S, O^R)$	$IMV(O_1^S, O_2^R)$
$2 \frac{ V_{O^S} - V_{O^R} }{V_{O^S} + V_{O^R}}$	$2 \frac{V_{O^S \cap O^R}}{V_{O^S} + V_{O^R}}$	$2 \frac{V_{O_1^S \cap O_2^R}}{V_{O_1^S} + V_{O_1^R}}$

L'erreur relative en volume,  $RV$ , compare le volume de la segmentation à celui de la référence. Sa valeur optimale est 0%. Un indice de recouvrement  $K$  apporte une information sur les voxels mal classés. Sa valeur optimale est 100%. Enfin, on introduit un indice  $IMV$  qui quantifie les voxels mal classés à l'interface de deux objets  $O_1$  et  $O_2$ . Sa valeur optimale est 0%. Les valeurs de ces 3 indices sont indiquées dans le tableau 2 pour les huit sujets ;  $S$  est la segmentation automatique avec ou sans la contrainte des a priori anatomiques et  $R$  est la segmentation manuelle.

TAB. 2 : moyenne et écart type des indices quantitatifs sur les 8 sujets : avec (haut) et sans (bas) a priori anatomiques

	hippocampe			amygdale		
%	$RV$	$K$	$IMV$	$RV$	$K$	$IMV$
avec	9±6	84±3	0,8±0,9	14±9	81±3	1,8±1,6
sans	24±7	75±4	5,0±2,9	19±13	73±5	5,0±5,0

Pour évaluer le sens de ces valeurs, on peut quantifier, avec ces indices, l'erreur induite par une translation de 1

voxel en diagonale. Pour l'hippocampe,  $K$  vaut 65% et  $IMV$  vaut 9%. Pour l'amygdale,  $K$  vaut 70% et  $IMV$  vaut 18%. Une érosion ou une dilatation de 1 voxel entraîne une valeur de  $RV$  de 31% pour l'hippocampe et 38% pour l'amygdale.

#### 4. Discussion

La segmentation simultanée de l'hippocampe et de l'amygdale est rapide, environ une minute sur un processeur à 1 GHz avec une RAM de 512MO, contre deux heures pour une segmentation manuelle. Elle est programmée en C++ dans l'environnement de *The Anatomist* [17]. L'inspection visuelle se révèle satisfaisante à la fois au niveau de la forme globale des structures et de l'interface. L'amélioration introduite par les a priori anatomiques est nette. Les indices quantitatifs mettent également en évidence cette amélioration. Les valeurs d' $IMV$  montrent que l'erreur de classification à l'interface est très faible lorsque la segmentation est contrainte par les a priori anatomiques.

Les moyennes sur les huit sujets se révèlent similaires ou meilleures par rapport à celles de la littérature : la valeur de  $K$  est de 84% pour l'hippocampe, et 81% pour l'amygdale, et les erreurs en volumes sont de 9% pour l'hippocampe et 14 % pour l'amygdale. Seules les méthodes qui sont évaluées avec les mêmes indices sur des contrôles sont mentionnées ici. Le recouvrement est de 83% et l'erreur en volume de 6% pour l'hippocampe dans Hogan *et al.* [10], pour un recalage d'atlas « fluide visqueux » nécessitant le placement préalable de 28 points et deux heures de calcul pour la segmentation de l'hippocampe. Le recouvrement est de 88% et l'erreur en volume de 6% dans Shen *et al.* [4], déformation d'un modèle comprenant des informations géométriques locales et globales et sur les déformations possibles, construit d'après une base d'apprentissage; néanmoins, seul l'hippocampe est considéré et 50 points doivent être placés manuellement. Deux méthodes proposent la segmentation des deux structures. Le recouvrement est de 80% pour l'hippocampe et 65% pour l'amygdale et l'erreur en volume de 10% et 15% respectivement dans Fischl *et al.* [8], grâce à une méthode de classification guidée par un atlas probabiliste encodant des informations spatiales. La méthode de recalage guidée par des modes d'apparences (forme et intensité) déterminés à partir d'une base d'apprentissage de Duchesne *et al.* [7] permet d'obtenir des recouvrements de 68% pour l'hippocampe et 63% pour l'amygdale.

Dans ces méthodes, la segmentation est guidée par des a priori de forme ou de déformation issues d'une base d'apprentissage ou d'un atlas. Une évaluation sur des patients de toutes les méthodes serait nécessaire pour les comparer pleinement. La méthode présentée ici n'utilise aucun a priori statistique dérivé d'échantillons particuliers. Elle devrait donc s'avérer adaptée pour l'extraction de structures atrophiées. Une première évaluation sur les patients atteints de la maladie d'Alzheimer a été entreprise [18].

La méthode de déformation homotopique compétitive de régions peut être appliquée à d'autres structures. Elle a été entreprise précédemment pour les noyaux gris centraux, avec des contraintes de forme [19]. De plus, les a priori anatomiques relationnels et basés sur des points de repères sont adaptables à d'autres structures pour lesquelles la segmentation manuelle est guidée par de tels points.

#### Références

- [1] D. Hasboun *et al.*, *MR determination of hippocampal volume: comparison of three methods*, AJNR, vol.17, pp.1091-1098, 1996
- [2] A. Kelemen *et al.*, *Elastic Model-Based Segmentation of 3-D Neuroradiological Data Sets*, IEEE TMI, vol.18, pp.828-839, 1999
- [3] S.M. Pizer *et al.*, *Segmentation of Single-Figure Object by Deformable M-reps*, MICCAI, vol.2208, pp.862-871, 2001
- [4] D. Shen *et al.*, *Measuring Size and Shape of the Hippocampus in MR Images Using a Deformable Shape Model*, Neuroimage, Vol.15-2, pp.422-434, 2002
- [5] A. Pitiot *et al.*, *Adaptive Elastic Segmentation of Brain MRI via Shape-Model-Guided Evolutionary programming*, IEEE TMI, vol.21, pp.910-923, 2002
- [6] J. Yang *et al.*, *Neighbor-Constrained Segmentation With Level Set Based 3-D Deformable Models*, IEEE TMI, vol.23, pp.940-948, 2004
- [7] S. Duchesne *et al.*, *Appearance-based segmentation of medial temporal lobe structures*, Neuroimage, vol.17, pp.515-531, 2002
- [8] B. Fischl *et al.*, *Whole Brain Segmentation: Automated Labelling of Neuroanatomical Structures in the Human Brain*, Neuron, vol.33, pp.341-355, 2002
- [9] B.M. Dawant *et al.*, *Automatic 3-D Segmentation of Internal Structures of the Head in MR Images Using a Combination of Similarity and Free-Form Transformation*, IEEE TMI, vol.18, pp.909-916, 1999
- [10] R.E. Hogan *et al.*, *Mesial Temporal Sclerosis and Temporal Lobe Epilepsy: MR Imaging Deformation-based Segmentation of the Hippocampus in Five Patients*, Radiology, vol.216, pp.291-297, 2000
- [11] E.A. Ashton *et al.*, *A Novel Volumetric Feature Extraction Technique with Applications to MR Images*, IEEE TMI, vol.16, pp.365-371, 1997
- [12] A. Ghanei *et al.*, *A 3D Deformable Surface Model for Segmentation of Objects from Volumetric Data in Medical Images*, Comput. Biol. Med., vol.28, pp.239-253, 1998
- [13] J.-F. Mangin *et al.*, *Deformable Topological Models for Segmentation of 3D Medical Image*, XIVth. IPMI, Brest, France, Kluwer Academic Press, pp.153-164, 1995
- [14] V. Barra *et al.*, *Automatic Segmentation of Subcortical Brain Structures in MR Images Using Information Fusion*, IEEE TMI, vol.20(7), pp.549-568, 2001
- [15] G. Malandain *et al.*, *Topological Segmentation of Discrete Surfaces*, Int. J. of Comp. Vis., vol.10(2), pp.183-197, 1993
- [16] J. Besag, *On the Statistical Analysis of Dirty Pictures (with discussion)*, J. R. Stat. Soc. [Ser B], vol.48, pp.259-302, 1986
- [17] D. Rivière *et al.*, *A Structural Browser for Human Brain Mapping*, HBM 2000, vol.11(5), pp.912, 2000
- [18] M. Chupin *et al.*, *Competitive Segmentation of the Hippocampus and the Amygdala. Volumetry in Alzheimer's Disease*, HBM2004, 2004
- [19] F. Poupon *et al.*, *Multi-Object Deformable Templates Dedicated to Segmentation of Brain Deep Structures*, MICCAI, Lecture Notes in Computer Science, vol.1496, pp.1134-1143, 1998

# Compensation de déformations en tomographie dynamique

Laurent DESBAT<sup>1</sup>, Sébastien ROUX<sup>1,2</sup>, Pierre GRANGEAT<sup>2</sup>

<sup>1</sup>TIMC-IMAG

In3S, Faculté de Médecine, UJF, 38706, France

<sup>2</sup>LETI

CEA-DRT, 17 av. des Martyrs, 38000 Grenoble France

Laurent.Desbat@imag.fr, GRANGEAT@chartreuse.cea.fr

**Résumé** — L’objet de cette étude est la reconstruction tomographique d’objets ou d’organes qui se déforment au cours de l’acquisition des projections dans un scanner. Notre approche est celle de la compensation analytique des déformations lors de la reconstruction par adaptation des algorithmes de type FBP rapides et modernes (contexte de la reconstruction de ROI, Région d’Intérêt). Dans la thèse de Sébastien Roux, des compensations analytiques de déformations affines ont été établies. Nous proposons ici d’étendre ces résultats à des classes de déformations beaucoup plus vastes qui ne conservent que les droites de mesure (et pas nécessairement toutes les droites du plan).

**Abstract** — The framework of this paper is dynamic tomography. The measured object or organs are no-longer supposed to be static in the scanner during the acquisition but are supposed to move or to be deformed. Our approach is the analytic deformation compensation during the reconstruction by the adaptation of fast and modern FBP algorithms (adaptation of ROI [Region of Interest] FBP methods). In Roux’s PhD thesis, analytic compensations of affine deformations have been established. We propose here to extend this work on much wider deformation classes. We consider deformations preserving the integration lines of each projection acquisition (and not necessarily all the lines in the plane).

## 1 Introduction et notations

Ce travail est une contribution à la compensation des mouvements en tomographie. Ces dernières années de nombreux travaux ont été effectués sur ce sujet, principalement motivés par l’imagerie cardiaque. En effet, la reconstruction d’organes en mouvement rapide souffre de nombreux artefacts. Des méthodes de reconstruction synchronisée par l’ECG ont été proposées [3, 2]. L’ajustement de paramètres d’acquisition à la période cardiaque ainsi que l’optimisation de schémas d’échantillonnage ont aussi été proposés pour l’amélioration des images reconstruites [6].

Notre travail suit l’approche de Crawford et al [1] et Roux et al [7]. L’idée est d’introduire un modèle de déformation  $\vec{\Gamma}_t$  (supposé connu) dépendant du temps ( $t$ ) dans la reconstruction.  $\vec{\Gamma}_t$  est une bijection sur l’espace  $\mathbb{R}^2$  en  $2D+t$ . Soit  $f_t$  la fonction d’atténuation au temps  $t$ , nous supposons que  $f_t(\vec{x}) = f(\vec{\Gamma}_t(\vec{x}))$ , où  $f$  est la fonction d’atténuation de référence (par exemple à  $t = 0$ ). Ainsi  $\vec{\Gamma}_t(\vec{x})$  transforme simplement  $\vec{x}$  au temps  $t$  à sa position au temps de référence ( $t = 0$ ). Nous supposons dans toute la suite que  $\vec{\Gamma}_t$  est une déformation suffisamment régulière ainsi que son inverse.

Dans [7] la compensation de déformations est incorporée dans l’algorithme de reconstruction analytique. La méthode est exacte pour des déformations affines  $\vec{\Gamma}_t$ , dépendantes du temps d’acquisition, en tomographie 2D+ $t$  parallèle et fan-beam (une généralisation en 3D+ $t$  est donnée dans [5]). La méthode de reconstruction 2D+ $t$  fan-beam avec compensation des déformations affines (dépendantes

du temps) de [7] est basée sur l’adaptation de celle Noo et al [4]. Elle repose sur l’idée majeure que l’espace des droites est invariant par transformation affine.

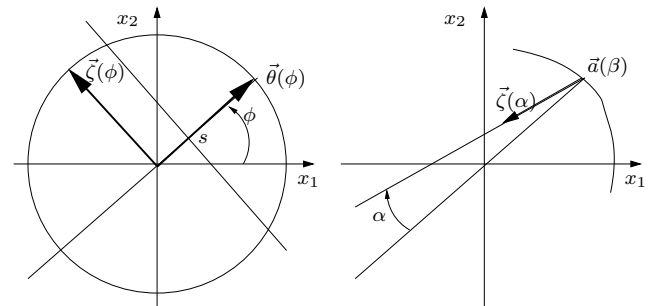


FIG. 1: paramètres de la géométrie parallèle (gauche) et fan-beam (droite)

Pour conserver les “bonnes propriétés” des formules d’inversion FBP en tomographie, il semble suffisant de ne préserver seulement la propriété suivante : les droites d’acquisitions au temps  $t$  sont transformées en droites au temps de référence  $t = 0$  par la déformation  $\vec{\Gamma}_t$ . C’est l’idée de base de ce travail. Dans la suite nous donnons nos principaux résultats obtenus pour des déformations qui préservent les droites parallèles d’acquisition (i.e., qui transforment les droites parallèles d’acquisition en droites parallèles à  $t = 0$ ), et celles qui préservent la géométrie des droites en éventail (fan-beam). Ces déformations contiennent, bien entendu, les transformations affines. Nous proposons une méthode de compensation analytique d’une sous classe de

ces déformations. Ce travail constitue une généralisation de [7] (la classe des déformations que nous savons compenser au temps  $t$  est de dimension infinie et contient la classe des déformations affines).

### 1.1 Géométrie parallèle

Nous considérons la transformée de Radon 2D d'une fonction  $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)$  (géométrie parallèle)

$$g_{\mathcal{P}}(\phi, s) = \mathcal{P}f(\phi, s) = \int_{\mathbb{R}} f(s\vec{\theta}(\phi) + l\vec{\zeta}(\phi)) dl,$$

où  $\phi \in [0; 2\pi[$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{\zeta}(\phi) = (-\sin \phi, \cos \phi)^t \in S^1$ , et  $\vec{\theta}(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi)^t \in S^1$  ( $S^1$  est le cercle unité), voir la figure 1. La fonction  $\mathcal{P}_{\phi}f$  telle que  $\mathcal{P}_{\phi}f(s) = \mathcal{P}f(\phi, s)$  est appelée projection parallèle à angle  $\phi$ . En rotation uniforme, la phase  $\phi$  est, à un changement d'échelle près, le temps  $t$ .

### 1.2 Géométrie fan-beam

La transformée en rayon divergent (ou fan-beam) de  $f$  est :

$$g_{\mathcal{D}}(\beta, \alpha) = \mathcal{D}f(\beta, \alpha) = \int_0^{+\infty} f(\vec{a}(\beta) + l\vec{\zeta}(\alpha)) dl,$$

où  $\vec{a}(\beta)$  est la position de la source,  $\beta$  est le paramètre de la trajectoire de la source (en pratique, c'est le temps  $t$ ),  $\vec{\zeta}(\alpha) \in S^1$  est la direction unitaire de la droite d'intégration passant par la source et le détecteur repéré classiquement par l'angle  $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ , voir la figure 1.

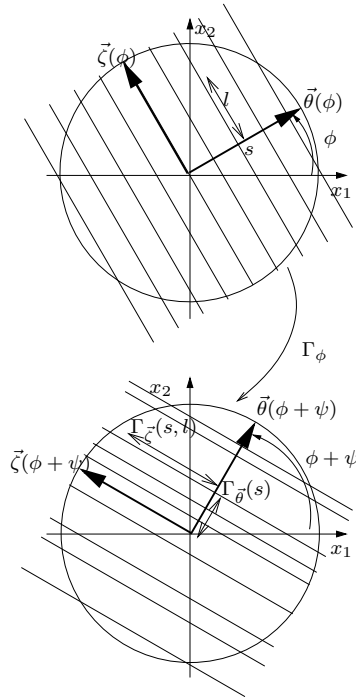


FIG. 2: déformations  $\vec{\Gamma}_{\phi}$  en géométrie parallèle

## 2 Déformations

### 2.1 Géométrie parallèle

Pour la géométrie parallèle, nous considérons les déformations  $\vec{\Gamma}_{\phi}$  qui transforment un faisceau de droites parallèles  $\vec{x} \cdot \vec{\theta}(\phi) = s$  ( $\phi$  est fixé et  $s \in \mathbb{R}$  varie) en un faisceau de droites parallèles  $\vec{\Gamma}_{\phi}(\vec{x}) \cdot \vec{\theta}(\phi + \psi(\phi)) = \Gamma_{\vec{\theta}}(s)$ . Elles sont de la formes :

$$\vec{\Gamma}_{\phi}(\vec{x}) = R_{\psi(\phi)} \left( \Gamma_{\vec{\theta}}(\vec{x} \cdot \vec{\theta}(\phi)) \vec{\theta}(\phi) + \Gamma_{\vec{\zeta}}(\vec{x}) \vec{\zeta} \right) \quad (1)$$

où  $R_{\psi}$  est une rotation d'angle  $\psi$ ,  $\Gamma_{\vec{\zeta}}(\vec{x})$  est une fonction réelle de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\Gamma_{\vec{\theta}}$  est monotone et  $\psi$  est suffisamment régulière, voir la figure 2.

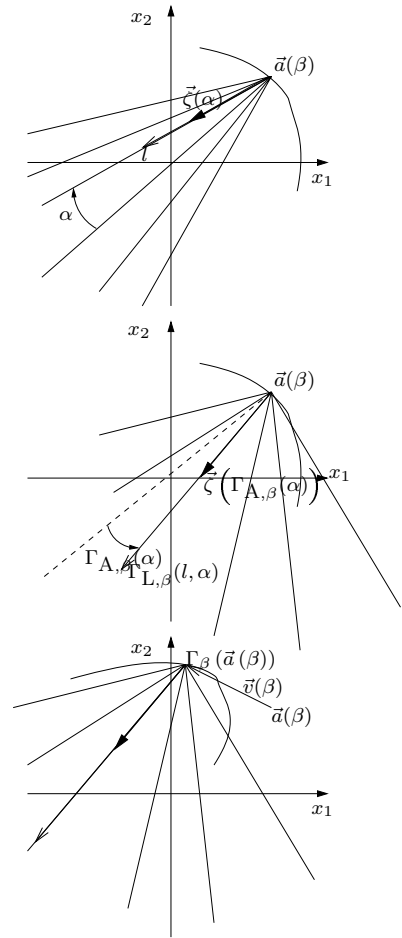


FIG. 3: déformation  $\vec{\Gamma}_{\beta}$  en géométrie fan-beam

### 2.2 Géométrie fan-beam

Pour la géométrie fan-beam, nous considérons les déformations  $\vec{\Gamma}_{\beta}$  qui transforment un faisceau en éventail (fan) en un fan. Elles peuvent se décomposer en une translation de la source et une déformation du fan à source fixée :

$$\vec{\Gamma}_{\beta}(\vec{x}) = \vec{T}_{\vec{v}(\beta)} \left( \vec{a}(\beta) + \Gamma_{L,\beta}(l, \alpha) \vec{\zeta} \left( \Gamma_{A,\beta}(\alpha) \right) \right) \quad (2)$$

où  $\vec{T}_{\vec{v}(\beta)}$  est la translation de vecteur  $\vec{v}(\beta)$  et ici  $\vec{v}(\beta) = \vec{\Gamma}_{\beta}(\vec{a}(\beta)) - \vec{a}(\beta)$ . On choisira  $\Gamma_{A,\beta}$  monotone en  $\alpha$  et  $\Gamma_{L,\beta}(l, \alpha)$

monotone en  $l$  à  $\alpha$  fixé telle que  $\Gamma_{L,\beta}(0, \alpha) = 0$ , voir la figure 3.

### 2.3 Déformations affines

Il est simple de montrer que les déformations affines  $\Gamma_t(\vec{x}) = A_t \vec{x} + \vec{b}_t$  (où  $A_t$  est une matrice  $2 \times 2$ ), peuvent se mettre sous la forme (1) ( $t = \phi$ ) ou (2) ( $t = \beta$ ). Les classes que nous considérons dans ce travail les contiennent et sont infiniment plus vastes.

## 3 Résultats

Dans [7] la fonction  $f$  (et donc  $f_{\vec{\Gamma}_t}$ ) est reconstruite par une méthodes analytique FBP à partir de la transformée parallèle ou divergente  $\mathcal{T}f_{\vec{\Gamma}_t}$  de  $f_{\vec{\Gamma}_t}$ , plus précisément à partir de  $\mathcal{P}f_{\vec{\Gamma}_\phi}(\phi, s)$  ( $\mathcal{T} = \mathcal{P}$  et  $t = \phi$ ) ou  $\mathcal{D}f_{\vec{\Gamma}_\beta}(\beta, \alpha)$  ( $\mathcal{T} = \mathcal{D}$  et  $t = \beta$ ), lorsque  $\vec{\Gamma}_t$  est affine.

Nous montrons ici que les déformations  $\vec{\Gamma}_t$  appartenant à une sous classe des déformations de la forme (1) ou (2) peuvent s'écrire sous la forme :  $\vec{\Gamma}_t = \vec{A}_t \circ \vec{\Delta}_t$ , où  $\vec{A}_t$  est affine et  $\vec{\Delta}_t$  est telle que  $\mathcal{T}_t f_{\vec{\Delta}_t}$  peut-être directement déduit de  $\mathcal{T}_t f$ . Plus précisément, nous restreignons les déformations dans la direction  $\zeta$  dans (1) ou (2) à être affine, voir respectivement (3) et (6). Ces déformations peuvent donc être analytiquement compensées dans un algorithme FBP. En effet, à partir des deux résultats suivants (4) et (7), on peut compenser la déformation  $\vec{\Delta}_t$  directement sur les données à  $t$  fixé, alors que la partie affine  $\vec{A}_t$  est compensée par [7].

### 3.1 Géométrie parallèle

Si

$$\begin{aligned} \vec{\Delta}_\phi(\vec{x}) &= \Delta_\theta(\vec{x} \cdot \vec{\theta}(\phi)) \vec{\theta}(\phi) \\ &+ \left( b(\vec{x} \cdot \vec{\theta}(\phi)) + c(\vec{x} \cdot \vec{\theta}(\phi)) (\vec{x} \cdot \vec{\zeta}(\phi)) \right) \vec{\zeta}(\phi) \end{aligned} \quad (3)$$

où  $c$  est une fonction réelle strictement positive alors

$$\mathcal{P}_\phi f_{\vec{\Delta}_\phi}(s) = \frac{1}{c(s)} \mathcal{P}_\phi f(\Delta_\theta(s)) \quad (4)$$

Donc si dans (1)  $\Gamma_{\vec{\zeta}}(\vec{x})$  est de la forme  $\Gamma_{\vec{\zeta}}(\vec{x}) = b(\vec{x} \cdot \vec{\theta}(\phi)) + c(\vec{x} \cdot \vec{\theta}(\phi)) \vec{x} \cdot \vec{\zeta}(\phi)$ , comme  $\vec{\Gamma}_\phi = R_{\psi(\phi)} \circ \vec{\Delta}_\phi$  nous avons  $\mathcal{P}f_{\vec{\Gamma}_\phi}(\phi, s) = \mathcal{P}f_{R_{\psi(\phi)} \circ \vec{\Delta}_\phi}(\phi, s) = \frac{1}{c(s)} \mathcal{P}f_{R_{\psi(\phi)}}(\phi, \Delta_\theta(s))$ . Donc  $\mathcal{P}_\phi f_{R_{\psi(\phi)}}$  peut être calculée directement de  $\mathcal{P}_\phi f_{\vec{\Gamma}_\phi}$  :

$$\mathcal{P}f_{R_{\psi(\phi)}}(\phi, s) = c(\Delta_\theta^{-1}(s)) \mathcal{P}f_{\vec{\Gamma}_\phi}(\phi, \Delta_\theta^{-1}(s)), \quad (5)$$

puis  $f$  peut être reconstruite de  $\mathcal{P}f_{R_{\psi(\phi)}}$  avec l'algorithme FBP donné dans [7].

### 3.2 Géométrie fan-beam

De même si

$$\vec{\Delta}_\beta(\vec{x}) = \vec{a}(\beta) + (b(\alpha) + c(\alpha)l) \vec{\zeta}(\Delta_{A,\beta}(\alpha)) \quad (6)$$

où  $c$  est une fonction réelle strictement positive alors

$$\mathcal{D}_\beta f_{\vec{\Delta}_\beta}(\alpha) = \frac{1}{c(\alpha)} \mathcal{D}_\beta f(\Delta_{A,\beta}(\alpha)). \quad (7)$$

Donc si dans (2)  $\Gamma_{L,\beta}(l, \alpha)$  est de la forme  $(b(\alpha) + c(\alpha)l)$ , comme  $\vec{\Gamma}_\beta = \vec{T}_{\vec{v}(\beta)} \circ \vec{\Delta}_\beta$ , nous avons

$$\mathcal{D}_\beta f_{\vec{\Gamma}_\beta}(\alpha) = \mathcal{D}_\beta f_{\vec{T}_{\vec{v}(\beta)} \circ \vec{\Delta}_\beta}(\alpha) = \frac{1}{c(\alpha)} \mathcal{D}_\beta f_{\vec{T}_{\vec{v}(\beta)}}(\beta, \Delta_{A,\beta}(\alpha)) \quad (8)$$

Ainsi  $\mathcal{D}_\beta f_{\vec{T}_{\vec{v}(\beta)}}$  est calculée directement de  $\mathcal{D}_\beta f_{\vec{\Gamma}_\beta}(\alpha)$  :

$$\mathcal{D}_\beta f_{\vec{T}_{\vec{v}(\beta)}}(\alpha) = c(\Delta_{A,\beta}^{-1}(\alpha)) \mathcal{D}_\beta f_{\vec{\Gamma}_\beta}(\Delta_{A,\beta}^{-1}(\alpha)), \quad (9)$$

puis  $f$  est reconstruite de  $\mathcal{D}f_{\vec{T}_{\vec{v}(\beta)}}$  avec un algorithme FBP donné dans [7].

## 4 Expérimentations numériques

Dans la suite, nous illustrons la formule (9) dans le cas de la géométrie fan-beam. Nous considérons une géométrie d'acquisition telle que la source décrit une trajectoire circulaire de rayon  $r = 3$ . Le support de l'objet mesuré est contenu dans le disque unitaire (de rayon  $\rho = 1$ ). Nous avons simulé deux tours de scanner ( $n_T = 2$ ), c'est à dire  $\beta \in [0, 4\pi[$ ,  $\vec{a}(\beta) = r(\cos \beta, \sin \beta)$ , avec un échantillonnage angulaire de  $n_\beta = 256$  projections par tour. Chaque projection est mesurée suivant  $[-\alpha_M, \alpha_M]$  avec  $\alpha_M = \arcsin(1/r)$  et échantillonnée régulièrement suivant  $n_\alpha = 128$  mesures. Plus précisément nous avons simulé  $\mathcal{D}f_{\vec{\Gamma}_\beta}(\beta_p, \alpha_j)$  avec  $\beta_p = p * 2\phi/n_\beta, p = 0, \dots, n_T n_\beta - 1$ ;  $\alpha_j = (j + 0.5)2\alpha_M/n_\alpha, j = 0, \dots, n_\alpha - 1$ .

Notre fantôme numérique  $f$  est l'image  $256 \times 256$  pixelisée de l'indicatrice d'un cercle de rayon 0,1 et de centre (0,3;0,3), voir figure 4.

Nous considérons d'abord une déformation  $\vec{\Gamma}_3$  de la forme (2) avec  $\vec{v}(\beta) = \vec{0}$  (translation nulle  $\forall \beta$ , donc la trajectoire circulaire est conservée par la transformation),

$$\Gamma_{3A,\beta}(\alpha) = \alpha^3 / \alpha_M^2, \Gamma_{3L,\beta}(l, \alpha) = l$$

donc  $\Gamma_{3A,\beta}$  est indépendante de  $\beta$ , et  $\Gamma_{3L,\beta}(l, \alpha)$  est l'identité en  $l$  indépendamment de  $\beta$  et  $\alpha$ .

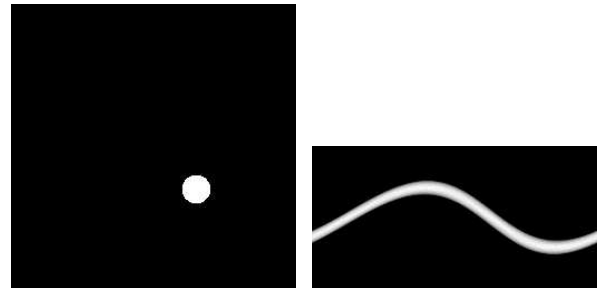


FIG. 4: fantôme statique (gauche) et sinogramme associé (droite)

Dans la figure 4 nous représentons l'image de notre fantôme numérique statique et le sinogramme  $256 \times 128$  produit sur un tour, c'est à dire l'image de  $\mathcal{D}f(\beta_p, \alpha_j)$ ,  $p = 0, \dots, n_\beta - 1, j = 0, \dots, n_\alpha - 1$ .

Dans la figure 5 nous représentons les déformations du fantôme à différents  $\beta$ , c'est à dire l'image de  $f_{\vec{\Gamma}_\beta}$ , ainsi que le sinogramme du fantôme dynamique  $\mathcal{D}f_{\vec{\Gamma}_\beta}(\beta_p, \alpha_j)$  produit sur un tour.

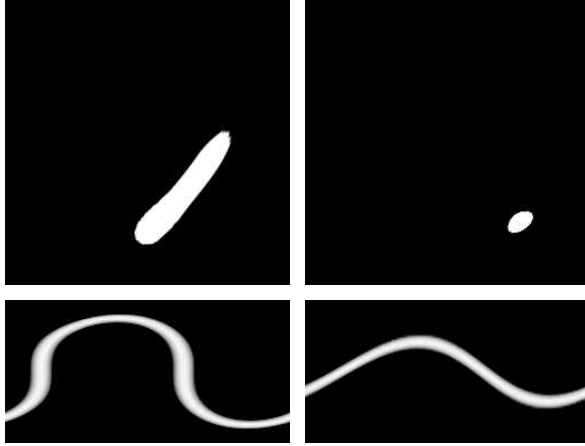


FIG. 5: Déformations  $\Gamma_3$  du fantôme dynamique visualisées à deux différents  $\beta_p$  ( $p = 37$  et  $p = 100$ ); Deuxième ligne à gauche : sinogramme associé ( $\beta_p, p = 0, \dots, n_\beta - 1$ ); à droite : sinogramme du fantôme dynamique compensé suivant (9) qu'on peut comparer à celui de la figure 4

Nous représentons en bas à droite, le sinogramme obtenu par compensation de la déformation par la formule (9) (formule de “rebinning” implémentée par simple interpolation linéaire). Nous constatons visuellement que la déformation est corrigée dans les données en comparant avec le sinogramme du fantôme statique donné dans la figure 4.

Nous considérons maintenant une déformation  $\Gamma_m$  de la forme (2) identique à  $\vec{\Gamma}_3$  sauf pour

$$\Gamma_{m\mathbf{A},\beta}(\alpha) = \left(1 - \frac{\beta}{4\pi}\right) \frac{\alpha^3}{\alpha_M^2} + \frac{\beta}{4\pi} \ln(\alpha),$$

où  $\ln(\alpha)$  est antisymétrique, linéaire par morceau et définie par  $\ln(0, 5\alpha_M) = 0, 6\alpha_M$  et  $\ln(\alpha_M) = \alpha_M$ .

Donc  $\Gamma_{m\mathbf{A},\beta}$  est ici dépendante de  $\beta$ , à travers le mélange linéaire en  $\beta$  qui fait passer sur l'intervalle  $\beta \in [0, 4\pi]$  d'une “déformation en  $\alpha^3$ ” à une déformation linéaire par morceaux en  $\alpha$ .

Dans la figure 6 nous représentons les déformations du fantôme pour deux valeurs  $\beta_p$ ,  $p = 293$  et  $p = 356$  (exactement un tour de plus par rapport à la figure 5; on constate une différence car la déformation en  $\alpha$ ,  $\Gamma_{m\mathbf{A},\beta}$  est alors majoritairement marquée par  $\ln(\alpha)$ ). Nous représentons aussi le sinogramme du fantôme dynamique  $\mathcal{D}f_{\vec{\Gamma}_\beta}(\beta_p, \alpha_j)$  cette fois sur deux tours (sous la forme de deux sinogrammes de longueur  $2\pi$ , c. à d. un par tour).

Nous représentons à droite, les sinogrammes obtenus par compensation de la déformation par la formule (9). Nous constatons visuellement que la déformation est corrigée dans les données en comparant avec le sinogramme du fantôme statique donné dans la figure 4.

## Remerciements

Ce travail a bénéficié en partie de soutien de l'ACI GRID, pro-

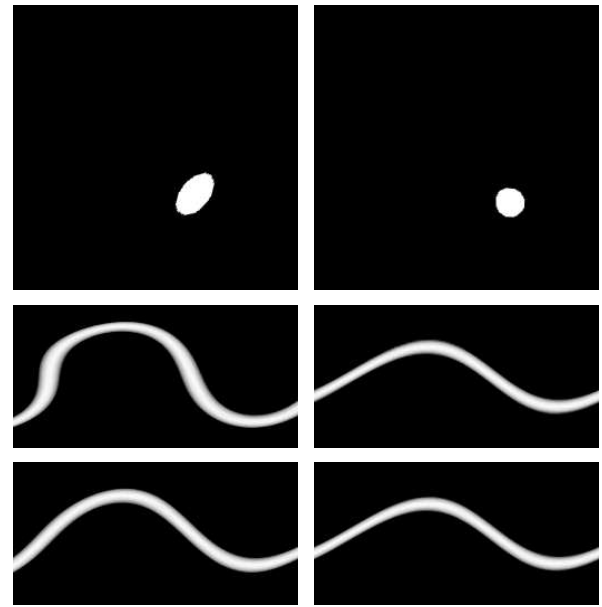


FIG. 6: Déformations  $\Gamma_m$  du fantôme dynamique visualisées à deux différents  $\beta_p$  ( $p = 293$  et  $p = 356$ ); La deuxième ligne, respectivement la troisième, correspond au premier tour, respectivement au second. Deuxième et troisième ligne à gauche : sinogramme associé au fantôme dynamique; à droite : sinogramme du fantôme dynamique compensé suivant (9) qu'on peut comparer à celui de la figure 4

jet CIMENT GRID, de la Région Rhône Alpes, projet RAG-TIME, et bénéficie du projet CIMENT.

## Références

- [1] C.R. Crawford, K.F. King, C.J. Ritchie, and J.D. Godwin. Respiratory compensation in projection imaging using a magnification and displacement model. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 15:327–332, 1996.
- [2] T. Flohr and B. Ohnesorge. Heart rate adaptive optimization of spatial and temporal resolution for electrocardiogram-gated multislice spiral CT of the heart. *Journal of Computer Assisted Tomography*, 25(6):907–923, 2001.
- [3] M. Kachelriess and W. A. Kalender. Electrocardiogram-correlated image reconstruction from subsecond spiral computed tomography scans of the heart. *Medical Physics*, 25(12):2417–2431, December 1998.
- [4] F. Noo, M. Defrise, R. Clackdoyle, and H. Kudo. Image reconstruction from fan-beam projections on less than a short-scan. *Phys. Med. Biol.*, 47:2525–2546, July 2002.
- [5] S. Roux. *Modèles dynamiques en tomographie. Application à l'imagerie cardiaque*. Phd thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble 1, France, 2004.
- [6] S. Roux, L. Desbat, A. Koenig, and P. Grangeat. Efficient acquisition for periodic dynamic CT. *IEEE Transactions on Nuclear Sciences*, 50(5):1672–77, October 2003.
- [7] S. Roux, L. Desbat, A. Koenig, and P. Grangeat. Exact reconstruction in 2D dynamic CT: compensation of time-dependent affine deformations. *Phys. Med. Biol.*, 49(11):2169–82, June 2004.



# Modélisation Markovienne pour l'Estimation Combinée de Forme et de Mouvement : Application au Coeur en Imagerie Scanner Multibarrette.

Antoine SIMON<sup>1</sup>, Mireille GARREAU<sup>1</sup>, Jean-Louis COATRIEUX<sup>1</sup>, Hervé LE BRETON<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire Traitement du Signal et de l'Image, INSERM U642,  
Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, Bât. 22, 35042 Rennes Cedex, France

<sup>2</sup>Centre Cardio-Pneumologique, CHU Pontchaillou, 35033 Rennes, France  
antoine.simon@univ-rennes1.fr, mireille.garreau@univ-rennes1.fr  
jean-louis.coatrieux@univ-rennes1.fr, herve.le.breton@chu-rennes.fr

**Résumé** – Une méthode d'estimation conjointe de forme et de mouvement non rigide à partir de séquences temporelles tri-dimensionnelles est proposée. Basée sur une mise en correspondance surface-volume, elle permet, à partir d'une unique forme segmentée, d'estimer la forme et son mouvement sur toute la séquence. Une modélisation Markovienne combinée à un algorithme de recuit simulé estime les correspondances entre les noeuds du maillage modélisant l'objet à l'instant  $t$  et les voxels du volume à l'instant  $t + 1$ . La méthode a été appliquée à l'extraction de formes et de mouvements cardiaques en tomodensitométrie multibarrette. Les tests, réalisés sur données simulées et données réelles, ont donné des résultats prometteurs.

**Abstract** – We propose a method for joint surface and non-rigid motion estimation from three-dimensional dynamic sequences. Based on a surface-volume matching, it provides, from one unique segmented surface, both the surface and its motion along the whole sequence. A Markovian Model, combined with a simulated annealing process, estimates the correspondences between the nodes of the mesh modeling the object of interest at  $t$  time and the voxels of the volume at  $t + 1$  time. The method has been applied to cardiac surface and motion extraction in Multislice Computed Tomography. Tests realized on simulated and real data have provided promising results.

## 1 Contexte

L'estimation du mouvement cardiaque à partir de séquences d'images tri-dimensionnelles a suscité un grand intérêt de la part de la communauté scientifique au cours des dernières années. D'un grand apport diagnostique dans la lutte contre les cardiopathies, elle a bénéficié de progrès importants réalisés en imagerie dynamique, avec notamment les développements du ciné-IRM, de l'IRM taggué et des scanners multibarrettes.

Les méthodes d'estimation de mouvement 3D à partir de séquences tri-dimensionnelles peuvent être classées en trois principaux types : les méthodes de flot optique [1, 2], les modèles déformables [3–5], et les méthodes de mise en correspondance [6, 7]. Les méthodes de flot optique, si elles permettent d'obtenir un champ de déplacements dense, reposent sur une contrainte (la conservation de l'intensité au cours du temps) difficile à valider dans le cas de la post-synchronisation combinée à la diffusion du produit de contraste. Les méthodes basées sur un modèle déformable paramétrique permettent de décrire la surface et/ou le mouvement grâce à quelques paramètres. Elles nécessitent cependant l'apport d'une connaissance a priori qui permet de contraindre le résultat mais n'est pas sans risque dans le cas de phénomènes pathologiques importants. Les méthodes de mise en correspondance, basées sur la mise en correspondance d'entités suivant des paramètres descriptifs, permettent une description fine à la fois de la surface et du mouvement. Dans la plupart des méthodes de mise en correspondance introduites, les entités utilisées sont issues d'une segmentation

préalable de tous les volumes de la séquence. La qualité du résultat est alors directement liée à la cohérence temporelle de la segmentation, elle-même difficile à assurer. Contrairement à ces approches, la méthode proposée ne nécessite la segmentation que du premier instant de la séquence. En effet celle-ci établit les correspondances entre la surface à l'instant  $t$  et le volume à l'instant  $t + 1$ . Plus précisément, la recherche de correspondances est réalisée entre, à l'instant  $t$ , les noeuds d'un maillage issu d'un processus de segmentation et de reconstruction de surface et, à l'instant  $t + 1$ , les voxels du volume original après application d'un détecteur de contours.

Ce processus de mise en correspondance, appliqué itérativement, permet conjointement de détecter la surface de l'objet dans les différents volumes de la séquence et d'estimer, entre instants successifs, le champ de déplacements 3D associé.

Le processus de mise en correspondance est basé sur la définition d'un modèle de Markov qui, combiné à un algorithme de recuit simulé, permet d'obtenir les correspondances optimales. La méthode, testée sur données simulées et données réelles a donné des résultats permettant de valider la démarche proposée.

## 2 Méthode

Un modèle de champ de Markov est défini afin d'estimer les déplacements entre deux instants successifs. Un champ de déplacements 3D est alors considéré comme une réalisation

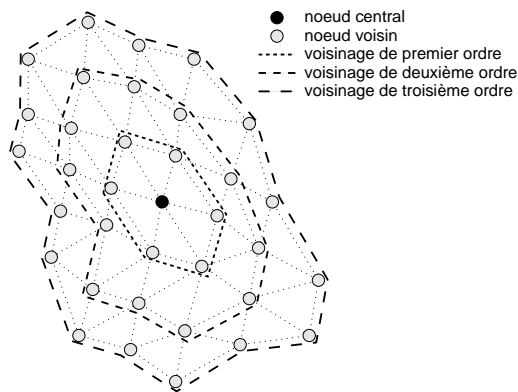


FIG. 1: Voisinage d'un noeud

$f = \{f_i / i = 1, \dots, N_S\}$  du champ de Markov  $F = \{F_i / i = 1, \dots, N_S\}$  regroupant l'ensemble des configurations possibles ( $N_S$  correspondant au nombre de noeuds du maillage à  $t$ ).

Les sites du champ de Markov sont les noeuds du maillage correspondant à l'instant  $t$ . Ce maillage est obtenu par l'application au volume original d'un processus de segmentation et de reconstruction de surface. L'ensemble de ces sites est noté  $S$ .

Les étiquettes affectées à ces sites sont les voxels du volume à  $t + 1$  en correspondance avec les noeuds du maillage à  $t$ .

Le champ  $F$  est un champ de Markov selon un système de voisinage  $V$ , basé sur la connexité des noeuds du maillage (cf. fig. 2). Ce système de voisinage vérifie :

$$\forall i \in S, i \notin V(i) \quad (1)$$

$$\forall \{i, j\} \in S, j \in V(i) \Leftrightarrow i \in V(j) \quad (2)$$

$P(f)$  étant la probabilité associée à la réalisation  $f$ , les propriétés Markoviennes suivantes sont vérifiées :

$$P(f) > 0 \quad \forall f \in F \quad (3)$$

et :

$$P(f_i | f_{S-\{i\}}) = P(f_i | f_{V(i)}) \quad (4)$$

D'après le théorème d'Hammersley-Clifford, si le champ aléatoire  $F$  est un champ de Markov, alors :

$$P(f) = \frac{1}{Z} \exp(-U(f)) \quad (5)$$

où  $Z$  est une constante de normalisation et  $U(f)$  une énergie globale à minimiser pour obtenir la réalisation la plus probable. Cette énergie est définie pour une réalisation  $f$  en relation avec l'observation  $d$  par :

$$U(f, d) = \alpha_1 U_d(f, d) + \alpha_2 U_r(f) \quad (6)$$

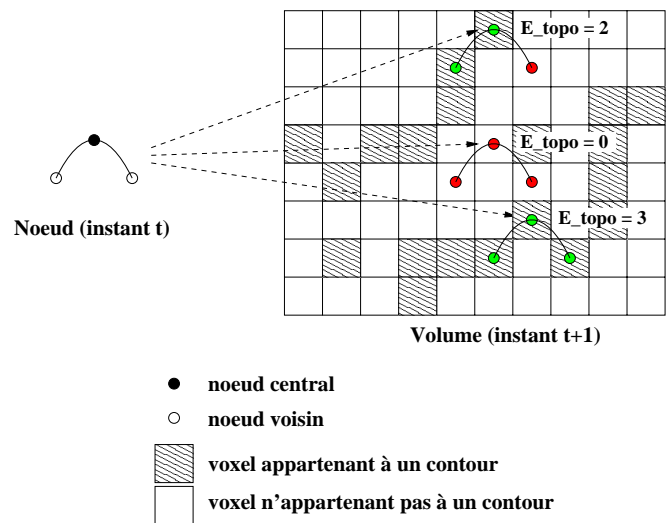
$U_d(f, d)$  est une énergie de correspondance globale,  $U_r(f)$  est l'énergie interne du champ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des facteurs de pondération.

L'énergie de correspondance globale  $U_d(f, d)$ , ou énergie d'adéquation entre observation  $d$  et réalisation  $f$ , est constituée de la somme pondérée, sur l'ensemble des sites  $S$ , de termes permettant d'estimer la correspondance entre le site  $i$  et l'étiquette associée  $f_i$ :

$$U_d(f, d) = \sum_{i \in S} ( \quad \alpha_d \cdot E_{dist}(i, f_i) \quad (7)$$

$$+ \alpha_t \cdot E_{topol}(i, f_i) \quad (7)$$

$$+ \alpha_c \cdot E_{contour}(f_i) \quad (8)$$

FIG. 2: Exemples, en deux dimensions, du calcul de  $E_{topol}(i, f_i)$ .

$\alpha_d$ ,  $\alpha_t$  et  $\alpha_c$  permettent de moduler l'influence de chacun des trois termes.

$E_{dist}(i, f_i)$  correspond à la distance euclidienne entre le noeud considéré et le voxel correspondant et permet de privilégier les correspondances les plus proches.

$E_{contour}(f_i)$  et  $E_{topol}(i, f_i)$  utilisent le résultat de l'application d'un détecteur de contours (implémenté par un filtre de Canny) au volume à  $t + 1$ .

$E_{contour}(f_i)$  permet ainsi de privilégier les voxels appartenant à un contour :

$$E_{contour}(f_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } f_i \notin \text{contour} \\ 1 & \text{si } f_i \in \text{contour} \end{cases}$$

$E_{topol}(i, f_i)$  transpose la topologie locale du noeud considéré au niveau du voxel afin d'estimer la correspondance topologique entre entités (cf. fig. 2 pour une illustration, en deux dimensions et avec un voisinage limité à deux noeuds, du calcul de cette énergie).

L'ensemble de toutes les cliques, noté  $C$  pour l'ensemble du maillage, est défini tel que toute clique  $c \in C$  est composée de deux sites suivant la propriété suivante :

$$\text{pour } c = \{s, t\} \in S^2, t \in V(s) \quad (9)$$

L'énergie de régularisation  $U_r(f)$  est alors donnée par :

$$U_r(f) = \sum_{c=\{s,t\} \in C} \frac{\|\vec{f}_s - \vec{f}_t\|}{dist(s, t)} \quad (10)$$

avec  $dist(s, t)$  la distance euclidienne entre les noeuds  $s$  et  $t$  et  $\vec{f}_s$  (respectivement  $\vec{f}_t$ ) le vecteur mouvement estimé au site  $s$  (respectivement  $t$ ).

La réalisation  $f$  la plus probable est obtenue par minimisation de l'énergie  $U(f)$  (cf. éq. 5). Cette minimisation est réalisée grâce à un algorithme de recuit simulé : à chaque itération, une nouvelle correspondance est évaluée ; en cas de diminution de l'énergie, la correspondance testée est acceptée ; dans le cas inverse, elle est soit acceptée soit rejetée suivant un choix aléatoire et un paramètre de température, décroissant dans le temps et favorisant l'acceptation de ce type de correspondances au début du processus. L'optimisation se termine lorsque le système est stabilisé.

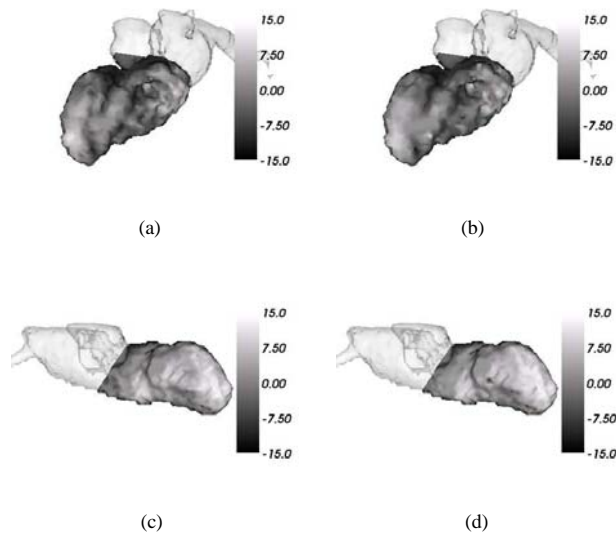


FIG. 3: Amplitude du mouvement simulé (a,c) et estimé (b,d) suivant deux incidences ((a,b): oblique antérieure gauche 45° caudale 25°, (c,d): oblique antérieure droite 30°) (couleurs: en blanc: mouvements dirigés vers l'extérieur des cavités (expansion), en noir: mouvements dirigés vers l'intérieur des cavités (contraction)), échelle donnée en voxels.

### 3 Résultats

#### 3.1 Données simulées

La méthode proposée a été testée sur plusieurs simulations numériques. Afin d'appliquer la méthode de mise en correspondance surface-volume, une surface (correspondant à l'instant  $t$ ) doit être déformée (pour obtenir la surface à l'instant  $t + 1$ ) puis insérée dans un volume. Ce volume doit être traité au préalable afin de simuler au mieux un volume réel après application du détecteur de contours.

Plus précisément, la surface à l'instant  $t$  est une surface réelle obtenue par segmentation puis reconstruction de surface. Elle est soumise à des déformations locales et globales (translation, torsion, rotation, expansion/compression) afin d'obtenir la surface à l'instant  $t + 1$ .

Pour obtenir le volume dans lequel cette surface sera transposée, le volume original correspondant à l'instant  $t$  est filtré par le détecteur de contours puis le contour correspondant à la surface préalablement segmentée est supprimé.

Enfin, la surface déformée est insérée dans ce volume en modifiant la valeur des voxels ayant les mêmes coordonnées que les noeuds du maillage.

Cette technique a permis d'évaluer précisément la méthode proposée et notamment de contrôler l'impact du choix des différents paramètres impliqués que ce soit dans le calcul des énergies ou dans la procédure de minimisation. La figure 3 illustre, suivant deux incidences, un exemple de résultats. En couleur est représentée l'amplitude des mouvements appliqués (a,c) et celle des mouvements estimés (b,d). En blanc sont représentés les mouvements dirigés vers l'extérieur du volume et en noir les mouvements dirigés vers l'intérieur. L'erreur moyenne d'estimation a été calculée et correspond, sur cet exemple, à un voxel.

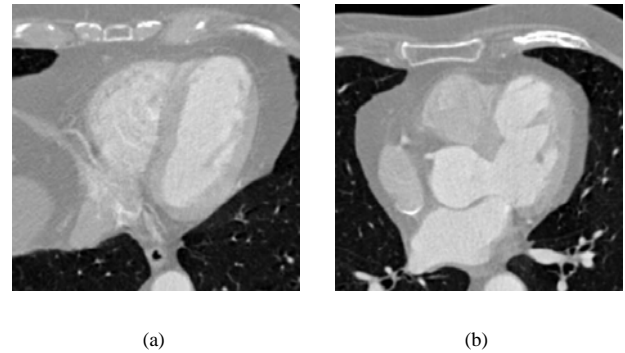


FIG. 4: Coupes extraites d'un même volume original.

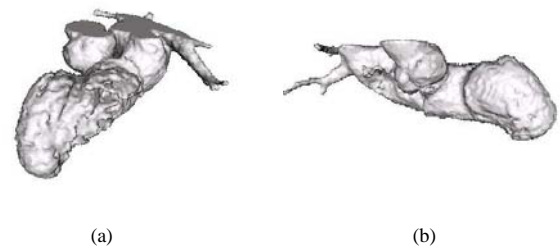


FIG. 5: Surface reconstruite après la segmentation du volume correspondant au premier instant de la séquence (incidences: (a): oblique antérieure gauche 45° caudale 25°, (b): oblique antérieure droite 30°).

#### 3.2 Données réelles

La méthode proposée a été appliquée sur données réelles, acquises sur un scanner multibarrette Siemens Somatom. La base, constituée de dix volumes représentant un cycle cardiaque, a une résolution spatiale de  $0.3 \times 0.3 \times 0.6$  mm (cf. fig. 4). Le premier volume a été segmenté par un processus de croissance de région limité par un gradient [8] puis la surface extraite reconstruite par l'algorithme des Marching Cubes (cf. fig. 5). A partir de cette première segmentation, la méthode d'estimation conjointe de la forme et du mouvement a été appliquée à l'endocarde ventriculaire gauche, à une résolution inférieure, sur toute la séquence après application d'un détecteur de contour aux volumes correspondant aux instants suivants.

Les figures (6(a), 6(d)) et (6(b), 6(e)) illustrent, sous deux incidences, les résultats obtenus à deux instants consécutifs correspondant à la fin de la diastole ventriculaire. Des mouvements dirigés vers l'extérieur de la cavité ventriculaire (représentés en blanc), caractéristiques de la diastole, sont détectés au niveau du ventricule, notamment pour le deuxième instant correspondant à la phase de systole auriculaire. Les figures (6(c), 6(f)) illustrent le début de la phase de systole ventriculaire, avec la présence de déplacements dirigés vers l'intérieur de la cavité ventriculaire, pouvant correspondre à des mouvements de contraction.

Afin d'évaluer le processus d'estimation de forme au cours du temps, les résultats ont été comparés avec des surfaces, correspondant aux mêmes instants, mais obtenues avec l'outil de segmentation utilisé, dans notre approche, pour le premier vo-

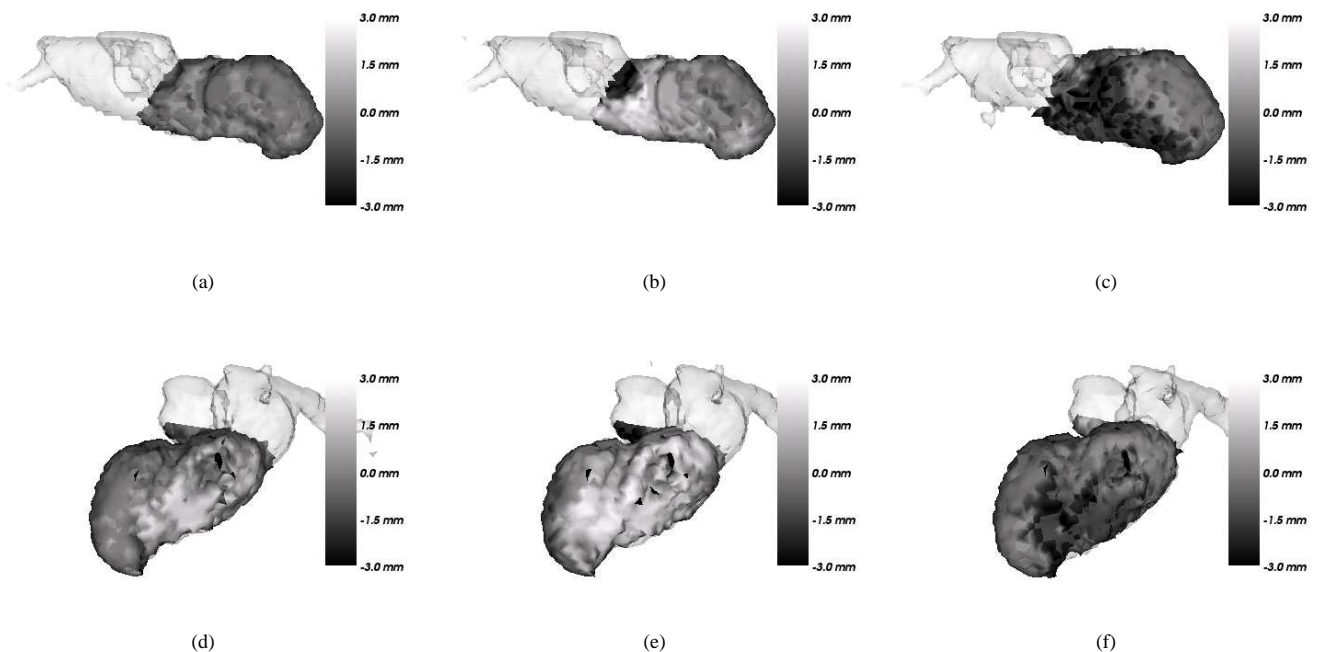


FIG. 6: Amplitude du mouvement estimé à trois instants consécutifs (de la fin de la diastole ventriculaire ((a,d) et (b,e)) au début de la systole ventriculaire (c,f)) (couleurs : en blanc : mouvements dirigés vers l'extérieur des cavités (expansion), en noir : mouvements dirigés vers l'intérieur des cavités (contraction)) (incidences : (a,b,c) : oblique antérieure gauche 45° caudale 25°, (d,e,f) : oblique antérieure droite 30°).

lume de la séquence. On considère bien sûr que ces surfaces segmentées ne peuvent être exploitées comme des références mais plutôt comme des indicateurs. En traitant l'estimation de surface sur l'ensemble de la séquence, les tests ont montré une différence moyenne de 1.1 mm entre, sur les différents instants, surface estimée par notre méthode et surface directement segmentée.

## 4 Conclusion et perspectives

Une méthode d'estimation combinée de la position d'un objet et de son mouvement dans une séquence 3D est proposée. Elle est ici appliquée à la détection de cavités myocardiques en imagerie scanner multibarrette pour l'évaluation de la cinétique cardiaque. La méthode repose sur une mise en correspondance surface-volume formalisée dans un cadre markovien. Des tests réalisés sur données simulées et sur données cardiaques réelles ont montré des résultats prometteurs. De futurs travaux porteront sur la recherche de moyens de visualisation adaptés aux besoins cliniques et sur l'extraction de paramètres cliniquement significatifs. Ils porteront également à la fois sur l'amélioration de la méthode (notamment par le test d'autres méthodes de minimisation) et sur son évaluation à partir d'un nombre plus important de données réelles.

## Références

- [1] J. M. Gorce, D. Friboulet, and I. E. Magnin, "Estimation of three-dimensional cardiac velocity fields: assessment of a differential method and application to three-dimensional CT data," *Medical Image Analysis*, vol. 1, pp. 245–261, Apr. 1997.
- [2] S. M. Song and R. Leahy, "Computation of 3-D velocity fields from 3-D cine CT images of a human heart," *IEEE Trans. Med. Imag.*, vol. 10, pp. 295–306, Sept. 1991.
- [3] A. F. Frangi, W. J. Niessen, and M. A. Viergever, "Three-dimensional modeling for functional analysis of cardiac images, a review," *IEEE Trans. Med. Imag.*, vol. 20, pp. 2–25, Jan. 2001.
- [4] C. W. Chen, T. S. Huang, and M. Arrott, "Modeling, analysis, and visualization of left ventricle shape and motion by hierarchical decomposition," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. 16, pp. 342–356, Apr. 1994.
- [5] S. Benayoun and N. Ayache, "Dense non-rigid motion estimation in sequences of medical images using differential constraints," *Int. Journal of Computer Vision*, vol. 26, pp. 25–40, Jan. 1998.
- [6] C. Kambhamettu, D. Goldgof, M. He, and P. Laskov, "3D nonrigid motion analysis under small deformations," *Image and Vision Computing*, vol. 21, pp. 229–245, Jan. 2003.
- [7] P. Shi, A. J. Sinusas, R. T. Constable, E. Ritman, and J. S. Duncan, "Point-tracked quantitative analysis of left ventricular surface motion from 3-D image sequences," *IEEE Trans. Med. Imag.*, vol. 19, pp. 36–50, Jan. 2000.
- [8] H. Guillaume and M. Garreau, "Segmentation de cavités cardiaques en imagerie scanner multi-barettes," in *12ème Forum des Jeunes Chercheurs en Génie Biologique et Médical (2003)*, Nantes, France, may 2003, pp. 92–93.

# A propos de l'utilisation des méthodes de Monte Carlo séquentielles pour l'estimation de paramètres dans les modèles de Markov cachés

Olivier Cappé & Eric Moulines  
Centre National de la Recherche Scientifique & Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications  
46 rue Barrault, 75634 Paris cedex 13  
cappé, moulines @ enst.fr

**Résumé** — A part dans quelques cas particuliers (modèles à espace d'état fini, modèles d'état linéaires gaussiens), l'estimation de paramètres au sens du maximum de vraisemblance dans les modèles de Markov cachés est une tâche difficile. La possibilité d'utiliser les techniques de Monte Carlo séquentielles (dites également de filtrage particulaire) à cette fin semble naturelle mais n'a, à ce jour, pas trouvé de concrétisation réellement convaincante. Dans cette communication, nous détaillons les liens entre l'estimation au sens du maximum de vraisemblance et la tâche de lissage de fonctionnelles additives de l'état caché. Nous proposons une solution simple permettant d'accroître la fiabilité des estimateurs en utilisant les propriétés d'oubli du filtre exact.

**Abstract** — Apart from a few specific cases (finite state space models, linear Gaussian state-space models), maximum likelihood parameter estimation in hidden Markov models is a difficult task. Using sequential Monte Carlo (or particle filtering) techniques for this task sounds appealing but is faced with some difficulties. In this contribution, we show that several recently proposed methods share the common feature of requiring the approximation of the expectation of a sum functional of the hidden states, conditionally on all the available observations. We propose a robustification of the basic particle estimator which is based on forgetting ideas.

## 1 Introduction

Les modèles de Markov cachés forment une classe suffisamment flexible pour avoir donné lieu à des applications très significatives dans des domaines aussi variés que le traitement de la parole, la bioinformatique, la poursuite et la localisation, la vision, les finances quantitatives, etc. [1] Les méthodes de Monte Carlo séquentielles (ou de filtrage particulaire) constituent un outil important dans ce cadre car elles forment la seule approche véritablement générique permettant d'approximer numériquement les relations de filtrage dès que l'on sort de cas spécifiques comme les modèles à état fini ou les modèles d'états linéaires gaussiens [2].

Paradoxalement, la question de l'estimation de paramètres fixes du modèle à l'aide des simulations obtenues par filtrage particulaire reste un problème difficile. Une des explications en est sans aucun doute le fait que bien que la log-vraisemblance des observations soit facilement estimable à l'aide du système de particules [3, 4], cette possibilité ne résout pas réellement la question de l'optimisation de la vraisemblance. En particulier, l'approximation de la log-vraisemblance n'est jamais régulière (vis-à-vis des variations des paramètres) dès lors qu'on procède à des rééchantillonnages [3], or on sait que le rééchantillonnage est un élément crucial pour garantir la stabilité des techniques de Monte Carlo séquentielles [1, 5].

Le but de cette contribution est de discuter la façon dont on peut, à l'aide de techniques de filtrage particulaire, approximer les quantités nécessaires à l'inférence statistique, qu'il s'agisse de la quantité intermédiaire de l'algorithme EM (Expectation-Maximization) ou du gradient de la log-vraisemblance (fonction de score). Pour dissiper tout mal-

entendu, soulignons que nous ne nous intéressons pas ici à l'estimation récursive au sens, par exemple, de [6] même s'il est clair qu'être capable d'approximer récursivement les quantités d'intérêt pour l'inférence constitue effectivement un premier pas dans cette direction.

## 2 Notations et définitions

Nous commençons par définir formellement le modèle de Markov caché :

1.  $\{X_k\}_{k \geq 0}$  est markovien de loi initiale  $\nu$  et de noyau de transition (on ne travaille ici qu'avec des densités de probabilité)  $q$  tels que  $E[f(X_0)] = \int f(x) \nu(x) dx$  et  $E[f(X_n) | X_{0:n-1}] = \int f(x) q(X_{n-1}, x) dx$ , pour toute fonction  $f$ ;  $X_{0:n-1}$  est notre notation simplifiée pour désigner l'ensemble des variables consécutives  $X_0, \dots, X_{n-1}$ .
2.  $\{Y_k\}_{k \geq 0}$  est conditionnellement indépendant sachant  $\{X_k\}_{k \geq 0}$  de telle façon que

$$E \left[ \prod_{k=0}^n f_k(Y_k) \middle| X_{0:n} \right] = \prod_{k=0}^n \int f_k(y) g(X_k, y) dy$$

pour toutes fonctions  $f_0, \dots, f_n$ ;  $g$  est dite fonction de vraisemblance conditionnelle et dans la suite nous considérons toujours sa dépendance en son premier argument en écrivant  $g_k(x)$  plutôt que  $g(x, Y_k)$ .

En utilisant la règle de Bayes, on vérifie directement que la densité jointe de lissage (loi de  $X_{0:n}$  sachant  $Y_{0:n}$ ) est donnée par

$$\phi_{0:n|n}(x_{0:n}) = L_n^{-1} \nu(x_0) g_0(x_0) \prod_{k=1}^n q(x_{k-1}, x_k) g_k(x_k) \quad (1)$$

où le facteur de normalisation  $L_n$  est la vraisemblance des observations  $Y_{0:n}$ . A partir de (1) on obtient aisément une formulation récursive (en  $n$ )

$$\phi_{0:n|n}(x_{0:n}) = c_n^{-1} \phi_{0:n-1|n-1}(x_{0:n-1}) q(x_{n-1}, x_n) g_n(x_n) \quad (2)$$

où  $c_n = L_n/L_{n-1}$ . Au vu de (2), le facteur de normalisation  $c_n$  peut également s'écrire

$$c_n = \iint \phi_{n-1|n-1}(x_{n-1}) q(x_{n-1}, x_n) g_n(x_n) dx_{n-1} dx_n \quad (3)$$

où  $\phi_{n|n}$  désigne la loi marginale de filtrage (densité de probabilité de  $X_n$  sachant  $Y_{0:n}$ ). Cette relation associée à l'identité

$$\ell_n \stackrel{\text{def}}{=} \log L_n = \sum_{k=0}^n \log c_k \quad (4)$$

montre que l'évaluation de la log-vraisemblance est, pour les modèles de Markov cachés, un sous-produit des relations de filtrage.

Le filtrage particulaire approxime (2) à l'aide du mécanisme de simulation suivant :

- Initialement, on tire  $N$  particules  $\{\xi_0^i\}_{1 \leq i \leq N}$  sous une loi commune  $\rho_0$  et l'on calcule les poids d'importance  $\omega_0^i = \nu(\xi_0^i) g_0(\xi_0^i) / \rho_0(\xi_0^i)$ .
- Par la suite,  $\xi_{k+1}^i$  est simulé à l'aide d'un noyau de transition  $r(\xi_k^i, \cdot)$  et les poids sont mis à jour selon  $\omega_{k+1}^i = \omega_k^i q(\xi_k^i, \xi_{k+1}^i) g_{k+1}(\xi_{k+1}^i) / r(\xi_k^i, \xi_{k+1}^i)$ . La trajectoire de la  $i$ ème particule est simplement prolongée par  $\xi_{0:k+1}^i = (\xi_{0:k}^i, \xi_{k+1}^i)$ .
- Le rééchantillonnage consiste à normaliser les poids par leur somme de telle façon que  $\sum_{i=1}^N \omega_k^i = 1$  puis à tirer des indices  $I_k^1, \dots, I_k^N$  dans l'ensemble  $\{1, \dots, N\}$  tels que  $E(\#\{1 \leq j \leq N : I_k^j = i_0\}) = N \omega_k^{i_0}$ . Les poids redeviennent alors tous égaux et la  $j$ ème trajectoire est mise à jour par recopie :  $\xi_{0:k}^j = \xi_{0:k}^{I_k^j}$ .

Du fait de ce rééchantillonnage, la notation  $\xi_k^i$  devient ambiguë et on utilise la notation  $\xi_{0:k}^i(l)$  pour désigner le point d'indice  $l$  dans la  $i$ ème trajectoire finissant en  $k$  ; pour  $\xi_{0:k}^i(k)$  on conserve cependant la notation  $\xi_k^i$ . L'estimateur

$$\sum_{i=1}^N \frac{\omega_k^i}{\sum_{j=1}^N \omega_k^j} f(\xi_{0:k}^i) \quad (5)$$

constitue une approximation de  $E[f(X_{0:k}) | Y_{0:k}]$  pour toute fonction  $f$ .

Par rapport à d'autres techniques plus classiques d'approximation des relations de filtrage non-linéaires, comme l'EKF (Extended Kalman Filter) ou l'UKF (Unscented Kalman Filter) [7], l'intérêt du filtrage particulaire est qu'il est possible de montrer que (5) est une estimation consistante lorsque le nombre  $N$  de particules augmente. Le rééchantillonnage joue un rôle primordial pour garantir que la méthode ne dégénère pas lorsque le nombre  $n$  d'observations augmente [1, 2, 5]. Il complique néanmoins significativement l'analyse théorique de la méthode en rendant les trajectoires de particules dépendantes.

### 3 Estimation au sens du maximum de vraisemblance

Du point de vue des principes, la remarque importante est ici que la détermination de l'estimateur du maximum de vraisemblance prend nécessairement la forme d'un algorithme itératif dans lequel l'étape clé revient à calculer (ou, à défaut, approximer) une quantité de la forme

$$\tau_n = E \left[ \sum_{k=0}^{n-1} s_k(X_k, X_{k+1}) \middle| Y_{0:n} \right] \quad (6)$$

où  $s_0, \dots, s_n$  sont des fonctions bien choisies<sup>1</sup>.

Dans le cas de l'algorithme EM l'affirmation précédente provient simplement de la forme Markovienne de la loi jointe donnée par (1), au facteur de normalisation  $L_n$  près. Ainsi la quantité intermédiaire de l'algorithme EM s'écrit

$$E \left[ \sum_{k=0}^{n-1} s_k(X_k, X_{k+1}; \theta) \middle| Y_{0:n}; \theta' \right] \quad (7)$$

avec

$$s_k(x_k, x_{k+1}; \theta) = \begin{cases} \log [\nu(x_0; \theta) g_0(x_0; \theta) q(x_0, x_1; \theta) g_1(x_1; \theta)] & \text{si } k = 0 \\ \log [q(x_k, x_{k+1}; \theta) g_{k+1}(x_{k+1}; \theta)] & \text{sinon} \end{cases} \quad (8)$$

Notons que dans les expressions ci-dessus, on fait figurer explicitement la dépendance des différentes quantités vis à vis du paramètre  $\theta$  et de la valeur courante  $\theta'$  de ce dernier pour éviter l'ambiguïté.

On peut également songer à utiliser un algorithme d'optimisation itérative directe de la log-vraisemblance sans passer par l'intermédiaire défini en (7) ci-dessus. Sauf dans les cas très simples, il est dans ce cas nécessaire d'évaluer le gradient de la log-vraisemblance pour garantir une convergence raisonnablement rapide de l'optimisation (l'alternative consistant à utiliser une méthode reposant uniquement sur l'évaluation de la log-vraisemblance—méthode qui devient de plus difficile à envisager lorsque l'évaluation de la log-vraisemblance est entachée d'erreurs Monte Carlo). La relation dite de Fisher indique que le gradient de la log-vraisemblance s'écrit

$$E \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \nabla_{\theta} s_k(X_k, X_{k+1}; \theta) \middle| Y_{0:n}; \theta \right] \quad (9)$$

où  $\nabla_{\theta}$  désigne la dérivation par rapport à  $\theta$  et les  $s_k$  sont les fonctions définies en (8). Il existe manifestement une autre approche, plus directe, qui permet de déterminer le gradient de la log-vraisemblance consistant à dériver la représentation (3)–(4) par rapport au paramètre  $\theta$ . On obtient alors une forme récursive du gradient de la log-vraisemblance dite des “équations de sensibilité” [10]. On peut toutefois montrer que ces équations de sensibilité sont équivalentes à une réécriture récursive de (9) [1, 11].

<sup>1</sup> Une exception importante est le cas de la méthode du rapport de vraisemblance simulé de [8] qui toutefois ne résout pas explicitement le problème de l'optimisation. De surcroît, les résultats obtenus par cette approche sont peu fiables en pratique pour les raisons exposées dans [9].

Ainsi si l'on excepte la question de la reformulation récursive, dont on verra ci-dessous qu'elle est traitée de façon très intuitive dans le cadre de l'approximation particulière, (9) correspond bien à la forme prise par le gradient de la log-vraisemblance dans le modèle de Markov caché.

## 4 Approximation particulière

La tâche qui nous est fixée consiste donc à approximer des expressions de la forme générique (6) dans le contexte des méthodes de Monte Carlo séquentielles. L'approximation naturelle de (6) à partir du système de particules consiste, cf. (5), à utiliser l'estimateur

$$\hat{\tau}_n^N = \sum_{i=1}^N \frac{\omega_n^i}{\sum_{j=1}^N \omega_n^j} \sum_{k=0}^{n-1} s_k [\xi_{0:n}^i(k), \xi_{0:n}^i(k+1)] \quad (10)$$

dont on constate facilement qu'il peut se calculer récursivement (et avec une capacité de stockage fixe, indépendante de l'horizon  $n$ ) en stockant pour chaque trajectoire  $i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) non seulement la position finale  $\xi_n^i$  et le poids trajectoirel  $\omega_n^i$  mais également l'évaluation cumulée de la fonctionnelle d'intérêt le long de la trajectoire

$$\gamma_n^i = \sum_{k=0}^{n-1} s_k [\xi_{0:n}^i(k), \xi_{0:n}^i(k+1)]$$

Pour des choix particuliers de  $\{s_k\}_{k \geq 0}$  (cf. discussion dans la section précédente), on retrouve en procédant de cette façon les algorithmes d'approximation particulière proposés dans [12, 13, 14].

De façon, pour l'instant, empirique, nous avons constaté en expérimentant avec cette approche sur plusieurs type de modèles qu'une modification assez simple de (10) permettait d'obtenir un estimateur de (6) nettement plus fiable. Cette modification consiste à viser non pas (6) mais

$$\tau_n^\delta = \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} s_k (X_k, X_{k+1}) \middle| Y_{0:(k+\delta) \wedge n} \right] \quad (11)$$

qui sera approximé par

$$\hat{\tau}_n^{\delta, N} = \sum_{i=1}^N \frac{\omega_n^i}{\sum_{j=1}^N \omega_n^j} \sum_{k=0}^n s_k [\xi_{0:(k+\delta) \wedge n}^i(k), \xi_{0:(k+\delta) \wedge n}^i(k+1)] \quad (12)$$

où  $a \wedge b$  désigne le minimum de  $a$  et de  $b$  et  $\delta$  est un délai. Comme dans le cas de (10), on vérifie aisément que (12) peut être mis à jour récursivement en stockant un "cache" de l'histoire récente des trajectoires de particules  $\{\xi_{0:n}^i(n-\delta+1 : n)\}_{1 \leq i \leq N}$  ainsi que la contribution cumulée des termes destinés à ne plus être mis à jour :

$$\sum_{k=0}^{n-\delta} s_k [\xi_{0:k+\delta}^i(k), \xi_{0:k+\delta}^i(k+1)]$$

Cette idée de remplacer les lois de lissage par des lois de lissage à délai fixe (en anglais, "fixed-lag smoothing") n'est pas nouvelle [6]. Il est important toutefois de souligner

qu'elle est très naturelle dans le cas de l'approximation particulière puisque l'examen des preuves existantes de la stabilité (en le nombre d'échantillons  $n$ ) des techniques de filtrage particulière montre que c'est précisément ce point (convergence rapide des lois de lissage à délai fixe vers les lois de lissage, lorsque le délai  $\delta$  augmente) qui joue un rôle clé [1, 5]. En pratique, le choix de  $\delta$  relève véritablement d'un compromis de type biais/variance : si  $\delta$  est faible, il peut exister un biais important entre  $\hat{\tau}_n^{\delta, N}$  et  $\tau_n$  ; mais plus  $\delta$  augmente plus la variabilité de  $\hat{\tau}_n^{\delta, N}$  croît. Nous illustrons ce point sur l'exemple considéré dans le chapitre 11 de [1].

## 5 Un exemple

L'exemple en question est celui du modèle de volatilité stochastique utilisé en économétrie qui correspond à une représentation d'état dont l'équation d'observation est fortement non-linéaire :

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= \phi X_k + \sigma U_k, & U_k &\sim \mathcal{N}(0, 1) \\ Y_k &= \beta \exp(X_k/2) V_k, & V_k &\sim \mathcal{N}(0, 1) \end{aligned}$$

Nous considérons une série d'observations de longueur 945 utilisée classiquement dans la littérature pour laquelle la valeur de l'estimateur du maximum de vraisemblance des paramètres a été évalué (numériquement) à  $\hat{\beta} = 0.64$ ,  $\hat{\phi} = 0.975$ ,  $\hat{\sigma} = 0.17$ .

Nous présentons ci-après les trajectoires d'itérations successives de l'algorithme dit SEM (Stochastic EM) dans lequel on alterne entre

- L'approximation de l'espérance conditionnelle de fonctionnelles additives qui dans ce modèle sont au nombre de quatre :

$$\begin{aligned} t_0(x_{0:n}) &= x_0^2, & t_1(x_{0:n}) &= \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2, & t_2(x_{0:n}) &= \sum_{k=1}^n x_k^2 \\ t_3(x_{0:n}) &= \sum_{k=1}^n x_k x_{k-1}, & s_4(x_{0:n}) &= \sum_{k=0}^n Y_k^2 \exp(-x_k) \end{aligned}$$

- La réestimation des paramètres  $\beta$ ,  $\phi$  et  $\sigma$  à partir des estimations obtenues dans l'étape précédente par une formule qui correspond à l'étape M de l'algorithme EM.

On sait que cet algorithme (le SEM) n'est pas un algorithme convergent, ceci-dit une modification assez simple (le SAEM, pour Stochastic Approximation EM) permet de garantir la convergence vers un point stationnaire de la log-vraisemblance [1]. L'idée est ici simplement d'illustrer la variabilité due aux simulations qui se manifeste de façon plus visible avec l'algorithme SEM dans la mesure où celui-ci ne comporte aucun effet de moyennage destiné à garantir la convergence ponctuelle.

On constate facilement en comparant les figures 1 et 2, sur lesquelles on a superposé trois trajectoires indépendantes pour donner une idée de la variabilité, que l'utilisation de l'approximation à délai fixe permet de réduire grandement la variance sans augmenter le biais de façon visible. Pour donner une idée du gain obtenu par cette approche on a représenté sur la figure 3 l'analogie de la



figure 1 obtenu avec un nombre 10 fois supérieur de particules (c'est à dire concrètement un coût de calcul 10 fois plus élevé). On constate que les figures 3 et 2 sont relativement comparables ce qui montre que le gain obtenu dans le cas de la figure 2 par utilisation de l'approximation à délai fixe est réellement très significatif.

Pour les autres modèles sur lesquels cette approche a été mise en œuvre les gains obtenus sont du même ordre de grandeur. Il est intéressant de souligner que la forme d'approximation avec oubli décrite dans cette contribution est également potentiellement plus simple à étudier d'un point de vue théorique dans la mesure où elle n'implique qu'une mémoire finie de l'historique du système de particules.

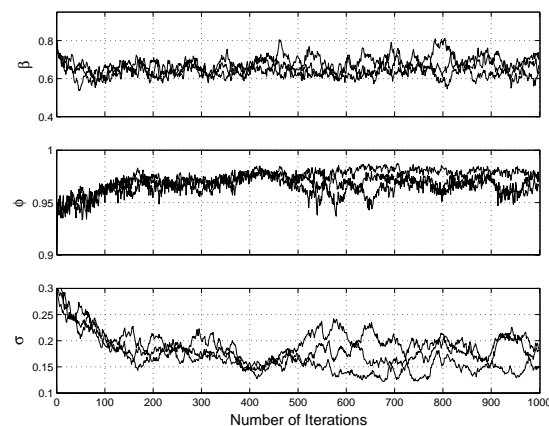


FIG. 1 – Trois trajectoires superposées de l'algorithme SEM avec  $N = 50$  particules (paramètres  $\beta$ ,  $\phi$  et  $\sigma$  de haut en bas).

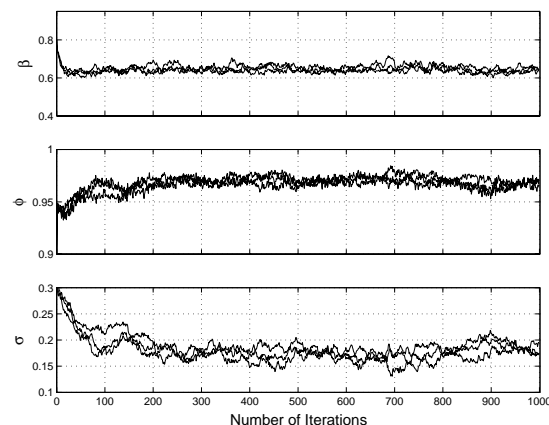


FIG. 2 – Même représentation avec  $N = 50$  particules et en utilisant l'approximation à délai fixe avec  $\delta = 20$ .

## Références

[1] O. Cappé, E. Moulines, and T. Rydén. *Inference in Hidden Markov Models*. Springer, 2005.

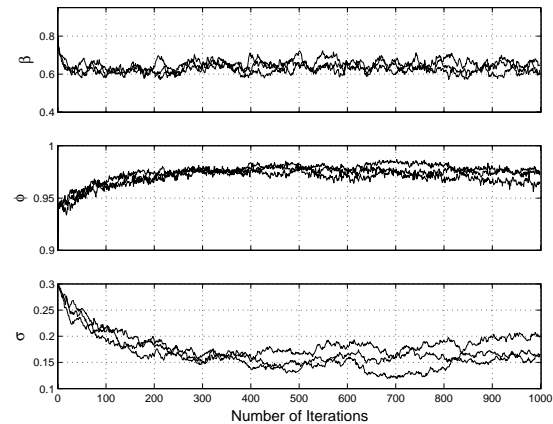


FIG. 3 – Méthode de la Fig. 1 avec  $N = 500$  particules.

- [2] A. Doucet, N. De Freitas, and N. Gordon, editors. *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. Springer, 2001.
- [3] M. K. Pitt and N. Shephard. Filtering via simulation : Auxiliary particle filters. 94(446) :590–599, 1999.
- [4] M. Hürzeler and H. R. Künsch. Monte Carlo approximations for general state-space models. *J. Comput. Graph. Statist.*, 7 :175–193, 1998.
- [5] P. Del Moral. *Feynman-Kac Formulae. Genealogical and Interacting Particle Systems with Applications*. Springer, 2004.
- [6] V. Krishnamurthy and J. B. Moore. On-line estimation of hidden markov model parameters based on the kullback-leibler information measure. *IEEE Trans. Signal Process.*, 41(8) :2557–2573, 1993.
- [7] B. Ristic, M. Arulampalam, and A. Gordon. *Beyond Kalman Filters : Particle Filters for Target Tracking*. Artech House, 2004.
- [8] C. J. Geyer and E. A. Thompson. Constrained Monte Carlo maximum likelihood for dependent data. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 54(3) :657–699, 1992.
- [9] R. Douc, O. Cappé, E. Moulines, and C. P. Robert. On the convergence of the monte carlo maximum likelihood method for latent variable models. *Scand. J. Statist.*, 29(4), 2002.
- [10] F. Campillo and F. Le Gland. MLE for partially observed diffusions : Direct maximization vs. the EM algorithm. *Stoch. Proc. Appl.*, 33 :245–274, 1989.
- [11] O. Cappé and E. Moulines. Recursive computation of the score and observed information matrix in hidden markov models. In *IEEE Workshop on Statistical Signal Processing*, Bordeaux, France, jul 2005.
- [12] O. Cappé. Recursive computation of smoothed functionals of hidden Markovian processes using a particle approximation. *Monte Carlo Methods Appl.*, 7(1-2) :81–92, 2001.
- [13] A. Doucet and V. B. Tadić. Parameter estimation in general state-space models using particle methods. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 55(2) :409–422, 2003.
- [14] F. Cérou, F. Le Gland, and N. Newton. Stochastic particle methods for linear tangent filtering equations. In J.-L. Menaldi, E. Rofman, and A. Sulem, editors, *Optimal Control and PDE's*. IOS Press, Amsterdam, 2001.



# Détection et suivi simultanés dans une séquence vidéo en couleur par filtres particuliers

Jacek CZYZ<sup>1</sup>, Branko RISTIC<sup>2</sup>, Benoit MACQ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> UCL-TELE, Batiment Stévin, Place du Levant 2, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique

<sup>2</sup> DSTO, ISRD 200 labs, PO Box 1500, Edinburgh SA 5111, Australie  
czyz@tele.ucl.ac.be

**Résumé** — Nous nous intéressons au suivi d'objets dans une séquence vidéo. Le problème est formulé sous forme d'estimation bayésienne réursive et implémenté par un filtre particulière. Les histogrammes des couleurs des objets que l'on souhaite suivre sont utilisés pour les caractériser. Nous utilisons un filtre particulière hybride qui permet la détection et le suivi simultanés des objets. Le filtre incorpore une variable discrète, modélisée par une chaîne de Markov, qui représente le nombre d'objets présents dans la scène. L'approche permet de détecter et de suivre un ou plusieurs objets de couleur similaire même dans le cas où l'arrière plan n'est pas fixe. L'approche sur base des histogrammes de couleur permet aux objets de subir des déformations et des occultations partielles.

**Abstract** — We study object tracking in a video sequence. The problem is formulated as bayesian recursive estimation and is implemented as a particle filter. Color histograms are used as observation features. Joint detection and tracking is performed thanks to a hybrid particle filter in which a discrete variable, representing the number of objects present in the scene, is estimated. The approach allows to detect and track several objects sharing the same color distribution and undergoing deformations and partial occlusions.

## 1 Introduction

Parmi les opérations de haut-niveau qui aide à l'interprétation d'une scène filmée par une caméra, le suivi automatique (parfois appelé traçage) des objets d'intérêt présents dans la scène est incontournable. Les applications du suivi sont par exemple la visio-surveillance automatique, les interfaces gestuelles homme-machine, l'analyse automatique du mouvement, etc. Le suivi d'un objet (ou d'une personne) dans un flux vidéo consiste à déterminer la position de l'objet d'intérêt dans l'image courante à partir de sa position dans l'image précédente.

Classiquement [2] le suivi s'effectue en une étape de détection et d'association de données. L'étape de détection consiste à trouver dans l'image des caractéristiques qui pourraient correspondre aux objets que l'on souhaite suivre. Pour cela des caractéristiques stables de l'objet doivent être connues, puisque l'apparence d'un objet peut varier fortement avec l'éclairage de la scène, la position des objets et d'autres facteurs. Deuxièmement ces caractéristiques doivent être associées aux objets que l'on est en train de suivre (association de données). Shi et Tomasi [9] ont introduit une technique dans laquelle des points d'intérêt locaux à l'image sont détectés et suivis au cours du temps. Les points sont définis de façon à être très stables malgré les variations d'apparence et les déformations que peuvent subir les objets.

Cox et Hingorani ont [2] introduit le suivi multi-hypothèses. A chaque image de la séquence vidéo, on constitue une liste d'hypothèses (ainsi que la probabilité que l'hypo-

thèse soit vérifiée) de correspondances entre les caractéristiques détectées et les objets suivis.

Comaniciu *et al.* [1] utilisent comme caractéristique de l'image les histogrammes de couleurs. Ceux-ci ont la particularité de ne pas dépendre de la configuration spatiale des objets et conviennent donc très bien pour les objets déformables.

Isard et Blake [4] ont utilisé le filtrage particulière [3] pour résoudre le problème du suivi par contours. La caractéristique de l'objet que l'on détecte est donc le contour de l'objet. Le problème du suivi est formulé dans le cadre de l'estimation bayésienne réursive et il est résolu en utilisant un filtre particulière. Le suivi par filtre particulière a été étendu au cas où les caractéristiques des objets sont des histogrammes de couleur [6, 7]. La méthode qui en résulte, appelée filtre particulière couleur (FPC), permet de suivre de façon robuste des objets déformables, à la cinématique complexe, dans des séquences vidéo où l'arrière-plan est quelconque.

Cependant dans la méthode du filtre particulière couleur telle que proposée dans [6, 7], il faut passer par une étape de détection externe qui initialise le suivi. De plus, le filtre ne peut gérer le suivi plusieurs objets ayant des histogrammes de couleurs similaires. Dans cette communication, nous proposons un filtre particulière couleur qui effectue *simultanément* la détection et le suivi d'un nombre quelconque d'objets ayant des histogrammes de couleur similaires. Notre approche se base sur l'estimation bayésienne dans un *espace d'état hybride*, dans lesquels le vecteur d'état peut contenir à la fois des variables continues

et discrètes. L'addition au vecteur d'état traditionnel de [6] d'une variable discrète, qui représente le nombre d'objets d'intérêt dans la scène, permet la détection et le suivi conjoint des objets. L'approche de Isard et MacCormick utilise elle aussi un vecteur d'état hybride [5]. Cependant, les particularités de la trame utilisées pour caractériser les objets sont les réponses d'un banc de filtres appliquées à l'image. Cette caractérisation nécessite intrinsèquement l'estimation de l'arrière-plan, contrairement à la méthode présentée ici. De plus les histogrammes de couleurs permettent de représenter les objets de façon très succincte. Ceci permet d'utiliser des vecteurs d'état de dimension faible réduisant ainsi la dimension de l'espace d'état et donc la complexité de l'exploration.

La structure de l'article est la suivante : nous commençons par décrire les modèles dynamique et d'observation utilisés dans notre approche. Le filtre particulaire hybride est décrit dans la section suivante. Nous terminons par quelques résultats qualitatifs de suivi d'objets obtenus sur une séquence vidéo réelle.

## 2 Filtrage particulaire couleur

Soit le vecteur d'état  $\mathbf{x}_t$  au temps  $t$  associé à un objet d'intérêt,  $\mathbf{x}_t$  contient la position de l'objet ainsi que les paramètres de la région dans laquelle on calcule l'histogramme qui représente l'objet. Soit  $Z_t$  la séquence des trames disponibles  $\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_t\}$ . L'estimation bayésienne réursive consiste à estimer  $p(\mathbf{x}_t | Z_t)$  à partir de  $p(\mathbf{x}_{t-1} | Z_{t-1})$ . L'idée centrale du filtrage particulaire est de représenter la densité de probabilité conditionnelle de  $\mathbf{x}_t$  par un ensemble d'échantillons pondérés  $\{\mathbf{x}_t^n, w_t^n\}$ . Dans sa forme la plus simple, l'évolution des échantillons est décrite par le modèle dynamique du système. Après évolution, les échantillons sont pondérés en utilisant le modèle d'observation et  $\mathbf{z}_t$ .

### 2.1 Modèle dynamique

Comme énoncé précédemment, le vecteur d'état  $\mathbf{x}_t$  contient les paramètres de région où est calculé l'histogramme. En particulier, les régions que nous utilisons sont des rectangles, on a donc  $\mathbf{x} = (x \ y \ H \ W)^T$  où  $(x, y)$  sont les coordonnées du centre du rectangle dans l'image, et  $H$  et  $W$  sont respectivement la hauteur et la largeur du rectangle. Pour modéliser la cinématique des objets d'intérêt, nous utilisons le modèle dynamique de type Gauss-Markov. L'équation d'état est linéaire et s'écrit

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{w}_{t-1}$$

où le bruit  $\mathbf{w}_t$  est supposé gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance  $Q$ . D'autres types de modèles dynamiques sont envisageables et peuvent être mieux adaptés selon l'application.

### 2.2 Modèle d'observation

De même que [7, 6], l'histogramme  $q_t$  de couleurs extrait de la trame courante est utilisé comme observation. L'histogramme est calculé dans la région rectangulaire définie

par le vecteur d'état. Le modèle d'observation s'écrit

$$p(q_t | \mathbf{x}_t) \propto \mathcal{N}(D_t; 0, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{D_t^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (1)$$

où  $D_t$  est la distance entre l'histogramme de référence  $q^*$  qui caractérise l'objet d'intérêt et l'histogramme  $q_t$  calculé à partir de la trame courante. La grandeur  $\sigma$  est un paramètre à fixer par le concepteur du système. On voit donc que  $p(q_t | \mathbf{x}_t)$  aura une valeur d'autant plus élevée si la distance en l'histogramme de référence et l'histogramme  $q_t$  est petite, c'est-à-dire si les régions de l'image sont semblables. Soit  $U$  le nombre de catégories dans les histogrammes  $q^*$  et  $q_t$ , la distance  $D_t^2$  entre ces histogrammes est définie dans [1] comme étant

$$D_k^2 = 1 - \sum_{u=1}^U \sqrt{q^*(u) q_k(u)}.$$

Notons que les histogrammes peuvent être calculés dans un espace de couleur tel que RGB, HSV ou autre.

### 2.3 Modélisation du nombre d'objets dans la scène

La modélisation du nombre d'objets d'intérêt dans la scène se fait en introduisant une variable aléatoire discrète  $E \in \mathbb{E} = \{0, 1, \dots, M\}$ .  $E$  représente le nombre d'objets présents dans la scène. Nous supposons que  $E$  est une chaîne de Markov à  $M$  états dont les probabilités de transition sont définies par une matrice de transition  $\Pi = [\pi_{ij}]$ , où

$$\pi_{ij} = Pr\{E_t = j | E_{t-1} = i\}, \quad (i, j \in \mathbb{E}) \quad (2)$$

est la probabilité de transition d'un nombre d'objets présents égale à  $i$  au temps  $t-1$  à un nombre d'objets égale à  $j$  au temps  $t$ . A titre d'exemple, imaginons que nous souhaitons détecter et suivre un seul objet (c'est-à-dire  $M = 1$ ), la matrice de transition est  $2 \times 2$  et est donnée par

$$\Pi = \begin{bmatrix} (1 - P_n) & P_n \\ P_m & (1 - P_m) \end{bmatrix}$$

où  $P_n$  et  $P_m$  représentent la probabilité de voir l'objet respectivement entrer et quitter la scène.

## 3 Filtre particulaire hybride

Chaque particule  $\mathbf{y}_t^n$  du filtre particulaire hybride contient la variable aléatoire  $E_t^n$  ainsi que le nombre correspondant de vecteurs d'état  $\mathbf{x}_{i,t}^n$  ( $i = 1, \dots, E_t^n$ ) de chaque objet présent dans la scène, c'est-à-dire

$$\mathbf{y}_t^n = \begin{cases} E_t^n & \text{if } E_t^n = 0 \\ [(\mathbf{x}_{1,t}^n)^T & E_t^n]^T & \text{si } E_t^n = 1 \\ [(\mathbf{x}_{1,t}^n)^T & (\mathbf{x}_{2,t}^n)^T & E_t^n]^T & \text{si } E_t^n = 2 \\ \vdots & \vdots \end{cases} \quad (3)$$

où  $n$  varie de 1 à  $N$ , le nombre de particules.

Les étapes de l'algorithme sont résumées dans la table 1. Elles sont décrites plus en détail ci-dessous.

TAB. 1 – Filtre particulaire hybride (pseudo-code)

---

```

[ $\{\mathbf{y}_k^n\}_{n=1}^N$ ] = PF[ $\{\mathbf{y}_{k-1}^n\}_{n=1}^N, \mathbf{z}_k$ ]
1. Transitions de la variable  $E_{t-1}$  (transition aléatoire
   du nombre d'objets présents) :
   [ $\{E_t^n\}_{n=1}^N$ ] = ETrans [ $\{E_{t-1}^n\}_{n=1}^N, \mathbf{\Pi}$ ]
2. FOR  $n = 1 : N$ 
   a. Sur base des paires  $(E_{t-1}^n, E_t^n)$  pair, tirer
      aléatoirement  $\mathbf{x}_{1,t}^n, \dots, \mathbf{x}_{E_t^n,t}^n$  ;

   b. Evaluer les poids  $\tilde{w}_k^n$  (à une constante près) par
      l'équation (4).
3. END FOR
4. Normaliser les poids
   a. Calculer poids total :  $t = \text{SOMME } [\{\tilde{w}_k^n\}_{n=1}^N]$ 
   b. FOR  $n = 1 : N$ 
      - Normaliser :  $w_k^n = t^{-1} \tilde{w}_k^n$ 
   END FOR
5. Re-échantillonnage :
   [ $\{\mathbf{y}_k^n, -\}_{n=1}^N$ ] = RESAMPLE [ $\{\mathbf{y}_k^n, w_k^n\}_{n=1}^N$ ]

```

---

En premier lieu, on simule les transitions aléatoires de  $E_{t-1}^n$  à  $E_t^n$  grâce aux probabilités contenues dans la matrice de transitions  $\mathbf{\Pi}$ . Donc, en reprenant l'exemple  $M = 1$  de la section 2.3, si  $E_{t-1}^n$  valait 0 au cycle précédent,  $E_t^n$  sera tiré aléatoirement et vaudra 1 avec une probabilité  $P_n$ .

Suivant le résultat de la transition de  $E_{t-1}^n$ , on distingue les trois cas suivant.

1. Si  $E_{t-1}^n = E_t^n$ , les  $\mathbf{x}_{i,t}^n$  ( $i = 1, \dots, E_t^n$ ) subissent l'évolution définie par le modèle dynamique.
2. Si  $E_{t-1}^n < E_t^n$ , les  $\mathbf{x}_{i,t}^n$  correspondant aux objets qui existaient déjà à la trame précédente subissent l'évolution définie par le modèle dynamique, tandis que pour les "nouveaux" objets, les  $\mathbf{x}_{i,t}^n$  ( $i = E_{t-1}^n + 1, \dots, E_t^n$ ) sont tirées d'une densité  $p_b(\mathbf{x}_k)$  qui représente la connaissance *a priori* sur l'apparition de nouveaux objets. Cette densité doit être spécifiée par le concepteur du système. Lorsqu'aucune connaissance *a priori* n'est disponible, elle peut être modélisée par une densité uniforme sur l'entière de l'image.
3. Si  $E_{t-1}^n > E_t^n$ , on tire uniformément  $E_t^n$  vecteurs  $\mathbf{x}_{i,t}^n$  qui correspondent aux objets qui continuent à être présents. Les autres objets disparaissent du vecteur d'état composite  $\mathbf{y}_t^n$ . Les objets qui continuent à être présent subissent l'évolution définie par le modèle dynamique.

Les particules  $\mathbf{y}_t^n$  sont pondérées grâce au modèle d'observation ce qui implique les poids suivants

$$\tilde{w}_t^n = \begin{cases} 1, & \text{si } E_t^n = 0 \\ C_B^{E_t^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{E_t^n} (D_{i,t}^n)^2 \right\}, & \text{si } E_t^n > 0 \end{cases} \quad (4)$$

où  $C_B$  est une constante fixée par l'utilisateur, qui tient compte de la similarité entre l'histogramme de référence et l'arrière plan de l'image. Aussi le poids d'une particule est fixé à 0 lorsque deux objets, définis par cette particules, sont trop proches. Ceci pour éviter l'apparition de plusieurs objets factices sur une même région de l'image.

La dernière étape consiste à ré-échantillonner l'ensemble des particules en utilisant un algorithme standard tel que présenté dans [8].

Lorsque les étapes précédentes sont accomplies, on peut estimer le nombre d'objets présents ainsi que leur vecteur d'état respectif. En effet, l'ensemble des particules forme une approximation de la densité  $p(\mathbf{y}_t | Z_t)$ . Et lorsque celle-ci est connue, la probabilité  $P_m = Pr\{E_t = m | Z_t\}$  qu'il y ait  $m$  objets présents dans la scène à l'instant est simplement la probabilité marginale de  $p(\mathbf{y}_t | Z_t)$ , c'est-à-dire

$$P_m = \int \dots \int p(\mathbf{x}_{1,t}, \dots, \mathbf{x}_{m,t}, E_t = m | Z_t) d\mathbf{x}_{1,t} \dots d\mathbf{x}_{m,t} \quad (5)$$

pour  $m = 1, \dots, M$ . Une estimation du maximum *a posteriori* du nombre d'objets est donc donnée par

$$\hat{m}_t = \arg \max_{m=0,1,\dots,M} P_m. \quad (6)$$

En transposant ceci pour les particules nous avons

$$Pr\{E_t = m | Z_t\} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta(E_t^n, m) \quad (7)$$

et  $\delta(i, j) = 1$ , si  $i = j$ , et zéro dans le cas contraire (delta de Kronecker). Les estimations des états des objets  $i = 1, \dots, \hat{m}$  donc

$$\hat{\mathbf{x}}_{i,t|t} = \frac{\sum_{n=1}^N \mathbf{x}_{i,t}^n \delta(E_t^n, i)}{\sum_{n=1}^N \delta(E_t^n, i)}. \quad (8)$$

## 4 Résultats expérimentaux

Plusieurs séquences vidéo traitées par l'algorithme présenté dans cette communication peuvent être télé-chargées sur le site internet :

<http://euterpe.tele.ucl.ac.be/Tracking/pf.html>. Nous décrivons dans cette section les paramètres adoptés pour le traitement. Dans la matrice de transition  $\mathbf{\Pi}$ , seules les transitions d'un nombre d'objets  $m_t$  à un nombre d'objets  $m_t \pm 1$  au temps  $t + 1$  sont autorisées, avec une probabilité 0,05. La matrice  $\mathbf{\Pi}$  est donc tri-diagonale. La probabilité pour que le nombre d'objets reste inchangé est donc 0,9. Cette simplification de la matrice de transition a comme conséquence que si deux objets apparaissent en même dans la scène, l'estimation du nombre d'objets  $\hat{m}_t$  sera incrémentée en deux étapes.

La distribution  $p_b(\mathbf{x}_{i,k})$ , introduite à la section 3, est une distribution uniforme sur toutes les variables du vecteur d'état  $\mathbf{x}_{i,k}$ . Les histogrammes de couleur sont calculés dans l'espace RGB avec un nombre de catégories de 8x8x8 comme dans [6]. L'histogramme de référence  $q^*$  est créé à partir de quelques trames d'initialisation. La région contenant l'objet à suivre est sélectionnée manuellement et un

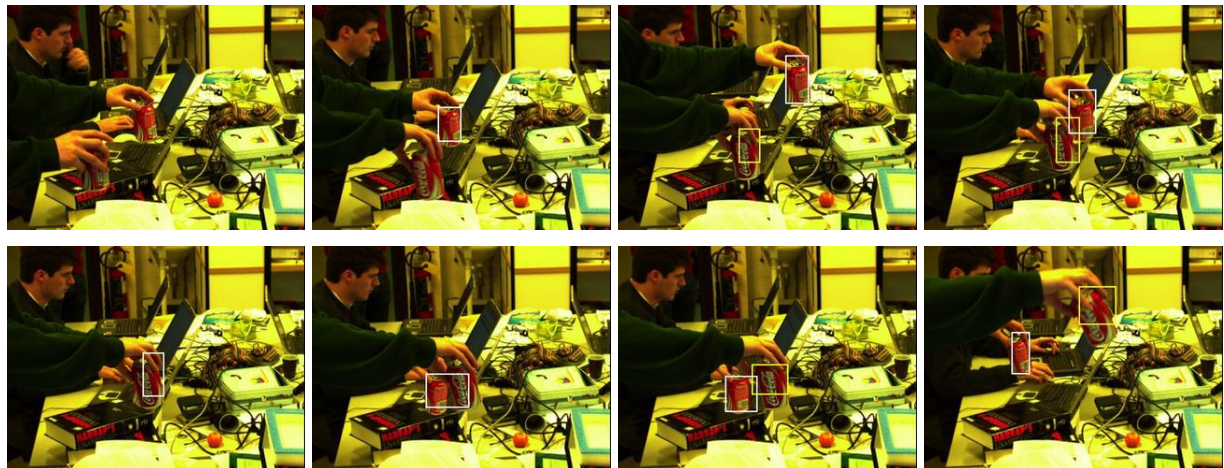


FIG. 1 – Le but est de détecter et de suivre les boîtes de soda. Les boîtes détectées sont encadrées par un rectangle. Deux boîtes sont présentes dès la première trame. La première boîte, puis la seconde, sont rapidement détectées et suivies. Lorsqu’une des deux boîtes occulte l’autre, l’algorithme ne détecte plus qu’une boîte. Dès que les deux boîtes sont à nouveau visibles, la deuxième boîte est détectée et suivie et ce, jusqu’à la fin de la séquence.

histogramme est extrait de cette région. L’histogramme de référence s’obtient en moyennant les histogrammes obtenus pour chaque trame.

Le nombre de particules nécessaires au bon fonctionnement de la détection et de l’estimation dépend de plusieurs facteurs. Principalement il s’agit du nombre maximal  $M$  d’objets et de la connaissance *a priori* sur l’apparition des objets (donc le choix de  $p_b(\mathbf{x}_{k,i})$ ). Pour  $M = 1$  un nombre de particules de 150 suffit pour obtenir un résultat satisfaisant tant en détection qu’en suivi. Pour  $M = 6$  objets identiques pour utilisons 5000 particules.

Sur la figure 1, on peut voir quelques trames extraites d’une séquence test. Le but est de détecter et de suivre les boîtes de soda rouges. Les boîtes détectées sont encadrées par un rectangle. Le filtre utilise  $N = 1000$  particules avec comme paramètre  $\sigma = 0.6$  et  $C_B = 70$ . La taille de l’image est  $640 \times 480$ . Notons que l’arrière plan est pour le moins complexe. Deux boîtes sont présentes dès la première trame. La première boîte, puis la seconde, sont rapidement détectées et suivies. Lorsqu’une des deux boîtes occulte l’autre, l’algorithme ne détecte plus qu’une boîte. Dès que les deux boîtes sont à nouveau visibles, la deuxième boîte est détectée et suivie et ce, jusqu’à la fin de la séquence.

## 5 Conclusion

Nous avons présenté un algorithme de suivi d’objet grâce à leur distribution de couleurs. La particularité de notre approche est de considérer la détection et le suivi conjointement, en utilisant un filtre particulaire hybride. Le filtre incorpore une variable discrète, modélisée par une chaîne de Markov, qui représente le nombre d’objets présents dans la scène. L’approche permet de détecter et de suivre un ou plusieurs objets de couleur similaire même dans le cas où l’arrière plan n’est pas fixe.

## Références

- [1] D. Comaniciu, V. Ramesh, and P. Meer. Real-time tracking of non-rigid objects using mean shift. In *Proc. IEEE Conf. Comp. Vision Pattern Recog.*, pages II :142–149. Hilton Head, SC, June 2000.
- [2] I. J. Cox and S. L. Hingorani. An efficient implementation of reid’s multiple hypothesis tracking algorithm and its evaluation for the purpose of visual tracking. In *International Conf. on Pattern Recognition*, pages 437–443. 1994.
- [3] A. Doucet, J. F. G. de Freitas, and N. J. Gordon, editors. *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. Springer, New York, 2001.
- [4] M. Isard and A. Blake. Visual tracking by stochastic propagation of conditional density. In *Proc. European Conf. Computer Vision*, pages 343–356. 1996.
- [5] M. Isard and J. MacCormick. BraMBLe : a bayesian multiple blob tracker. In *Proc. Int. Conf. Computer Vision*, pages 34–41. 2001.
- [6] K. Nummiaro, E. Koller-Meier, and L. Van-Gool. An adaptive color-based particle filter. *Image and Vision Computing*, 21 :99–110, 2003.
- [7] P. Pérez, C. Hue, J. Vermaak, and M. Gangnet. Color-based probabilistic tracking. In A. H. et al., editor, *Proc. European Conf. Computer Vision (ECCV)*, pages 661–675. Springer-Verlag, 2002. LNCS 2350.
- [8] B. Ristic, S. Arulampalam, and N. Gordon. *Beyond the Kalman filter : Particle filters for tracking applications*. Artech House, 2004.
- [9] J. Shi and C. Tomasi. Good features to track. In *IEEE Int. Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 593–600. 1994.

# Méthode de modélisation non supervisée du canal satellite mobile par chaînes de Markov

Clémence ALASSEUR<sup>1</sup>, Lionel HUSSON<sup>1</sup>, Sandro SCALISE<sup>2</sup>, Harald ERNST<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Supélec, département Télécommunications  
Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette, France

<sup>2</sup>DLR (German Aerospace Centre) Institute for Communications and Navigation  
Postfach 1116, 82230 Wessling, Germany  
clemence.alasseur@supelec.fr, lionel.husson@supelec.fr  
sandro.scalise@dlr.de, harald.ernst@dlr.de

**Résumé** – Nous développons une méthode de modélisation de l'atténuation du canal satellite mobile par chaînes de Markov valable lorsque les conditions de propagation évoluent (fréquence de transmission, environnement). L'estimation des paramètres du modèle du canal satellite est non supervisée contrairement aux modèles existants. Pour cela, nous employons une méthode de type MCMC (Monte Carlo Markov Chain) à sauts réversibles qui permet d'évaluer la moyenne a posteriori des paramètres du modèle ainsi que la segmentation des observations. Un modèle du canal satellite mobile en bande Ku est obtenu pour un contexte urbain. Le modèle présente de très bonnes performances : les données expérimentales et simulées ont les mêmes caractéristiques statistiques.

**Abstract** – We develop a modelling method for the attenuation of the land mobile satellite channel (LMSC) resorting to hidden Markov models. The proposed modelling approach makes it possible to illustrate the variations of the channel and remains valid even if the frequency of communications or the environment changes. Contrary to existing models, the estimation of the parameters is unsupervised. A reversible jump MCMC method is used to evaluate the a posteriori mean of the parameters of the model and to segment the series of observations. By applying this method, a land mobile channel model in Ku band is obtained in an urban environment. This model presents very good performances because the experimental and simulated data have the same statistical characteristics.

## 1 Introduction

Nous nous intéressons au comportement statistique des canaux satellites mobiles dans le cadre de la conception des nouveaux systèmes. Des systèmes, Inmarsat, Thuraya, XM Radio opèrent déjà dans les bande L et S pour de la diffusion radio ou téléphonie mobile. Les futurs systèmes explorent la possibilité d'utiliser les bandes Ku, Ka, Q et V pour lesquelles très peu d'études et de données sont disponibles. L'utilisation de bandes de fréquence plus élevée permettrait en effet d'accommoder la demande en services large bande et de pallier à la congestion des systèmes aux fréquences plus basses. Ces bandes de fréquence supérieures à 10 GHz sont influencées par les conditions météorologiques et il est nécessaire d'établir des modèles de ces canaux.

Une première classe de modèles est fondée sur les observations du canal et la modélisation de leur distribution. Ces modèles [1, 2] sont efficaces quand les conditions de propagation sont stationnaires ou quasi-stationnaires. Ils sont donc inadaptés au cas de la transmission mobile. Une deuxième classe de modèles est basée sur une approche par chaînes de Markov cachées (HMM) [3, 4]. Chaque condition de propagation est alors associée à un état de la chaîne de Markov. Pour des conditions fixes de propagation, des petites variations du niveau du signal, dues aux irrégularités des obstacles, aux multi-trajets et à la scintillation sont constatées. Elles sont représentées par une densité de probabilité associée à l'état considéré. Enfin, l'évolution des conditions de propagation, induite par la mobilité du récepteur, est modélisée par les transitions d'un état à l'autre

de la chaîne de Markov. Ces modèles supposent un nombre d'états fixe pour l'HMM et font appel à des densités de probabilité telles que les distributions de Rice, Rayleigh ou Loo [1] etc.

Dans cet article, nous déterminons un HMM pour le canal satellite mobile puisque les variations de la puissance reçue présentent des propriétés Markoviennes sous-jacentes évidentes. L'originalité de notre approche est de limiter le nombre d'hypothèses sur le modèle pour pouvoir l'appliquer à tous types d'environnement et effectuer une évaluation non-supervisée du modèle. Le nombre d'états de la chaîne de Markov ainsi que la forme des densités de probabilité ne sont pas fixés a priori. La partie 2 présente la méthodologie d'estimation de modèle proposée. Cette méthode est basée sur des outils MCMC (Monte Carlo Markov Chain). Nous constatons, enfin, que notre méthode permet une segmentation très précise des observations et les résultats obtenus sont illustrés dans la partie 3.

## 2 Identification du modèle

Nous considérons deux séries temporelles  $(y_t, z_t)$  où  $(y_t)$  représente les observations du gain normalisé du canal et  $z_t \in \{1, \dots, k\}$  indique l'état associé à l'observation  $y_t$ ,  $k$  étant le nombre d'états du modèle. Chaque observation  $y_t$  est alors une réalisation possible de la chaîne de Markov à l'instant  $t$  selon la distribution associée  $f_{i/z_t=i}$ . Le but poursuivi est l'estimation du nombre d'états  $k$ , la segmentation des observations  $\{z_t\}$ , l'estimation des paramètres de l'HMM, i.e. le nombre d'états

de la chaîne  $k$  les distributions  $\{f_i\}_1^k$  et la matrice de transition  $A = (a_{i,j})_1^k$ .

Les méthodes MCMC permettent de simuler des données selon une distribution d'intérêt lorsque l'échantillonnage direct est irréalisable. Pour cela, elles ont recours à des distributions instrumentales plus simples et génèrent des données distribuées selon ces distributions. Pour certaines conditions, il est prouvé [4] que la distribution des données simulées tend vers la distribution d'intérêt.

La méthode de sauts réversibles (Reversible Jump-MCMC)[4] est une extension des méthodes MCMC et permet de faire évoluer la dimension de l'espace des données. A chaque itération de la méthode RJ-MCMC de nouveaux paramètres approchés du modèle sont produits. Ces paramètres (à l'exclusion des tous premiers trop dépendants des conditions initiales) permettent d'estimer les paramètres effectifs du modèle HMM après convergence de la méthode.

## 2.1 Modèle a priori

Richardson et Green [6] ont développé une méthode RJ-MCMC sur un mélange de distributions gaussiennes, Robert et al. [7] étendent cette méthode à des modèles HMM avec des distributions gaussiennes de moyenne nulle. Notre travail porte sur la généralisation de [7] à un modèle HMM de gaussiennes de moyenne non nulle et à l'utilisation de cette méthode sur le signal de puissance du canal satellite. L'hypothèse des moyennes nulles est inadaptée à notre cas puisque le signal du canal est très clairement un signal non centré. L'hypothèse des lois gaussiennes indique notre confiance que les états puissent être identifiés uniquement par leur moyenne et leur variance. Ce choix paraît raisonnable puisque nous disposons d'aucune connaissance a priori sur la séquence d'observations. Dans une première étape, la méthode développée permet de déterminer le meilleur modèle HMM de gaussiennes. Elle détermine ainsi le nombre d'états, la moyenne et la variance de chaque distribution gaussienne, la matrice de transition entre les états ainsi que la segmentation du signal ( $y_t$ ) en différents groupes ( $(y_t)_i$ ), c'est-à-dire l'estimation de la séquence cachée du modèle ( $z_t$ ). L'hypothèse des gaussiennes est alors relaxée, et les distributions  $f_i(y)$  estimées à partir des sous-groupes ( $(y_t)_i$ ). Pour fonctionner, une méthode MCMC utilise un modèle a priori. La méthode RJ-MCMC proposée, basée sur [7], permet de simuler les paramètres du modèle selon leur distribution conjointe. Comme les observations sont supposées, dans un premier temps, issues d'un HMM à densités normales, la distribution des observations est donc

$$\sum_{i=1}^k \pi_i \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2) \quad (1)$$

où  $\pi$  est le vecteur propre associé à la valeur propre 1 de la matrice de transition  $A$ . Les données  $\mu$  et  $\sigma^2$  sont respectivement la moyenne et la variance des lois normales. A partir de [6] et [7], la distribution conjointe de ces variables peut s'écrire :

$$p(k, A, z, \mu, \sigma, y) = p(k) p(A/k) \times p(z/k, A) p(\mu/k) p(\sigma/k) p(y/\mu, \sigma, z). \quad (2)$$

Les inconnues sont issues de distributions a priori appropriées ([6, 7]):  $k$  est échantillonné à partir de la distribution discrète uniforme sur  $[1 \dots k_{max}]$ , avec  $k_{max}$  le nombre maximum possible d'états. Les lignes de  $A$  sont indépendantes et distribuées selon la loi de Dirichlet  $\mathcal{D}(\delta, \delta, \dots, \delta)$  avec  $\delta = 1$ . Les moyennes et variances sont elles aussi indépendantes et a priori distribuées respectivement selon une loi normale  $\mu_i \sim \mathcal{N}(\xi, \kappa^{-1})$  et une loi Gamma  $\sigma_i^2 \sim \mathcal{G}(\alpha, \beta)$ . Pour rendre les a priori plus robustes, un hyper a priori paramètre est utilisé:  $\beta$  n'est pas une constante mais est issu d'une loi Gamma  $\beta \sim \mathcal{G}(g, h)$  avec  $g = 0.2$  et  $h = 10/R^2$ .  $R$  correspond à l'amplitude des variations des observations  $y_t$ , i.e.  $R = y_{max} - y_{min}$ . Les autres paramètres sont initialisés par les valeurs constantes suivantes  $\alpha = 2$ ,  $\xi = y_{min} + R/2$  et  $\kappa = R^{-2}$ . La distribution conjointe a priori complète est donc égale à

$$p(\eta, k, A, z, \mu, \sigma, y) = p(\beta) p(k) p(A/k, \delta) p(z/A, k) p(\mu/k, \eta) p(\sigma/k, \eta) p(y/\mu, \sigma, z) \quad (3)$$

avec  $\eta = (\alpha, \beta, \xi, \kappa)$  le vecteur des hyper-paramètres. La distribution (3) a priori est la distribution d'intérêt utilisée par la méthode MCMC.

## 2.2 Déroulement de la méthode

Le déroulement de l'algorithme est précédé d'une phase où tous les paramètres sont initialisés selon leur loi a priori. Chaque itération se déroule ensuite en quatre étapes. La première est la mise à jour de la matrice de transition  $A$ , la deuxième la mise à jour des moyennes  $\mu$  et variances  $\sigma^2$ . La troisième étape consiste à actualiser la séquence cachée ( $z_t$ ). Enfin la dernière étape est la proposition d'une division ou d'une fusion d'un état en deux. Ceci implique la diminution ou l'augmentation de la taille du modèle  $k$ .

A chaque itération des nouvelles valeurs des paramètres sont adoptées et constitue des réalisations d'une chaîne de Markov. Cette chaîne définie par la méthode précédemment décrite vérifie, par construction, la propriété de balance détaillée ([5]) avec la distribution a priori. Elle est également irréductible et apériodique. Une chaîne de Markov qui satisfait à la condition de balance détaillée avec une certaine distribution admet alors cette distribution comme distribution invariante. L'existence de ces propriétés de la chaîne implique la convergence de l'estimateur de Monte-Carlo vers les paramètres du modèle ([5]).

Nous proposons une amélioration dans l'identification de la séquence cachée par le biais d'un vecteur d'occupation moyenne. En effet, à la fin du processus RJ-MCMC, le calcul de l'estimateur de Monte-Carlo doit être fait sur des données correspondant aux mêmes états. C'est pourquoi la labellisation des états cachés doit être cohérente tout au long des itérations de la méthode. Richardson et Green [6] effectuent l'identification des états par le biais des moyennes croissantes alors que Robert et al. [7] proposent quand à eux une classification en fonction des variances croissantes du fait qu'ils emploient des gaussiennes centrées. Ces deux critères ne sont pas satisfaisants si les moyennes ou les variances des états sont proches. De plus, la méthode visée doit être capable d'identifier soit des états de même moyenne et de variance différente soit de moyenne différente et de variance égale. Nous proposons donc, entre les

itérations, pour garder la cohérence, de l'étiquetage des états cachés, de considérer un vecteur d'occupation moyenne qui force la segmentation à chaque itération à prendre en compte les étiquetages précédents.

La méthode proposée dans cet article est une extension de [7]:

- Elle est étendue au cas d'un mélange de gaussiennes de moyenne variable.
- Un nouveau système d'identification des états est proposé pour que la segmentation soit cohérente tout au long des itérations de la méthode.
- Elle est accélérée en supprimant la possibilité de naissance ou mort d'un état car le nombre de données considérées est très important.

Après convergence de l'algorithme, les paramètres de l'HMM sont estimés. L'hypothèse des lois gaussiennes est alors élargie: à partir de la segmentation obtenue, les distributions finales des états sont évaluées pour une précision plus importante.

### 3 Résultats

La méthode décrite dans la section a été appliquée sur des signaux simulés à partir d'un modèle HMM connu. Nous considérons le modèle à trois états estimé par [8]. La méthode permet d'évaluer correctement le nombre d'états et les distributions estimées sont très proches en terme de la distance du  $\chi^2$  des distributions proposées par [8].

La méthode est ensuite appliquée à des données réelles et mesurées en bande Ku en environnement urbain selon le protocole décrit par [8]. La méthode détecte quatre états, la segmentation et les distributions correspondantes sont illustrées par les figures 1 et 2.

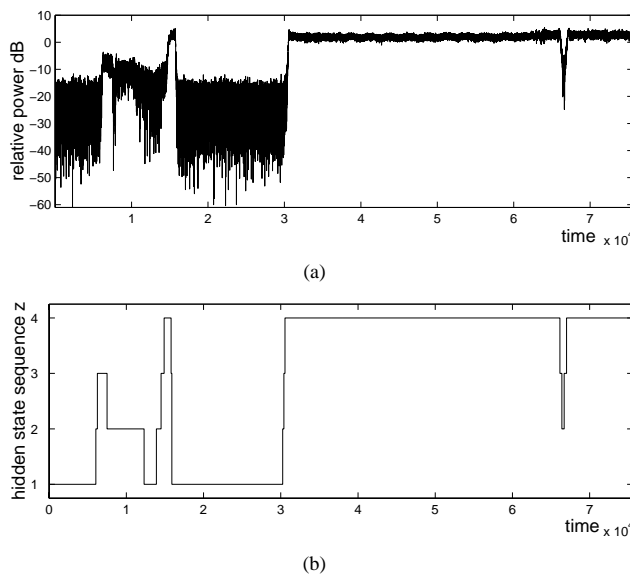


FIG. 1: Séquence d'observations (a) et sa segmentation (b).

Pour les données mesurées et simulées à partir du modèle obtenu, des statistiques pertinentes sont représentées aux figures

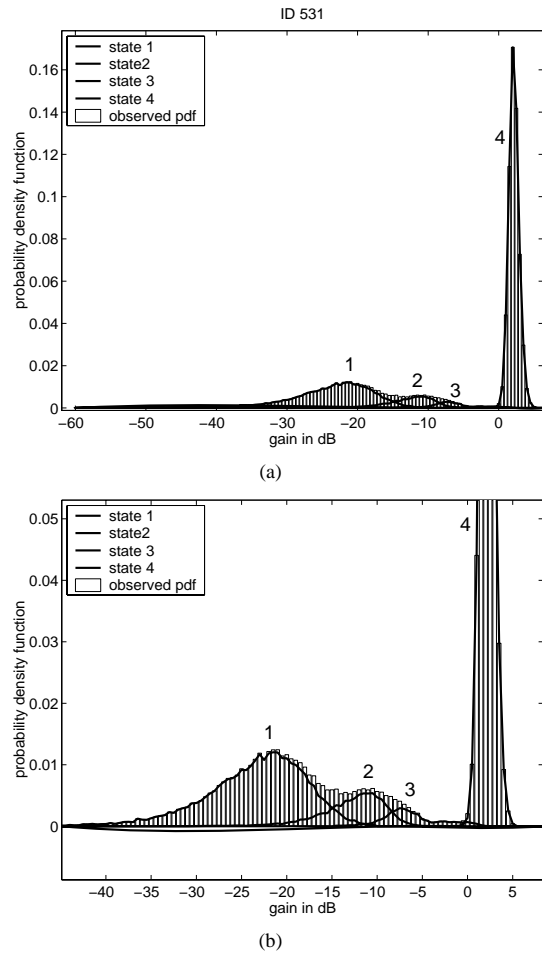


FIG. 2: Illustration de la distribution des données expérimentales ainsi que des quatre distributions obtenues après estimation du modèle (a) et un zoom sur ces mêmes distributions (b).

(3–5). Ces statistiques sont la fonction de répartition (*CDF*), l'*AFD* (Average Fade Duration), et le *LCR* (Level Crossing Rate). *AFD*( $x$ ) est la durée moyenne d'un événement d'évanouissement où toutes les valeurs successives du gain du canal qui le constituent sont inférieures à  $x$ . *LCR*( $x$ ) est le nombre moyen d'événements d'évanouissement inférieurs à  $x$  par unité de temps. La fonction de répartition, l'*AFD* et le *LCR* sont liés par l'expression (4):

$$AFD(x) = \frac{CDF(x)}{LCR(x)}. \quad (4)$$

L'accord entre la fonction de répartition (figure 3) pour les données simulées et les données expérimentales est très satisfaisant. De même, l'*AFD* simulé et expérimental (figure 4) présentent de très grandes similitudes. Les *LCR* (figure 5) correspondent aux données segmentées sur les quatre états du modèle. La qualité des *LCR* simulés par rapport aux expérimentaux pour les quatre états est très bonne. L'*AFD* et la fonction de répartition des quatre états, ne figurant pas ici, présentent les mêmes qualités. Le modèle de canal obtenu par notre méthode est donc performant et la méthode d'estimation de ce modèle doit pouvoir être appliquée à d'autres environnements sans aucune modification.

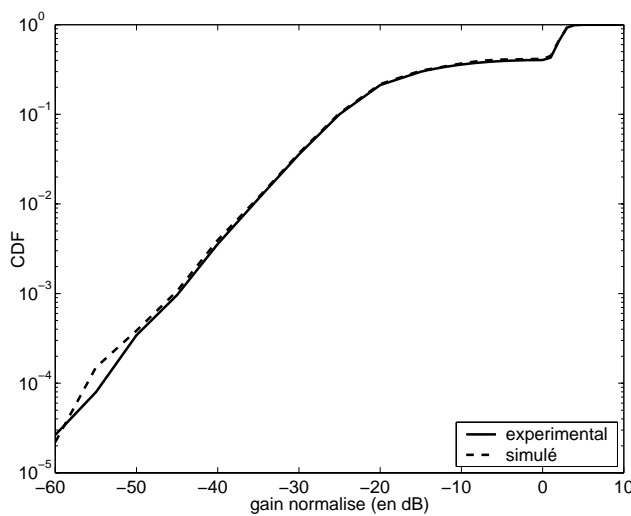


FIG. 3: Fonction de répartition globale.

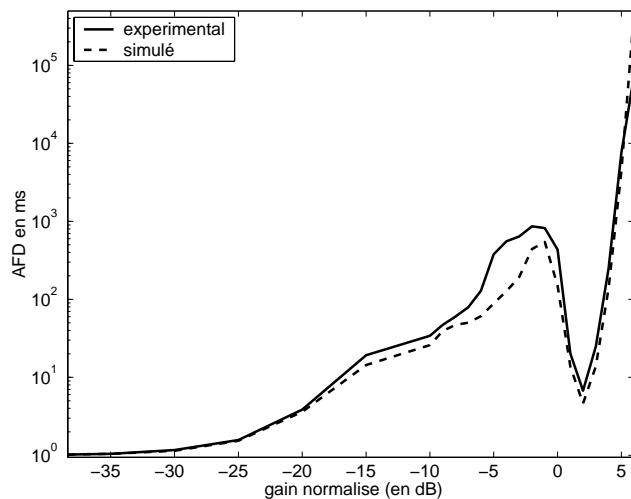


FIG. 4: Durée moyenne globale des évanouissements.

## 4 Conclusion

Une méthode d'estimation de modèle du canal satellite mobile est proposée dans ce papier. Cette méthode fait appel à des outils de reversible jump MCMC. Contrairement aux modèles existants, cette méthode permet une estimation non supervisée du modèle et ne postule pas le nombre d'états du canal a priori. La méthode est appliquée à des signaux expérimentaux mesurés en bande Ku en milieu urbain. Le modèle ainsi obtenu permet d'obtenir des statistiques très proches de celles des signaux observés. Le modèle est donc de bonne qualité en vue de son utilisation pour des systèmes de communications.

## Références

- [1] C. Loo. *A Statistical Model of a Land Mobile Satellite Link*. IEEE Trans. on Vehicular Technology, Vol. 34, No. 3, pp. 122–127, Aug. 1985.

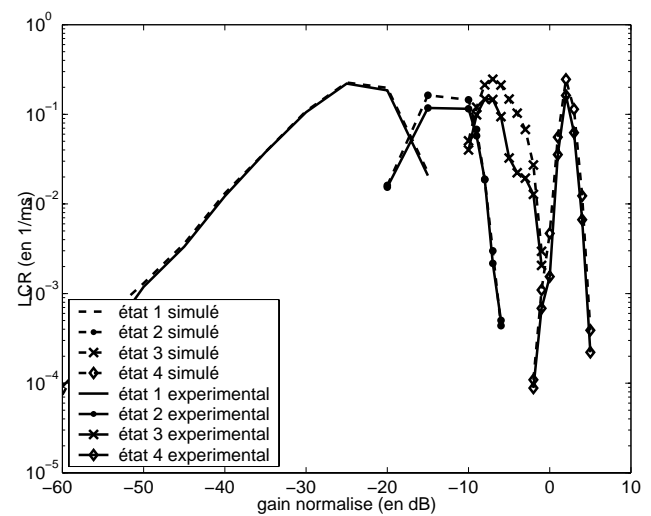


FIG. 5: Level Crossing Rate correspondant à chaque état détecté.

- [2] H. Suzuki. *A Statistical Model for Urban Radio Propagation*. IEEE Trans on Communications, Vol. 25, No. 7, July 1977.
- [3] E. Lutz, D. Cygan, M. Dippold, F. Dolainsky, W. Papke. *The Land Mobile Satellite Communication Channel*. IEEE Trans. on Vehicular Technology, Vol. 40, No. 2, pp. 375–386, May 1991.
- [4] Y. Karasawa, K. Kimura, K. Minamisono. *Analysis of Availability Improvement in LMSS by Means of Satellite Diversity Based on Three-State Propagation Channel Model*. IEEE Trans. On Vehicular Technology, Vol. 46, No. 4, Nov. 1997.
- [5] C.P. Robert, G. Casella. *Monte Carlo statistical methods*, 2nd edition. Springer texts in Statistics, 2004.
- [6] S. Richardson and P.J. Green. *On Bayesian Analysis of Mixtures with an Unknown Number of Components*. J. Royal Statistics Society, Series B, vol 59, no. 4, pp. 731–792, 1997.
- [7] C.P. Robert, T. Ryden, D.M. Titterton. *Bayesian Inference in Hidden Markov Models through reversible jump Markov chain Monte Carlo*. J. Royal Stat. Society, Series B, Vol. 62, pp 57–75, 2000.
- [8] S. Scalise, J. Kunisch, H. Ernst, J. Siemons, G. Harles and J. Hörle. *Measurement Campaign for the Land Mobile Satellite Channel in Ku-Band*. Proc. of the 5th EMPSC Workshop, Beveno/Stresa, Italy, Sept. 2002.



# Filtrages de Kalman et particulaire dans les Chaînes de Markov Triplet

Boujemaa AIT EL FQUIH, François DESBOUVRIES

GET / INT / Dépt. CITI et CNRS UMR 5157, 9 rue Charles Fourier, 91011 Evry, France  
Boujemaa.Ait\_Elfquih@int-evry.fr, Francois.Desbouvries@int-evry.fr

**Résumé** – Soit  $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un processus caché,  $\mathbf{y} = \{\mathbf{y}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un processus observé, et  $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un troisième processus. On considère le problème de la restauration Bayésienne dans une chaîne de Markov "Triplet" (CMT) continue, c'est-à-dire un modèle où l'on suppose que  $\mathbf{t} = (\mathbf{x}, \mathbf{r}, \mathbf{y})$  est une chaîne de Markov (CM) (vectorielle). Ce modèle est une généralisation des chaînes de Markov cachées (CMCa) classiques, et permet cependant le développement d'algorithmes de Kalman et de filtrage particulaire.

**Abstract** – Let  $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  be a hidden process,  $\mathbf{y} = \{\mathbf{y}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  an observed process, and  $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  some additional process. We address Bayesian restoration in a continuous so-called "Triplet" Markov Chain model, i.e. a model in which we assume that  $\mathbf{t} = (\mathbf{x}, \mathbf{r}, \mathbf{y})$  is a vector Markov Chain. This model generalizes the classical Hidden Markov Chain model, and yet enables Kalman-like and particle filtering.

## 1 Introduction

### 1.1 Le filtre de Kalman (FK) et ses extensions

Considérons le modèle d'état

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{G}_n \mathbf{u}_n \\ \mathbf{y}_n = \mathbf{H}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{J}_n \mathbf{v}_n \end{cases}, \quad (1)$$

où  $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^{n_x}$  est l'état,  $\mathbf{y}_n \in \mathbb{R}^{n_y}$  l'observation,  $\mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^{n_u}$  le bruit d'entrée et  $\mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^{n_v}$  le bruit de mesure. Les processus  $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sont supposés indépendants, conjointement indépendants et indépendants de  $\mathbf{x}_0$ .

Soit  $\mathbf{x}_{0:n} = \{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^n$  et  $\mathbf{y}_{0:n} = \{\mathbf{y}_i\}_{i=0}^n$ . Notons respectivement  $p(\mathbf{x}_n)$ ,  $p(\mathbf{x}_{0:n})$  et  $p(\mathbf{x}_n | \mathbf{y}_{0:n})$  les densités de probabilité (ddp) (par rapport à la mesure de Lebesgue) de  $\mathbf{x}_n$ , de  $\mathbf{x}_{0:n}$ , et de  $\mathbf{x}_n$  conditionnellement à  $\mathbf{y}_{0:n}$ ; les autres ddp sont définies de façon similaire. Un problème fondamental associé au modèle (1) (le problème de filtrage) consiste à calculer la ddp a posteriori  $p(\mathbf{x}_n | \mathbf{y}_{0:n})$ . À partir de (1), on a

$$p(\mathbf{x}_{n+1} | \mathbf{x}_{0:n}) = p(\mathbf{x}_{n+1} | \mathbf{x}_n); \quad (2)$$

$$p(\mathbf{y}_{0:n} | \mathbf{x}_{0:n}) = \prod_{i=0}^n p(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_{0:n}); \quad (3)$$

$$p(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_{0:n}) = p(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_i) \quad \forall i, 0 \leq i \leq n. \quad (4)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{0:n} | \mathbf{y}_{0:n}) &= \frac{p(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n | \mathbf{x}_{0:n-1}, \mathbf{y}_{0:n-1})}{p(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}_{0:n-1})} p(\mathbf{x}_{0:n-1} | \mathbf{y}_{0:n-1}) \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_n | \mathbf{x}_n) p(\mathbf{x}_n | \mathbf{x}_{n-1})}{p(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}_{0:n-1})} p(\mathbf{x}_{0:n-1} | \mathbf{y}_{0:n-1}), \end{aligned} \quad (5)$$

d'où l'on déduit par marginalisation une équation de propagation de  $p(\mathbf{x}_n | \mathbf{y}_{0:n})$ . Si de plus  $\mathbf{x}_0$  et  $\mathbf{w}_n = (\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n)$  sont Gaussiennes,  $p(\mathbf{x}_n | \mathbf{y}_{0:n})$  est également Gaussienne; propager  $p(\mathbf{x}_n | \mathbf{y}_{0:n})$  équivaut à propager ses paramètres, et l'équation de filtrage coïncide dans ce cas avec le FK [1] (voir également [2] [3] [4]).

Il existe de nombreuses généralisations du FK. Citons entre autres le développement d'algorithmes robustes (en racine carrée) ou rapides (de type Chandrasekhar); le développement d'algorithmes de lissage ou de prédiction; la levée de l'hypothèse d'indépendance sur  $\mathbf{u}$  et/ou  $\mathbf{v}$ ; et l'extension de (1) à des systèmes non-linéaires et/ou non-Gaussiens, pour lesquels ont été proposées des solutions approchées telles que le FK étendu ou le filtrage particulaire (voir par ex. [5] [3] [6]).

### 1.2 CMCa $\subset$ CMCo $\subset$ CMT

Une autre extension possible du FK consiste à lever certaines hypothèses d'indépendance conditionnelle sur  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ . Ainsi que nous avons vu, (1) implique (2)-(4); en d'autres termes,  $\mathbf{x}$  est une CM, et comme elle n'est connue que par l'intermédiaire du processus observé  $\mathbf{y}$ , (1) est une CM cachée (CMCa). Par ailleurs (2)-(4) impliquent

$$p(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n | \mathbf{x}_{0:n}, \mathbf{y}_{0:n-1}) = p(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n | \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_{n-1}), \quad (6)$$

ce qui signifie que le couple  $\{(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n)\}$  est une CM (vectorielle). Toute CMCa est donc également une CM "Couple" (CMCo); en revanche, si  $\{(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n)\}$  est une CMCo le processus marginal  $\{\mathbf{x}_n\}$  n'est plus nécessairement une CM, et (3) ou (4) n'est plus nécessairement vérifiée [7]. Il est cependant possible de restaurer  $\mathbf{x}$  dans une CMCo, car (5) devient

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{0:n} | \mathbf{y}_{0:n}) &= \frac{p(\mathbf{y}_n | \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_{n-1}) p(\mathbf{x}_n | \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_{n-2})}{p(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}_{0:n-1})} \\ &\quad \times p(\mathbf{x}_{0:n-1} | \mathbf{y}_{0:n-1}), \end{aligned} \quad (7)$$

et les algorithmes de filtrage s'adaptent en conséquence [7] [8].

Le modèle CMCo peut à son tour se généraliser au modèle CMT [9] [10] [11]. Soit  $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un processus additionnel (éventuellement artificiel), et soit  $\mathbf{t}_n = (\mathbf{x}_n, \mathbf{r}_n, \mathbf{y}_{n-1})$ . Nous dirons que  $\mathbf{t} = \{\mathbf{t}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une CMT si  $\mathbf{t}$  est une CM (vectorielle) (voir [12] [11] pour des exemples concrets de CMT). L'intérêt des CMT est double :

- En ce qui concerne la restauration, la CMT  $(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \mathbf{y})$  peut être vue comme la CMCo  $((\mathbf{x}, \mathbf{r}), \mathbf{y})$ ; donc  $\mathbf{x}^* = (\mathbf{x}, \mathbf{r})$  peut être restauré à partir de  $\mathbf{y}$  par un algorithme couple, et finalement  $\mathbf{x}$  est obtenu par marginalisation;
- En ce qui concerne la modélisation, les CMT généralisent des modèles classiques en ce sens qu'aucune des chaînes  $\mathbf{x}, \mathbf{r}, \mathbf{y}, (\mathbf{x}, \mathbf{r}), (\mathbf{x}, \mathbf{y})$  ou  $(\mathbf{r}, \mathbf{y})$  n'est nécessairement de Markov. Par ailleurs, dans une CMCa  $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$  est donné par (3) (4), et cette modélisation est trop simple dans certaines applications, telles que la reconnaissance de la parole [13]; alors que dans une CMT  $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$  est la marginale de la CM  $p(\mathbf{r}, \mathbf{y}|\mathbf{x})$ , et peut donc être beaucoup plus complexe. En pratique un certain nombre de simulations ont montré l'apport des CMCo [14] (resp. CMT [15]) par rapport aux CMCa en segmentation d'images.

Le reste de cet article est organisé de la façon suivante. Nous considérons d'abord le cas de CMT linéaires et Gaussiennes (LG), et étendons au cas singulier quelconque un algorithme [12] de filtrage de Kalman. Nous proposons ensuite un algorithme de filtrage particulière pour le cas général.

## 2 Filtrage de Kalman dans les CMTLG

### 2.1 CMT linéaires et filtrage optimal

Soit  $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^{n_x}$  le processus caché,  $\mathbf{y}_n \in \mathbb{R}^{n_y}$  l'observation et  $\mathbf{r}_n \in \mathbb{R}^{n_r}$  un troisième processus. Pour  $n > 0$ , soit  $\mathbf{t}_n = (\mathbf{x}_n, \mathbf{r}_n, \mathbf{y}_{n-1})$ , et  $\mathbf{t}_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{0})$ . Concaténons les variables cachées  $\mathbf{x}_n$  et  $\mathbf{r}_n$  en  $\mathbf{x}_n^* = (\mathbf{x}_n, \mathbf{r}_n)$ . Nous dirons que  $\mathbf{t} = \{\mathbf{t}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une CMT si  $\mathbf{t}$  est une CM (vectorielle), et que  $\mathbf{t}$  est une CMT linéaire si de plus  $\mathbf{t}_n$  satisfait :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n+1}^* \\ \mathbf{y}_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{F}_n^{\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*} & \mathcal{F}_n^{\mathbf{x}^*, \mathbf{y}} \\ \mathcal{F}_n^{\mathbf{y}, \mathbf{x}^*} & \mathcal{F}_n^{\mathbf{y}, \mathbf{y}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{F}_n} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n^* \\ \mathbf{y}_{n-1} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{w}_n^{\mathbf{x}^*} \\ \mathbf{w}_n^{\mathbf{y}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_n}, \quad (8)$$

où  $\mathcal{F}_n$  est déterministe, et  $\mathbf{w} = \{\mathbf{w}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est centré, indépendant et indépendant de  $\mathbf{t}_0$ .

Le but de ce chapitre est d'établir un algorithme de calcul récursif, dans le cas Gaussien, de  $p(\mathbf{x}_n|\mathbf{y}_{0:n})$  dans une CMT linéaire (8). Supposons donc de plus que

$$\mathbf{x}_0^* \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0^*), \quad \mathbf{w}_n \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{Q}_n^{\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*} & \mathcal{Q}_n^{\mathbf{x}^*, \mathbf{y}} \\ \mathcal{Q}_n^{\mathbf{y}, \mathbf{x}^*} & \mathcal{Q}_n^{\mathbf{y}, \mathbf{y}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{Q}_n}). \quad (9)$$

Alors  $\mathbf{t}$  est Gaussien, et le modèle (8)-(9) définit en fait un processus (vectoriel) de Gauss-Markov partiellement observé, dans lequel on observe certaines composantes  $\{\mathbf{y}_n\}$  et on veut restaurer une partie des composantes restantes  $\{\mathbf{x}_n^*\}$ . Notre algorithme calcule donc récursivement  $p(\mathbf{x}_n^*|\mathbf{y}_{0:n})$  (ou, dans le cas de mesures singulières,  $p(\bar{\mathbf{x}}_n|\mathbf{y}_{0:n})$ , où  $\bar{\mathbf{x}}_n$  est un sous-vecteur de  $\mathbf{x}_n^*$ ), puis  $p(\mathbf{x}_n|\mathbf{y}_{0:n})$  est obtenu par marginalisation.

### 2.2 Le cas singulier

Un algorithme de filtrage de Kalman a été proposé dans le cas où  $\mathcal{Q}_n^{\mathbf{y}, \mathbf{y}}$  est définie positive [10] [12]. Nous nous focalisons donc désormais sur le cas où les observations sont singulières. Soit donc  $r = \text{rang}(\mathcal{Q}_n^{\mathbf{y}, \mathbf{y}}) \in \{0, 1, \dots, n_y - 1\}$ . On peut utiliser l'algorithme du cas régulier (c'est-à-dire [12, éqs.

(13)-(17)]) en remplaçant (si nécessaire) les inverses par des inverses généralisées. Nous verrons qu'il est cependant possible (en adaptant une technique classique [3]) d'exploiter la singularité de  $\mathcal{Q}_n^{\mathbf{y}, \mathbf{y}}$  pour réduire, par une transformation d'état, de  $m = n_y - r$  la dimension de  $\mathbf{x}_n^*$ ; nous proposerons alors un algorithme de restauration pour ce système équivalent.

#### 2.2.1 Transformation d'état

$\mathcal{Q}_n^{\mathbf{y}, \mathbf{y}}$  a  $m$  valeurs propres nulles. Donc  $\exists \mathbf{M}_n$  inversible t.q.

$$\mathbf{M}_n \mathcal{Q}_n^{\mathbf{y}, \mathbf{y}} \mathbf{M}_n^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{r \times r} \end{bmatrix}.$$

Soit  $\bar{\mathbf{y}}_n = \mathbf{M}_n \mathbf{y}_n$  et  $\bar{\mathbf{w}}_n^{\mathbf{y}} = \mathbf{M}_n \mathbf{w}_n^{\mathbf{y}}$ ; alors (8) implique

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}}_n^p \\ \bar{\mathbf{y}}_n^r \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{y}}_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \mathbf{x}^*} \\ \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^r, \mathbf{x}^*} \end{bmatrix}}_{\mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}^*} = \mathbf{M}_n \mathcal{F}_n^{\mathbf{y}, \mathbf{x}^*}} \mathbf{x}_n^* + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \bar{\mathbf{y}}} \\ \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^r, \bar{\mathbf{y}}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}} = \mathbf{M}_n \mathcal{F}_n^{\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}} \mathbf{M}_{n-1}^{-1}} \bar{\mathbf{y}}_{n-1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{w}_n^{\bar{\mathbf{y}}^r} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{w}}_n^{\bar{\mathbf{y}}}}, \quad (10)$$

et l'on voit que  $\bar{\mathbf{y}}_n$  se divise en une partie non bruitée ( $\bar{\mathbf{y}}_n^p$ ) $_{m \times 1}$  et une partie régulière ( $\bar{\mathbf{y}}_n^r$ ) $_{r \times 1}$ . Comme  $m$  combinaisons linéaires de  $\mathbf{x}_n^*$  sont connues lorsque  $\bar{\mathbf{y}}_{n-1}$  et  $\bar{\mathbf{y}}_n$  le sont, il n'est pas nécessaire de les estimer, et c'est la raison pour laquelle on peut réduire de  $m$  la dimension du système, ainsi que nous allons le voir. Soit  $n_{x^*} \geq m$ , et considérons la partition suivante de  $\mathbf{x}_n^*$  :

$$\mathbf{x}_n^* = \begin{bmatrix} (\mathbf{x}_n)_{n_x \times 1} \\ (\mathbf{r}_n)_{n_r \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{x}}_n)_{(n_x + n_r - m) \times 1} \\ (\tilde{\mathbf{r}}_n)_{m \times 1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

(pour le moment nous ne supposons rien sur la position de  $n_r$  par rapport à  $m$ ). Supposons que dans (10)

$$\text{rang}(\mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \mathbf{x}^*})_{m \times n_{x^*}} = m. \quad (12)$$

Alors on peut choisir  $\mathbf{U}_n$  de telle sorte que la transformation

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (\mathbf{U}_n)_{(n_{x^*} - m) \times n_{x^*}} \\ (\mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \mathbf{x}^*})_{m \times n_{x^*}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_n} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_n \\ \tilde{\mathbf{r}}_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_n^*} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_n \\ \bar{\mathbf{r}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}}_n^p - \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \bar{\mathbf{y}}} \bar{\mathbf{y}}_{n-1} \\ \bar{\mathbf{y}}_n^r \end{bmatrix} \quad (13)$$

soit réversible, et finalement  $\mathbf{T}_n$  et  $\mathbf{M}_n$  permettent de remplacer (8) par un système équivalent :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{n+1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{t}_{n+1}'} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n+1}^* \\ \mathbf{y}_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{t}_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{n+1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{t}_{n+1}'} \mathcal{F}_n \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T}_n^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{n-1}^{-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{t}_n'} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{t}_n'} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_n^* \\ \mathbf{y}_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{t}_n'} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{n+1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{t}_{n+1}'} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{w}_n^{\mathbf{x}^*} \\ \mathbf{w}_n^{\mathbf{y}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_n}.$$

Les  $n_{x^*}$  premières équations de (14) se réécrivent

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{n+1} \\ \bar{\mathbf{y}}_{n+1}^p \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{y}}_{n+1}^p} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}} & \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}} \\ \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \bar{\mathbf{x}}} & \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \bar{\mathbf{y}}} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathcal{G}}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p}} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_n \\ \bar{\mathbf{y}}_n \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{y}}_n} + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathcal{G}}_n^{\bar{\mathbf{x}}} \\ \bar{\mathcal{G}}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathcal{G}}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p}} \bar{\mathbf{y}}_{n-1} + \mathbf{T}_{n+1} \mathbf{w}_n^{\mathbf{x}^*}, \quad (15)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}} & \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}} \\ \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \bar{\mathbf{x}}} & \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \bar{\mathbf{y}}} \end{bmatrix}}_{\substack{n_{x^*} \times (n_{x^*} + r)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{n+1} \mathcal{F}_n^{\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*} \mathbf{T}_n^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\substack{n_{x^*} \times (n_{x^*} + r)}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_{x^*}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \bar{\mathbf{y}}} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathcal{G}}_n^{\bar{\mathbf{x}}} \\ \bar{\mathcal{G}}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p} \end{bmatrix}}_{\substack{n_{x^*} \times (n_{x^*} + r)}} = \mathbf{T}_{n+1} \mathcal{F}_n^{\mathbf{x}^*, \mathbf{y}} \mathbf{M}_{n-1}^{-1} \mathbf{T}_{n+1} \mathcal{F}_n^{\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*} \mathbf{T}_n^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_{x^*} \times n_y} \\ \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \bar{\mathbf{y}}} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

D'autre part, les  $n_y$  dernières équations de (14) sont données par (10). Les  $m$  premières équations de (10) coïncident avec les

$m$  dernières de (15) et sont donc redondantes. En concaténant (15) et les  $r$  dernières équations de (10) (écrites à l'instant  $n+1$  grâce à (8)), on obtient le système de dimension réduite :

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{n+1} \\ \bar{\mathbf{y}}_{n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}} & \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}} \\ \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}} & \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathcal{F}}_n} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_n \\ \bar{\mathbf{y}}_n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathcal{G}}_n^{\bar{\mathbf{x}}} \\ \bar{\mathcal{G}}_n^{\bar{\mathbf{y}}} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathcal{G}}_n} \bar{\mathbf{y}}_{n-1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n+1} & \mathbf{0} \\ \mathcal{F}_{n+1}^{\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}^*} & \tilde{\mathbf{I}}_r \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{w}}_n} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_n^{\mathbf{x}^*} \\ \mathbf{w}_n^{\bar{\mathbf{y}}} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

avec  $\tilde{\mathbf{I}}_r = [\mathbf{0}_{m \times r}^T, \mathbf{I}_{r \times r}]^T$ , et

$$\bar{\mathcal{F}}_n = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{n+1} \\ \mathcal{F}_{n+1}^{\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}^*} \end{bmatrix}}_{(n_{\mathbf{x}^*} + r) \times n_{\mathbf{x}^*}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{F}_n^{\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*} \mathbf{T}_n^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{n_{\mathbf{x}^*} \times (n_{\mathbf{x}^*} + r)} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_{\bar{\mathbf{y}}}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\bar{\mathcal{G}}_n = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{n+1} \\ \mathcal{F}_{n+1}^{\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}^*} \end{bmatrix}}_{(n_{\mathbf{x}^*} + r) \times n_{\mathbf{x}^*}} (\mathcal{F}_n^{\mathbf{x}^*, \bar{\mathbf{y}}} \mathbf{M}_{n-1}^{-1} - \mathcal{F}_n^{\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*} \mathbf{T}_n^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_{\bar{\mathbf{y}}} \times n_{\bar{\mathbf{y}}}} \\ \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}} \end{bmatrix}). \quad (20)$$

## 2.2.2 Algorithme de restauration

Nous étudions maintenant la restauration de  $\bar{\mathbf{x}}_n$  à partir de  $\{\bar{\mathbf{y}}_{0:n}\}$  dans (18), et, en définitive, celle de  $\mathbf{x}_n$  à partir de  $\{\mathbf{y}_{0:n}\}$  dans (8), qui est notre but ultime. Supposons que  $\mathbf{w}_n^{\mathbf{x}^*}$  et  $\mathbf{w}_n^{\bar{\mathbf{y}}}$  sont indépendants, et posons

$$\bar{\mathcal{Q}}_n = E(\bar{\mathbf{w}}_n \bar{\mathbf{w}}_n^T) = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n+1} & \mathbf{0} \\ \mathcal{F}_{n+1}^{\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}^*} & \tilde{\mathbf{I}}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_n^{\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n+1} & \mathbf{0} \\ \mathcal{F}_{n+1}^{\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}^*} & \tilde{\mathbf{I}}_r \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{Q}}_n^{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}} & \bar{\mathcal{Q}}_n^{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}} \\ \bar{\mathcal{Q}}_n^{\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}} & \bar{\mathcal{Q}}_n^{\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

**Proposition 1 (FK pour CMTLG singulières)** Soit (8), (9) et (12). Supposons que  $n_{\mathbf{x}^*} \geq m$ , et supposons également que  $\mathbf{w}_n^{\mathbf{x}^*}$  et  $\mathbf{w}_n^{\bar{\mathbf{y}}}$  sont indépendants. Posons  $p(\bar{\mathbf{x}}_n | \bar{\mathbf{y}}_{0:n}) \sim \mathcal{N}(\hat{\bar{\mathbf{x}}}_n | n, \bar{\mathbf{P}}_{n|n})$  et  $p(\bar{\mathbf{x}}_{n+1} | \bar{\mathbf{y}}_{0:n}) \sim \mathcal{N}(\hat{\bar{\mathbf{x}}}_{n+1} | n, \bar{\mathbf{P}}_{n+1|n})$ . Alors  $\hat{\bar{\mathbf{x}}}_n$  et  $\bar{\mathbf{P}}_{n|n}$  peuvent être calculés récursivement selon<sup>1</sup> :

$$\hat{\bar{\mathbf{x}}}_{n+1|n} = \bar{\mathcal{F}}_n^{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}} \hat{\bar{\mathbf{x}}}_n + \bar{\mathcal{F}}_n^{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}} \bar{\mathbf{y}}_n + \bar{\mathcal{G}}_n^{\bar{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{y}}_{n-1}, \quad (22)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{n+1|n} = \bar{\mathcal{Q}}_n^{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}} + \bar{\mathcal{F}}_n^{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{P}}_{n|n} (\bar{\mathcal{F}}_n^{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}})^T, \quad (23)$$

$$\hat{\bar{\mathbf{y}}}_{n+1|n} = \bar{\mathcal{F}}_n^{\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}} \hat{\bar{\mathbf{x}}}_n + \bar{\mathcal{F}}_n^{\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}} \bar{\mathbf{y}}_n + \bar{\mathcal{G}}_n^{\bar{\mathbf{y}}} \bar{\mathbf{y}}_{n-1}, \quad (24)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{n+1|n+1} = \bar{\mathcal{Q}}_n^{\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}} + \bar{\mathcal{F}}_n^{\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{P}}_{n|n} (\bar{\mathcal{F}}_n^{\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}})^T, \quad (25)$$

$$\bar{\mathbf{L}}_{n+1|n+1} = \bar{\mathcal{Q}}_n^{\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}} + \bar{\mathcal{F}}_n^{\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{P}}_{n|n} (\bar{\mathcal{F}}_n^{\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}})^T, \quad (26)$$

$$\hat{\bar{\mathbf{x}}}_{n+1|n+1} = \hat{\bar{\mathbf{x}}}_{n+1|n} + \bar{\mathbf{K}}_{n+1|n+1} \bar{\mathbf{L}}_{n+1|n+1}^{-1} (\bar{\mathbf{y}}_{n+1} - \hat{\bar{\mathbf{y}}}_{n+1|n}), \quad (27)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{n+1|n+1} = \bar{\mathbf{P}}_{n+1|n} - \bar{\mathbf{K}}_{n+1|n+1} \bar{\mathbf{L}}_{n+1|n+1}^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{n+1|n+1}^T. \quad (28)$$

En ce qui concerne l'initialisation,  $\hat{\bar{\mathbf{x}}}_{0|0}$  et  $\bar{\mathbf{P}}_{0|0}$  vérifient (27) et (28) avec  $n = -1$ , et  $\hat{\bar{\mathbf{x}}}_{0|-1} = \mathbf{U}_0 \hat{\mathbf{x}}_0^*$ ,  $\bar{\mathbf{P}}_{0|-1} = \mathbf{U}_0 \mathbf{P}_0^* \mathbf{U}_0^T$ ,  $\hat{\bar{\mathbf{y}}}_{0|-1} = \mathcal{F}_0^{\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}^*} \hat{\mathbf{x}}_0^*$ ,  $\bar{\mathbf{K}}_{0|0} = \mathbf{U}_0 \mathbf{P}_0^* (\mathcal{F}_0^{\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}^*})^T$  et  $\bar{\mathbf{L}}_{0|0} = \mathcal{F}_0^{\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}^*} \mathbf{P}_0^* (\mathcal{F}_0^{\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}^*})^T + \text{diag.}(\mathbf{0}_m, \mathbf{I}_r)$ . Enfin conditionnellement à  $\mathbf{y}_{0:n}$ ,  $\mathbf{x}_n \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_n | n, \mathbf{P}_{n|n})$ , avec

$$\hat{\mathbf{x}}_n | n = [\mathbf{I}_{n_{\mathbf{x}}}, \mathbf{0}_{n_{\mathbf{x}} \times n_r}] \mathbf{T}_n^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\bar{\mathbf{x}}}_n | n \\ \bar{\mathbf{y}}_n - \bar{\mathcal{F}}_n^{\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}} \hat{\bar{\mathbf{x}}}_n \end{bmatrix}, \quad (29)$$

$$\mathbf{P}_{n|n} = [\mathbf{I}_{n_{\mathbf{x}}}, \mathbf{0}_{n_{\mathbf{x}} \times n_r}] \mathbf{T}_n^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_{n|n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_m \end{bmatrix} (\mathbf{T}_n^{-1})^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_{\mathbf{x}}} \\ \mathbf{0}_{n_r \times n_{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} \quad (30)$$

<sup>1</sup>Les inverses dans (27) et (28) doivent être remplacées par des inverses généralisées si  $\bar{\mathbf{L}}_{n+1|n+1}$  n'est pas inversible.

**Preuve 1** Le modèle (18) est un cas particulier de [16, éqs. (13.46)-(13.47)] ou [17, (3.1.1), (3.1.3), (3.2.20)], donc (22)-(28) peuvent être obtenues à partir de [16, éqs. (13.56)-(13.57)] ou [17, §3.2.4 p. 112]. Considérons maintenant l'initialisation. A partir de (10) et de (13), on obtient

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_0 \\ \bar{\mathbf{y}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathcal{F}_0^{\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}^*} \end{bmatrix} \mathbf{x}_0^* + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_0^{\bar{\mathbf{y}}} \end{bmatrix},$$

donc

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_0 \\ \bar{\mathbf{y}}_0 \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} \hat{\bar{\mathbf{x}}}_{0|-1} \\ \hat{\bar{\mathbf{y}}}_{0|-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_{0|-1} & \bar{\mathbf{K}}_{0|0} \\ \bar{\mathbf{K}}_{0|0}^T & \bar{\mathbf{L}}_{0|0} \end{bmatrix} \right),$$

$\hat{\bar{\mathbf{x}}}_{0|-1}$ ,  $\bar{\mathbf{P}}_{0|-1}$ ,  $\hat{\bar{\mathbf{y}}}_{0|-1}$ ,  $\bar{\mathbf{K}}_{0|0}$  et  $\bar{\mathbf{L}}_{0|0}$  étant calculés grâce à (9). Par ailleurs,  $p(\bar{\mathbf{x}}_0 | \bar{\mathbf{y}}_0) \sim \mathcal{N}(\hat{\bar{\mathbf{x}}}_{0|0}, \bar{\mathbf{P}}_{0|0})$  est fourni par (27) et (28) pour  $n = -1$ . Finalement partitionnons  $\mathbf{T}_n^{-1}$  en  $\mathbf{T}_n^{-1} = [(\mathbf{V}_n)_{n_{\mathbf{x}^*} \times (n_{\mathbf{x}^*} - m)}, (\mathbf{W}_n)_{n_{\mathbf{x}^*} \times m}]$ . A partir de (13),  $\mathbf{x}_n^* = \mathbf{V}_n \bar{\mathbf{x}}_n + \mathbf{W}_n (\bar{\mathbf{y}}_n - \bar{\mathcal{F}}_n^{\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{y}}_{n-1})$ . Donc conditionnellement à  $\mathbf{y}_{0:n}$ ,  $\mathbf{x}_n^* \sim \mathcal{N}(\mathbf{V}_n \hat{\bar{\mathbf{x}}}_n | n + \mathbf{W}_n (\bar{\mathbf{y}}_n - \bar{\mathcal{F}}_n^{\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{y}}_{n-1}), \mathbf{V}_n \bar{\mathbf{P}}_{n|n} \mathbf{V}_n^T)$ . En marginalisant par rapport aux  $n_{\mathbf{x}}$  premières composantes de  $\mathbf{x}_n^* = (\mathbf{x}_n, \mathbf{r}_n)$ , on obtient finalement (29) et (30).

## 2.2.3 Remarques

- Des simplifications surviennent dans certains cas particuliers. Partitionnons par exemple  $\mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x}^*}$  définie en (10) en  $\mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \mathbf{x}^*} = [(\mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \bar{\mathbf{x}}})_{m \times n_{\bar{\mathbf{x}}}}, (\mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \bar{\mathbf{r}}})_{m \times m}]$ , et supposons  $\mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \bar{\mathbf{r}}}$  inversible. Dans ce cas on peut choisir  $\mathbf{U}_n = [\mathbf{I}_{n_{\bar{\mathbf{x}}}}, \mathbf{0}]$ , et

$$\mathbf{T}_n^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_{\bar{\mathbf{x}}}} & \mathbf{0}_{n_{\bar{\mathbf{x}}} \times m} \\ \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \bar{\mathbf{x}}} & \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \bar{\mathbf{r}}} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_{\bar{\mathbf{x}}}} & \mathbf{0}_{n_{\bar{\mathbf{x}}} \times m} \\ -(\mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \bar{\mathbf{r}}})^{-1} \mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \bar{\mathbf{x}}} & (\mathcal{F}_n^{\bar{\mathbf{y}}^p, \bar{\mathbf{r}}})^{-1} \end{bmatrix}.$$

Il y a alors deux cas. Si  $n_r \geq m$ , alors dans (11)  $n_{\mathbf{x}} \leq n_{\bar{\mathbf{x}}}$ , et à partir de (29) et (30)  $\hat{\mathbf{x}}_n | n$  est un sous-vecteur de  $\hat{\bar{\mathbf{x}}}_n | n$  et  $\mathbf{P}_{n|n}$  une sous-matrice de  $\bar{\mathbf{P}}_{n|n}$ . Si  $m > n_r$ , (30) implique que  $\mathbf{P}_{n|n}$  est une matrice singulière  $n_{\mathbf{x}} \times n_{\mathbf{x}}$  de rang au plus  $n_{\bar{\mathbf{x}}}$ . La raison en est que dans (11)  $\bar{\mathbf{x}}_n$  est un sous-vecteur de  $\mathbf{x}_n$ , et donc, à une matrice inversible près, il n'est nécessaire d'estimer à partir de  $\mathbf{y}_{0:n}$  que  $n_{\bar{\mathbf{x}}}$  composantes de  $\mathbf{x}_n$ .

- Un certain nombre de CMT linéaires utilisées en pratique sont telles que  $\mathbf{w}_n^{\bar{\mathbf{y}}} = \mathbf{0}$  [12], donc le cas  $m = n_{\bar{\mathbf{y}}}$  est un cas particulier important de notre algorithme. Dans ce cas  $\mathcal{Q}_n^{\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}} = \mathbf{0}_{n_{\bar{\mathbf{y}}}}$ , et on peut donc choisir  $\mathbf{M}_n = \mathbf{I}_{n_{\bar{\mathbf{y}}}}$ . Les  $n_{\bar{\mathbf{y}}}$  dernières équations de (14) sont contenues dans (10), et elles coïncident avec les  $n_{\bar{\mathbf{y}}}$  dernières équations de (15). Donc (15) suffit, et (18) se réduit à (15) (avec  $\bar{\mathbf{y}}_n^p = \mathbf{y}_n$ ), (19) à (16) et (20) à (17) (voir également [12]).

## 3 Filtrage particulaire dans les CMT

Nous considérons désormais le problème de la restauration de  $\mathbf{x}^*$  (et donc de  $\mathbf{x}$ ) dans le cas général. Comme  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$  est une CMCo,  $p(\mathbf{x}_{0:n}^* | \mathbf{y}_{0:n})$  vérifie une équation récursive analogue à (7) (obtenue en remplaçant  $\mathbf{x}$  par  $\mathbf{x}^*$ ), qui constitue la base d'un algorithme de propagation d'une approximation discrète de  $p(\mathbf{x}_{0:n}^* | \mathbf{y}_{0:n})$ . L'algorithme de filtrage particulaire obtenu est donc une adaptation immédiate de [8] (qui considérait le cas des CMCo) :

### Algorithme de filtrage particulaire pour CMT.

Pour  $i = 1, \dots, N$ ,

Tirer  $\mathbf{x}_n^{*(i)} \sim q(\mathbf{x}_n^* | \mathbf{x}_{0:n-1}^{*(i)}, \mathbf{y}_{0:n})$ , poser  $\mathbf{x}_{0:n}^{*(i)} = [\mathbf{x}_{0:n-1}^{*(i)}, \mathbf{x}_n^{*(i)}]$ ;

Calculer les poids d'importance

$$\tilde{w}_n^{(i)} = \frac{p(\mathbf{x}_n^{*(i)} | \mathbf{x}_{n-1}^{*(i)}, \mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_{n-2}) p(\mathbf{y}_n | \mathbf{x}_n^{*(i)}, \mathbf{y}_{n-1})}{q(\mathbf{x}_n^{*(i)} | \mathbf{x}_{0:n-1}^{*(i)}, \mathbf{y}_{0:n})} w_{n-1}^{(i)},$$

$$w_n^{(i)} = \tilde{w}_n^{(i)} / \sum_{i=1}^N \tilde{w}_n^{(i)};$$

$\sum_{i=1}^N w_n^{(i)} \delta(\mathbf{x}_n^* - \mathbf{x}_n^{*(i)})$  est une approximation de  $p(\mathbf{x}_n^* | \mathbf{y}_{0:n})$ .

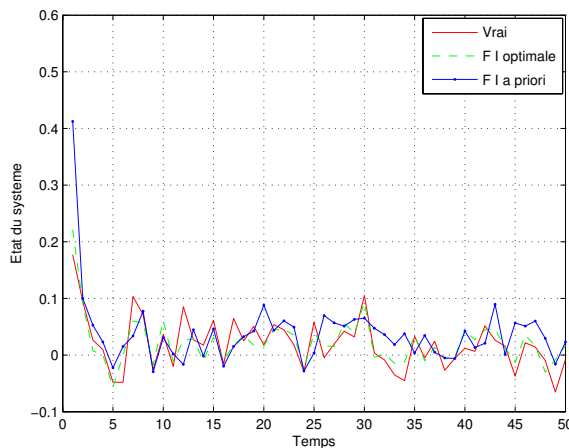
Nous proposons maintenant une simulation de cet algorithme.

Considérons la CMT non linéaire

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ r_{n+1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .213 \frac{x_n}{x_n^2 + 1} & .066 x_n & .033 x_n r_n \\ .033 r_n & .030 \frac{r_n}{r_n^2 + 1} & .036 x_n r_n \\ 1.35 & .10 & .82 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ r_n \\ y_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_n^x \\ w_n^r \\ w_n^y \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{Q}_n = \begin{bmatrix} .125 & .015 & .012 \\ .015 & .125 & .013 \\ .012 & .013 & .125 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^* \sim \mathcal{N}([.5, .5]^T, 2.5 \mathbf{I}_{2 \times 2}).$$

La figure représente un moyennage des résultats sur 80 simulations. Le nombre  $N$  de particules est égal à 100. Un rééchantillonnage est appliqué lorsque la taille effective estimée devient inférieure à  $N/3$ . La figure montre la trajectoire de l'état  $x_n$  et de son estimée, obtenue en prenant pour fonction d'importance la fonction "optimale" [8], c'est-à-dire la loi a posteriori  $q(\mathbf{x}_n^* | \mathbf{x}_{0:n-1}^{*(i)}, \mathbf{y}_{0:n}) = p(\mathbf{x}_n^* | \mathbf{x}_{0:n-1}^{*(i)}, \mathbf{y}_{0:n}) = p(\mathbf{x}_n^* | \mathbf{x}_{n-1}^{*(i)}, \mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_{n-2})$ , ou la fonction d'importance a priori  $p(\mathbf{x}_n^* | \mathbf{x}_{0:n-1}^{*(i)}, \mathbf{y}_{0:n-1}) = p(\mathbf{x}_n^* | \mathbf{x}_{n-1}^{*(i)}, \mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_{n-2})$ .



## Références

- [1] R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *J. Basic Eng., Trans. ASME, Series D*, vol. 82, no. 1, pp. 35–45, 1960.
- [2] Y. C. Ho and R. C. K. Lee, "A Bayesian approach to problems in stochastic estimation and control," *IEEE Tr. on Automatic Control*, vol. 9, pp. 333–339, October 1964.
- [3] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, *Optimal Filtering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1979.
- [4] T. Kailath, A. H. Sayed, and B. Hassibi, *Linear estimation*, Prentice Hall Information and System Sciences Series. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2000.
- [5] A. H. Jazwinski, *Stochastic Processes and Filtering Theory*, vol. 64 of *Mathematics in Science and Engineering*, Academic Press, San Diego, 1970.
- [6] A. Doucet, N. de Freitas, and N. Gordon, Eds., *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Statistics for Engineering and Information Science. Springer Verlag, New York, 2001.
- [7] W. Pieczynski and F. Desbouvries, "Kalman filtering using pairwise Gaussian models," in *Proceedings of the ICASSP*, Hong-Kong, April 6-10 2003.
- [8] F. Desbouvries and W. Pieczynski, "Particle filtering in pairwise and triplet Markov chains," in *Proceedings of the IEEE - EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing (NSIP 2003)*, Grado-Gorizia, Italy, June 8-11 2003.
- [9] W. Pieczynski, C. Hulard, and T. Veit, "Triplet Markov chains in hidden signal restoration," in *SPIE International Symposium on Remote Sensing*, Crete, Grece, September 22-27 2002.
- [10] F. Desbouvries and W. Pieczynski, "Modèles de Markov triplet et filtrage de Kalman," *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Mathématiques*, vol. 336, no. 8, 2003, in French.
- [11] W. Pieczynski and F. Desbouvries, "On Triplet Markov chains," in *Proceedings of the International Symposium on Applied Stochastic Models and Data Analysis (ASMDA 2005)*, Brest, France, May 17-20 2005.
- [12] B. Ait-El-Fquih and F. Desbouvries, "Kalman filtering for triplet Markov chains : Applications and extensions," in *Proceedings of the ICASSP*, Philadelphia, USA, March 18-23 2005.
- [13] M. Ostendorf, V.V. Digalakis, and O. A. Kimball, "From HMMs to segment models : a unified view of stochastic modeling for speech recognition," *IEEE Tr. Speech and Audio Processing*, vol. 4, no. 5, pp. 360–378, Sept. 1996.
- [14] S. Derrode and W. Pieczynski, "Signal and image segmentation using pairwise Markov chains," *IEEE Tr. Signal Processing*, vol. 52, no. 9, pp. 2477–89, 2004.
- [15] P. Lanchantin and W. Pieczynski, "Unsupervised non stationary image segmentation using triplet Markov chains," in *Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems (ACVIS 04)*, Brussels, Belgium, Aug. 31 - Sept. 3 2004.
- [16] R. S. Lipster and A. N. Shiryaev, *Statistics of Random Processes, Vol. 2 : Applications*, chapter 13 : "Conditionally Gaussian Sequences : Filtering and Related Problems", Springer Verlag, Berlin, 2001.
- [17] A. C. Harvey, *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter*, Cambridge University Press, 1989.

# Fusion de capteurs potentiellement défaillants par filtrage particulaire

François Caron, Manuel Davy, Emmanuel Duflos, Philippe Vanheegehe  
 Laboratoire d'Automatique, de Génie Informatique et Signal  
 BP 48, Cité scientifique, 59651 Villeneuve d'Ascq Cedex, France  
 francois.caron@ec-lille.fr,manuel.davy@ec-lille.fr,  
 emmanuel.duflos@ec-lille.fr,philippe.vanheegehe@ec-lille.fr

**Résumé** — Cet article s'intéresse à l'estimation bayésienne d'un vecteur d'état à l'aide de données multicapteur obtenues séquentiellement, en considérant que les capteurs sont potentiellement défaillants. Un état augmenté avec les variables indicatrices de validité et les coefficients de fiabilité de chaque capteur est estimé par un algorithme de Monte Carlo séquentiel (aussi appelé filtre particulaire). Une attention particulière est portée au choix des fonctions d'importance. Un exemple est fourni montrant l'amélioration de l'estimation en présence de capteurs défaillants par rapport à un filtre particulaire classique.

**Abstract** — This article is interested in bayesian estimation of a state vector using sequential multisensor data, under the assumption that sensors are potentially failing. A state augmented with discrete validity variables and reliability coefficients of each sensor is estimated with a sequential Monte Carlo algorithm (also called a particle filter). Importance functions are proposed to obtain an efficient particle filter. An example is provided, showing the estimation improvement in case of failing sensors compared to a classical particle filter.

## 1 Introduction

Le développement de systèmes de plus en plus complexes rend nécessaire la fusion d'un grand nombre de capteurs aux données redondantes et/ou complémentaires. La complémentarité permet d'avoir accès à un plus grand nombre de variables, tandis que la redondance des informations permet d'augmenter la fiabilité des systèmes. Les capteurs ne sont cependant pas infaillibles, du fait des risques de perturbation extérieure altérant la qualité des données fournies ou de détérioration, voire de mise hors service des capteurs. Or ces défaillances doivent être détectées, afin d'éviter d'intégrer des données erronées dans le processus de fusion, causant ainsi des erreurs à long terme.

Plusieurs personnes se sont déjà penchées sur le problème de la détection de fautes, en utilisant des algorithmes de Monte Carlo séquentiels. Thrun[4] et De Freitas[2] se sont intéressés à la détection de fautes dans la robotique mobile. Ils utilisent un état hybride, dont la partie continue représente l'état du système et la partie discrète permet d'indiquer les fautes et états opérationnels des robots. Ils utilisent un algorithme de "condensation" (ou bootstrap filter) afin de faire évoluer les variables discrètes indicatrices des fautes. Le modèle d'évolution des variables discrètes est une matrice dont les coefficients sont fixés. Wu [5] définit différents modèles d'observation pour de la poursuite de contour de forme. Il emploie des variables de classe, dépendantes du clutter, afin de passer d'un modèle d'observation à l'autre. Ceci est mis en oeuvre par un filtre particulaire de type "condensation".

Toutes ces études modélisent les différentes classes de fonctionnement par des variables indicatrices discrètes,

mais sans proposer de méthode générique pour calculer une fonction d'importance suffisamment performante afin de faire évoluer ces variables indicatrices. Or, dans un algorithme de filtrage particulaire, le choix de la densité d'importance est primordial pour l'efficacité du filtre. Les apports de cet article sont les suivants

- Définition d'une fonction d'importance pour la variable indicatrice de chaque capteur, basée sur un pas de Kalman étendu
- Définition d'un coefficient de fiabilité pour chaque capteur, auquel est associé un modèle d'évolution, afin de garder en mémoire le comportement du capteur

Ceci est développé par un algorithme de Monte Carlo séquentiel, qui permet d'appréhender n'importe quel type de distribution arbitraire (non linéaire et/ou non gaussienne).

## 2 Modélisation de la défaillance des capteurs

L'un des buts principaux de la fusion de données multicapteur est d'estimer l'état caché  $\mathbf{x}_t$  évoluant dans un espace  $\mathcal{X}$ , de dimension  $d_{\mathcal{X}}$  séquentiellement à partir de  $n$  capteurs délivrant des observations  $\mathbf{z}_{k,t}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . On suppose qu'à chaque instant  $t$ , un capteur peut être valide ou défaillant. On introduit une variable booléenne  $c_{k,t} \in \{0, 1\}$  pour tout  $t$  et tout  $k = 1, \dots, n$  telle que

$$\begin{aligned} c_{k,t} &= 1 \text{ si le capteur est valide à l'instant } t \\ c_{k,t} &= 0 \text{ si le capteur n'est pas valide à l'instant } t \end{aligned} \quad (1)$$

Par ailleurs, pour chaque capteur valide  $k = 1, \dots, n$ , on

définit le modèle d'observation suivant à l'instant  $t$

$$\mathbf{z}_{k,t} = h_k(\mathbf{x}_t) + \mathbf{w}_{k,t} \quad (2)$$

où les bruits  $\mathbf{w}_{k,t}$  sont supposés blancs, centrés et indépendants entre eux. Cette dernière équation est également notée en termes de densité de probabilité  $p_k(\mathbf{z}_{k,t}|\mathbf{x}_t)$ . Lorsque les capteurs ne sont pas valides, la valeur de  $\mathbf{z}_{k,t}$  n'est plus reliée à l'état sous-jacent  $\mathbf{x}_t$ , et l'on suppose que  $\mathbf{z}_{k,t}$  est distribué selon une densité vague  $\pi_k(\mathbf{z}_{k,t})$ , par exemple uniforme sur un intervalle large.

La vraisemblance tenant compte de tous les capteurs et de leur validité est donnée par

$$p(\mathbf{z}_t|\mathbf{x}_t, \mathbf{c}_t) = \prod_{k=1}^n [c_{k,t}p_k(\mathbf{z}_{k,t}|\mathbf{x}_t) + (1 - c_{k,t})\pi_k(\mathbf{z}_{k,t})] \quad (3)$$

où le vecteur des observations est  $\mathbf{z}_t = [\mathbf{z}_{1,t}^T \dots \mathbf{z}_{n,t}^T]^T$  et celui des variables indicatrices est  $\mathbf{c}_t = [c_{1,t} \dots c_{n,t}]^T$ .

### 3 Modèle dynamique

Les paramètres inconnus du modèle précédent sont essentiellement l'état  $\mathbf{x}_t$  et les variables indicatrices de validité  $\mathbf{c}_t$ . Nous proposons d'en effectuer l'estimation bayésienne, sur la base des modèles d'évolution suivants :

- Modèle de transition de l'état

$$\mathbf{x}_t = f(\mathbf{x}_{t-1}) + \mathbf{v}_{t-1} \quad (4)$$

où  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  et  $\mathbf{v}_{t-1}$  est un bruit blanc centré. La densité *a priori* de l'état ainsi défini est notée  $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})$  dans la suite. A l'instant initial, on suppose que  $\mathbf{x}_0$  est distribué par  $p_0(\mathbf{x}_0)$ .

- Densité *a priori* des variables indicatrices  $c_{k,t}$ ,  $k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \Pr(c_{k,t} = 1) &= \alpha_{k,t} \\ \Pr(c_{k,t} = 0) &= 1 - \alpha_{k,t} \end{aligned}$$

soit

$$\Pr(c_{k,t}) = c_{k,t}\alpha_{k,t} + (1 - c_{k,t})(1 - \alpha_{k,t}) \quad (5)$$

où  $0 \leq \alpha_{k,t} \leq 1$ . Le choix des probabilités  $\alpha_{k,t}$  est extrêmement sensible du point de vue de la détection de capteurs invalides. Aussi, ces probabilités seront elles-mêmes estimées. Dans la suite, on note la distribution définie par l'équation précédente par  $p(c_{k,t}|\alpha_{k,t})$  pour  $k = 1, \dots, n$ , ou encore  $p(\mathbf{c}_t|\alpha_t)$  pour l'ensemble des capteurs (avec  $\alpha_t = [\alpha_{1,t} \dots \alpha_{n,t}]^T$ ).

- La densité *a priori* pour  $\alpha_{k,t}$  est posée sous la forme d'un modèle dynamique

$$\phi(\alpha_{k,t}) = \phi(\alpha_{k,t-1}) + \epsilon_{k,t-1} \quad (6)$$

où  $\epsilon_{k,t-1}$  est un bruit blanc centré gaussien, de variance  $\sigma_{k,t}^2$ , et  $\phi$  est une fonction inversible telle que  $\phi^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  (dans le but d'assurer que  $\alpha_{k,t}$  ne quitte pas le domaine  $[0, 1]$ ). On peut choisir une fonction sigmoïde  $\phi(\alpha) = \log \left[ \frac{\alpha}{1-\alpha} \right]$ . L'objectif de cette modélisation est d'inclure un effet de mémoire qui renforce la confiance dans un capteur longtemps valide ( $\alpha_{k,t}$  augmente avec  $t$ ), et qui entretient le doute

à propos d'un capteur souvent défaillant ( $\alpha_{k,t}$  est proche de 0). Au temps  $t = 1$ , on suppose  $\alpha_{k,0} \sim p_0(\alpha_{k,0})$ . La variance  $\sigma_{k,t}^2$  du bruit  $\epsilon_{k,t-1}$  conditionne la dynamique d'évolution de  $\alpha_{k,t}$  au cours du temps. Afin de ne pas avoir une évolution fixée à l'avance, cette variance est également estimée.

- La densité *a priori* pour  $\sigma_{k,t}^2$  ( $k = 1, \dots, n$ ) est posée sous la forme du modèle dynamique suivant

$$\log(\sigma_{k,t}^2) = \log(\sigma_{k,t-1}^2) + \lambda_k^e \quad (7)$$

où  $\lambda_k^e$  ( $k = 1, \dots, n$ ) sont des bruits gaussiens indépendants et centrés dont les variances  $\sigma_k^2$  sont fixées.

Le modèle dynamique général est résumé par le schéma de la figure 1.

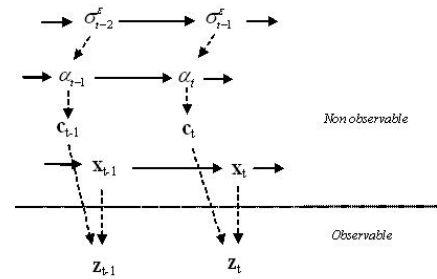


FIG. 1 – Modèle graphique dynamique

### 4 Algorithme de filtrage particulier

Le modèle défini à la section précédente permet, en théorie, d'effectuer l'estimation de l'état et des paramètres de validité des capteurs. En pratique, il n'est pas possible de calculer explicitement à chaque instant leur densité *a posteriori*  $p(\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$  (où, pour un vecteur  $\mathbf{a}_t$  défini à tout instant  $t$ , la notation  $\mathbf{a}_{t_1:t_2}$  fait référence à la suite  $\{\mathbf{a}_{t_1}, \mathbf{a}_{t_1+1}, \dots, \mathbf{a}_{t_2}\}$ ).

Dans le cadre de cet article, nous nous intéressons à la distribution de filtrage  $p(\mathbf{x}_t, \mathbf{c}_t|\mathbf{z}_{1:t})$  qui est la marginale à l'instant  $t$  de la distribution *a posteriori* complète  $p(\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$ . Comme son calcul analytique n'est pas envisageable, un algorithme de Monte Carlo séquentiel[3] (aussi appelé filtre particulier) est mis en oeuvre.

#### Algorithme de Monte Carlo séquentiel pour la fusion de capteurs potentiellement défaillants

% Etape 0 : initialisation

- Pour  $i = 1, \dots, N$ , générer  $\mathbf{x}_0^{(i)} \sim p_0(\mathbf{x}_0)$
- Pour  $i = 1, \dots, N$  et  $k = 1, \dots, n$ , générer  $\log(\sigma_{k,0}^2) \sim p_0(\log(\sigma_{k,0}^2))$
- Pour  $i = 1, \dots, N$  et  $k = 1, \dots, n$ , générer  $\phi(\alpha_{k,0}^{(i)}) \sim p_0(\phi(\alpha_{k,0})|\sigma_{k,0}^2)$
- Faire  $w_0^{(i)} \leftarrow \frac{1}{N}$

- % Etape 2 : itérations
- Pour  $t=1,2,\dots$  faire
    - Pour  $i = 1, \dots, N$  faire
      - % Prolongation des trajectoires
      - Générer  $\tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}$  selon  $q(\mathbf{c}_t|\mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t)$
      - Générer  $\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}$  selon  $q(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \mathbf{z}_t)$
      - Générer  $\phi(\tilde{\alpha}_{k,t}^{(i)})$  selon  $q(\phi(\alpha_{k,t})|\alpha_{k,t-1}^{(i)}, \tilde{c}_{k,t}^{(i)}, \sigma_{k,t-1}^{(i)})$  pour  $k = 1..n$
      - Générer  $\log(\tilde{\sigma}_{k,t}^{(i)})$  selon  $q(\log(\sigma_{k,t}^{(i)})|\sigma_{k,t-1}^{(i)}, \tilde{\alpha}_{k,t}^{(i)}, \alpha_{k,t-1}^{(i)})$  pour  $k = 1..n$
    - Pour  $i = 1, \dots, N$  mettre à jour les poids récursifs selon

$$\tilde{w}_t^{(i)} \propto w_{t-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{z}_t|\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)})p(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}|\mathbf{x}_{t-1}^{(i)})p(\tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}|\tilde{\alpha}_{k,t}^{(i)})}{q(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}|\mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \mathbf{z}_t)q(\tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}|\mathbf{c}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t)} \times \prod_{k=1}^n \left[ \frac{p(\phi(\tilde{\alpha}_{k,t}^{(i)})|\alpha_{k,t-1}^{(i)}, \sigma_{k,t-1}^{(i)})p(\log(\tilde{\sigma}_{k,t}^{(i)})|\sigma_{k,t-1}^{(i)})}{q(\phi(\tilde{\alpha}_{k,t}^{(i)})|\alpha_{k,t-1}^{(i)}, \tilde{c}_{k,t}^{(i)}, \sigma_{k,t-1}^{(i)})q(\log(\tilde{\sigma}_{k,t}^{(i)})|\sigma_{k,t-1}^{(i)}, \tilde{\alpha}_{k,t}^{(i)}, \alpha_{k,t-1}^{(i)})} \right]$$

avec  $\sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} = 1$ ,  
 - % Rééchantillonnage

Dans l'algorithme précédent, la trajectoire de chaque particule  $i = 1, \dots, n$  est prolongée à l'aide des lois  $q(\mathbf{c}_t|\mathbf{c}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t)$ ,  $q(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \mathbf{z}_t)$ ,  $q(\phi(\alpha_{k,t})|\alpha_{k,t-1}^{(i)}, \tilde{c}_{k,t}^{(i)}, \sigma_{k,t-1}^{(i)})$  et  $q(\log(\sigma_{k,t}^{(i)})|\sigma_{k,t-1}^{(i)}, \tilde{\alpha}_{k,t}^{(i)}, \alpha_{k,t-1}^{(i)})$ , dont le choix est laissé à l'utilisateur, sous réserve de validité de l'échantillonnage préférentiel (importance sampling). En particulier, il est important de sélectionner  $q(\mathbf{c}_t|\mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t)$  avec soin : en effet, le nombre de valeurs possible du vecteur  $\mathbf{c}_t$  est  $2^n$ , et tester toutes les combinaisons est hors de portée. Il est donc nécessaire que la loi  $q(\mathbf{c}_t|\mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t)$  propose les configurations les plus probables. La loi proposée dans la section suivante utilise un test statistique sur la différence entre l'observation et la prédiction de l'observation délivrée par un pas de Kalman étendu afin de définir la validité d'un capteur.

## 5 Lois d'évolution de $\mathbf{c}_t|\mathbf{z}_t, \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}$ et $\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \mathbf{z}_t$

On utilise un filtre de Kalman étendu multicapteur afin de faire évoluer chaque particule, en prenant comme moyenne et matrice de covariance à l'instant précédent les valeurs  $\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^{(i)} = \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}$  et  $P_{t-1|t-1}^{(i)} = 0$ .

### 5.1 Phase de prédiction

La prédiction de l'état est donnée pour chaque particule par

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{(i)} = \nabla f_t^{(i)} x_{t-1}^{(i)}$$

avec  $\nabla f_t^{(i)} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_t} \Big|_{\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}}$

La matrice de covariance de l'erreur de prédiction est donnée par

$$P_{t|t-1} = Q_t$$

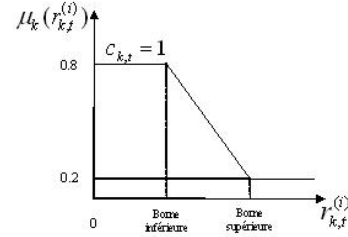


FIG. 2 – Fonction d'appartenance basée sur une règle de logique floue, qui est fonction de la valeur de l'innovation quadratique normalisée

## 5.2 Phase d'estimation

### 5.2.1 Loi de $\mathbf{c}_t|\mathbf{z}_t, \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}$

L'innovation est définie par

$$\nu_{k,t}^{(i)} = \mathbf{z}_{k,t} - h_k(\tilde{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{(i)})$$

La matrice de covariance de l'innovation est donnée par

$$S_{k,t}^{(i)} = \nabla h_{k,t}^{(i)} P_{t|t-1} \nabla h_{k,t}^{(i)} + R_k$$

avec  $\nabla h_{k,t}^{(i)} = \frac{\partial h_k}{\partial \mathbf{x}_t} \Big|_{\mathbf{x}_t = \tilde{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{(i)}}$

On pose

$$r_{k,t}^{(i)} = \left( \nu_{k,t}^{(i)} \right)^T \left( S_{k,t}^{(i)} \right)^{-1} \nu_{k,t}^{(i)}$$

l'innovation quadratique normalisée[1]. En se basant sur les tables de  $\chi^2$ , on peut définir une fonction d'appartenance  $\mu_k(r_{k,t}^{(i)})$  définie pour chaque capteur selon le schéma 2.

La loi d'évolution de  $\mathbf{c}_t$  est alors définie par

$$q(\mathbf{c}_t|\mathbf{z}_t, \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}) = \prod_{k=1}^n \left[ c_{k,t} \mu_k(r_{k,t}^{(i)}) + (1 - c_{k,t})(1 - \mu_k(r_{k,t}^{(i)})) \right] \quad (8)$$

### 5.2.2 Loi de $\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \mathbf{z}_t$

L'estimée est définie par

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{(i)} + \sum_{k=1}^n \tilde{c}_{k,t}^{(i)} K_{k,t}^{(i)} \nu_{k,t}^{(i)}$$

avec

$$K_{k,t}^{(i)} = P_{t|t} \left( \nabla h_{k,t}^{(i)} \right)^T R_k^{-1}$$

L'incertitude sur l'estimée est donnée par la matrice  $P_{t|t}$  définie par

$$P_{t|t}^{(i)} = \left[ P_{t|t-1}^{-1} + \sum_{k=1}^n \tilde{c}_{k,t}^{(i)} \left( \nabla h_{k,t}^{(i)} \right)^T R_k^{-1} \nabla h_{k,t}^{(i)} \right]^{-1}$$

Les échantillons  $\mathbf{x}_{0:t-1}$  sont prolongés selon la loi

$$q(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \mathbf{z}_t) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t : \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{(i)}, P_{t|t}^{(i)}) \quad (9)$$

## 6 Exemple

On considère le modèle d'évolution fortement non linéaire suivant

$$x_{t+1} = \frac{1}{2}x_t + 25 \frac{x_t}{1+x_t^2} + 8 \cos(1, 2(t+1)) + v_t \quad (10)$$

avec  $v_t \sim \mathcal{N}(v_t : 0, 10)$  et  $x_0 \sim \mathcal{N}(x_0 : 0, 10)$ . Deux capteurs observent la valeur de  $x_t$  selon les deux modèles de mesure suivants

$$\begin{cases} z_{1,t} = \frac{x_t^2}{20} + w_{1,t} & w_{1,t} \sim \mathcal{N}(w_{1,t} : 0, 1) \\ z_{2,t} = x_t + w_{2,t} & w_{2,t} \sim \mathcal{N}(w_{2,t} : 0, 10) \end{cases} \quad (11)$$

Le premier capteur, dont la mesure est faiblement bruitée, est supposé peu fiable. Le second capteur, dont la mesure est plus bruitée, est supposé relativement fiable. A l'instant  $t = 0$ , les coefficients de fiabilité sont initialisés par les lois uniformes  $\alpha_{1,0}^{(i)} \sim \mathcal{U}(0.4, 0.6)$  et  $\alpha_{2,0}^{(i)} \sim \mathcal{U}(0.4, 0.6)$  les deux capteurs étant estimés *a priori* à 50% fiables.

L'algorithme proposé est lancé avec 200 particules pour  $t = 1..150$ . Dans les intervalles  $T_1 = [30, 40]$  et  $T_2 = [60, 100]$ , on simule une défaillance du capteur 1 en rajoutant un biais aléatoire sur la mesure  $z_{1,t}$ .

Les résultats de l'algorithme proposé sont comparés à un algorithme de filtrage particulaire sans prise en compte des défaillances (mais avec la même distribution d'importance pour  $\mathbf{x}_t$ ) et un algorithme de Kalman étendu. Les valeur de la variable indicatrice (moyennée sur l'ensemble des particules et notée  $c_e$ ) et du coefficient de fiabilité (noté  $\alpha_e$ ) sont données pour chaque capteur sur les figures 3 et 4. La défaillance du capteur 1 est bien détectée ( $c_e$  est proche de 0) dans les intervalles  $T_1$  et  $T_2$ , et le coefficient de fiabilité baisse dans ces intervalles, pour remonter en dehors. Comme indiqué sur la figure 5, l'algorithme proposé donne de bien meilleurs résultats que le filtre particulaire standard et l'EKF en cas de défaillances de capteurs.

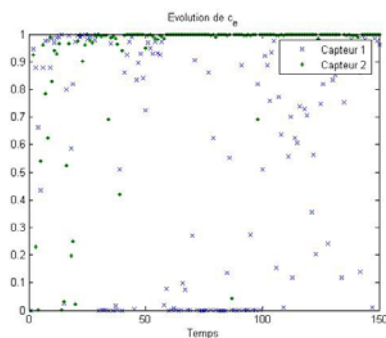


FIG. 3 – Evolution de la moyenne pondérée des variables indicatrices en fonction du temps. Le capteur 1 est détecté défaillant dans les intervalles  $T_1$  et  $T_2$ .

## Remerciements

Ce travail est supporté par la région Nord-Pas de Calais et le Centre National de la Recherche Scientifique. Les auteurs remercient Corentin Dubois pour son aide dans la réalisation de cet article.

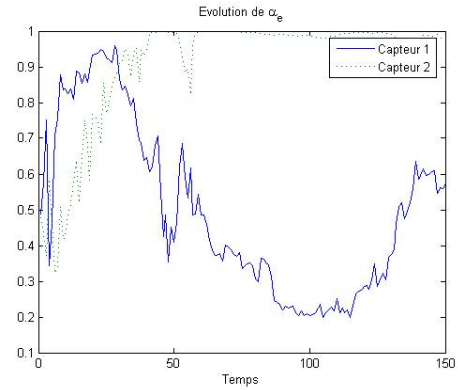


FIG. 4 – Evolution de la moyenne pondérée des coefficients de fiabilité en fonction du temps. La fiabilité du capteur 1 diminue pendant les intervalles où il est détecté comme défaillant.

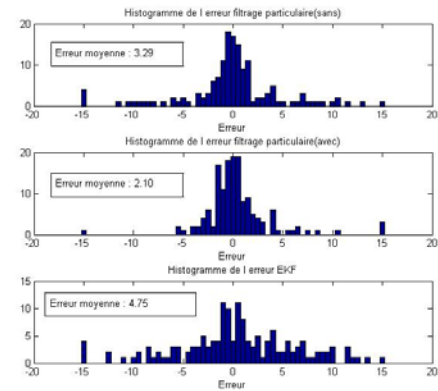


FIG. 5 – Comparaison de la distribution de l'erreur entre le filtre particulaire, l'algorithme proposé, et le filtre de Kalman étendu.

## Références

- [1] Y. Bar-Shalom, X. Rong Li, and T. Kirubajan. *Estimation with applications to tracking and navigation*. Editions Wiley-Interscience, 2001.
- [2] Nando de Freitas. Rao-blackwellised particle filtering for fault diagnosis. In *Proc. Aerospace Conference*, 2002.
- [3] Arnaud Doucet, Nando de Freitas, and Neil Gordon. *Sequential Monte Carlo Methods in practice*. Springer, 2001.
- [4] Vandi Verma, Geoff Gordon, Reid Simmons, and Sebastian Thrun. Particle filters for rover fault diagnosis. *IEEE Robotics & Automation Magazine special issue on Human Centered Robotics and Dependability*, 2004.
- [5] Ying Wu, Gang Hua, and Ting Yu. Switching observation models for contour tracking in clutter. In *Proc. Aerospace Conference*, 2002.



# Bases orthonormées d'ondelettes splines linéaires adaptées à une grille irrégulière

N. Chihab<sup>1</sup>, A. Zergainoh<sup>1</sup>, P. Duhamel<sup>2</sup>, J-P. Astruc<sup>1</sup>

<sup>1</sup>L2TI, Institut Galilée, Université Paris 13, 99, Avenue Jean Baptiste Clément, 93 430 Villetaneuse

najat.chihab@l2ti.univ-paris13.fr

<sup>2</sup>LSS, Supelec, Plateau de Moulon, 91 192 Gif sur Yvette

pierre.duhamel@lss.supelec.fr

**Résumé** – Dans cet article, nous proposons une construction d'une base d'ondelettes orthonormée correspondant à une analyse par des fonctions B-splines non-uniformes de degré un. Nous montrons que le passage d'une échelle à l'autre est réalisé par un banc de filtres caractérisé par la localisation des données dans la séquence initiale. Les expressions explicites des coefficients des filtres sont fournies. Les fonctions d'échelles et d'ondelettes obtenues ne sont plus des translatées et des dilatées d'une seule fonction. Ceci nous permet de proposer une définition de l'analyse multirésolution d'un signal échantillonné à des instants irréguliers.

**Abstract** – This paper, addresses the construction of orthonormal wavelet basis corresponding to linear non-uniform B-spline functions. We show that going from one scale to another is carried out by a filter bank characterized by the localization of the data in the initial sequence. Explicit expressions of the filter coefficients are given. The obtained scaling and wavelet functions are not obtained by translations and dilations of a single function. We provide a general definition of the multiresolution analysis of an irregularly sampled signal.

## 1. Introduction

Lors d'une analyse multirésolution standard, le signal à étudier est décomposé sur une gamme très étendue d'échelles. Cette analyse repose sur des fonctions d'échelles et d'ondelettes. Chacune de ces fonctions est déduite à partir des translations et des dilatations d'une fonction prototype. L'analyse multirésolution d'un signal peut alors s'effectuer par une série de filtrages par un banc de filtres constant. Dans les schémas classiques d'analyse multirésolution, déjà développés et publiés depuis plusieurs années, les données sont disponibles à des instants réguliers ([1], [2], [3], [4]). Néanmoins dans certaines applications, nous pouvons être amenés à traiter des données prélevées à des instants d'échantillonnage irréguliers. C'est dans ce contexte que s'inscrit notre travail. Dans le cadre de signaux uniformément échantillonnés, de nombreux outils mathématiques développés (par exemple la transformée de Fourier) ne peuvent plus être utilisés dans le contexte irrégulier. Il s'avère donc nécessaire de reprendre la démarche complète d'une analyse multirésolution. De part leurs propriétés intéressantes, nous choisissons comme outils d'interpolation les fonctions B-splines non-uniformes de degré un.

Cet article est organisé comme suit. La section 2 introduit la base spline orthonormée de degré un sur laquelle repose la construction des bases d'ondelettes et d'échelles. Après avoir défini les espaces respectifs d'approximations et de détails, la section 3 décrit le principe de la construction des bases orthonormées d'ondelettes et d'échelles fondées sur les fonctions B-splines non-uniformes. Nous montrons que le banc de filtre constant dans le cas classique est remplacé par un banc dont les coefficients des filtres dépendent de la

localisation des échantillons dans la séquence. Le calcul des coefficients des équations de changement d'échelles est explicitement donné en fonction de la position des échantillons. La section 4 présente la décomposition orthogonale d'un signal irrégulièrement échantillonné.

## 2. Base spline orthonormée de degré un

Rappelons brièvement les principales définitions de la fonction B-spline non-uniforme de degré un sur lesquelles s'appuieront les fonctions d'échelles et d'ondelettes de cet article.

Considérons 3 échantillons consécutifs, localisés en des nœuds arbitraires connus. La séquence de nœuds est représentée par  $t_i < t_{i+1} < t_{i+2}$ . La  $i$ ème fonction B-spline non-uniforme de degré un, notée  $B_{i,[t_i,t_{i+2}]}^1(t)$ , est donnée par :

$$B_{i,[t_i,t_{i+2}]}^1(t) = (t_{i+2} - t_i)[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}](t) \quad (1)$$

Cette équation est basée sur l'opérateur des différences divisées d'ordre 2 appliqué à la fonction  $(\cdot - t)_+^1$ . Rappelons que l'opérateur des différences divisées est défini par l'équation suivante ([5]) :

$$[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}](\cdot - t)_+^1 = (t_{i+2} - t_i)^{-1}([t_{i+1}, t_{i+2}](\cdot - t)_+^1 - [t_i, t_{i+1}](\cdot - t)_+^1)$$

L'ensemble des  $n$  fonctions B-splines de degré un,  $\{B_{i,[t_i,t_{i+2}]}^1, \dots, B_{i+n-1,[t_{i+n-1},t_{i+n+1}]}^1\}$ , définies sur la séquence de nœuds  $a = t_i < t_{i+1} < \dots < t_{i+n} = b$ , constitue une base de l'espace des splines ([5]). La combinaison linéaire de ces  $n$  fonctions B-splines définit la fonction spline linéaire. La dimension  $n$  de la base ainsi construite dépend de la multiplicité imposée en chaque nœud. Dans cet article nous imposons une multiplicité d'ordre 2 en chaque nœud de la séquence considérée. De ce fait, nous obtenons une base spline de

dimension égale à 2 ([5], [6]). La spline est ainsi définie sur l'intervalle constitué uniquement par deux nœuds adjacents. La fonction B-spline linéaire est généralisée par l'équation suivante :

$$B_{i,[t_i,t_{i+1}]}^1(t) = ((t_{i+1}-t)/(t_{i+1}-t_i))^{1-i} ((t-t_i)/(t_{i+1}-t_i))^i \quad (2)$$

pour  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  et  $0 \leq i \leq 1$ .

Pour orthonormaliser la base linéaire spline, nous utilisons la méthode classique de Gram-Schmidt. Nous notons les éléments de la base spline orthonormale comme suit :

$$\{\underline{B}_{i,[t_i,t_{i+1}]}^1(t), \text{ pour } i = 0,1\} \quad (3)$$

### 3. Bases d'ondelettes orthonormées

L'analyse multirésolution, considérée dans cet article, correspond à une décomposition orthogonale des espaces engendrés par des fonctions B-splines non-uniformes de degré un. La construction des bases d'ondelettes nécessite, tout d'abord, la définition des espaces d'approximations et de détails.

#### 3.1 Espaces d'approximations et de détails

Notons  $S_j$  la séquence de nœuds, à la résolution  $j$ , où les nœuds sont organisés selon un ordre croissant :

$$t_0 < \dots < t_{2^j i} < t_{2^j(i+1)} < \dots$$

A la résolution  $j$ , l'intervalle entre deux nœuds consécutifs est noté :

$$I_{j,i} = [t_{2^j i}, t_{2^j(i+1)}]$$

Rappelons qu'une multiplicité d'ordre 2 est imposée en chaque nœud. De manière générale, l'analyse multirésolution consiste à approximer un signal initial  $f(t)$  sur plusieurs niveaux de résolution  $j$ . On désigne par  $V_0$  l'espace d'approximation à la résolution la plus fine ( $j=0$ ). Cet espace est engendré, sur chaque intervalle  $I_{0,i}$ , par 2 fonctions d'échelles définies à partir des fonctions B-splines non-uniformes introduites dans la section 2 :

$$V_0 = \text{span}\{\varphi_{0,k,I_{0,i}}^1(t) = \underline{B}_{k,I_{0,i}}^1(t) \text{ pour } k = 0,1; \forall i \in \mathbb{Z}\}$$

Les fonctions échelles splines sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi_{0,0,I_{0,i}}^1(t) &= \sqrt{3}(t_{i+1}-t)(t_{i+1}-t_i)^{-3/2} \\ \varphi_{0,1,I_{0,i}}^1(t) &= (3t-t_{i+1}-2t_i)(t_{i+1}-t_i)^{-3/2} \end{aligned}$$

pour tout  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ .

Le passage d'un niveau de résolution  $j-1$  au niveau  $j$  (la plus grossière), consiste à retirer un nœud sur deux de la séquence  $S_{j-1}$ . Nous obtenons alors un ensemble de séquences emboîtées :  $S_0 \supset S_1 \supset \dots \supset S_{j-1} \supset S_j \dots$ .

Cette structure impose également une imbrication des espaces d'approximations :  $V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_{j-1} \supset V_j \dots$ .

L'espace d'approximation correspondant à  $V_j$  est engendré par les fonctions B-splines non-uniformes et orthonormées de degré un :

$$V_j = \text{span}\{\varphi_{j,k,I_{j,i}}^1(t) = \underline{B}_{k,I_{j,i}}^1(t) \text{ pour } k = 0,1; \forall i \in \mathbb{Z}\}$$

Sur chaque intervalle  $I_{j,i}$ , les fonctions d'échelles constituent une base orthonormée (d'après la section 2). Puisque les domaines de définition de chaque base sont disjoints, l'ensemble des fonctions d'échelles à la résolution  $j$   $\{\varphi_{j,k,I_{j,i}}^1(t) \text{ pour } k = 0,1 \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}\}$ , constitue une base orthonormée de l'espace  $V_j$ . Les conditions

d'orthonormalisation de la base des fonctions d'échelles se traduisent par l'équation suivante :

$$\langle \varphi_{j,k,I_{j,i}}^1(t), \varphi_{j,l,I_{j,p}}^1(t) \rangle = \delta_{kl} \delta_{ip} \quad (4)$$

pour tout  $k = 0,1$ ,  $l = 0,1$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}$  et  $\forall p \in \mathbb{N}$ , où  $\delta_{kl}$  et  $\delta_{ip}$  représentent le symbole de Kronecker.

Les approximations successives d'un signal à deux niveaux de résolution  $j-1$  et  $j$  sont obtenues à partir de la projection orthogonale du signal sur les espaces d'approximations respectifs  $V_{j-1}$  et  $V_j$ . Nous savons que l'espace  $V_j$  est inclus dans  $V_{j-1}$ . Afin d'améliorer la qualité de l'approximation du signal, à la résolution  $j$ , on introduit le complément orthogonal de  $V_j$  dans  $V_{j-1}$ , noté  $W_j$  (i.e.  $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$ ). Cet espace de détails  $W_j$  est engendré par un ensemble de fonctions appelées ondelettes notées  $\psi_{j,k,I_{j,i}}^1(t)$  :

$$W_j = \text{span}\{\psi_{j,k,I_{j,i}}^1(t) \text{ pour } k = 0,1; \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Les ondelettes  $\psi_{j,k,I_{j,i}}^1(t)$  doivent satisfaire les propriétés suivantes :

(i) L'orthogonalité des espaces d'approximations et de détails  $\langle \varphi_{j,k,I_{j,i}}^1(t), \varphi_{j,l,I_{j,p}}^1(t) \rangle = \delta_{kl} \delta_{ip}$  pour tout  $k = 0,1$ ,  $l = 0,1$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}$ ,  $\forall p \in \mathbb{N}$  et  $j \geq 1$ . (5)

(ii) L'orthonormalisation de la base d'ondelettes :

$$\langle \psi_{j,k,I_{j,i}}^1(t), \psi_{j,l,I_{j,p}}^1(t) \rangle = \delta_{kl} \delta_{ip} \text{ pour tout } k = 0,1, l = 0,1, \forall i \in \mathbb{N} \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

#### 3.2 Equations de changement d'échelles

Dans les schémas classiques d'analyse multirésolution ([1], [2], [3], [4]), le passage d'un niveau de résolution  $j-1$  au niveau  $j$  est réalisé par le biais de deux filtres (un pour les fonctions d'échelles, l'autre pour les ondelettes). Ces filtres sont constants. Ils sont utilisés pour tous les changements d'échelles. Etudions ce que deviennent ces filtres dans le cas d'une grille irrégulière. Nous savons que l'espace d'approximation  $V_1$  est inclus dans  $V_0$ . Nous pouvons alors décomposer chaque fonction d'échelle  $\{\varphi_{1,0,I_{1,i}}^1(t), \varphi_{1,1,I_{1,i}}^1(t)\} \in V_1$  sur la base de l'espace  $V_0$ . Nous obtenons alors les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi_{1,0,I_{1,i}}^1(t) &= h_{1,0}^{0,0}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) \varphi_{0,0,I_{0,i}}^1(t) + h_{1,0}^{0,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) \varphi_{0,1,I_{0,i}}^1(t) \\ &\quad + h_{1,0}^{1,0}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) \varphi_{0,0,I_{0,i+1}}^1(t) + h_{1,0}^{1,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) \varphi_{0,1,I_{0,i+1}}^1(t) \\ \varphi_{1,1,I_{1,i}}^1(t) &= h_{1,1}^{0,0}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) \varphi_{0,0,I_{0,i}}^1(t) + h_{1,1}^{0,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) \varphi_{0,1,I_{0,i}}^1(t) \\ &\quad + h_{1,1}^{1,0}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) \varphi_{0,0,I_{0,i+1}}^1(t) + h_{1,1}^{1,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) \varphi_{0,1,I_{0,i+1}}^1(t) \end{aligned}$$

Nous montrons que les coefficients d'échelles  $\{h_{1,k}^{m,n}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2})\}$  pour  $m = 0,1$  et  $n = 0,1$  dépendent de la localisation des échantillons sur la grille irrégulière. Ils sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} h_{1,0}^{0,0}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) &= (1/2)(t_{i+1}-t_i)^{1/2}(3t_{i+2}-2t_i-t_{i+1})(t_{i+2}-t_i)^{-3/2} \\ h_{1,0}^{0,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) &= (\sqrt{3}/2)(t_{i+1}-t_i)^{1/2}(t_{i+2}-t_{i+1})(t_{i+2}-t_i)^{-3/2} ; \\ h_{1,0}^{1,0}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) &= (t_{i+2}-t_{i+1})^{3/2}(t_{i+2}-t_i)^{-3/2} ; h_{1,0}^{1,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) = 0 ; \\ h_{1,1}^{0,0}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) &= -(\sqrt{3}/2)(t_{i+1}-t_i)^{1/2}(t_{i+2}-t_{i+1})(t_{i+2}-t_i)^{-3/2} ; \\ h_{1,1}^{0,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) &= -(t_{i+1}-t_i)^{1/2}(t_{i+2}+2t_i-3t_{i+1})(t_{i+2}-t_i)^{-3/2} / 2 \\ h_{1,1}^{1,0}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) &= \sqrt{3}(t_{i+1}-t_i)(t_{i+2}-t_{i+1})^{1/2}(t_{i+2}-t_i)^{-3/2} \\ h_{1,1}^{1,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) &= (t_{i+2}-t_{i+1})^{1/2}(t_{i+2}-t_i)^{-1/2} \end{aligned}$$

Nous savons que les fonctions ondelettes  $\psi_{1,0,I_{1,i}}^1(t)$  et  $\psi_{1,1,I_{1,i}}^1(t)$  appartiennent à l'espace de détails  $W_1$ . De part l'inclusion de

cet espace dans  $V_0$ , il est possible de décomposer les fonctions  $\psi_{1,0,I_{j,i}}^1(t)$  et  $\psi_{1,1,I_{j,i}}^1(t)$  sur la base de  $V_0$ . Nous obtenons ainsi les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\psi_{1,0,I_{j,i}}^1(t) &= g_{1,0}^{0,0}(t, t_{i+1}, t_{i+2}) \phi_{0,0,I_{j,i}}^1(t) + g_{1,0}^{0,1}(t, t_{i+1}, t_{i+2}) \phi_{0,1,I_{j,i}}^1(t) \\ &\quad + g_{1,0}^{1,0}(t, t_{i+1}, t_{i+2}) \phi_{0,0,I_{j,i+1}}^1(t) + g_{1,0}^{1,1}(t, t_{i+1}, t_{i+2}) \phi_{0,1,I_{j,i+1}}^1(t) . \\ \psi_{1,1,I_{j,i}}^1(t) &= g_{1,1}^{0,0}(t, t_{i+1}, t_{i+2}) \phi_{0,0,I_{j,i}}^1(t) + g_{1,1}^{0,1}(t, t_{i+1}, t_{i+2}) \phi_{0,1,I_{j,i}}^1(t) \\ &\quad + g_{1,1}^{1,0}(t, t_{i+1}, t_{i+2}) \phi_{0,0,I_{j,i+1}}^1(t) + g_{1,1}^{1,1}(t, t_{i+1}, t_{i+2}) \phi_{0,1,I_{j,i+1}}^1(t) .\end{aligned}$$

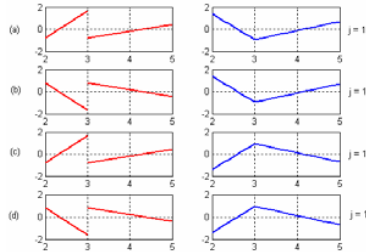


FIG. 1 : Quatre bases d'ondelettes splines orthonormées sur l'intervalle  $[2, 5]$

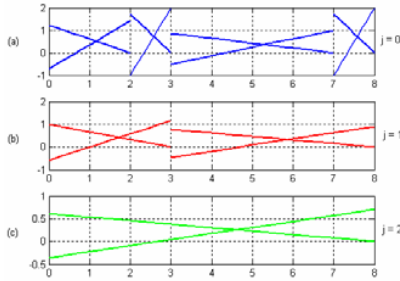


FIG. 2 : Fonctions d'échelles splines pour  $j = 0, 1, 2$

Les coefficients  $\{g_{1,k}^{m,n}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2})\}$  pour  $m = 0, 1$  et  $n = 0, 1$  sont obtenus en résolvant le système d'équations formé par les équations (5) et (6). Ce système d'équations fournit plusieurs solutions puisqu'il offre un degré de liberté. Celui-ci est exploité pour satisfaire une propriété particulière, par exemple la continuité d'une fonction ondelette sur l'intervalle considéré.

La figure 1 présente le tracé de quatre bases d'ondelettes splines orthonormées  $\{\psi_{1,0,[2,5]}^1(t), \psi_{1,1,[2,5]}^1(t)\}$  ((a), (b), (c) et (d)) sur la séquence  $S_0 = [2, 3, 5]$ . Nous fournissons les expressions de la solution correspondante au tracé de la courbe (a) :

$$\begin{aligned}g_{1,0}^{0,0} &= 0; \quad g_{1,0}^{0,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) = (t_{i+2} - t_{i+1})^{1/2} (t_{i+2} - t_i)^{-1/2}; \\ g_{1,0}^{1,0}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{t_{i+1} - t_i}}{\sqrt{t_{i+2} - t_i}}; \quad g_{1,0}^{1,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{t_{i+1} - t_i}}{\sqrt{t_{i+2} - t_i}}; \\ g_{1,1}^{0,0}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) &= (t_{i+2} - t_{i+1})^{3/2} (t_{i+2} - t_i)^{-3/2}; \\ g_{1,1}^{0,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) &= -\sqrt{3} (t_{i+2} - t_{i+1})^{1/2} (t_{i+1} - t_i) (t_{i+2} - t_i)^{-3/2}; \\ g_{1,1}^{1,0}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) &= -(1/2) (t_{i+1} - t_i)^{1/2} (t_i - 4t_{i+1} + 3t_{i+2}) (t_{i+2} - t_i)^{-3/2}; \\ g_{1,1}^{1,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) &= (\sqrt{3}/2) \sqrt{t_{i+1} - t_i} / \sqrt{t_{i+2} - t_i} .\end{aligned}$$

La figure 2 présente les tracés des fonctions d'échelles splines sur trois niveaux de résolutions  $j = 0, 1, 2$ . Ces fonctions sont construites sur la grille initiale  $S_0 = [0, 2, 3, 7, 8]$ . Les ondelettes splines associées à ces fonctions d'échelles sont données par la figure 3, pour les résolutions 1 et 2.

On remarquera que, contrairement au cas uniforme, on a un nombre plus élevé de fonctions échelles et ondelettes. Chacune est a priori au nombre de 2, qui est dû au degré « élevé » de l'approximation spline par rapport à une simple

approximation passe-bas. De plus, on notera que, par construction, les fonctions échelles et ondelettes ne sont pas continues d'un intervalle à l'autre. On peut même montrer que, dans cette formulation, imposer l'orthogonalité « tranche par tranche » ne permet pas d'obtenir des fonctions toutes continues. Des travaux sont en cours pour aboutir à des fonctions continues en relâchant le minimum de contraintes.

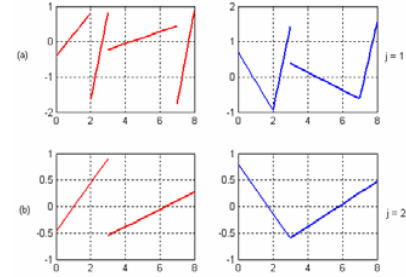


FIG. 3 : Ondelettes splines pour  $j = 1, 2$

#### 4. Analyse multirésolution

Rappelons que l'espace d'approximation  $V_j$  est orthogonal à l'espace de détails  $W_j$  (i.e.  $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$ ). Ainsi, le signal d'approximation  $f_{j-1,I_{j,i}}(t) \in V_{j-1}$  peut se décomposer en deux signaux  $f_{j,I_{j,i}}(t) \in V_j$  et  $r_{j,I_{j,i}}(t) \in W_j$  :

$$f_{j-1,I_{j,i}}(t) = f_{j,I_{j,i}}(t) + r_{j,I_{j,i}}(t) \text{ pour tout } i \in N .$$

Cette dernière équation se ramène alors à :

$$f_{j-1,I_{j,i}}(t) = \sum_{m=2i}^{2i+1} \sum_{k=0}^1 c_{j,k}^m \phi_{j,k,I_{j,i}}^1(t) + \sum_{m=2i}^{2i+1} \sum_{k=0}^1 d_{j,k}^m \psi_{j,k,I_{j,i}}^1(t) \quad (7)$$

où les coefficients  $\{c_{j,k}^m\}$  (respectivement  $\{d_{j,k}^m\}$ ) sont obtenus par la projection orthogonale de  $f_{j-1,I_{j,i}}(t)$  (respectivement  $r_{j,I_{j,i}}(t)$ ) sur l'espace d'approximation  $V_j$  (respectivement l'espace de détail  $W_j$ ). Sur chaque intervalle  $I_{j,i}$ , nous montrons que les coefficients  $\{c_{j,k}^m\}$  sont reliés aux coefficients  $\{c_{j-1,k}^l\}$  et  $\{d_{j-1,k}^l\}$  selon l'équation suivante :

$$c_{j,k}^m = \sum_{l=2i}^{2i+1} \sum_{n=0}^1 h_{j,k}^{l,n} c_{j-1,k}^l \quad (8)$$

pour tout  $k = 0, 1$ ,  $m = 2i, 2i+1$ , et  $\forall i \in N$ .

Ecrivons cette expression sous forme matricielle :

$$\begin{aligned}\underline{c}_{j,I_{j,i}} &= \mathbf{H}_{j,I_{j,i}} \underline{c}_{j-1,I_{j,i}} \quad \text{où} \\ \underline{c}_{j,I_{j,i}} &= (c_{j-1,0}^{2i}, c_{j-1,1}^{2i}, c_{j-1,0}^{2i+1}, c_{j-1,1}^{2i+1})^t, \quad \underline{c}_{j-1,I_{j,i}} = (c_{j-1,0}^i, c_{j-1,1}^i)^t, \\ \text{et } \mathbf{H}_{j,I_{j,i}} &= \begin{pmatrix} h_{j,0}^{2i,0} & h_{j,0}^{2i,1} & h_{j,0}^{2i+1,0} & h_{j,0}^{2i+1,1} \\ h_{j,1}^{2i,0} & h_{j,1}^{2i,1} & h_{j,1}^{2i+1,0} & h_{j,1}^{2i+1,1} \end{pmatrix} \quad (9)\end{aligned}$$

Ramenons le calcul de la matrice  $\mathbf{H}_{j,I_{j,i}}$  sur toute la séquence  $S_j$ . Nous obtenons une matrice creuse comme suit :

$$\mathbf{H}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{j,I_{j,0}} & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & \mathbf{H}_{j,I_{j,1}} & [0] & \vdots \\ \vdots & [0] & \ddots & [0] \\ [0] & [0] & \cdots & \mathbf{H}_{j,I_{j,n}} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Nous montrons que les coefficients de détails sont également déterminés par l'équation suivante :

$$d_{j,k}^m = \sum_{l=2i}^{2i+1} \sum_{n=0}^1 g_{j,k}^{l,n} c_{j-1,k}^l \quad (11)$$

pour  $k = 0, 1$ ;  $m = 2i, 2i+1$ ; et  $\forall i \in N$ .

Afin de simplifier cette dernière expression, nous adoptons une représentation matricielle. Sur chaque intervalle  $I_{j,i}$  de la

séquence  $S_j$ , nous obtenons alors les relations suivantes :

$$\underline{\mathbf{d}}_{j,I_{j,j}} = \mathbf{G}_{j,I_{j,j}} \underline{\mathbf{c}}_{j-1,I_{j,j}} \text{ où } \underline{\mathbf{d}}_{j-1,I_{j,j}} = (d_{j-1,0}^i \ d_{j-1,1}^i)^t, \quad (12)$$

$$\text{et } \mathbf{G}_{j,I_{j,j}} = \begin{pmatrix} g_{j,0}^{2i,0} & g_{j,0}^{2i,1} & g_{j,0}^{2i+1,0} & g_{j,0}^{2i+1,1} \\ g_{j,1}^{2i,0} & g_{j,1}^{2i,1} & g_{j,1}^{2i+1,0} & g_{j,1}^{2i+1,1} \end{pmatrix}$$

La généralisation de  $\mathbf{G}_{j,I_{j,j}}$  à tout le domaine de définition de la séquence  $S_j$ , est équivalente aux résultats fournis pour la représentation de  $\mathbf{H}_j$ . Les matrices  $\mathbf{H}_j$  et  $\mathbf{G}_j$  montrent bien que le banc de filtres classique est remplacé par un banc dont les coefficients de chaque filtre dépendent de la localisation des échantillons dans la séquence. Puisque la décomposition est orthogonale, les filtres de reconstruction sont identiques aux filtres de décomposition.

La figure 4 présente un exemple d'analyse multirésolution d'un signal échantillonné à des instants irréguliers. La courbe (a) correspond au signal initial où les (\*) symbolisent les échantillons retenus. Les graphes (b), (c) et (d) représentent respectivement trois niveaux de résolution ( $j=1,2,3$ ) pour lesquels : (\*) symbolise les signaux approximatés, (+) représente les signaux de détails et (o) indique les échantillons correspondants aux nœuds de la séquence. L'étape d'initialisation consiste à calculer les coefficients  $\underline{\mathbf{c}}_0$ . Théoriquement, chaque coefficient est déterminé par le calcul de la projection orthogonale du signal continu  $f_{0,I_{0,j}}(t)$  sur chaque composante de la base orthonormée :

$$c_{0,k}^i = \langle f_{0,I_{0,j}}(t), \varphi_{0,k,I_{0,j}}^i(t) \rangle \text{ pour } k=0,1 \text{ et } \forall i \in N \quad (13)$$

Le signal continu n'est pas disponible. Il est uniquement représenté par un ensemble d'échantillons prélevés à des instants irréguliers. Conformément à la définition des espaces multirésolution, il est logique de considérer que son évaluation à une échelle donnée est fournie par l'interpolation par des fonctions B-splines non-uniformes de degré un  $\{B_{k,I_{0,j}}^1\}$ , selon la relation suivante :

$$f_{0,I_{0,j}}(t) = \sum_{k=0}^1 a_{k,I_{0,j}} B_{k,I_{0,j}}^1(t) \text{ pour tout } i \in N \quad (14)$$

Le calcul des coefficients de pondération  $\{a_{k,I_{0,j}}\}$  ont été étudiés dans de précédents travaux ([6]). Combinant cette dernière équation à l'équation (13), les coefficients  $\underline{\mathbf{c}}_0$  sont ainsi obtenus par la relation suivante :

$$c_{0,k}^i = \left\langle \sum_{l=0}^1 a_{l,I_{0,j}} B_{l,I_{0,j}}^1(t), \varphi_{0,k,I_{0,j}}^i(t) \right\rangle \text{ pour } k=0,1 \text{ et } \forall i \in N \quad (15)$$

## 5. Conclusion

Dans cet article, nous avons montré qu'il est possible, dans le cas d'une grille irrégulière, de construire des bases orthonormées d'ondelettes et d'échelles à partir de fonctions B-splines non-uniformes de degré un. Le banc de filtres constant dans l'analyse multirésolution classique est remplacé par plusieurs filtres dont les coefficients dépendent de la position des nœuds dans la séquence initiale. Cette dépendance a été explicitée pour les splines de degré un. Une généralisation de l'analyse multirésolution à des degrés supérieurs à un de la fonction spline est à envisager, puisque nous savons que la qualité de l'interpolation est directement liée au degré de la spline. Les problèmes de nombres de fonctions (qui augmentent avec le degré) et de continuité des fonctions d'un intervalle à l'autre deviennent alors beaucoup plus importants. Il reste à étudier si l'augmentation du nombre de signaux de détails fait plus que compenser (ou

pas) l'amélioration de l'approximation. Ce travail sera rapporté.

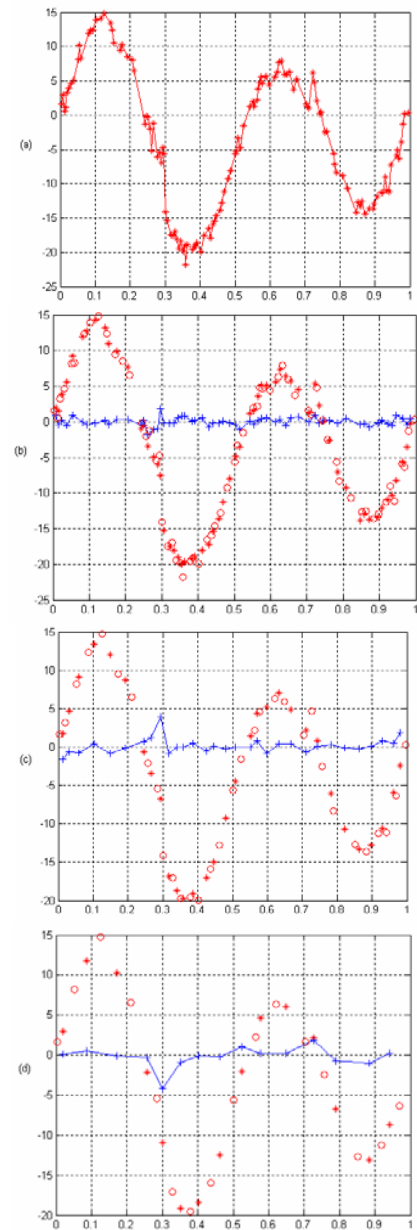


FIG. 4 : Analyse multirésolution  $j=1,2,3$

## Références

- [1] S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing, second edition*, Ed. Academic Press, 1999.
- [2] M. Vetterli, Jelena Kovacevic. *Wavelets and Subband Coding*, Prentice Hall, 1995.
- [3] C. K. Chui, *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, Ed. 1993.
- [4] O. Rioul, P. Duhamel, *Fast Algorithms for Wavelet Transform Computation*, chapter 8 in *Time-frequency and Wavelets in Biomedical Engineering*, pp. 211-242, M. Akay ed., IEEE Press, 1997.
- [5] C. De Boor, *A practical guide to splines*, revised edition, Ed. New York, Springer-verlag, 2001.
- [6] N. Chihab, A. Zergainoh, P. Duhamel, J-P. Astruc, *The influence of the non-uniform spline basis on the approximation signal*, Eusipco, September 6-10 2004, Vienna, Austria.

# Multiscale analysis of multiple change points using unbalanced wavelets

Maarten JANSEN

TU Eindhoven, Department of Mathematics,  
PO Box 513, 5600 MB Eindhoven, the Netherlands  
and K.U.Leuven, Department of Computer Science,  
Celestijnenlaan 200A, 3001 Leuven, Belgium  
mjansen@win.tue.nl

**Abstract** – We present a multiscale analysis of piecewise constant signals subject to noise. The objective is to find the locations of the change points. To this end, we first apply a continuous wavelet analysis and construct lines of local wavelet maxima, in a way similar to the well-known construction by Mallat and Hwang. The second stage of our approach is an extension towards unbalanced wavelet analyses in order to improve the statistical power of our detection.

## 1 Introduction, problem description

Wavelet thresholding [1] provides an interesting tool in smoothing piecewise smooth signals subject to noise. The idea is that singularities in the underlying (i.e., noise-free) signal give rise to wavelet coefficients whose magnitudes are significantly higher than the magnitudes of coefficients that are not related to any of the singularities. The technique can be proven to be statistically optimal in several aspects. Moreover, on the practical side, it can be extended and refined using nondecimated wavelet transforms, resolution level dependent thresholds, tree structured coefficient selection, block thresholding, hard- or soft-thresholding or any intermediate operation, such as thresholds in a Bayesian framework [2].

In spite of this success, wavelet smoothing is sometimes criticised for its outputs which often contain spurious features, typically spikes, due to falsely selected wavelet coefficients. Every coefficient selection method inevitably shows at least a few of these false discoveries. Moreover, the true significant coefficients also carry some proportion of noise. Although these spurious features in general have little impact on the signal-to-noise ratio of the output, they often affect its visual quality. The output becomes smoother if the adopted selection is more conservative (i.e., if less coefficients pass the selection), such as in the universal threshold procedure, but the price to pay is inaccuracy, Gibbs phenomena near the jumps.

Wavelet thresholding uses the wavelet coefficients both for locating the positions of the singularities and for smoothing the intervals between those singularities. Both tasks are performed simultaneously: the coefficients locate the singularities in an implicit, passive way. The idea of this paper is to actively estimate the precise locations of singularities first, thereby separating the detection of singularities from the actual smoothing.

In this paper we consider piecewise constant functions only. Smoothing given estimates for the jump locations is then of course straightforward by taking the averages of

the observations between the jumps.

The problem of locating the jumps is known in statistical literature as *change point detection*. In the presented algorithm, the number of change point is not a priori bounded. The algorithm refines a technique based on the analysis of local maxima in a continuous wavelet transform [3, 4], further explained below. It also extends this local maxima analysis with towards an unbalanced transform, which is a sort of so-called second generation wavelet. As explained below, this unbalanced transform allows to find for each change point, the specific scales (i.e., ranges) of the two intervals of smooth (in this paper: constant) behaviour on the left- and right hand side of the change point. All together, unlike the wavelet threshold approach, the proposed algorithm does not *operate* on the wavelet coefficients directly. It rather uses the coefficients as a tool for a fast search for the precise location and left- and right hand scales of each change point. A full search on these three parameters would require  $\mathcal{O}(N^3)$  computations for  $N$  samples. The presented algorithm finds them with a computational complexity of  $\mathcal{O}(N \log N)$ .

## 2 The algorithm

Suppose we are given  $N$  noisy samples  $y_i, i = 1, \dots, N$  of a piecewise constant signal  $\mu_i, i = 1, \dots, N$ . Consecutive observations have the same intensity, except at some transition points:

$$\mu_k = \mu_{\tau_r}, \text{ for } k = \tau_r, \dots, \tau_{r+1} - 1,$$

where  $0 < \tau_0 < \dots < \tau_r < \tau_{r+1} < \dots < \tau_R \leq n - 1$  is a sequence of  $R$  change points, and  $0 \leq R \leq n - 1$  is unknown. The change points are specified by the (integer) index  $\tau_r$  of the first observation from the segment with a certain intensity. The proposed algorithm to estimate the  $\tau_r$ 's proceeds as follows:

1. Compute a (discretised) continuous wavelet transform  $\mathbf{w}$  of  $\mathbf{y}$ . Let  $J$  be the number of discretised scales, then  $\mathbf{w}$  is a  $J \times N$  matrix.

2. For each scale  $j = 1, \dots, J$ , find the local maxima. If this maximum is sufficiently large (say, if its absolute value is larger than 3), the corresponding location is considered as a candidate change point. In the presence of noise, the fine scales of the wavelet transform have a lot of local maxima. In order to save computations, it is interesting to smooth the wavelet transform within the scale and compute the local maxima of that smoothed version first. The obtained values serve as provisional estimates of the local maxima. In a second step, we compute the global maxima of the original, non-smoothed transform, on the intervals between every pair of provisional maxima and we replace the provisional values by their corresponding new values. Let  $\mathcal{M}_j$  denote the set of indices corresponding to these selected maxima at scale  $j$ , i.e.,

$$\mathcal{M}_j = \{k = 0, \dots, n-1 \mid |w_{j,k}| \geq |w_{j,k\pm 1}|\}.$$

3. Link local maxima at successive scales. Two maxima at successive scales are linked if both are the closest maximum to the other one. More precisely, a maximum at scale  $j$ , location  $k_j$  is connected to a maximum at scale  $j+1$ , location  $k_{j+1}$  if and only if

$$\begin{aligned} k_j &= \arg \min_{l \in \mathcal{M}_j} |l - k_{j+1}|, \text{ and} \\ k_{j+1} &= \arg \min_{l \in \mathcal{M}_{j+1}} |l - k_j|. \end{aligned}$$

4. Merge lines with overlapping locations into a single line: some different lines show up at the same location, but different scales, for instance if there is a gap between scales of local maxima. The algorithm starts from the longest existing lines. If such a line does not continue all the scales down, we check if a bridge can be constructed from its end point to another line at a neighboring location. If there is more than one candidate, take the shortest bridge, where the length of the bridge is defined based on the shift in location and scale to jump into the new maxima line. If two candidate lines can be reached by bridges of equal lengths, we select the line whose average location over all scales is closest to the average of the original line that we want to extend. As soon as a candidate line of maxima is selected, the original line is completed by filling in the locations of the secondary line at scales where the original line had no maxima. The secondary line is then removed from the set of maxima lines.
5. For each line of maxima, select the scale  $j$  on which the coefficient has the largest magnitude.
6. Make the basis functions unbalanced. Introduce two scale variables,  $j_l$  and  $j_r$ , left and right from the location  $k$  of the line of maxima at the scale  $j$  selected in the previous step. The extension to unbalanced wavelets is trivial in the Haar case, leading to the unbalanced Haar wavelet transform. Chose the values of  $j_l$  and  $j_r$  such that the resulting wavelet coefficient is maximised.

7. Starting with the largest coefficients, select the locations of significant change points. Once a location is selected, recompute the remaining coefficients such that the corresponding basis function lie entirely on one side of the previously selected change points.

An example of the output of the algorithm is given in figure 1. The noise in this example is generated by a Poisson process.

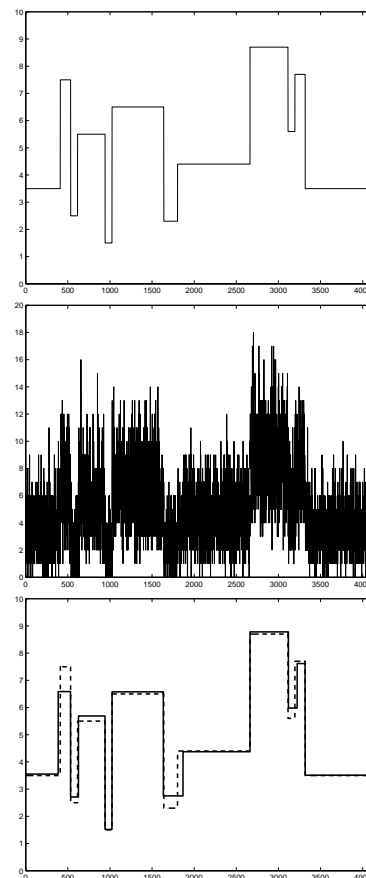


FIG. 1: A simulated example of Poisson data with time varying intensities. On the left the plot of the intensity curve. This is a scaled and vertically translated version of the well-known ‘Blocks’ test example [1]. In the middle a random realization. On the right the estimation from that realization, using the procedure proposed in this paper.

## References

- [1] D. L. Donoho and I. M. Johnstone. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81:425–455, 1994.
- [2] I. M. Johnstone and B. W. Silverman. Needles and straw in haystacks: empirical bayes estimates of possibly sparse sequences. *Annals of Statistics*, 32(4):1594–1649, 2004.

- [3] S. Mallat and W. L. Hwang. Singularity detection and processing with wavelets. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(2):617–643, 1992.
- [4] S. Mallat and S. Zhong. Characterization of signals from multiscale edges. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14:710–732, 1992.





# Étude du bruit dans une analyse $M$ -bandes en arbre dual

Caroline CHAUX<sup>1</sup>, Laurent DUVAL<sup>2</sup>, Jean-Christophe PESQUET<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Institut Gaspard Monge et UMR-CNRS 8049  
Université de Marne-la-Vallée, Champs-sur-Marne, 77454 Marne-la-Vallée, France  
Tel. : (+33) 1 60 95 77 39 – Fax : (+33) 1 60 95 72 14

<sup>2</sup> Institut Français du Pétrole  
Direction Technologie, Informatique et Mathématiques Appliquées,  
92500 Reuil Malmaison  
Tel. : (+33) 1 47 52 61 02 – Fax : (+33) 1 47 52 70 12  
{caroline.chaux,pesquet}@univ-mlv.fr, laurent.duval@ifp.fr

**Résumé** – Dans cet article, nous nous intéressons aux propriétés d'un bruit additif après une analyse en ondelettes  $M$ -bandes en arbre dual. Cette décomposition nous permet d'exprimer les liens régissant les coefficients du bruit dans les arbres primal et dual. La connaissance des propriétés statistiques du bruit s'avère en particulier utile à la conception de méthodes efficaces de débruitage spécifiques aux analyses en arbre dual. Notre contribution réside principalement dans le calcul des fonctions d'intercorrélation relatives à cette analyse pour différents types d'ondelettes  $M$ -bandes. Nous montrons en particulier que les paires de coefficients issus d'un bruit blanc, regardées point à point dans les décompositions primale et duale, sont décorrélées. Il existe cependant une corrélation significative dans un proche voisinage spatial dépendant du choix des ondelettes  $M$ -bandes.

**Abstract** – In this work, we study the properties of an additive noise undergoing a dual-tree  $M$ -band wavelet analysis. We express the relationships governing noise coefficients both in the primal and the dual tree. The knowledge of the noise statistical properties is particularly useful for the design of efficient denoising methods in the framework of a dual-tree wavelet analysis. Our main contribution consists in the computation of the resulting cross-correlation functions for several  $M$ -band wavelet families. More specifically, we show that pairwise coefficients, from the primal and the dual-tree resulting from a white noise decomposition, are uncorrelated. Yet, there exists a significant local correlation, whose extent depends on the choice of the wavelet pair.

## 1 Introduction

La décomposition sur une base d'ondelettes discrètes est une méthode standard d'analyse et de débruitage d'image [1]. Cependant, les effets de non-invariance par translation (en anglais *shift-variance*) des coefficients, dus aux opérateurs de sous-échantillonnage, conduisent bien souvent à préférer des décompositions non-décimées, formant des trames très redondantes. Ces dernières améliorent notablement les performances de débruitage, mais restent coûteuses et surtout ne répondent pas toujours bien aux besoins d'analyse directionnelle des images.

Une analyse en ondelettes en arbre dual correspond à une décomposition des signaux sur une trame de redondance 2. Elle offre un excellent compromis entre le coût de calcul, une quasi-invariance par translation, une bonne robustesse aux bruits et la possibilité d'analyser des images dans plusieurs directions.

Elle repose sur le traitement des signaux par deux bancs de filtres hiérarchiques classiques, opérant en parallèle. Le second banc de filtres est appelé 'dual' du premier, dit 'primal'. Il est choisi de telle sorte que les ondelettes générées par les bancs primal et dual forment des paires de Hilbert. Le gain obtenu par l'usage de paire de Hilbert a été reconnu depuis [2].

La construction d'analyses en arbre dual a été initialement développée par N. Kingsbury [3] puis formalisée par I. Selesnick [4], dans le cas particulier des ondelettes dyadiques. Nous avons récemment généralisé [5, 6] cette notion d'ana-

lyse en paires de Hilbert pour les ondelettes  $M$ -bandes, avec  $M > 2$ . Ces travaux ont précisé l'expression des retards induits dans le banc dual, le préfiltrage requis sur les signaux discrets avant chaque décomposition, ainsi qu'une expression optimale de la reconstruction [6]. Les décompositions  $M$ -bandes ainsi obtenues, pour  $M > 2$ , permettent des décompositions plus précises en fréquence que dans le cas dyadique, ainsi qu'une meilleure sélectivité directionnelle. La liberté de choix accrue dans les filtres  $M$ -bandes permet enfin d'utiliser des ondelettes à la fois symétriques et orthogonales.

Dans cet article, nous étudions les propriétés d'un bruit additif après une décomposition par un arbre dual  $M$ -bandes. Nous rappelons tout d'abord les propriétés d'une telle analyse. Le débruitage par seuillage peut être ensuite appliqué de façon indépendante sur les deux arbres, ou en appariant les coefficients analogues sous forme de nombre complexe. Cependant, afin de mieux comprendre le comportement d'un bruit stationnaire après décomposition, nous calculons les différentes intercorrélations en une et deux dimensions. Nous produisons des expressions explicites pour quelques familles d'ondelettes  $M$ -bandes, ainsi que les résultats numériques correspondants.

Nous retrouvons le résultat selon lequel les paires de coefficients primal et dual d'un bruit blanc sont à composantes décorrélées, mais montrons qu'il existe entre elles une corrélation à court terme dont l'étendue dépend des ondelettes considérées.

## 2 Analyse en ondelettes $M$ -bandes en arbre dual

Une décomposition en ondelettes en arbre dual est bâtie à partir d'une base d'ondelettes associée à une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$ . Dans le cas  $M$ -bandes, on dispose ainsi d'une fonction  $\psi_0$  et de  $M - 1 \in \mathbb{N}^*$  ondelettes mères  $\psi_m$  où  $m \in \{1, \dots, M - 1\}$ , servant à réaliser l'analyse multirésolution classique. Ces fonctions que nous supposons à valeurs réelles permettent de mettre en œuvre la décomposition multi-échelles en "arbre primal". L'analyse duale se déduit à partir d'une fonction d'échelle  $\psi_0^H$  et de  $M - 1$  ondelettes mères  $\psi_m^H$ ,  $m \in \{1, \dots, M - 1\}$ . Les ondelettes mères duales sont obtenues par transformée de Hilbert des ondelettes "originales", ce qui s'exprime, dans le domaine de Fourier, par :

$$\forall m \in \{1, \dots, M - 1\}, \quad \widehat{\psi}_m^H(\omega) = -i \operatorname{sign}(\omega) \widehat{\psi}_m(\omega), \quad (1)$$

où  $\operatorname{sign}$  est la fonction signe et  $\widehat{\cdot}$  désigne la transformée de Fourier d'une fonction  $s$ . La combinaison de la base primale et de la base duale conduit à une trame d'ondelettes présentant de nombreux avantages en termes d'analyse de signaux et images. Dans nos travaux antérieurs [6], nous avons étudié la construction des ondelettes duales, dans le cas orthogonal, et nous avons montré que la fonction d'échelle duale est liée à la fonction d'échelle primale  $\psi_0$  par la relation suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \omega \in [2k\pi, 2(k+1)\pi[, \quad \widehat{\psi}_0^H(\omega) = (-1)^k e^{-i(d+\frac{1}{2})\omega} \widehat{\psi}_0(\omega) \quad (2)$$

où  $d$  est un retard pouvant être choisi arbitrairement dans  $\mathbb{Z}$ . L'extension au cas 2D de ces décompositions peut s'effectuer de la même façon que pour les bases d'ondelettes classiques, par simple produit tensoriel.

## 3 Étude statistique du bruit

Dans cette partie, on considère tout d'abord l'analyse d'un bruit  $b$  monodimensionnel supposé réel stationnaire et centré, de fonction d'autocovariance  $\gamma_b$ , puis on étend cette étude au cas bidimensionnel.

### 3.1 Calcul des fonctions d'intercorrélations dans le cas 1D

On note  $(b_{j,m}[k])_k$  les coefficients résultant d'une décomposition en ondelettes 1D  $M$ -bandes du bruit, dans une sous-bande donnée  $(j, m)$  où  $j \in \mathbb{Z}$  et  $m \in \{0, \dots, M - 1\}$ . Les coefficients d'ondelettes issus de la décomposition duale sont notés  $(b_{j,m}^H[k])_k$ . On montre que, pour tout  $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ ,

$$\mathbb{E}\{b_{j,m}[k]b_{j,m}^H[k']\} = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_b(x) \gamma_{\psi_m, \psi_m^H} \left( \frac{x}{M^j} + k' - k \right) dx \quad (3)$$

où les intercorrélations déterministes des ondelettes sont définies par

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \gamma_{\psi_m, \psi_m^H}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(x) \psi_m^H(x - \tau) dx. \quad (4)$$

Une expression similaire existe pour

$$\mathbb{E}\{b_{j,m}[k]b_{j,m}[k']\} = \mathbb{E}\{b_{j,m}^H[k]b_{j,m}^H[k']\} \quad (5)$$

en remplaçant  $\gamma_{\psi_m, \psi_m^H}$  par l'autocorrélation  $\gamma_{\psi_m}$  de la fonction  $\psi_m$ .

Dans la suite, nous nous intéressons au cas d'un bruit blanc :  $\gamma_b(x) = \sigma^2 \delta(x)$ ,  $\delta$  désignant la distribution de Dirac. Si les bases d'ondelettes employées sont orthonormales, les suites de coefficients  $(b_{j,m}[k])_k$  (resp.  $(b_{j,m}^H[k])_k$ ) sont blanches, centrées, de variance  $\sigma^2$  et l'on peut facilement déduire que

$$\mathbb{E}\{b_{j,m}[k]b_{j,m}^H[k']\} = \sigma^2 \gamma_{\psi_m, \psi_m^H}(k' - k). \quad (6)$$

La détermination de l'intercovariance nécessite le calcul de la fonction  $\gamma_{\psi_m, \psi_m^H}$ . Deux situations doivent être distinguées suivant que  $m \neq 0$  ou  $m = 0$ .

- Pour tout  $m \neq 0$ , la densité interspectrale d'énergie de  $\psi_m$  et  $\psi_m^H$  est égale à

$$\widehat{\gamma}_{\psi_m, \psi_m^H}(\omega) = i \operatorname{sign}(\omega) |\widehat{\psi}_m(\omega)|^2 \quad (7)$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \gamma_{\psi_m, \psi_m^H}(\tau) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(\omega) |\widehat{\psi}_m(\omega)|^2 \exp(i\omega\tau) d\omega \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\widehat{\psi}_m(\omega)|^2 \sin(\omega\tau) d\omega. \end{aligned} \quad (8)$$

En particulier, on peut remarquer que, pour  $m \neq 0$ ,

$$\mathbb{E}\{b_{j,m}[k]b_{j,m}^H[k]\} = \sigma^2 \gamma_{\psi_m, \psi_m^H}(0) = 0. \quad (9)$$

On arrive à la conclusion que, pour  $m \neq 0$ , le vecteur  $(b_{j,m}[k] \ b_{j,m}^H[k])^T$  a des composantes décorréliées, de même variance.

- Pour  $m = 0$ , après quelques calculs, on arrive à l'expression de l'intercorrélations suivante :

$$\begin{aligned} \gamma_{\psi_0, \psi_0^H}(\tau) &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\widehat{\psi}_0(\omega)|^2 \cos\left(\omega \left(\frac{1}{2} + \tau + d\right)\right) d\omega. \end{aligned} \quad (10)$$

Notons que les fonctions d'intercorrélations obtenues possèdent des **propriétés de symétrie** intéressantes. En effet, pour tout  $m \neq 0$ ,  $\gamma_{\psi_m, \psi_m^H}$  est une fonction impaire. De plus,  $\gamma_{\psi_0, \psi_0^H}$ , vue comme une fonction de  $\tau + d$ , est symétrique par rapport à  $-1/2$ .

### 3.2 Calcul des fonctions d'intercorrélations dans le cas 2D

On considère ici l'analyse d'un bruit  $b$  bidimensionnel, toujours supposé réel stationnaire et centré, de fonction de covariance  $\gamma_b$ . De tels bruits apparaissent couramment dans les problèmes de débruitage d'images.

Nous allons procéder de façon similaire à la démarche suivie dans le paragraphe précédent. On note  $(b_{j,m,m'}[k, l])_{k,l}$  les coefficients résultant d'une décomposition en ondelettes 2D  $M$ -bandes du bruit, dans une sous-bande donnée  $(j, m, m')$ . Les coefficients d'ondelettes issus de la décomposition duale sont

notés  $(b_{j,m,m'}^H[k,l])_{k,l}$ . On montre de la même façon que pour (3) que, pour tout  $(k,l,k',l') \in \mathbb{Z}^4$ ,

$$\begin{aligned} E\{b_{j,m,m'}^H[k,l]b_{j,m,m'}^H[k',l']\} = \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_b(x,y) \gamma_{\psi_m,\psi_m^H}\left(\frac{x}{M^j} + k' - k\right) \\ \gamma_{\psi_{m'},\psi_{m'}^H}\left(\frac{y}{M^j} + l' - l\right) dx dy. \end{aligned} \quad (11)$$

Dans le cas d'un bruit blanc bidimensionnel pour lequel  $\gamma_b(x,y) = \sigma^2 \delta(x)\delta(y)$ , les coefficients  $(b_{j,m,m'}^H[k,l])_{k,l}$  (resp.  $(b_{j,m,m'}^H[k,l])_{k,l}$ ) sont blancs, centrés, de variance  $\sigma^2$ . Par ailleurs, en utilisant l'expression ci-dessus, on peut facilement déduire que

$$E\{b_{j,m,m'}^H[k,l]b_{j,m,m'}^H[k',l']\} = \sigma^2 \gamma_{\psi_m,\psi_m^H}(k' - k) \gamma_{\psi_{m'},\psi_{m'}^H}(l' - l). \quad (12)$$

Dans le cas particulier où  $k = k'$  et  $l = l'$ , on arrive à la conclusion que, pour  $m \neq 0$  ou  $m' \neq 0$ , le vecteur  $(b_{j,m,m'}^H[k,l] \ b_{j,m,m'}^H[k,l])^T$  a des composantes décorélées.

De façon à pouvoir évaluer l'impact du choix de l'ondelette, nous allons maintenant préciser les expressions de ces intercorrélations pour différentes familles d'ondelettes, dans le cas de la décomposition d'un bruit blanc.

## 4 Exemples de familles d'ondelettes

### 4.1 Ondelettes de Shannon $M$ -bandes

Les ondelettes de Shannon  $M$ -bandes correspondent à une analyse idéalement sélective en fréquence. On a alors, pour tout  $m \in \{0, \dots, M-1\}$ ,

$$\hat{\psi}_m(\omega) = \mathbf{1}_{[-(m+1)\pi, -m\pi] \cup [m\pi, (m+1)\pi]}(\omega) \quad (13)$$

où  $\mathbf{1}_S$  désigne la fonction caractéristique de l'ensemble  $S \subset \mathbb{R}$ . En se restreignant au cas d'intérêt où  $q \in \mathbb{Z}$ , on obtient à l'aide de (8) et (10) :

$$\begin{aligned} \gamma_{\psi_0,\psi_0^H}(q) &= \frac{(-1)^{(d+q)}}{\pi(d+q+\frac{1}{2})} \\ \forall m \neq 0, \quad \gamma_{\psi_m,\psi_m^H}(q) &= \begin{cases} (-1)^{(m+1)q} \frac{1-(-1)^q}{\pi q} & \text{si } q \neq 0 \\ 0 & \text{si } q = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

On remarque que, quand  $q$  est pair,  $\gamma_{\psi_m,\psi_m^H}(q) = 0$ , pour  $m \neq 0$ .

### 4.2 Ondelettes de Meyer

Ces ondelettes [7] restent à bande limitée mais en ayant des bandes de transition plus douces. On a alors

$$\hat{\psi}_0(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq |\omega| \leq \pi(1-\epsilon) \\ \gamma\left(\frac{|\omega|}{2\pi\epsilon} - \frac{1-\epsilon}{2\epsilon}\right) & \text{si } \pi(1-\epsilon) \leq |\omega| \leq \pi(1+\epsilon) \\ 0 & \text{si } |\omega| \geq \pi(1+\epsilon) \end{cases} \quad (15)$$

où  $0 < \epsilon \leq 1/3$  et  $\forall \theta \in [0, 1]$ ,  $\gamma(\theta) = \cos(\frac{\pi}{2}\nu(\theta))$  avec  $\nu : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  telle que  $\nu(0) = 0$  et  $\forall \theta \in [0, 1]$ ,  $\nu(1-\theta) =$

$1 - \nu(\theta)$ . Un choix usuel pour la fonction  $\nu$  est :  $\forall \theta \in [0, 1]$ ,  $\nu(\theta) = \theta^4(35 - 84\theta + 70\theta^2 - 20\theta^3)$ .

En se limitant au cas dyadique, à partir de l'équation à 2 échelles  $\sqrt{2}\hat{\psi}_1(2\omega) = H_1(\omega)\hat{\psi}_0(\omega)$  où  $H_1(\omega)$  est le filtre passe-haut de l'analyse multirésolution [1], on peut déduire l'expression de  $\hat{\psi}_1$ .

Après quelques calculs, on aboutit à :  $\forall q \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} \gamma_{\psi_0,\psi_0^H}(q) &= \frac{(-1)^{d+q} \cos(\pi\epsilon(d+q+\frac{1}{2}))}{\pi(d+q+\frac{1}{2})} \\ &+ 2(-1)^{d+q}\epsilon \int_0^1 \gamma^2(\theta) \sin(\pi\epsilon(1-2\theta)(d+q+\frac{1}{2})) d\theta \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\psi_1,\psi_1^H}(q) &= \frac{\cos(2\pi\epsilon q) - (-1)^q \cos(\pi\epsilon q)}{\pi q} \\ &+ 2(-1)^{q+1}\epsilon \int_0^1 \gamma^2(\theta) \sin(\pi\epsilon(1-2\theta)q) d\theta \\ &+ 4\epsilon \int_0^1 \gamma^2(\theta) \sin(2\pi\epsilon(1-2\theta)q) d\theta. \end{aligned} \quad (17)$$

On observe que ces deux quantités convergent simplement vers les expressions données par l'équation (14) pour  $m \in \{0, 1\}$ , quand  $\epsilon \rightarrow 0$ .

## 4.3 Familles d'ondelettes issues de paquets d'ondelettes

### 4.3.1 Forme générale

On peut générer des familles d'ondelettes  $M$ -bandes à partir de décomposition en paquets d'ondelettes dyadiques correspondant à des analyses en sous-bandes égales. On est alors limité à des facteurs  $M$  en puissance de 2. Dans ce cas, les fonctions de base sont définies par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} 2|\hat{\psi}_{2m}(2\omega)|^2 &= |H_0(\omega)|^2 |\hat{\psi}_m(\omega)|^2 \\ \text{et} \quad 2|\hat{\psi}_{2m+1}(2\omega)|^2 &= |H_1(\omega)|^2 |\hat{\psi}_m(\omega)|^2 \end{aligned} \quad (18)$$

où  $H_0$  et  $H_1$  sont les filtres passe-bas et passe-haut de l'analyse multirésolution dyadique. On en déduit que, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} -\pi \gamma_{\psi_{2m+1},\psi_{2m+1}^H}(q) &= \\ \gamma_{h_1}[0] \int_0^\infty |\hat{\psi}_m(\omega)|^2 \sin(2\omega q) d\omega \\ &+ \sum_{k=1}^\infty \gamma_{h_1}[k] \left( \int_0^\infty |\hat{\psi}_m(\omega)|^2 \sin((2q-k)\omega) d\omega \right. \\ &\left. + \int_0^\infty |\hat{\psi}_m(\omega)|^2 \sin((2q+k)\omega) d\omega \right) \end{aligned} \quad (19)$$

où, pour tout  $\ell \in \{0, 1\}$ ,  $(\gamma_{h_\ell}[k])_{k \in \mathbb{Z}}$  est l'autocorrélation de la réponse impulsionnelle du filtre de réponse fréquentielle  $H_\ell$  :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \gamma_{h_\ell}[k] = \sum_p h_\ell[p] h_\ell[p-k]. \quad (20)$$

Dans le cas où  $m \neq 0$ , étant donnée la définition (8), on peut réécrire l'expression (19) comme :

$$\gamma_{\psi_{2m+1},\psi_{2m+1}^H}(q) = \sum_{k=-\infty}^\infty \gamma_{h_1}[k] \gamma_{\psi_m,\psi_m^H}(2q-k). \quad (21)$$

TAB. 1 – Calcul des intercorrélations dans le cas 2-bandes ( $d = 0$ ).

Ondelettes \ $q$	$\gamma_{\psi_0, \psi_0^H}$				$\gamma_{\psi_1, \psi_1^H}$		
	0	1	2	3	1	2	3
Shannon	0.63662	-0.21221	0.12732	$-9.0946 \times 10^{-2}$	0.63662	0	0.21221
Meyer $\epsilon = 1/10$	0.63622	-0.21100	0.12532	$-8.8166 \times 10^{-2}$	0.63260	$-4.7224 \times 10^{-3}$	0.20054
Meyer $\epsilon = 1/6$	0.63550	-0.20887	0.12184	$-8.3418 \times 10^{-2}$	0.62555	$-1.2581 \times 10^{-2}$	0.18177
Meyer $\epsilon = 1/3$	0.63216	-0.19916	0.10668	$-6.4166 \times 10^{-2}$	0.59378	$-4.1412 \times 10^{-2}$	0.11930
Haar	0.51288	$-1.1338 \times 10^{-2}$	$-1.0855 \times 10^{-3}$	$-2.6379 \times 10^{-4}$	0.10816	$5.6994 \times 10^{-3}$	$1.5610 \times 10^{-3}$

TAB. 2 – Calcul des intercorrélations : extension au  $M$ -bandes ( $d = 0$ ).

Ondelettes \ $q$	$\gamma_{\psi_2, \psi_2^H}$			$\gamma_{\psi_3, \psi_3^H}$		
	1	2	3	1	2	3
Shannon 4-bandes	-0.63662	0	-0.21221	0.63662	0	0.21221
Hadamard 4-bandes	$6.0560 \times 10^{-2}$	$1.5848 \times 10^{-3}$	$4.0782 \times 10^{-4}$	$-4.9162 \times 10^{-2}$	$-3.0109 \times 10^{-4}$	$-3.4205 \times 10^{-5}$

De façon similaire, on a, pour tout  $m \neq 0$ ,

$$\gamma_{\psi_{2m}, \psi_{2m}^H}(q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{h_0}[k] \gamma_{\psi_m, \psi_m^H}(2q - k). \quad (22)$$

Les deux dernières relations fournissent des équations récursives pour le calcul des intercorrélations du bruit, connaissant  $\gamma_{\psi_1, \psi_1^H}$ .

### 4.3.2 Un cas particulier : Walsh-Hadamard

A l'opposé des ondelettes de Shannon, ces ondelettes mettent l'accent sur la localisation spatiale. On a alors

$$\hat{\psi}_0(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-i\frac{\omega}{2}} \quad (23)$$

$$\hat{\psi}_1(\omega) = i \text{sinc}\left(\frac{\omega}{4}\right) \sin\left(\frac{\omega}{4}\right) e^{-i\frac{\omega}{4}}. \quad (24)$$

Après des calculs un peu laborieux [8], on obtient pour tout  $q \in \mathbb{N}$  (en adoptant la convention que  $0 \ln(0) = 0$ ) :

$$\begin{aligned} \pi \gamma_{\psi_1, \psi_1^H}(q) &= 6q \ln(q) + (1+q) \ln(1+q) - (1-q) \ln|1-q| \\ &\quad - 4 \left( \frac{1}{2} + q \right) \ln\left(\frac{1}{2} + q\right) + 4 \left( \frac{1}{2} - q \right) \ln\left|\frac{1}{2} - q\right|. \end{aligned} \quad (25)$$

On note que  $\gamma_{\psi_1, \psi_1^H}(q) \sim 1/(8\pi q^3)$  quand  $q \rightarrow \infty$ , ce qui représente une décroissance asymptotique plus rapide que celle des ondelettes de Shannon (14).

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \pi \gamma_{\psi_0, \psi_0^H}(q) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{1}{2} S_k(3+2d+2q) - S_k(1+2d+2q) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} S_k(-1+2d+2q) \right) \end{aligned} \quad (26)$$

où, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$S_k(x) = x \int_{k\pi x}^{(k+1)\pi x} \frac{\sin(u)}{u} du. \quad (27)$$

Le cas  $M = 2$  correspond aux ondelettes de Haar. Pour  $M = 2^p$  avec  $p > 1$ , les intercorrélations  $\gamma_{\psi_m, \psi_m^H}$ ,  $m \in \{2, \dots, 2^p - 1\}$  peuvent être obtenues de manière récursive, à l'aide des équations (21) and (22). Dans le cas simple des ondelettes de Walsh-Hadamard, on a donc, pour tout  $m \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \gamma_{\psi_{2m+1}, \psi_{2m+1}^H}(q) &= \gamma_{\psi_m, \psi_m^H}(2q) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( \gamma_{\psi_m, \psi_m^H}(2q+1) + \gamma_{\psi_m, \psi_m^H}(2q-1) \right) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\psi_{2m}, \psi_{2m}^H}(q) &= \gamma_{\psi_m, \psi_m^H}(2q) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \gamma_{\psi_m, \psi_m^H}(2q+1) + \gamma_{\psi_m, \psi_m^H}(2q-1) \right). \end{aligned} \quad (29)$$

## 5 Application numérique

Le tableau 1 ci-dessus montre que les intercovariances entre les coefficients du bruit de l'analyse en arbre dual peuvent prendre des valeurs significatives. On observe également que le choix de l'ondelette a une influence importante sur l'ampleur de ces corrélations. En effet, si les ondelettes de Meyer conduisent à des résultats proches de celle de Shannon, les corrélations sont moins fortes pour l'ondelette de Haar.

Dans le cas  $M$ -bandes, comme le montre le tableau 2, les valeurs des intercovariances dans le cas de Shannon restent significatives alors que dans le cas de Hadamard, elles deviennent rapidement proches de 0.

## Références

- [1] Stéphane Mallat. *Une exploration des signaux en ondelettes*. Éditions de l'école Polytechnique, 2000.
- [2] P. Abry and P. Flandrin. Multiresolution transient detection. In *Proc. Int. Symp. on Time-Freq. and Time-Scale Analysis*, pages 225–228, Philadelphia, USA, October 1994.
- [3] N. G. Kingsbury. Complex wavelets for shift invariant analysis and filtering of signals. *J. of Appl. and Comp. Harm. Analysis*, 10(3) :234–253, May 2001.
- [4] I. W. Selesnick. Hilbert transform pairs of wavelet bases. *Signal Processing Letters*, 8(6) :170–173, Jun. 2001.
- [5] C. Chaux, L. Duval, and J.-C. Pesquet. Hilbert pairs of  $M$ -band orthonormal wavelet bases. In *Proc. Eur. Sig. and Image Proc. Conference*, pages 1187–1190, Vienna, Austria, September 6-10, 2004.
- [6] C. Chaux, L. Duval, and J.-C. Pesquet. 2D dual-tree  $M$ -band wavelet decomposition. In *Proc. Int. Conf. on Acoust., Speech and Sig. Proc.*, Philadelphia, USA, March 18-23, 2005.
- [7] Y. Meyer. *Ondelettes. Ondelettes et opérateurs*. Tome 1, Hermann, Paris, 1990.
- [8] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 2000.

# Modélisation statistique multivariée des images dans le domaine de la transformée de curvelet

Larbi BOUBCHIR, Jalal M. FADILI

GREYC UMR CNRS 6072

ENSICAEN, 06 Bd Maréchal Juin, 14050 Caen, France

Larbi.Boubchir@greyc.ensicaen.fr, Jalal.Fadili@greyc.ensicaen.fr

**Résumé** – Dans cet article, nous proposons une étude théorique et statistique pour caractériser les dépendances inter- et intra- individuelle en position, échelle et orientation des coefficients de la transformée de curvelet des images. Notre étude a été basée sur les estimées des distributions marginales et conjointes pour étudier les propriétés statistiques des coefficients, et sur la mesure de l'information mutuelle pour mesurer le niveau de dépendance entre ces coefficients. Enfin, en vue de caractériser les dépendances des coefficients de curvelet nous avons proposé un modèle statistique multivarié, à savoir le modèle multivarié gaussien généralisé anisotrope (AMGGD) que nous avons pleinement caractérisé.

**Abstract** – In this paper, we propose a theoretical and statistical study to characterize the inter- and intra- scale dependencies of the curvelet coefficients of images across position, scale and orientation. Our study was based on estimated histograms of the marginal and joint distributions to study the statistical properties of coefficients, and on the mutual information measure to assess the level of dependence between these coefficients. Finally, towards characterization of the dependencies between the curvelet coefficients a novel multivariate statistical model namely the anisotropic multivariate generalized gaussian (AMGGD) was proposed and fully characterized.

## 1 Introduction

Au cours des dix dernières années, les ondelettes ont eu un immense succès dans le domaine du traitement d'images, et ont été utilisées pour de nombreux problèmes tels que la compression et la restauration d'images [1]. Ces problèmes ont souvent pour préalable la recherche d'une représentation de l'image qui soit la plus parcimonieuse possible, au sens où un petit nombre de paramètres permet d'obtenir une approximation précise de l'image.

Cependant, il apparaît aujourd'hui clairement que les ondelettes ne sont pas optimales pour l'analyse d'objets anisotropes dans l'image (les lignes, les contours...), mais restent efficaces pour la détection de structures isotropes à différentes échelles. Depuis quelques années, de nouvelles transformées multi-échelles ont été développées -comme les curvelets, contourlets et bandlets- qui intègrent de notion de directionnalité et qui permettent de rechercher des objets de manière optimale dont l'efficacité en traitement d'image reste encore à confirmer.

Dans cet article, on présente une analyse statistique des dépendances individuelle en position, échelle et orientation des coefficients des images dans le domaine de curvelet [2, 3, 4, 5], basée sur les histogrammes estimés de distributions marginales et conjointes, et sur la mesure de l'information mutuelle [8] pour caractériser ces dépendances. Ceci afin de pouvoir modéliser ces interactions entre les coefficients de façon simple à travers un modèle statistique multivarié, à savoir l'AMGGD, que nous caractérisons pleinement.

## 2 Curvelets et Notation

Les curvelets ont été proposées par E. Candès et D. Donoho [2], constituent une nouvelle famille de frames d'onde-

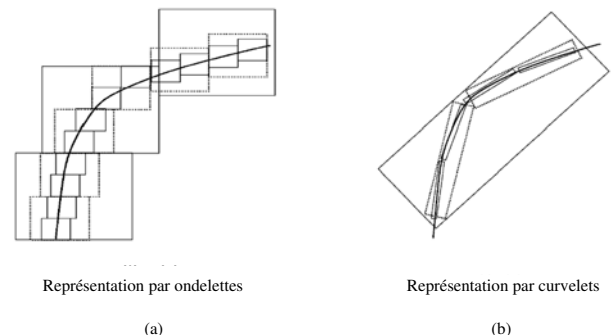


FIG. 1: Comparaison de l'approximation non-linéaire des ondelettes et des curvelets.

lettes géométriques plus efficaces que les transformées traditionnelles, et qui sont conçues pour représenter de façon parcimonieuse les contours. Par exemple, sur la Fig. 1(a), les ondelettes prendraient beaucoup de coefficients pour représenter précisément un tel contour. Comparées aux ondelettes, les curvelets peuvent représenter un contour lisse avec moins de coefficients pour la même précision (Fig. 1(b)).

La transformée de curvelet est une transformée multi-échelles multi-directionnelles avec des atomes indexés par un paramètre de position, d'échelle et de direction [2, 4]. La Fig. 2(a) montre une représentation de la transformée de curvelets pour l'image "Bateau", en employant la transformée de curvelets discrète (TCD) de Demanet [5]. Trois niveaux d'échelles et six orientations ont été montrés. Dans la Fig. 2(b) on montre le partitionnement spectral engendré par la TCD [4, 5]. Une curvelet est montrée dans la Fig. 2(c).

Pour chaque coefficient de curvelet  $X$ , on définit ces voisins ( $VX$ ) dans la même orientation, qui représentent les huit coefficients adjacents. Ensuite, le coefficient à la même locali-

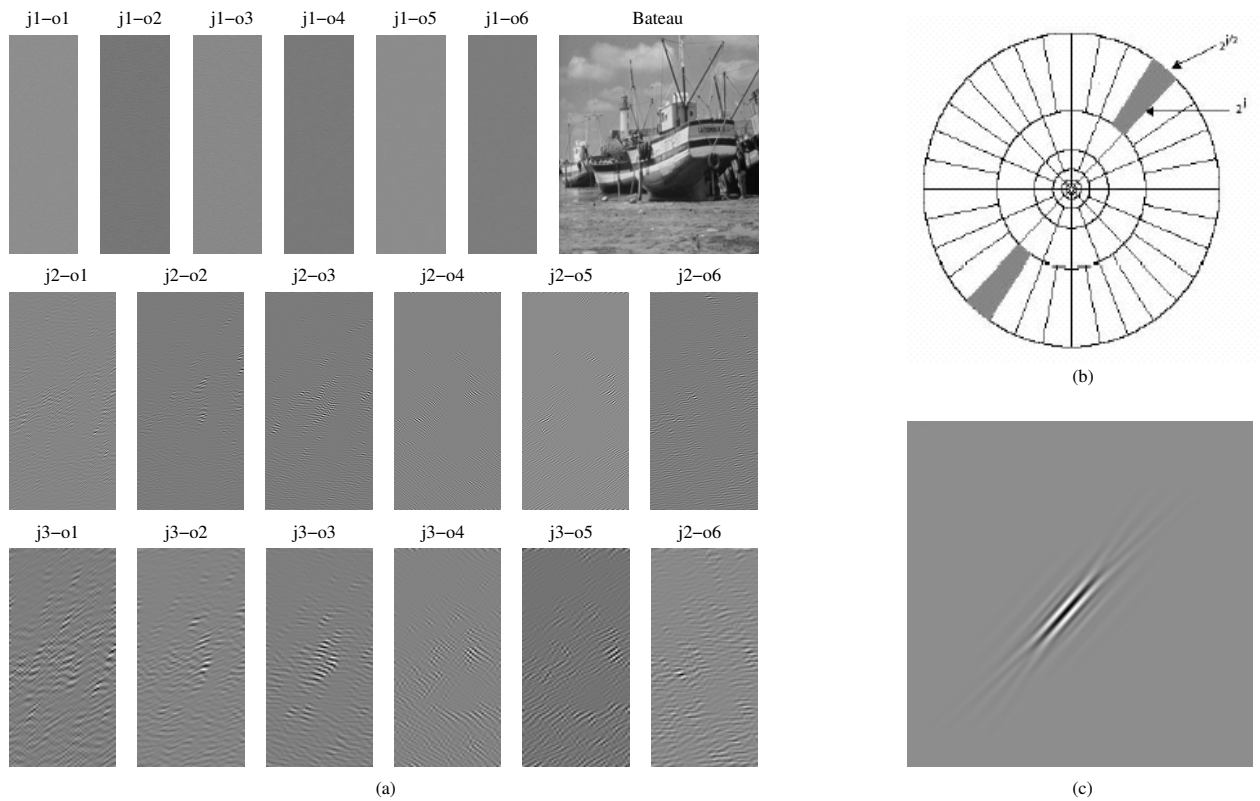


FIG. 2: (a) Transformée de curvelet discrète (TCD) de l'image "Bateau". Trois niveaux d'échelles et six orientations ont été montrés (j: indique l'échelle, o: indique l'orientation). (b) Partitionnement spectral engendré par la TCD. (c) Une curvelet.

sation spatiale dans l'échelle supérieure correspond à son père (PX), et les coefficients à la même localisation spatiale et à la même échelle mais dans une autre orientation correspondent à ces cousins (CX). Aussi, il y a plus d'orientations dans la représentation de curvelet comparée à la représentation en ondelette séparable où il y a seulement trois directions cardinales (horizontale, verticale et diagonale). La Fig.3 récapitule ces importantes relations entre coefficients.

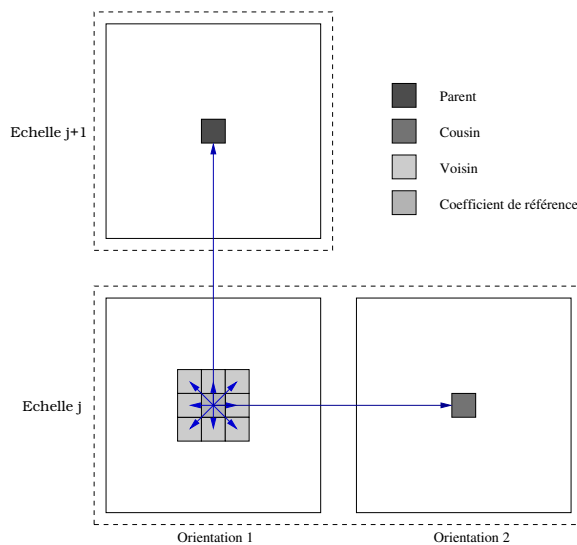


FIG. 3: Dépendances inter- et intra- individuelle en position, échelle et orientation entre les coefficients de curvelet.

### 3 Etude et Analyse statistique

Nous présentons ici une étude statistique pour apprécier les propriétés des coefficients de curvelet d'images et caractériser les dépendances inter- et intra- échelles de ces derniers.

#### 3.1 Distribution marginale

Premièrement, nous étudions les statistiques marginales des coefficients de curvelet d'images. La Fig.4(a) montre les histogrammes de distributions marginales des coefficients de curvelet de l'image "bateau", à deux orientations et à deux échelles successives. Ces lois marginales sont clairement non gaussiennes, caractérisées par des densités symétriques centrées en zéro avec des queues relevées (leptokurtiques). Ce comportement leptokurtique est observé sur tous les histogrammes à toutes les orientations, échelles pour toutes les images analysées. Ceci trouve son origine dans le fait que la transformée de curvelet est une transformée parcimonieuse où la majorité de coefficients ont des amplitudes nulles. Les kurtosis de ces distributions ont été estimés et ont des valeurs significativement plus élevées que la valeur gaussienne de 3. Ainsi, les distributions marginales des images dans le domaine des curvelets sont fortement non gaussiennes.

#### 3.2 Distribution conjointe

Deuxièmement, nous étudions les statistiques conjointes des coefficients de curvelet. Dans Fig.2(a), nous observons que les coefficients ayant une valeur élevée tendent à se grouper au-

tour des bords des objets dans l'image "Bateau". Ceci persiste également à d'autres orientations et à d'autres échelles. La Fig.4(b) montre les distributions conjointes des coefficients de curvelets pour l'image "Bateau" dans le cas bivarié et trivarié,  $p(X, \cdot)$  et  $p(X, \cdot, \cdot)$ , où  $(\cdot)$  veut dire parent, voisins ou cousins.

### 3.3 Information Mutuelle

On propose une étude quantitative des distributions conjointes pour comparer les interactions entre les coefficients de curvelet. Ceci est quantifié par le biais de l'information mutuelle [8], qui est une mesure quantitative des dépendances entre les coefficients [6, 7]. L'information mutuelle ( $IM$ ) est l'entropie relative  $D(\cdot||\cdot)$  entre la distribution conjointe et le produit des distributions, et est définie par l'équation suivante:

$$IM(X; Y) = D(p(x, y) || p(x)p(y)) = \int_x \int_y p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} dx dy \quad (1)$$

TAB. 1: L'information mutuelle moyennée sur une base d'images (100 images) [9], calculée pour deux échelles successives  $J$  et  $J - 1$  où  $J$  est l'échelle la plus grossière.

	échelle $J$	échelle $J - 1$
IM(X;PX)	0.164	0.194
IM(X;VX)	0.374	0.555
IM(X;CX)	0.142	0.151

Le Tab.1 montre l'information mutuelle moyennée sur une base de 100 images [9]. Nous observons que les dépendances les plus significatives proviennent des voisins, suivis des parents et ensuite des cousins. L'influence des voisins est plus prépondérante compte tenu que les coefficients de TCD ont tendance à ce regrouper. La dépendance entre échelles (parent) est révélatrice d'une persistance des coefficients significatifs à travers les échelles.

Finalement, il semble que les dépendances entre orientations (cousin) soient la moins importante du fait du partitionnement spectral illustré dans la Fig.2(b). Cependant, le système des curvelets ne forme pas une base orthogonale mais plutôt un frame, il subsiste des dépendances entre orientations.

## 4 Modèle multivarié analytique

Ici nous introduisons une classe de PDFs marginales à queues lourdes (AMGGD) pour le cas multivarié afin de modéliser les dépendances inter- et intra-échelles entre les coefficients de curvelet.

### 4.1 Modèle proposé

**Définition 1** Si un vecteur de VAs  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)^T$  dans  $\mathbb{R}^d$  suit une loi multivariée gaussienne généralisée **anistrophe centrée**, alors sa PDF s'écrit:

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \alpha, \Sigma) = \frac{\det \Sigma^{-1/2}}{(Z(\alpha)B(\alpha))^d} \exp \left( - \left\| \frac{\Sigma^{-1/2} \mathbf{x}}{B(\alpha)} \right\|^\alpha \right) \quad (2)$$

où

$$Z(\alpha) = \frac{2}{\alpha} \Gamma \left( \frac{1}{\alpha} \right), \alpha > 0 \quad (3)$$

et

$$B(\alpha) = \sqrt{\frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{3}{\alpha})}} \quad (4)$$

$\alpha$  est le paramètre de forme et  $\Sigma$  une matrice symétrique définie positive. Pour rappel,  $\|\mathbf{x}\|_\alpha = \sum_{i=1}^d |x_i|^\alpha$  est la norme  $L_\alpha$  du vecteur  $\mathbf{x}$ .

Cette définition englobe le cas particulier  $d = 1$  (une VA) et le cas des distributions normales multivariées ( $\alpha = 2$ ). Ce modèle de PDF jouit de plusieurs propriétés intéressantes que nous avons établies.

### 4.2 Estimation des hyperparamètres

Pour mettre en application notre modèle multivarié de PDF, nous avons proposé des estimateurs (moments et maximum de vraisemblance) des hyperparamètres associés:  $\alpha$  et  $\Sigma$ .

L'intérêt de la paramétrisation de l'Eq. 2 est que

$$\text{cov}(\mathbf{X}) = \Sigma \quad (5)$$

Ainsi, sachant  $\mathbf{X}$  (estimé par la méthode des moments) comme indiqué ci-dessus, nous pouvons mettre en place l'estimateur du maximum du vraisemblance (MV) pour obtenir  $\alpha$ . L'équation de vraisemblance correspond à  $\alpha$  (sachant  $\Sigma$ ) est dans ce cas,

$$\hat{\alpha}_{MV} = \arg \min_{\alpha > 0} LL(\alpha) = \arg \min_{\alpha > 0} - \sum_{i=1}^n \log p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i; \alpha, \Sigma) \quad (6)$$

où  $\alpha$  est la racine de l'équation suivante:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\alpha \partial LL(\alpha)}{\partial \alpha} \\ &= \sum_{i,j} \left| \frac{y_{i,j}}{B(\alpha)} \right|^\alpha \cdot \log \left| \frac{y_{i,j}}{B(\alpha)} \right|^\alpha \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left| \frac{y_{i,j}}{B(\alpha)} \right|^\alpha \cdot \left( \Psi \left( \frac{1}{\alpha} \right) - 3 \Psi \left( \frac{3}{\alpha} \right) \right) \\ &\quad - nd - \frac{3nd}{2\alpha} \left( \Psi \left( \frac{1}{\alpha} \right) - \Psi \left( \frac{3}{\alpha} \right) \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

avec

$$y_{i,j} = \Sigma_j^{-1/2} \mathbf{x}_i \quad (8)$$

$j$  représente la  $j^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $\mathbf{y}_i$  où  $\mathbf{y}_i = \Sigma^{-1/2} \mathbf{x}_i$ ,  $\mathbf{x}_{i,\{1, \dots, n\}}$  sont les réalisations de  $\mathbf{X}$  et  $\Psi$  est la fonction Digamma (pour rappel,  $\Psi(z) = \frac{d \ln(\Gamma(z))}{dz}$ ).

Le résultat suivant établit l'existence de l'estimateur du MV de  $\alpha$ .

#### Proposition 1 Existence d'une solution

- (i)  $f(\alpha)$  a au moins une racine sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , et donc il existe au moins une solution (non nécessairement unique)  $\hat{\alpha}_{MV}$  à l'estimateur du MV sachant  $\Sigma$ .
- (ii) si  $M = \max_{i,j \in \mathbb{N}} |y_{i,j}| \leq \sqrt{3}$  alors au minimum global  $\hat{\alpha}_G$  de  $LL(\alpha)$  on aura toujours  $LL(\hat{\alpha}_G) < \frac{nd \log(3)}{2}$ .

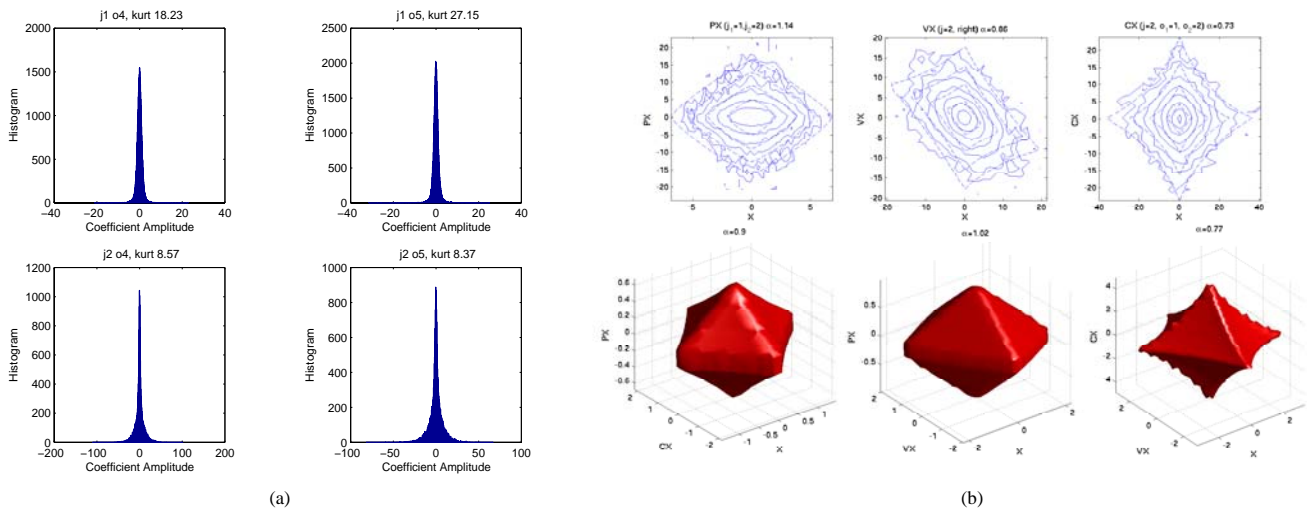


FIG. 4: (a) Distributions marginales des coefficients de curvelet de l'image "bateau", à deux orientations et à deux échelles successives. (b) Distributions conjointes (en log) des coefficients de curvelet pour l'image "Bateau" dans le cas bivarié et trivarié,  $p(X, \cdot)$  et  $p(X, \cdot, \cdot)$ , avec leurs parents  $PX$ , voisins  $VX$  et cousins  $CX$ .

L'intérêt du résultat Prop.1-(ii) réside dans le fait que nous pouvons rejeter adaptativement certains minima locaux de  $LL(\alpha)$  (en l'occurrence ceux placés au dessus du  $\frac{nd \log(3)}{2}$ ).

D'après l'Eq. 5 et la Proposition 1, nous suggérons l'algorithme d'estimation des hyperparamètres suivant:

#### Algorithm 1 Estimation des hyperparamètres

1: Estimé de  $\Sigma$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum_i \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \quad (9)$$

2: Estimé de  $\alpha$

obtenir  $\hat{\alpha}$  en résolvant numériquement l'Eq. 7 par une descente de gradient. Cette descente tirera profit de la Prop.1-(ii) de façon à éviter d'être piégé dans un minimum local.

### 4.3 Ajustement sur des images: simulées et réelles

Sur la Fig.4(b), ce modèle de PDF a été ajusté (trait en pointillé) à la PDF jointe observée (trait plein) dans la cas bivarié. On peut apprécier l'adéquation de ce modèle aux statistiques observées.

## 5 Conclusion

Nous avons étudié les propriétés des coefficients de curvelet d'images. Et on a montré que les coefficients ayant des valeurs élevées tendent à se grouper autour des bords des objets dans l'image, ce qui est intuitif car les coefficients dépendent de leurs parents et voisins, aussi bien que leurs cousins à différentes échelles et orientations. Ces dépendances ont été vérifiées quantitativement en mesurant l'information mutuelle, où on a constaté que le niveau le plus élevé de la dépendance des coefficients est à l'égard des leurs voisins, suivi des leurs parents, qui sont suivis des cousins. Le modèle multivarié analytique de PDF, que nous avons pleinement caractérisé, a été proposé pour cap-

turer ces dépendances entre coefficients.

Après cette phase de modélisation des dépendances, notre futur travail se focalisera sur leur mise à profit d'un tel modèle de PDF comme a priori pour des tâches de restauration dans un contexte bayésien.

## Références

- [1] S. Mallat. *A Wavelet tour of signal processing*. San Diego, CA: Academic Press, 1999.
- [2] E. Candès et D. Donoho. *Curvelets: A Surprisingly Effective Nonadaptive Representation of Objects with Edges*. Curves and Surface, Vanderbilt University Press, Nashville, TN, pp. 123–143, 1999. Addison-Wesley, 1994.
- [3] J. Starck, E. Candès et D. Donoho. *The curvelet transform for image denoising*. IEEE Transactions on Image Processing, Vol. 11(6), pp. 670–684, June 2002.
- [4] E. Candès et D. Donoho. *New Tight Frames of Curvelets and Optimal representations of Objects with  $C^2$  Singularities*. Department of Statistics, Stanford University, USA, November 2002.
- [5] E. Candès et L. Demanet. *The Curvelet Representation of Wave Propagators is Optimally Sparse*. Applied and Computational Mathematics, California Institute of Technology, USA, 2004.
- [6] J. Liu et P. Moulin. *Information-Theoretic Analysis of Interscale and Intracscale Dependencies Between Image Wavelet Coefficients*. IEEE Transactions on Image Processing, Vol. 10(10), pp. 1647–1658, November 2001.
- [7] D. D. -Y. Po et M. N. Do. *Directional multiscale statistical modeling of images X*. Proc. of SPIE conference on Wavelet Applications in Signal and Image Processing, Vol. 5207, pp. 69–79, August 2003.
- [8] T. M. Cover et J. A. Thomas. *Elements of information theory*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1991.
- [9] "http://sipi.usc.edu/services/database/Database.html".



# Analyse multirésolution $L_2$ —optimale : estimation par quasi-projections

Laurent CONDAT, Annick MONTANVERT

Laboratoire LIS – Fédération ELESIA  
961 rue de la Houille Blanche, BP 46, 38402 Saint Martin d'Hères Cedex, France  
laurent.condat@lis.inpg.fr

**Résumé** – On s'intéresse à la représentation, à l'aide d'une fonction reconstruite de résolution souhaitée, d'un signal discret, interprété comme un ensemble de mesures sur une fonction inconnue. Cette dernière est approchée du mieux possible par la fonction reconstruite, et ce à partir du signal discret. L'approche présentée est originale, et s'appuie sur la théorie de l'approximation pour réaliser une quasi-projection de la fonction inconnue dans l'espace de reconstruction choisi. Nous présentons les filtres obtenus dans des cas concrets d'approximation spline, et nous validons notre approche par la mise en œuvre de rotations sur des images.

**Abstract** – We are interested in reconstructing, at a given resolution, a function modeling a discrete signal, which is considered as a set of measures on a unknown function. To this end, this unknown function is approximated from the discrete signal, by performing a quasi-projection of it in the chosen reconstruction space. We design filters for spline approximation and we validate our approach by image rotation experiments.

## 1 Introduction

En traitement du signal et des images, de nombreux problèmes nécessitent de faire le lien entre les domaines discret et continu. Si un signal, défini sur une grille discrète, doit être rééchantillonné, il est utile de le modéliser par une fonction définie continuellement, que l'on rediscrétise ensuite en de nouveaux points. Par exemple, un tel traitement peut être mis en œuvre pour effectuer une translation de pas non-entier ou une rotation sur une image, ou pour modifier la fréquence d'échantillonnage d'un signal audio. De plus, de nombreux problèmes, comme la détection de contours, se traitent plus aisément à l'aide d'un formalisme continu, qui autorise par ex. le calcul de dérivées.

Lorsque le signal  $s = (s[k])_{k \in \mathbb{Z}}$  résulte de l'échantillonnage ponctuel d'une fonction  $f(x)$  à bande limitée, c'est-à-dire que  $s[k] = f(k)$  avec  $\hat{f}(\omega) \triangleq \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-j\omega x} dx$  à support dans  $[-\pi, \pi]$ , la théorie de Shannon [1] nous dit que  $f$  peut être parfaitement reconstruite à partir du signal  $s$ . Plus généralement, si  $f$  appartient à un espace  $V_T(\varphi)$  de résolution  $1/T \leq 1$  engendré par une fonction noyau  $\varphi(x)$  et ses translatés :

$$V_T(\varphi) = \left\{ f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c[k] \varphi\left(\frac{x}{T} - k\right) \mid c \in \ell_2(\mathbb{Z}) \right\}, \quad (1)$$

alors on peut reconstruire  $f$  à partir des échantillons idéaux  $s[k] = f(k)$ , mais aussi à partir d'échantillons généralisés (ou non-idéaux) de la forme :

$$s[k] = f * \tilde{\varphi}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x - k) dx \quad (2)$$

où  $\tilde{\varphi}(x)$  est un noyau d'analyse (qui peut être une distribution), et  $\tilde{g}(x) = g(-x)$  [2][3][4]. On retrouve des échantillons idéaux lorsque  $\tilde{\varphi}(x) = \delta(x)$  est une masse de Dirac ( $\hat{\delta}(\omega) = 1$ ). Le modèle d'échantillonnage non-idéal est représentatif de la formation des signaux discrets : la fonction  $\tilde{\varphi}(x)$  représente la réponse impulsionnelle du capteur ayant servi à l'acquisition du signal. Par conséquent, un signal discret  $s$  est interprété comme

une suite de mesures sur une fonction inconnue  $f(x)$ .

Dans les applications réelles, la fonction  $f$  peut être quelconque, et sa reconstruction exacte n'est généralement pas possible. L'objectif fixé est donc le suivant : étant donné un signal  $s$  constituant une série de mesures sur une fonction inconnue  $f \in L_2(\mathbb{R})$ , i.e  $s[k] = f * \tilde{\varphi}(k)$ , on cherche à reconstruire une fonction  $f_T(x) \in V_T(\varphi)$  (pour un certain noyau  $\varphi(x)$  à choisir) de résolution  $1/T \geq 1$  souhaitée (avec  $T \in \mathbb{N}^*$ ), approchant au mieux  $f$  au sens  $L_2$ , c.-à-d. minimisant  $\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_T(x)|^2 dx$  parmi toutes les fonctions de  $V_T(\varphi)$ . Pour une résolution fixée, on cherche donc à ce que la fonction  $f_T(x)$  retienne au mieux l'information sur  $f$  disponible dans le signal  $s$ . On cherche une fonction reconstruite de la forme :

$$f_T(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_T[k] \varphi\left(\frac{x}{T} - k\right), \quad (3)$$

l'étude consistant à déterminer la séquence  $c_T = (c_T[k])_{k \in \mathbb{Z}}$  à partir de  $s$ . Ce travail généralise [5] dans lequel est étudiée la reconstruction par quasi-interpolation, correspondant au cas  $\tilde{\varphi} = \delta$  et  $T = 1$ . On se restreint au cadre 1D, la reconstruction dans le cadre multidimensionnel s'effectuant efficacement à l'aide de traitements séparables. Dans la suite, on définit la transformée en  $z$  d'un filtre discret  $h = (h[k])$  par  $H(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] z^{-k}$  et sa transformée de Fourier par  $\hat{h}(\omega) = H(e^{j\omega})$ .

## 2 Approximation par (quasi-)projection

### 2.1 Projections orthogonale et oblique

Etant donnée une fonction  $f \in L_2$ , sa meilleure approximation dans l'espace  $V_T(\varphi)$  s'obtient en la projetant orthogonalement dans cet espace, ce qui fournit la fonction  $f_T(x)$  ayant la forme de l'eqn. (3), où les coefficients  $c_T[k]$  s'obtiennent par :

$$c_T[k] = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi_d\left(\frac{x}{T} - k\right) dx. \quad (4)$$

$\varphi_d$  est la fonction *duale* de  $\varphi$ , définie au moyen de  $a_\varphi$ , l'autocorrélation discrète de  $\varphi$  :  $a_\varphi[k] = \varphi * \bar{\varphi}(k)$  :

$$\hat{\varphi}_d(\omega) = \frac{\hat{\varphi}(\omega)}{\hat{a}_\varphi(\omega)}. \quad (5)$$

En pratique,  $f(x)$  est inconnue, donc sa projection orthogonale n'est pas accessible. Si on impose la linéarité et l'invariance par translation du processus d'approximation, alors la séquence  $c_T = (c_T[k])$  s'obtient par

$$c_T = [s * h_T] \downarrow T \quad (6)$$

où l'opérateur de décimation est défini par  $[h] \downarrow T = (h[Tk])_{k \in \mathbb{Z}}$ , et le préfiltre  $h_T$  est à déterminer. Définissons le filtre  $g_T$  par

$$g_T[k] = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{T}\right) \bar{\varphi}(x - k) dx. \quad (7)$$

Dans le cas  $T = 1$ , l'approche usuelle consiste à effectuer une reconstruction *consistante* [3, 6] :  $f_1(x)$  est définie comme l'unique fonction de  $V_1(\varphi)$  fournissant les mêmes mesures que  $f$ . Le préfiltre correspondant à cette reconstruction est

$$h_1 = g_1^{-1} \quad (\Leftrightarrow H_1(z) = 1/G_1(z)). \quad (8)$$

Par exemple, dans le cas d'échantillons idéaux  $s[k] = f(k)$ , l'approximation consistante revient à effectuer l'*interpolation* des données : on cherche la fonction de  $V_1(\varphi)$  qui passe par les échantillons. On a alors  $g_1[k] = \varphi(k)$ .

L'approximation consistante réalise une projection *oblique* de  $f$  dans  $V_T(\varphi)$ . Dans le cas général  $T \geq 1$ , le schéma d'approximation défini par les eqns. (3) et (6) est une projection oblique dès lors que

$$[g_T * h_T] \downarrow T[k] = \{1 \text{ si } k = 0, 0 \text{ sinon}\}. \quad (9)$$

Le fait d'être une projection est équivalent au fait d'avoir reconstruction parfaite (*i.e.*  $f_T = f$ ) dans le cas où  $f \in V_T(\varphi)$ . Cela ne garantit pas que  $f_T(x)$  soit proche de  $f(x)$  dans le cas général. On va maintenant s'intéresser à quantifier cette erreur d'approximation entre  $f_T$  et  $f$ .

## 2.2 Evaluation de l'erreur d'approximation

Un résultat remarquable de théorie de l'approximation [7] est que l'erreur  $\|f_T - f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f_T(x) - f(x)|^2 dx$  peut être prédite très précisément par la quantité

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 E_T(\omega) d\omega \quad (10)$$

où  $E_T(\omega)$  est le *noyau d'erreur* qui caractérise la méthode d'approximation (l'étoile indique la conjugaison complexe) :

$$E_T(\omega) = \underbrace{1 - \frac{|\hat{\varphi}(T\omega)|^2}{\hat{a}_\varphi(T\omega)}}_{E_{\min}(\omega) \geq 0} + \underbrace{\hat{a}_\varphi(T\omega) \left| \hat{h}_T^*(\omega) \hat{\varphi}(\omega) - \hat{\varphi}_d(T\omega) \right|^2}_{E_{\text{res}}(\omega) \geq 0}. \quad (11)$$

Lorsque  $f_T(x)$  est la projection orthogonale de  $f(x)$  dans  $V_T(\varphi)$ , l'erreur d'approximation est minimale, et alors  $E(\omega)$  est réduit à  $E_{\min}(\omega)$ .

Avant toute chose, il faut donc choisir  $\varphi$  afin que  $E_{\min}(\omega)$  soit minimal. En pratique, la plupart des signaux, et en particulier les images, ont leur énergie localisée dans les basses fréquences.  $E_{\min}(\omega)$  doit donc s'annuler autant que possible au voisinage de  $\omega = 0$ . Ainsi on impose la contrainte

$$E_{\min}(\omega) = O(\omega^{2L}) \quad (12)$$

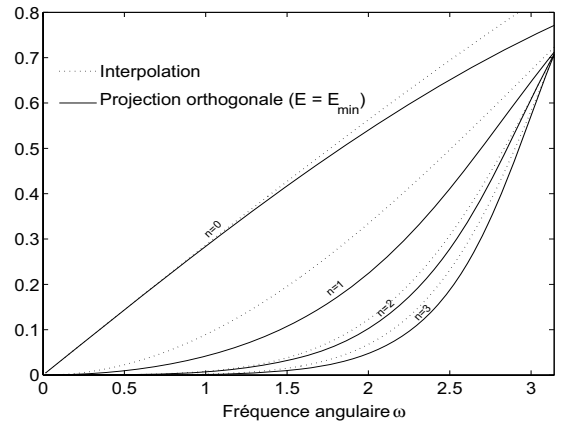


FIG. 1  $1/\sqrt{E(\omega)}$  lorsque  $\varphi = \beta^n$  est une B-spline, et  $T = 1$ .

où l'entier  $L$ , l'ordre d'approximation de  $\varphi$ , est choisi aussi grand que possible. Cette contrainte est équivalente aux conditions de Strang-Fix [8] :

$$\hat{\varphi}(0) \neq 0 \quad \text{et} \quad \hat{\varphi}^{(k)}(2n\pi) = 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} k = 0 \dots L-1 \\ n \neq 0 \end{cases} \quad (13)$$

En parallèle, on choisit  $\varphi$  à support compact, puisque le temps de calcul de la reconstruction, principalement requis pour les évaluations de  $\varphi$  dans l'eqn. (3), est proportionnel à la taille  $W$  de son support. Or il a été montré que nécessairement  $W \geq L$ , avec égalité si et seulement si  $\varphi$  est un noyau MOMS [9].  $L$  sera donc choisi suffisamment petit pour conserver un coût algorithmique faible, typiquement  $L \leq 4$ .

Dans ce contexte, l'utilisation de modèles *splines* [10], revenant à choisir comme noyau MOMS  $\varphi = \beta^n(x)$ , la B-spline centrée de degré  $n$ , apparaît judicieuse. Les avantages théoriques des splines ont été validés expérimentalement en imagerie [11][12].  $\beta^n(x)$ , d'ordre d'approximation  $L = n + 1$ , est définie comme suit, et vérifie  $a_{\beta^n}[k] = \beta^{2n+1}(k)$  :

$$\beta^n(\omega) = \left( \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^{n+1}. \quad (14)$$

La fig. 1 montre  $1/\sqrt{E_{\min}(\omega)}$  et  $1/\sqrt{E(\omega)}$  associés respectivement à l'approximation spline par projection orthogonale et par interpolation ( $T = 1$ ,  $\tilde{\varphi} = \delta$ ,  $h_1 = g_1^{-1}$ ). On voit que l'ordre  $L$  est déterminant pour la qualité d'approximation et que la différence entre l'interpolation (projection oblique) et la projection orthogonale est significative. Dans la suite, on va chercher des préfiltres  $h_T$  minimisant cette différence.

## 2.3 Quasi-projections

Lorsque  $E(\omega) = O(\omega^{2L})$ , ou de manière équivalente

$$\hat{h}_T^*(\omega) \hat{\varphi}(\omega) = \hat{\varphi}_d(T\omega) + O(\omega^L), \quad (15)$$

le schéma d'approximation réalise une *quasi-projection* d'ordre  $L$  [13][7], c.-à-d. que l'on n'a reconstruction parfaite de  $f \in V_T(\varphi)$  que si  $f$  est un polynôme de degré au plus  $L - 1$ . On parle de *quasi-interpolation* dans le cas  $\tilde{\varphi} = \delta$  [5]. La condition de quasi-projection est plus faible que d'imposer au schéma d'être une projection oblique (eqn. (9)), et ce gain de liberté dans le choix de  $h_T$  va être mis à profit pour diminuer l'erreur d'approximation.

### 3 Conception de filtres minimisant l'erreur d'approximation

Afin que la fonction reconstruite  $f_T(x)$  approche au mieux la projection orthogonale de  $f$  dans  $V_T(\varphi)$ , qui est la meilleure, bien qu'inaccessible, reconstruction possible, on va chercher à annuler au maximum le noyau  $E_{\text{res}}(\omega)$  dans la bande fréquentielle  $\omega \in [-\pi, \pi]$ , et plus particulièrement autour de  $\omega = 0$ . On impose donc

$$E(\omega) \sim E_{\min}(\omega), \quad (16)$$

qui n'est généralement pas vérifié pour l'approximation par projection oblique. On cherche donc un filtre réalisable  $h_T$  tel que

$$h_T(\omega) = \frac{\hat{\varphi}_d(T\omega)^*}{\hat{\varphi}(\omega)^*} + O(\omega^N). \quad (17)$$

avec  $N \geq L + 1$ . Plus  $N$  est grand, meilleure est la qualité de reconstruction. L'éqn. (13) implique que  $\hat{a}_\varphi(\omega) = |\hat{\varphi}(\omega)|^2 + O(\omega^{2L})$ . Donc si  $N \leq 2L$ , l'éqn. (17) se réécrit :

$$\hat{h}_T(\omega) = \frac{1}{\hat{\varphi}(T\omega)\hat{\varphi}(\omega)^*} + O(\omega^N). \quad (18)$$

#### 3.1 Exemples de quasi-interpolation

Intéressons-nous à l'approximation par quasi-interpolation spline, c.-à-d.  $T = 1$ ,  $\tilde{\varphi} = \delta$  et  $\varphi = \beta^n$ . L'éqn. (17) n'est pas suffisante pour déterminer le filtre  $h_1$ , il nous faut d'abord choisir sa forme. Il est possible de chercher un filtre de taille finie (RIF), comme dans [7]. Nous avons montré dans [5] que l'on obtient de meilleurs résultats avec un filtre inverse, c.-à-d. que l'on pose  $H_1(z) = 1/Q_1(z)$  avec  $q_1$  un filtre RIF tel que  $\hat{q}_1(\omega) \neq 0$ . D'autre part, comme  $\varphi$  est symétrique, on cherche un préfiltre symétrique afin que l'ensemble du processus soit à phase linéaire. Le tab. 1-1 présente les filtres de taille minimale ( $N = L + 1$ ) vérifiant l'éqn. (18), qui se réécrit dans le cas présent  $p_1(\omega) = \varphi(\omega) + O(\omega^{L+1})$ . Ces filtres coïncident avec les filtres d'interpolation (eqn. (8)) dans le cas où  $n$  est pair. Soulignons que le filtrage inverse  $s * p^{-1}$  s'effectue à l'aide d'un algorithme rapide [10] avec un temps de calcul équivalent à celui de  $s * p$ .

TAB. 1 – Préfiltres proposés pour l'approximation spline.

$\varphi(x)$	$Q_1(z)$ tel que $H_1(z) = 1/Q_1(z)$
$\beta^0(x)$	1
$\beta^1(x)$	$\frac{1}{12}z^{-1} + \frac{5}{6} + \frac{1}{12}z$
$\beta^2(x)$	$\frac{1}{8}z^{-1} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8}z$
$\beta^3(x)$	$-\frac{1}{720}z^{-2} + \frac{31}{180}z^{-1} + \frac{79}{120} + \frac{31}{180}z - \frac{1}{720}z^2$
$\varphi(x)$	$Q_2(z)$ tel que $H_2(z) = P_2(z)/Q_2(z)$
$\beta^0(x)$	1
$\beta^1(x)$	$\frac{17}{48}z^{-1} + \frac{7}{24} + \frac{17}{48}z$
$\beta^2(x)$	$\frac{3}{16}z^{-1} + \frac{5}{8} + \frac{3}{16}z$
$\beta^3(x)$	$\frac{59}{11520}z^{-2} + \frac{601}{2880}z^{-1} + \frac{1099}{1920} + \frac{601}{2880}z + \frac{59}{11520}z^2$

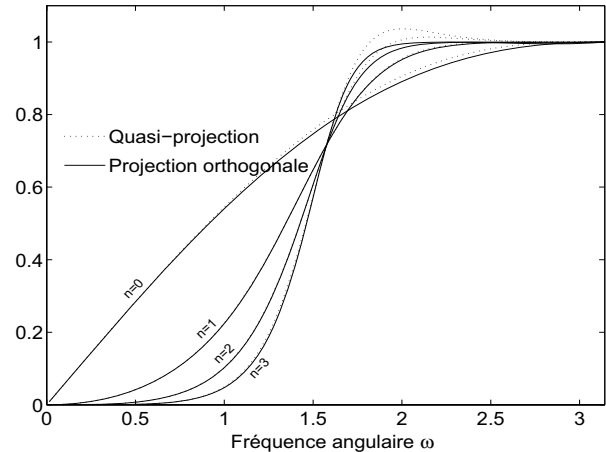


FIG. 2 –  $\sqrt{E(\omega)}$  lorsque  $\varphi = \beta^n$ ,  $\tilde{\varphi} = \delta$ , et  $T = 2$ .

#### 3.2 Exemple d'approximation avec $T=2$

Illustrons maintenant l'approximation spline dans le cas  $T > 1$ . On généralise la forme inverse  $H_1(z) = 1/Q_1(z)$  en choisissant des filtres rationnels symétriques de la forme  $H_T(z) = P_T(z)/Q_T(z^T)$  avec  $P_T(z) = z^{-T-1}(z + \dots + z^T)^2/T^2$ . L'implémentation efficace du préfiltrage se fait alors par  $c_T = [s * p_T] \downarrow T * q_T^{-1}$ . Le facteur de régularité  $P_T(z)$  est nécessaire pour éviter l'aliasing dans la bande  $\omega \in [\pi/T, \pi]$ .

Le tab. 1-2 donne les filtres de taille minimale vérifiant l'éqn. (18) dans le cas  $T = 2$  et  $\tilde{\varphi} = \delta$ . Les noyaux d'erreurs  $E(\omega)$  associés, représentés dans la fig. 2, sont très proches des noyaux  $E_{\min}(\omega)$ , signe d'une reconstruction de qualité.

### 4 Applications

La modélisation d'un signal discret  $s$  à l'aide d'une collection de représentations continues  $\{f_T(x)\}$  paramétrée par la résolution  $1/T$  offre de multiples avantages par rapport à la seule modélisation par  $f_1(x)$ . Une telle collection de fonctions forme une *pyramide multirésolution*, dont les propriétés ont été largement étudiées, en particulier dans une perspective de codage. Chaque fonction  $f_T(x)$  est décrite entièrement par la séquence  $(c_T[k])$  correspondante, ce qui permet d'effectuer la plupart des traitements, par exemple le calcul de dérivées, par des opérations discrètes portant sur les  $c_T[k]$ .

Afin d'illustrer la pertinence de notre approche pour des opé-

TAB. 2 – PSNR après 17 rotations d'angle  $2\pi/17$  sur différentes images, par interpolation et quasi-interpolation spline linéaire (Sp1) et spline cubique (Sp3).

	Sp1 int.	Sp1 quasi.	Sp3 int.	Sp3 quasi.
Lena	29.40	36.81	38.69	39.81
Barbara	23.84	27.32	28.99	30.55
Baboon	21.98	26.23	27.63	28.64
Boat	26.33	32.52	34.07	35.00
Camera	23.29	28.64	30.18	31.23
Peppers	28.89	35.41	36.83	37.64
time	1 U	1.1 U	2.6 U	2.7 U

ractions comme la rotation ou la translation d'images, qui se situent dans le contexte  $T = 1$  et  $\tilde{\varphi} = \delta$ , nous avons effectué une succession de 17 rotations d'angles  $2\pi/17$  sur des images connues. Lors de chacune, la fonction  $f_1(x, y)$  est reconstruite de manière séparable par interpolation spline (filtres donnés par l'éqn. (8)) et quasi-interpolation spline (filtres du tab. 1-1), puis rééchantillonnée. Le tab. 2 montre que la quasi-interpolation donne des résultats nettement meilleurs que l'interpolation correspondante, pour un temps de calcul (en unité arbitraire U) similaire. La quasi-interpolation bilinéaire ( $\varphi = \beta^1$ ) apparaît comme une méthode de choix pour la rotation rapide et efficace d'images. La fig. 3 le confirme : le flou introduit lors d'un enchaînement de rotations est bien moindre qu'avec l'interpolation bilinéaire.

## 5 Conclusion

Nous avons présenté la reconstruction à partir d'un signal discret comme un problème d'estimation d'une fonction inconnue à partir de mesures sur celle-ci. La reconstruction est mise en œuvre efficacement à l'aide de filtres dont la conception est aisée. Cette étude, basée sur la notion de quasi-projection, peut être bénéfique pour tous les problèmes nécessitant un rééchantillonnage, ou une représentation multirésolution d'un signal. Les expériences de rotations mises en avant montrent la pertinence de l'approche théorique visant à minimiser le noyau d'erreur  $E(\omega)$ . Nous poursuivons notre travail afin de l'étendre aux facteurs  $T$  quelconques et aux données bruitées.

## Références

- [1] C. E. Shannon, "Communication in the presence of noise", *Proc. of the Inst. of Radio Eng.*, vol. 37, n° 1, p. 10–21, 1949.
- [2] M. Unser et J. Zérubia, "Generalized sampling : stability and performance analysis", *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 45, n° 12, p. 2941–2950, Déc. 1997.
- [3] M. Unser et A. Aldroubi, "A general sampling theory for nonideal acquisition devices", *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 42, n° 11, p. 1915–2925, Nov. 1994.
- [4] I. Djokovic et P. P. Vaidyanathan, "Generalized sampling theorems in multiresolution subspaces", *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 45, p. 583–599, 1997.
- [5] L. Condat, T. Blu, et M. Unser, "Beyond interpolation : optimal reconstruction by quasi-interpolation", accepté à l'ICIP, Gênes, Italie, Sept. 2005.
- [6] M. Unser et J. Zerubia, "A generalized sampling theory without band-limiting constraints", *IEEE Trans. Circuits and Systems II : Analog and Digital Sig. Proc.*, vol. 45, n° 8, p. 959–969, 1998.
- [7] T. Blu et M. Unser, "Quantitative Fourier analysis of approximation techniques : Part I-interpolators and projectors – and part II-wavelets", *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 47, n° 10, p. 2783–2806, 1999.
- [8] G. Strang et G. Fix, "A Fourier analysis of the finite element variational method", *Constructive Aspect of Functional Analysis*, Rome, Italie : Cremonese, 1971, p. 796–830.
- [9] T. Blu, P. Thévenaz, et M. Unser, "Moms : Maximal-order interpolation of minimal support", *IEEE Trans. Image Proc.*, vol. 10, n° 7, p. 1069–1080, Juil. 2001.
- [10] M. Unser, "Splines : A perfect fit for signal and image processing", *IEEE Signal Proc. Mag.*, vol. 16, n° 6, Nov. 1999.
- [11] T. M. Lehmann, C. Gönner, et K. Spitzer, "Survey : Interpolation methods in medical image processing", *IEEE Trans. Medical Imaging*, vol. 18, n° 11, p. 1049–1075, Nov. 1999.
- [12] E. Meijering, W. Niessen, et M. Viergever, "Quantitative evaluation of convolution-based methods for medical image interpolation", *Medical Image Anal.*, vol. 5, n° 2, p. 111–126, 2001.
- [13] M. Unser, "Quasi-orthogonality and quasi-projections", *Applied and Computational Harmonic Anal.*, vol. 3, p. 201–214, 1996.



Extrait de l'image initiale Barbara



Quasi-interpolation bilinéaire



Interpolation bilinéaire

FIG. 3 – Extrait de l'image obtenue après 13 rotations d'angle  $2\pi/13$  par interpolation et quasi-interpolation bilinéaire.

# Sur les signaux électrophysiologiques : réflexion et quelques perspectives ouvertes

L. Senhadji, A.I. Hernandez, F. Wendling, G. Carrault

Laboratoire Traitement du Signal et de l'Image INSERM, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex France.

**Résumé-** Nous disposons de signaux physiologiques riches en information sur les objets observés. Lorsque leur association est possible, ils peuvent renseigner différentes facettes du fonctionnement d'une entité structurale, d'un organe ou encore d'un système. L'exploitation des informations qu'ils véhiculent en lien avec les données cliniques à des finalités diagnostiques et thérapeutique, mais aussi pour améliorer l'état des connaissances dans les champs disciplinaires concernés, demande de fédérer des équipes de recherche autour de projet intégrant d'emblée les dimensions méthodologiques, cliniques et technologiques.

**Abstract-** *Physiological signals carry rich information on biological systems. When their association is possible, it brings useful information regarding the functioning of a structural entity, an organ or of a system. Exploitation of information which they convey, in relationship with the clinical data, for diagnosis and therapeutic purposes, but also to improve the knowledge in the involved disciplinary fields, needs to get together research teams for developing projects meeting at once methodological, clinical and technological dimensions.*

## 1. Éléments sur les signaux physiologiques

Les signaux électrophysiologiques sont de nature diverse mais leur genèse est cependant toujours sous-tendue par des mécanismes physico-chimiques complexes. Ils permettent d'accéder aux propriétés fonctionnelles de cellules, de structures, d'organes ou d'ensembles anatomiques. Leur production peut être continue, contrôlée-modulée ou non, ou intermittente (évoquée) en réponse à des stimulations. Leur nature électrique et les propriétés de conduction des tissus permettent d'envisager des dispositifs, dont les principes physiques à première vue sont simples, pour les révéler. Ils s'appuient sur des capteurs dont les dimensions et la distribution spatiale sont déterminantes. Prenons l'exemple de l'électroencéphalographie (EEG). Les électrodes (de l'ordre du  $\text{cm}^2$ ), disposées à la surface du scalp, recueillent des signaux composites résultant de l'activité cérébrale (principalement des structures néocorticales), musculaires et des mouvements oculaires. Réparties le long d'une aiguille d'une dizaine de centimètres, (de l'ordre de 0,8 mm de diamètre) implantée dans le cerveau (SEEG : Stéréo-électroencéphalographie), elles permettent d'enregistrer les activités de populations de neurones situées dans des structures cérébrales profondes. Dans le premier cas, seule une partie du signal est issue de l'organe observé, le reste provient d'activités électriques indépendantes induites par d'autres « sources ». Dans le deuxième cas, ces interférences sont atténuées et des zones plus réduites et mieux circonscrites sont scrutées. Dans les deux cas, des perturbations dues au système d'acquisition peuvent s'ajouter à l'observation. Les capteurs façonnent donc le contenu des signaux et l'évolution de leurs caractéristiques physiques sous l'effet des modalités de mesure (dérives, dépôts, ...) conditionne la qualité de l'information véhiculée.

L'information « utile » que recèle un signal électrophysiologique peut être liée à sa morphologie, à sa dynamique quasi stable ou lentement évolutive, à l'apparition de ruptures brutales ou de transitoires mais aussi aux chronologies de ces événements. En électrocardiographie (ECG) par exemple, l'élargissement du complexe QRS ou son dédoublement ou encore la présence d'une onde P non suivie d'un QRS, sont des marqueurs de

troubles de conduction électrique. Lors d'un test d'effort, l'élévation du segment ST est révélatrice d'une ischémie myocardique [1] et le degré de variation de la fréquence cardiaque à la demande de l'organisme en oxygène est un indicateur de l'état du système de régulation de l'activité cardiovasculaire (le système nerveux autonome) qui peut être utilisé comme un outil prédictif de mort subite cardiaque [2]. Les informations à chercher dans le signal sont donc intimement liées aux questions cliniques posées. Les conditions de l'examen et le type d'exploration envisagée déterminent l'information qu'il sera possible de trouver.

Les signaux électriques ne sont pas les seuls moyens d'observation disponibles. D'autres types de signaux biomédicaux, originaires d'une variété de sources (autre qu'électrique ou électromagnétique), peuvent être considérés. Par exemple, les signaux de bio-impédance comme la cardiographie d'impédance (ICG) exploitée en lien avec l'ECG notamment pour estimer, de manière non sanglante, le volume d'éjection systolique ou encore le temps d'éjection ventriculaire gauche (LVET). Les signaux bio-acoustiques, produits par les muscles, les articulations, les turbulences sanguines ou les valves, peuvent aussi être mis à contribution pour des finalités diagnostiques ou thérapeutiques. La phonocardiographie (PCG) en est certainement l'exemple le plus ancien et le plus connu. Ce signal, recueilli par un microphone ou un accéléromètre, est constitué de deux sons principaux S1 et S2. Ils sont impulsifs et corrélés à l'électromécanique cardiaque. Si les origines du deuxième son cardiaque sont parfaitement établies et que ses composantes sont exploitées à des fins d'estimation non traumatisante de la pression artérielle pulmonaire [3], la genèse du premier son cardiaque est encore à ce jour l'objet de recherches où principalement deux théories, l'une valvulaire et l'autre cardiohémique, se confrontent [4].

Nous disposons de signaux physiologiques riches en information sur les objets observés. Lorsque leur association est possible, ils peuvent renseigner différentes facettes du fonctionnement d'une entité structurale, d'un organe ou encore d'un système. Leur interprétation, par exemple pour l'aide au diagnostic, est multifactorielle et de ce fait, elle n'est pas aisée : la normalité, pour une modalité donnée, varie d'un sujet à un autre en fonction de l'âge, l'historique,

... et pour un même individu, elle est dépendante du type et du protocole d'examen (repos, stress physique, stimulations, ...). Quant aux pathologies, leurs caractéristiques, sont en plus liées à leurs stades d'évolution, les traitements médicamenteux connexes, ... Dans tous les cas, bruits et artéfacts sont des sources supplémentaires d'erreurs d'interprétation.

## 2. Une approche « basée données » des questions posées

Dès lors que les objets considérés génèrent des signaux mesurables, il est naturel d'envisager des méthodes de traitement de l'information pour répondre à des besoins d'identification, d'extraction et d'analyse des marqueurs caractéristiques de leurs (modes de) fonctionnements. Schématiquement, en prenant en compte les informations *a priori* liés au contexte et à l'environnement d'un examen donné, la démarche qui consiste à i) considérer un sous ensemble de signaux, ii) extraire des descripteurs porteurs d'information, c) déduire un diagnostic, est limitée si elle n'intègre pas plus largement l'ensemble des observations disponibles.

Cette approche, pilotée par les questions et problèmes cliniques sous-jacents, aura l'avantage de s'inscrire dans une réalité de terrain et d'être en phase avec la logique des praticiens. Mais le risque est grand de se trouver tributaire de recherches ayant des dynamiques et des finalités propres. Un pilotage basé sur les méthodes garantit une maîtrise des cadres théoriques et des limites des approches proposées mais n'assure pas pour autant l'adéquation des solutions algorithmiques avec les contraintes pratiques de leur mise en œuvre.

Pour aboutir à des résultats exploitables, la conduite de cette démarche doit associer rigueur méthodologique et connaissances physiologiques et cliniques. Elle requière un partenariat durable entre équipes de recherche scientifique et médicale pour une réelle imprégnation du savoir de l'autre et l'accroissement des connaissances mutuelles. Elle doit aussi intégrer la dimension technologique puisque ses mutations sont susceptibles de faire évoluer significativement la manière dont les problèmes se posent et d'ouvrir de nouvelles voies de recherche et d'exploration. Dans un tel environnement, où méthodologie et expérimentation se nourrissent l'un de l'autre, une prise directe avec les signaux, ou plus généralement, les observations, peut conduire à l'élaboration d'algorithmes et de méthodes appropriées à des besoins diagnostiques ou thérapeutiques. Cette démarche, essentiellement basée sur les données et les méthodes, a été une des toutes premières à être mise en œuvre.

### 2.1 Exemples

L'analyse par ordinateur du signal ECG s'est focalisée sur la surveillance des arythmies depuis le début des années 70. Les systèmes proposés ont abordé des problèmes relevant du filtrage, de la détection et de la classification et les réponses apportées ont été d'abord de type hardware puis ont évolué vers des solutions logicielles et actuellement vers des dispositifs embarqués intégrant des microcontrôleurs et des microprocesseurs. Ces évolutions technologiques ont permis

la mise sur le marché de moniteurs dédiés pour de nombreuses applications. Celles-ci comprennent, par exemple pour le volet diagnostic, les systèmes pour l'interprétation de l'ECG standard, la surveillance en Unité de Soins Intensifs (USI), l'ECG ambulatoire et les dispositifs implantables pour la stimulation et/ou la défibrillation qui allient à la fois diagnostic et thérapie.

La multitude des technologies et des usages de l'ECG ne doit cependant pas occulter les questions encore difficiles à résoudre [5].

Dans le domaine de la prise de décision sur la présence ou non des ondes élémentaires constituant le signal, la détection de l'onde P est encore aujourd'hui un problème ouvert. La difficulté provient de sa faible amplitude et de la grande variabilité de sa morphologie. La détection de l'onde P, à partir de l'électrocardiogramme de surface, est généralement menée suivant l'une des deux stratégies suivantes :

- Recherche dans une fenêtre : cette approche s'appuie sur les liens de causalité reliant les activités auriculaire et ventriculaire. La dépolarisation ventriculaire suit en effet la dépolarisation auriculaire et donc un complexe QRS est toujours précédé par une onde P. La détection de l'onde P passe alors par la détection du complexe QRS et par la recherche de l'onde P dans une fenêtre temporelle située avant l'instant d'apparition du QRS. Si cette approche conduit à des résultats intéressants dans le cas d'un rythme normal, elle se révèle inadaptée lorsque l'hypothèse de causalité entre les événements P et QRS dans le signal ECG n'est plus vérifiée. De ce fait, son intérêt est limité pour traiter des signaux ECG présentant des arythmies cardiaques avec des ondes P et/ou des battements isolés.

- Annulation de l'intervalle QRS-T : ces méthodes sont basées sur l'annulation de l'intervalle QRS-T. Elles sont une alternative aux approches précédentes pour faciliter la détection de l'onde P même dans le cas de troubles du rythme cardiaque accompagnés d'une dissociation auriculo-ventriculaire. Elles reposent sur i) la localisation et l'annulation de l'intervalle QRS-T et ii) l'analyse statistique du résidu avec comme objectif la détection des ondes P même celles non associées à des complexes QRS. La procédure d'annulation peut être directe ou adaptative. La procédure directe remplace l'intervalle QRS-T par des zéros. Il en résulte la perte de toutes les ondes P superposées à l'intervalle QRS-T. Les méthodes adaptatives cherchent à atténuer progressivement le complexe QRS. Une étude comparative des approches proposées montre que les méthodes adaptatives permettent une meilleure annulation de l'intervalle QRS-T, ce qui généralement garantit de bonnes performances pour la détection de l'onde P [6]. Cependant, toutes ces méthodes restent sensibles aux non stationnarités de l'ECG et particulièrement aux changements de battement à battement des complexes QRS. Une technique d'annulation adaptative multirésolution de l'intervalle QRS-T, récemment mise au point au laboratoire, permet de répondre partiellement à ce problème [7].

Le problème de l'interprétation automatique du rythme cardiaque a sa dynamique propre de recherche. Il couvre un champ très large allant de l'estimation de la fréquence cardiaque à la question encore ouverte de la reconnaissance automatique de séquences ou de chroniques qui signent une

arythmie. Le traitement du signal ne joue pas un rôle central dans les méthodes déployées pour aborder les aspects les plus complexes de cette problématique. Elles relèvent plutôt du champ de la reconnaissance de formes avec des techniques de décomposition syntaxique [8], de modélisation par chaînes de Markov cachées [9], de réseaux de neurones [10] et aussi des méthodes issues de l'intelligence artificielle [11]. Mais les avancées enregistrées dans le traitement du signal ECG permettent d'améliorer les performances des systèmes d'interprétation et contribuent ainsi à leur ouvrir la voie vers une mise en œuvre sur le terrain clinique.

Le monitoring du signal EEG a très tôt fait l'objet de recherches et de développements technologiques. En unité d'épileptologie clinique, comme dans le contexte des USI, les observations sont acquises sur des longues durées (plusieurs jours), mais avec un nombre de capteurs beaucoup plus important (de 19 à 128). Les évolutions technologiques des systèmes de monitoring de l'EEG ont suivi des trajectoires similaires à celles de l'ECG. En plus des problèmes génériques de filtrage, de détection, de reconnaissance et de classification, la formulation de certaines questions cliniques spécifiques fait apparaître des besoins méthodologiques, là aussi aux frontières de différents champs disciplinaires, en termes d'identification et de caractérisation, à la fois spatiale, temporelle et fréquentielle, des relations entre signaux (couplages statistiques, retards multiples, synchronisation, lien de causalité, dépendances non-linéaires, ...).

L'activité électrique cérébrale des patients épileptiques se caractérise, en dehors des crises, par des décharges neuronales synchrones transitoires. Elles se traduisent sur les capteurs SEEG par l'apparition de signaux impulsifs transitoires dit d'événements paroxystiques intercritiques (EPIC). L'analyse visuelle des enregistrements d'un très grand nombre de malades, suggère que les EPIC sont organisés spatio-temporellement et qu'ils pourraient signer, au moins partiellement, l'activité du réseau épileptogène en dehors des crises. Ce type d'observation est capital dans la mesure où l'analyse des EPIC pourrait s'articuler avec celle des crises, l'ensemble permettant d'affiner la compréhension de l'organisation de la zone épileptogène et donc de mieux guider la stratégie thérapeutique. Plusieurs études publiées ces dix années montrent qualitativement et souvent sur des jeux de données relativement modestes, que les EPIC peuvent s'organiser temporellement et spatialement. Peu d'entre elles s'intéressent, explicitement aux liens qui peuvent exister entre les EPIC et les crises, si ce n'est celle décrite dans [12], basée également sur une analyse visuelle des tracés. Ceci est lié à la difficulté de caractériser quantitativement la statistique des distributions spatiotemporelles des EPIC sur la base des données du patient. Notre approche de l'objectivation de cette « corrélation » intercritique/critique, s'appuie sur des méthodes de traitement du signal pour la détection des EPIC quasi-synchrones sur des observations vectorielles et ainsi marquer les structures cérébrales co-actives, et des approches de fouille de données pour identifier les séquences d'activation reproductibles [13].

Cette façon d'aborder les problèmes posés, permettant d'intégrer d'emblée dans sa démarche, les connaissances

médicales du domaine et d'identifier les questions méthodologiques et technologiques sous-jacentes, conduit à des avancées significatives mais s'avère cependant peu adaptée à l'élaboration d'interprétations ou d'hypothèses physiologiques spécifiques sur les mécanismes à l'origine des observations.

### 3. Vers une approche coopérative « modèles-données » des questions posées

Il ne s'agit pas de remplacer les approches précédentes mais de les compléter en abordant les problèmes d'un point de vue de la « mécanistique » qui les sous-tend. Dans cette perspective, il est fondamental de disposer de modèles physiologiques paramétriques, intégrant les connaissances anatomiques et/ou physiologiques caractéristiques d'une échelle de description donnée, mais aussi les spécificités des dispositifs physiques d'observation, qui soient capables de reproduire, de manière réaliste, le fonctionnement des objets considérés et de générer les signaux correspondants. Les objectifs visés, l'adéquation avec l'expérimentation, l'état des connaissances et les échelles de représentation auxquelles il se réfère, sont parmi les éléments importants qui guident le choix des formalismes à considérer pour ces modèles. Cette démarche de modélisation suppose des connaissances profondes en physiologie et en biologie. Elle se situe *de facto* aux interfaces de champs disciplinaires relevant de la biologie, de la physique, de la chimie et des mathématiques appliquées au sens large. Les objets qu'elle considère sont souvent interconnectés et leurs dynamiques, non linéaires et non stationnaires, peuvent exhiber des phénomènes de longue dépendance vis-à-vis de systèmes de régulation dont les centres sont distribués. Ceci suppose d'être capable de déployer des modèles dynamiquement reconfigurables en termes de niveau de description, d'échelle d'interprétation et de formalisme de représentation, ceci en lien avec les spécificités du patient. Dans ce schéma, les technologies sont plus qu'un instrument mais font partie intégrante d'un ensemble d'éléments devant évoluer simultanément et de manière coordonnée de sorte que les développements en aval puissent bénéficier de ceux en amont et vice versa.

Les travaux de modélisation que nous menons dans le domaine de la cardiologie s'inscrivent dans cette démarche. La connaissance profonde des mécanismes est transcrite dans un modèle macroscopique discret subdivisé en régions et tissus spécialisés dont la granularité peut être adaptée dynamiquement en fonction des signaux du patient. L'identification des paramètres du modèle, conduite par minimisation de fonctionnelles en s'appuyant sur une algorithmie de type évolutionnaire dans un espace contraint par les connaissances sur le système modélisé, a été menée sur l'ECG de surface [14] et intracardiaque [15]. Bien que le degré de connaissance sur le fonctionnement du cerveau ne soit pas du niveau de celui du cœur, des modélisations à divers niveaux de détail ont été entreprises [16]. En épilepsie, cet axe de recherche a conduit à l'élaboration de plusieurs modèles, physiologiquement fondés, allant du modèle du neurone isolé et de l'ensemble fini de neurones aux modèles de population de neurones [17]. Nos travaux

dans ce cadre s'articulent autour de la modélisation, de structures ou de complexes cérébraux, sous forme de populations de neurones couplées (modèle continu à base d'équations différentielles ordinaires). Les signaux générés par ces modèles reproduisent fidèlement ceux recueillis par la SEEG que ce soit en période de crise ou en phase intercritique [18]. Cette exploitation du modèle, sous l'angle problème direct, s'accompagne de recherches sur les problèmes méthodologiques que la modélisation soulève. Ils sont bien connus mais restent d'actualité. Ils s'articulent autour de questions ayant trait, par exemple, à son domaine de validité, sa complétude, sa topologie, à l'identifiabilité des paramètres du modèle, à sa stabilité et sa sensibilité aux valeurs initiales et aux conditions aux limites. Nos travaux visent la caractérisation dans le plan de phase des trajectoires des modèles et l'identification de leurs paramètres est basée sur des approches de type filtrage de Kalman non linéaire [19] et sur des techniques de résolution des équations différentielles stochastiques [20].

Comme le laisse entrevoir ces deux exemples, des scénarii sur l'installation de pathologies, sur leurs évolutions et sur la portée d'actions extérieures (thérapie, chirurgie, rééducation, ...) peuvent être envisagés. Les paramètres des modèles, l'association entre le traitement de l'information et la modélisation offre la possibilité, par exemple, d'affiner les connaissances sur les mécanismes à l'origine des observations et d'améliorer les protocoles d'acquisition, de mieux caractériser les observables, d'élaborer des algorithmes dédiés et de les guider pour cibler des signatures particulières présentes dans les données. La mise en œuvre de cette coopération « modélisation traitement de l'information » devant conduire à moyen terme à la mise à disposition, sur le terrain clinique, d'outils technologiques permettant l'amélioration de l'aide au diagnostic et à la thérapie. Cette association est un moyen d'intégrer et de mettre à jour de manière continue des savoirs dans des domaines connexes, de questionner les théories existantes, et de pointer des problèmes ouverts pouvant les alimenter. C'est aussi un outil de choix pour aborder des questions difficiles sur l'évaluation des stratégies mises en œuvre à différents niveaux allant de la pertinence des modèles et des algorithmes à l'adéquation de thérapies. Pour être féconde, cette approche oblige à construire une véritable pluridisciplinarité et des partenariats médicaux et industriels solides inscrits dans la durée. Elle requiert aussi une organisation de la recherche sous forme d'un continuum entre la recherche méthodologique et la recherche technologique et de la finaliser autour de projets fédérateurs s'attachant à répondre à des problèmes ciblés en adéquation avec les préoccupations des équipes de recherche clinique partenaires.

## Références

[1] J. S. Alpert, K. Thygesen, E. Antman, and J. P. Bassand, "Myocardial infarction redefined--a consensus document of The Joint European Society of Cardiology/American College of Cardiology Committee for the redefinition of myocardial infarction," *J Am Coll Cardiol*, vol. 36, pp. 959-69, 2000.

[2] H. V. Huikuri and T. H. Makikallio, "Heart rate variability in ischemic heart disease," *Auton Neurosci*, vol. 90, pp. 95-101, 2001.

[3] J. Xu, L. G. Durand, and P. Pibarot, "A new, simple, and accurate method for non-invasive estimation of pulmonary arterial pressure," *Heart*, vol. 88, pp. 76-80, 2002.

[4] L. G. Durand and P. Pibarot, "Digital signal processing of the phonocardiogram: review of the most recent advancements," *Crit Rev Biomed Eng*, vol. 23, pp. 163-219, 1995.

[5] Y. Goletsis, C. Papaloukas, D. I. Fotiadis, A. Likas, and L. K. Michalis, "Automated ischemic beat classification using genetic algorithms and multicriteria decision analysis," *IEEE Trans Biomed Eng*, vol. 51, pp. 1717-25, 2004.

[6] A. Hernandez and G. Carrault, "Annulation adaptative de l'activité ventriculaire," 17ème GRETSI, Vannes, France, pp. 591-594, 1999.

[7] L. Senhadji, F. Wang, A. Hernandez, and G. Carrault, "Wavelet extrema representation for QRS-T cancellation and P wave detection," *IEEE Computers in Cardiology*, Memphis, USA, pp. 37-40, 2002.

[8] G. Belforte, R. De Mori, and F. Ferraris, "A contribution to the automatic processing of electrocardiograms using syntactic methods," *IEEE Trans Biomed Eng*, vol. 26, pp. 125-36, 1979.

[9] L. Thoraval, G. Carrault, and J. J. Bellanger, "Heart signal recognition by Hidden Markov Models: the ECG case," *Methods Inf Med*, vol. 33, pp. 10-4, 1994.

[10] N. Maglaveras, T. Stamkopoulos, K. Diamantaras, C. Pappas, and M. Strintzis, "ECG pattern recognition and classification using non-linear transformations and neural networks: a review," *Int J Med Inform*, vol. 52, pp. 191-208, 1998.

[11] G. Carrault, M. O. Cordier, R. Quiniou, and F. Wang, "Temporal abstraction and inductive logic programming for arrhythmia recognition from electrocardiograms," *Artif Intell Med*, vol. 28, pp. 231-63, 2003.

[12] J. Janszky, A. Fogarasi, H. Jokeit, R. Schulz, M. Hoppe, and A. Ebner, "Spatiotemporal relationship between seizure activity and interictal spikes in temporal lobe epilepsy," *Epilepsy Res*, vol. 47, pp. 179-88, 2001.

[13] J. Bourien, J. J. Bellanger, F. Bartolomei, P. Chauvel, and F. Wendling, "Mining reproducible activation patterns in epileptic intracerebral EEG signals: application to interictal activity," *IEEE Trans Biomed Eng*, vol. 51, pp. 304-15, 2004.

[14] A. Hernandez, F. Mora, and G. Carrault, "Model based interpretation of cardiac beats by evolutionary algorithms : signal and model interaction," *Artificial Intelligence in Medecine*, vol. 26, pp. 211-235, 2002.

[15] A. Defontaine, A. Hernandez, and G. Carrault, "Modèle de connaissances pour l'interprétation d'un électrogramme," GRETSI, Louvain, Belgique, 2005.

[16] R. D. Traub and R. Dingledine, "Model of synchronized epileptiform bursts induced by high potassium in CA3 region of rat hippocampal slice. Role of spontaneous EPSPs in initiation," *J Neurophysiol*, vol. 64, pp. 1009-18, 1990.

[17] W. J. Freeman, "Linear analysis of the dynamics of neural masses," *Annu Rev Biophys Bioeng*, vol. 1, pp. 225-56, 1972.

[18] F. Wendling, F. Bartolomei, J. J. Bellanger, and P. Chauvel, "Epileptic fast activity can be explained by a model of impaired GABAergic dendritic inhibition," *Eur J Neurosci*, vol. 15, pp. 1499-508, 2002.

[19] J. J. Bellanger and F. Wendling, "Modélisation et identification de modèles neuronaux pour l'épilepsie," GRETSI, Paris, France, pp. 245-248, 2003.

[20] J. J. Bellanger, "Mesure de l'excitation et de l'inhibition dans le tissu neuronal en épilepsie par identification d'un modèle dynamique non linéaire d'activité EEG," GRETSI, Louvain, Belgique, 2005.



# Classification multivoie de signaux électromyographiques par ondelettes adaptées

Aude MAITROT, Marie-Françoise LUCAS, Christian DONCARLI

Institut de Recherche en Communication et Cybernétique de Nantes (IRCCyN)  
1, rue de la Noë, BP 92101, 44321 Nantes Cedex 03, France  
{Maitrot, Lucas, Doncarli}@irccyn.ec-nantes.fr

**Résumé** – Cet article présente une méthode de classification supervisée de signaux multivoies, basée sur l'utilisation d'ondelettes adaptées aux différentes voies. Pour une voie donnée, l'espace de représentation est construit à partir d'une décomposition dépendant d'une ondelette mère paramétrée, et il est optimisé pour minimiser la probabilité d'erreur de classification estimée sur une population d'apprentissage. La procédure de classification multivoie comporte deux étapes : classification voie par voie, puis fusion de ces décisions en tenant compte des probabilités d'erreur associées. L'application visée concerne la reconnaissance de mouvements à partir de signaux d'électromyographie enregistrés sur 8 voies. Les premiers résultats obtenus montrent le gain apporté par l'optimisation de chaque ondelette mère, puis par la procédure de fusion proposée.

**Abstract** – This paper addresses the supervised classification of multi-channel signals, and presents a method based on channel adapted wavelets. For one channel, the representation space is built from a wavelet decomposition depending on a parameterized mother wavelet, and is optimized by minimizing the misclassification error estimated on the learning set. The multi-channel classification procedure involves two steps : mono-channel classification of each channel, and combination of these decisions thanks to the associated error probabilities. Application concerns movement recognition from electromyographic signals recorded on 8 channels. First results show the benefit brought by each mother wavelet optimization, and by the proposed decision combination procedure.

## 1 Introduction

Les signaux d'électromyographie de surface (EMGs) sont générés par l'activité électrique d'un muscle lors de sa contraction et sont détectés sur la peau au moyen d'électrodes de surface. Parmi les nombreuses applications liées à l'étude de ces signaux, la plupart requièrent une phase de classification : aide au diagnostic médical, reconnaissance de mouvements pour le contrôle de prothèse, classification des troubles neuromusculaires... Nous nous intéressons ici à la classification de mouvements et nous proposons une méthode de classification supervisée à partir de signaux multivoies.

L'utilisation de plusieurs électrodes, réparties sur une zone d'intérêt, génère des signaux multivoies. Les différentes classes de signaux correspondent à différents mouvements, mettant en jeu différents groupes musculaires. Chaque voie correspond à l'enregistrement de l'activité d'un certain ensemble de fibres musculaires différent d'une voie à l'autre. La procédure de classification multivoie doit donc s'effectuer en deux temps : classer voie par voie puis fusionner ces décisions.

Concernant la nature des signaux, chaque voie est constituée par la superposition de trains de formes d'onde, de spectres souvent très similaires. Ces formes d'onde inconnues, mais caractérisant les classes, apparaissent à des instants inconnus distribués aléatoirement au sein d'une même classe. Les techniques classiques de représentation - modèles type AR ou représentations temps-fréquence (à

base de sinus) - sont peu adaptées pour ce type de signaux [1]. L'espace de représentation adéquat doit être sensible aux formes d'onde. Ainsi, les ondelettes, si on les adapte aux signaux, semblent a priori être un bon outil pour classer les EMGs. Pour rendre l'espace de représentation insensible aux instants d'apparition des formes d'onde, on utilise comme descripteurs les marginales de chaque échelle de la transformée discrète en ondelettes dyadiques (DWT : Discrete dyadic Wavelet Transform) du signal.

L'optimisation de l'espace de représentation en fonction des signaux s'effectue voie par voie. Pour chaque voie, nous utilisons une ondelette mère paramétrée que nous optimisons grâce à un critère de sélection défini pour un contexte de classification. A partir de l'ensemble d'apprentissage, nous estimons la probabilité d'erreur de classification, puis minimisons cette probabilité vis-à-vis des paramètres de l'ondelette mère.

Nous disposons donc des procédures de décision (optimisées) voie par voie accompagnées de leur probabilité d'erreur. La fusion de ces procédures fournit la règle de décision multivoie.

Ce papier est organisé de la manière suivante. Nous présentons en Section 2 l'espace de représentation paramétré ainsi que le processus de décision dans cet espace, puis son optimisation, pour une voie. Nous montrons ensuite comment pondérer les décisions issues de chaque voie, pour fournir la décision finale. Nous présentons des résultats sur signaux réels dans une quatrième partie.

## 2 Classification supervisée monovoie 2.2 Règle de décision

Dans cette section, nous traitons la voie  $x_k$  du signal comportant  $M$  voies,  $x = \{x_1[n], \dots, x_k[n], \dots, x_M[n]\}$ ,  $n = 1, \dots, N$ . Pour ne pas alourdir les notations, nous omettons l'indice  $k$  se rapportant à la voie concernée.

### 2.1 Choix d'un espace de représentation paramétré

Nous présentons la méthode utilisée pour paramétrer l'ondelette mère, dans le cadre de l'analyse multirésolution (AMR). On note  $\theta$  le vecteur des paramètres.

Dans le cas d'ondelettes orthogonales, l'ondelette mère définissant la DWT est caractérisée par le filtre échelle  $h$ . Le filtre ondelette  $g$  se déduit directement de  $h$  :  $g[n] = (-1)^n h[1-n]$ . Pour générer une AMR,  $h$  doit remplir certaines conditions. Dans le cas d'un filtre à réponse impulsionnelle finie de longueur  $L_h$ , il doit satisfaire  $L_h/2 + 1$  conditions suffisantes pour assurer l'existence et l'orthogonalité de la fonction échelle et de l'ondelette mère [2, 3]. Il reste  $L_h/2 - 1$  degrés de liberté disponibles pour construire le filtre  $h$ .

La paramétrisation de Pollen décrite dans [4] permet de construire  $h$  en fonction de  $L_h/2 - 1$  nouveaux paramètres libres. Par exemple, si  $L_h = 6$ ,  $\theta$  a 2 composantes,  $\theta = [\alpha, \beta]$ , et  $h$  s'écrit :

$$\begin{aligned} i = 0, 1 : h[i] &= 4\sqrt{2}[(1 + (-1)^i \cos \alpha + \sin \alpha)(1 - (-1)^i \cos \beta - \sin \beta) + (-1)^{i+2} \sin \beta \cos \alpha] \\ i = 2, 3 : h[i] &= 2\sqrt{2}[1 + \cos(\alpha - \beta) + (-1)^i \sin(\alpha - \beta)] \\ i = 4, 5 : h[i] &= 1/\sqrt{2} - h(i-4) - h(i-2) \end{aligned}$$

Pour des longueurs différentes de  $L_h$ , les expressions de  $h$  sont données dans [5, 6].

Les  $N$  coefficients  $\{d_x(s, u)\}_{s=1, \dots, L; u=0, \dots, N/2^s-1}$ , de la décomposition par DWT d'un signal discret  $x$  de longueur  $N$  sur  $L$  niveaux sont calculés grâce à l'algorithme de Mallat [7].

Afin de rendre l'espace de représentation insensible aux instants d'apparition des formes d'onde composant les signaux, nous utilisons comme descripteurs les marginales normalisées de chacun des niveaux de la décomposition définies par :

$$m_x(s) = \sum_{u=0}^{N/2^s-1} c_x(s, u), \quad s = 1, \dots, L \quad (1)$$

$$c_x(s, u) = \frac{|d_x(s, u)|}{\sum_{s=1}^L \sum_{u=0}^{N/2^s-1} |d_x(s, u)|} \quad (2)$$

où  $L$  est le niveau maximum de décomposition ( $L = \lceil \log_2(N) \rceil$ ). Les descripteurs représentant le signal  $x$  sont les composantes du vecteur  $M_x = [m_x(1), \dots, m_x(L)]$ . Ainsi, le vecteur  $M_x$  représente le signal par la contribution de chaque échelle calculée avec une onde analysante qui peut être adaptée aux signaux. Au lieu de permettre ce choix, une transformée de Fourier impose les sinus.

Dans cet espace de représentation, comme la normalisation (2) assure :

$$\begin{cases} m_x(s) \geq 0, & s = 1, \dots, L \\ \sum_{s=1}^L m_x(s) = 1 \end{cases}$$

nous pouvons nous servir de la distance de Kullback classiquement utilisée pour la comparaison entre distributions :

$$D(M_x, M_y) = \sum_{s=1}^L \left[ m_x(s) \log \frac{m_x(s)}{m_y(s)} + m_y(s) \log \frac{m_y(s)}{m_x(s)} \right] \quad (3)$$

Dans l'espace (1) muni de la distance (3), la règle de décision utilisée est la règle du plus proche représentant. Soit  $\{\omega_i\}_{i=1, \dots, N_c}$ , l'ensemble des  $N_c$  classes de signaux. Le représentant, noté  $R_i$ , de la classe  $\omega_i$  est le vecteur moyen des  $M_x$ , calculé sur les signaux d'apprentissage de la classe  $\omega_i$ . La décision " $x$  appartient à  $\omega_i$ " est obtenue pour  $i$  tel que :

$$i = \underset{j}{\operatorname{Argmin}} D(M_x, R_j) \quad (4)$$

### 2.3 Critère de qualité

L'optimisation de l'espace de représentation nécessite la définition d'un critère adapté à l'objectif de classification. Nous utilisons comme critère la probabilité d'erreur de classification, à minimiser. Cette probabilité,  $P_e^\theta$ , est calculée de manière empirique sur l'ensemble d'apprentissage, avec régularisation par la méthode du leave-one-out. Soit  $\Omega_i$  l'ensemble des signaux d'apprentissage de la classe  $\omega_i$ . Pour chaque  $x$  de  $\Omega_i$ , nous appliquons la règle du plus proche représentant (4), où les représentants des classes  $\omega_j, j \neq i$ , sont calculés comme en 2.1, mais où le représentant de la classe  $\omega_i$  est calculé sans prendre en compte la décomposition de  $x$ . Une erreur de classification est comptabilisée lorsque le signal  $x$  de  $\Omega_i$  est désigné comme appartenant à  $\omega_j, j \neq i$ . La probabilité d'erreur pour la classe  $\omega_i$ ,  $P_e^\theta(\omega_i)$ , est alors le nombre d'erreurs divisé par le nombre de signaux d'apprentissage de  $\Omega_i$ .

La probabilité d'erreur globale,  $P_e^\theta$ , est la moyenne des probabilités d'erreur pour chaque classe :

$$P_e^\theta = \frac{1}{N_c} \sum_{i=1}^{N_c} P_e^\theta(\omega_i) \quad (5)$$

A l'issue de cette étape, on dispose donc pour chaque voie  $x_k$  d'une ondelette optimale définie par  $\hat{\theta}_k$ , et d'une procédure de décision accompagnée de sa probabilité d'erreur calculée selon (5) et notée  $P_e^{\hat{\theta}_k}$ .

## 3 Classification supervisée multivoie

Cette section présente la méthode permettant de prendre en compte les décisions issues des  $M$  classifications monovoies. Nous utilisons le formalisme suivant. La voie  $x_k$  a fourni la décision notée  $\alpha_k$ . Les  $\alpha_k$  prennent leur valeur dans l'ensemble  $\{\Delta_j\}_{j=1, \dots, N_c}$  où  $\Delta_j$  est un vecteur de taille  $N_c$  et  $\Delta_j = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ , avec le 1 en  $j$ ème

position. Ainsi la décision  $\alpha_k$  " $x_k$  appartient à  $\omega_i$ " est notée  $\alpha_k = \Delta_i$ .

Disposant de la probabilité d'erreur de classification pour chaque classe et chaque voie  $P_e^{\hat{\theta}_k}(\omega_i)$ , on peut alors exprimer la distribution des  $\alpha_k$  conditionnellement à  $\omega_j$  :

$$p(\alpha_k/\omega_j) = 1 - P_e^{\hat{\theta}_k}(\omega_j) \quad \text{si } \alpha_k = \Delta_j \quad (6)$$

$$= P_e^{\hat{\theta}_k}(\omega_j) \quad \text{si } \alpha_k \neq \Delta_j \quad (7)$$

qui peut s'écrire :

$$p(\alpha_k/\omega_j) = (1 - P_e^{\hat{\theta}_k}(\omega_j))^{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\|\alpha_k - \Delta_j\|} (P_e^{\hat{\theta}_k}(\omega_j))^{\frac{1}{\sqrt{2}}\|\alpha_k - \Delta_j\|} \quad (8)$$

Le vecteur contenant l'ensemble des  $M$  décisions pour le signal  $x$  est noté  $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_M]$ . En supposant les voies indépendantes, on peut écrire :

$$p(\alpha/\omega_j) = \prod_{k=1}^M p(\alpha_k/\omega_j) \quad (9)$$

La règle de décision multivoie correspond alors au choix de la classe dont la probabilité conditionnelle est maximale, soit :

$$"x \text{ appartient à } \omega_i" \text{ pour } i = \underset{j}{\text{Argmax}} p(\alpha/\omega_j) \quad (10)$$

Notons que cette procédure, entièrement déterminée sur l'ensemble d'apprentissage, n'est possible que parce que l'on dispose pour chaque voie de la probabilité d'erreur.

## 4 Résultats sur signaux réels

### 4.1 Protocole expérimental et résultats

A titre illustratif, nous avons appliqué cette méthode sur des signaux réels d'électromyographie. Ces signaux ont été enregistrés au moyen de  $M = 8$  électrodes, placées autour de l'avant-bras, pour  $N_c = 6$  classes de mouvement : flexion et extension, pronation et supination du poignet, ouverture et fermeture de la main. Le filtre  $h$  optimisé est de longueur  $L_h = 6$ . Il y a donc 2 paramètres à optimiser. Techniquement, la recherche de l'optimum est faite sur une grille d'échantillonnage des paramètres.

Les signaux considérés sont de 512 points échantillonnés à 2048 Hz. La population d'apprentissage est constituée de 60 signaux par classe et on dispose d'un ensemble test distinct de 120 signaux par classe. Nous obtenons les résultats résumés dans le tableau 1. Nous avons également testé la classification en utilisant une ondelette standard (Daubechies 3, dont le filtre d'échelle est de longueur 6). Enfin, la classification spectrale correspond à la classification des spectres de puissance des signaux en utilisant la distance de Kullback. Les résultats présentés correspondent à un seul individu.

### 4.2 Discussion

Ces résultats montrent plusieurs choses. Tout d'abord, l'optimisation d'une ondelette mère par voie permet d'obtenir de meilleures performances que l'utilisation d'une ondelette standard commune à toutes les voies (d'autres

TAB. 1 – Résultats de la classification multivoie sur 6 classes, avec 60 signaux (512 points) par classe d'apprentissage et 120 par classe de test. Le critère correspond à la probabilité d'erreur de classification monovoie estimée sur l'ensemble d'apprentissage. "Tx MC" signifie le taux de mal classés calculé sur l'ensemble test.

	Filtre $h$ optimisé par voie							
Voies	1	2	3	4	5	6	7	8
Critère	0.44	0.47	0.40	0.46	0.49	0.54	0.36	0.36
Tx MC (%)	60	70	58	70	71	86	51	66
Tx MC (%)	21							
	Ondelette Daubechies 3							
Critère	0.48	0.52	0.42	0.50	0.56	0.60	0.40	0.47
Tx MC (%)	70	76	56	69	89	88	54	86
Tx MC (%)	45							
	Classification spectrale							
Tx MC (%)	48							

ondelettes standard donnent des résultats similaires). La classification basée sur une représentation spectrale des signaux est également très nettement moins performante.

Les résultats monovoies montrent qu'une seule voie ne permet pas de classer correctement un signal parmi 6 classes, ce qui semble normal. En effet, une électrode peut être placée sur une zone ne permettant pas de distinguer plusieurs des 6 mouvements effectués. En revanche, la fusion des décisions issues de chaque voie, utilisant l'information de la probabilité d'erreur, améliore grandement la capacité de classification.

Les 8 ondelettes optimales correspondant aux 8 voies sont représentées figure 1. Bien que nous n'ayons pas imposé de contrainte de régularité, 7 ondelettes sur 8 sont assez régulières. L'ondelette de la voie 7 n'est pas régulière, mais le critère estimé sur l'apprentissage (0.36), et le taux de mal classés obtenu sur la population test (51 %) pour cette voie montrent que c'est pourtant l'ondelette assurant le meilleur résultat. Ceci illustre l'intérêt de l'adaptation de l'ondelette aux signaux et au contexte : le but étant de classer, il faut choisir l'ondelette permettant de classer le mieux possible.

Enfin, la régularisation du critère par leave-one-out favorise la cohérence entre les performances prévues (critère calculé sur l'apprentissage) et celles obtenues sur la population test. Plus précisément, les taux de mal classés, en monovoie, obtenus sur l'ensemble test sont supérieurs aux prévisions représentées par les critères, quelle que soit l'ondelette utilisée (optimisée ou standard). Des écarts apparaissent déjà dans le cas d'une classification biclasse monovoie sur signaux simulés [8], il est donc d'autant plus normal de retrouver cette tendance dans le cas 6 classes sur signaux réels : la population d'apprentissage ne peut représenter de manière exhaustive toutes les caractéristiques des signaux susceptibles d'influencer la classification. Cependant, on remarque que ces écarts sont cohé-

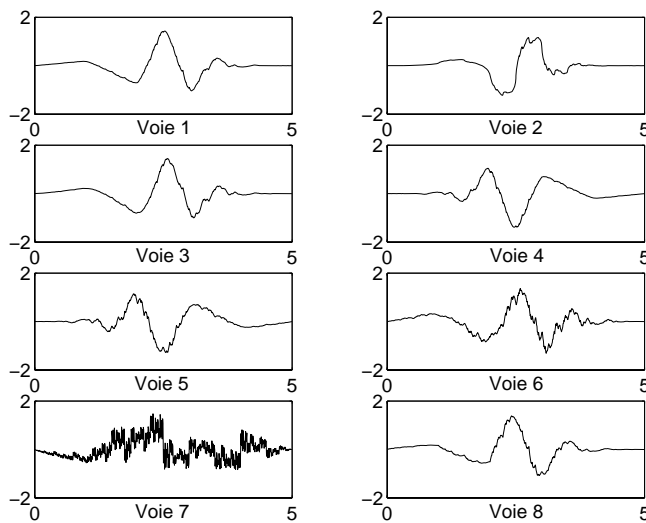


FIG. 1 – Ondelettes optimales de chaque voie, optimisées sur l'ensemble d'apprentissage par minimisation du critère de probabilité d'erreur.

rents : pour 6 voies sur 8 (1,2,5,6,7,8), les résultats obtenus sur la population test avec les ondelettes optimisées sont meilleurs que ceux obtenus avec l'ondelette standard, ce qui explique la très nette amélioration des performances du classifieur multivoie.

Remarque : dans ce papier, on n'utilise à dessein pas d'autre information que celle apportée par les marginales de la DWT, afin de montrer l'apport de l'optimisation de l'espace de représentation (*via* l'ondelette).

## 5 Conclusion

Nous avons proposé une méthode de classification supervisée de signaux multivoies, basée sur l'utilisation d'ondelettes adaptées aux différentes voies. Elle s'appuie sur l'optimisation d'une ondelette mère par voie, en minimisant un critère de probabilité d'erreur de classification, afin de construire un espace de représentation directement adapté aux signaux à traiter. La règle du plus proche représentant définit une règle de décision pour chaque voie, et le critère choisi permet de combiner ces procédures monovoies pour fournir une décision finale. Des tests sur signaux réels d'électromyographie montrent que cette optimisation, ainsi que la procédure de fusion des décisions monovoies, améliorent les performances de classification par rapport à l'utilisation d'ondelettes classiques. Cette méthode pourrait s'appliquer sur d'autres types de signaux où la représentation par décomposition en ondelettes est pertinente.

D'autres types de paramétrisation de l'ondelette sont possibles. Les combinaisons linéaires d'ondelettes ont été étudiées dans [8] et on peut également envisager une construction par lifting. Concernant la procédure de classification, l'utilisation des SVM (Support Vector Machines) permettrait d'optimiser également le classifieur lui-même.

## Références

- [1] K. Englehart, B. Hudgins, P. Parker, M. Stevenson. *Classification of the myoelectric signal using time-frequency based representations*. Med. Eng. Phys., 21, pp.431-438, 1999.
- [2] W. Lawton. *Tight frames of compactly supported affine wavelets*. Journal of Mathematical Physics, vol. 31(8), pp. 1898-1901, 1990.
- [3] W. Lawton. *Necessary and sufficient conditions for constructing orthonormal wavelet bases*. Journal of Mathematical Physics, vol. 32(6), pp. 1440-1443, 1991.
- [4] D. Pollen.  *$SU_I(2, F[z, 1/z])$  for  $F$  a subfield of  $C$* . Comm. Pure Appl. Math., vol. 45, p.485, 1990.
- [5] C. S. Burrus, R. A. Gopinath, and H. Guo. *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms - A Primer*. Prentice Hall, 1997, pp. 53-66.
- [6] I. W. Selesnick. *Maple and the parameterization of orthogonal wavelet bases*. Online, Oct. 1997. Available : <http://taco.poly.edu/selesi/theta2h/>
- [7] S. Mallat. *A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation*. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. II, no. 7, pp. 674-693, 1989.
- [8] A. Maitrot, M.F. Lucas, C. Doncarli. *Design of wavelets adapted to signals and application*. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Philadelphie, USA, mars 2005.

# Etude de la cyclostationnarité du signal Doppler sanguin pour la détection de micro-emboles : étude préliminaire

Jean-Marc GIRAULT<sup>1</sup>, Mathieu BIARD<sup>1</sup>, Denis KOUAMÉ<sup>1</sup>, Gregory SOUCHON<sup>1</sup>, Aurore BLEUZEN<sup>2</sup> et François TRANQUART<sup>2</sup>

<sup>1</sup>LUSSI-GIP Ultrasons

10 bis boulevard Tonnellé BP 3223, 37032 TOURS Cedex 1, France

<sup>2</sup>INSERM U619 - Hopital Bretonneau- CHRU TOURS

2 bis boulevard Tonnellé, 37044 TOURS Cedex 9, France

jean-marc.girault@univ-tours.fr

**Résumé** — Ce papier traite de la détection ultrasonore de micro-emboles par un système Doppler transcrânien. L'originalité de ce travail réside dans le fait que nous utilisons les propriétés cyclostationnaires du signal Doppler ultrasonore sanguin pour détecter des micro-emboles, depuis lors, masqués dans les phases de systoles-diastoles du cycle cardiaque. Dans cette étude nous évaluons théoriquement, à partir d'un modèle réaliste du signal Doppler sanguin, le spectre de corrélation. Nous proposons un paramètre informatif permettant la détection de micro-emboles et nous quantifions les performances du détecteur associé pour le comparer à un détecteur standard.

**Abstract** — This paper deals with the ultrasonic detection of micro-emboli by means of a transcranial doppler system. The originality of this work is that we use the cyclostationary properties of the blood ultrasonic Doppler signal to detect micro-embolus energetically masked in the different cardiac phases. In this study, we evaluate theoretically the correlation spectrum of a realistic blood Doppler signal model. We propose a parameter allowing the detection of masked micro-emboli and quantify the performances of this detector and compare it to a standard detector.

La détection d'emboles et plus particulièrement la détection de micro-emboles est d'une grande importance clinique pour la prévention des accidents vasculaires cérébraux.

Les techniques classiques de détection, implémentées dans le système Doppler ultrasonore transcrânien (système le plus utilisé en routine clinique), sont généralement basées sur le franchissement d'un seuil énergétique [1]. La valeur minimale de ce seuil est, la plupart du temps (voir la figure(1c)), réglée pour être juste supérieure à l'énergie du signal sanguin pendant la phase de systole (la plus énergétique). Ce choix interdit par conséquent toutes détections d'événements micro-emboliques (événements rares) dont l'énergie serait inférieure à l'énergie systolique sous peine d'obtenir une forte probabilité de fausse alarme.

A titre d'illustration, nous avons reporté sur la figure (1) les représentations temporelles de l'amplitude, de la fréquence et de l'énergie d'un signal Doppler simulé en présence de deux micro-emboles synthétiques l'un en phase de systole et l'autre en phase de diastole.

Bien que les signatures des deux micro-emboles soient de même niveau énergétique, seul le premier embole sera détecté par les techniques classiques.

En postulant maintenant que le signal Doppler sanguin est un processus cyclostationnaire, cela veut dire qu'à un instant donné du cycle cardiaque, par exemple la dias-

tole (voir la figure (1c)), la valeur de l'énergie est périodiquement et statistiquement la même. Si nous prélevons (comme indiqué sur la figure (2)) et comparons périodiquement (détection synchrone) les valeurs de l'énergie aux différents instants du cycle cardiaque, nous pouvons détecter la présence d'événements non périodiques comme les micro-emboles. Une illustration de cette détection synchrone au travers d'un paramètre appelé "énergie réorganisée" montre qu'il est possible de détecter les deux micro-emboles indépendamment de leur position dans le cycle cardiaque.

Avant de pouvoir proposer un détecteur nous devons avant tout comprendre les différentes représentations cycliques dans le cas d'un signal Doppler. Des études similaires ont été réalisées dans d'autres domaines, on pourra consulter par exemples les travaux suivants [2], [3].

## 1 CYCLOSTATIONNARITE DU SIGNAL DOPPLER SANGUIN

En vue de proposer une forme analytique du spectre de corrélation, nous devons avant tout proposer une modélisation simple mais précise du signal Doppler sanguin.

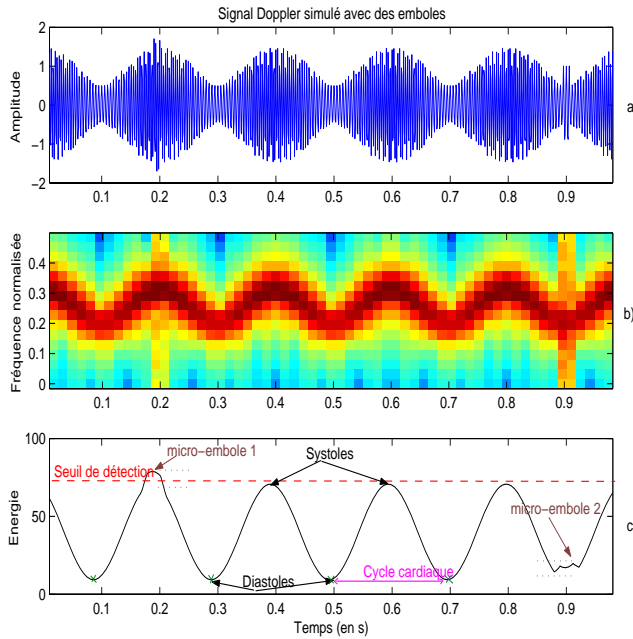


Fig.1 - Energie du signal Doppler sanguin en présence de micro-embolies.

### 1.1 Modélisation du signal Doppler sanguin

La façon la plus courante et la plus simple pour modéliser le signal Doppler sanguin est de considérer que ce dernier est un processus aléatoire filtré bande étroite. Pour fixer les ordres de grandeur, pour une artère cérébrale moyenne insonifiée : la fréquence centrale est 450 Hz, la fréquence minimum est de 250 Hz et la fréquence maximum est de 650 Hz. Ce processus stochastique est non-stationnaire : il est à la fois modulé en amplitude et en fréquence à la cadence des rythmes cardiaques. Le signal modulant est périodique. Pour simplifier les calculs nous ne considérerons que le fondamental de cette série. La fréquence instantanée, image du flux sanguin, est périodique et peut aussi être décomposée en série de Fourier. Pour simplifier les calculs nous ne considérerons que le fondamental de la décomposition. La bande passante varie elle aussi au cours du temps, toutefois nous ne le prendrons pas en compte dans notre modélisation par souci de simplification. Ainsi le signal Doppler sanguin ultrasonore modélisé s'écrit :

$$y(t) = z(t) \left( 1 + m e^{j\omega_m t} \right) e^{j(\omega_p t + \beta \sin(\omega_r t))},$$

où  $m$  est l'indice de modulation d'amplitude (AM avec porteuse),  $\beta$  est l'indice de modulation de fréquence,  $\omega_m$  est la fréquence modulante de l'enveloppe,  $\omega_p$  est la fréquence porteuse et  $\omega_r$  est la fréquence modulante FM.  $z(t)$  représente un terme de filtrage qui sera par exemple une gaussienne.

Notez que le terme de modulation de fréquence peut être exprimé en une série de Fourier comme suit :

$$e^{j(\omega_p t + \beta \sin(\omega_r t))} = \sum_{u=0}^{\infty} J_u(\beta) e^{j(\omega_p + u\omega_r)t},$$

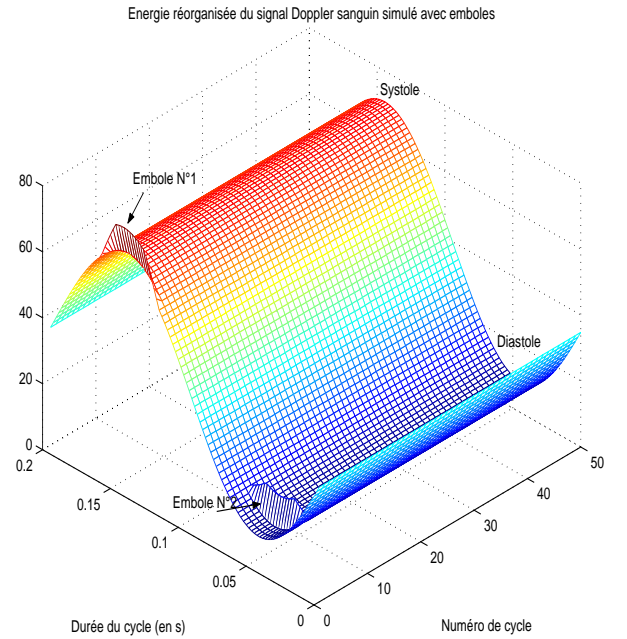


Fig.2 - Energie Réorganisée.

où  $J_u(\beta)$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $u$ .

Maintenant que nous avons précisé la forme analytique du signal Doppler sanguin, calculons son spectre de corrélation.

### 1.2 Spectre de corrélation

Le corrélation spectrale  $Sy_f^\alpha$  se définit par [4], [5] :

$$Sy_f^\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y(t+\tau/2) y^*(t-\tau/2) e^{-2\pi j \alpha t} e^{-2\pi j f \tau} d\tau dt \quad (1)$$

Après calcul, nous montrons que le spectre de corrélation s'écrit :

$$Sy_f^\alpha = \sum_{u,v} J_u(\beta) J_v(\beta) \left( Sz_{f-(f_p+(u+v)\frac{f_r}{2})}^{\alpha-(u-v)f_r} \right) \quad (2)$$

$$+ m^2 Sz_{f-(f_p+f_m+(u+v)\frac{f_r}{2})}^{\alpha-(f_m+(u-v)f_r)} \quad (3)$$

$$+ m Sz_{f-(f_p+\frac{f_m}{2}+(u+v)\frac{f_r}{2})}^{\alpha-(f_m+(u-v)f_r)} \quad (4)$$

$$+ m Sz_{f-(f_p+\frac{f_m}{2}+(u+v)\frac{f_r}{2})}^{\alpha+(f_m-(v-u)f_r)}. \quad (5)$$

$Sz(\alpha, f)$  est le spectre de corrélation du signal  $z(t)$  qui correspond à un terme de filtrage. La formule précédente précise que le spectre de corrélation du signal Doppler est un spectre de raies dont l'étendue spectrale, et donc le nombre de raies, est intimement liée à l'indice de modulation  $\beta$  (comme pour la modulation FM classique). Ce spectre de corrélation est composé de quatre termes. Le terme le plus énergétique est centré sur le couple de fréquences ( $\alpha = 0, f = f_p$ ). Le deuxième et le troisième termes sont centrés sur les couples de fréquences ( $\alpha = \pm f_m, f = f_p + f_m/2$ ). Le dernier terme, le plus faible

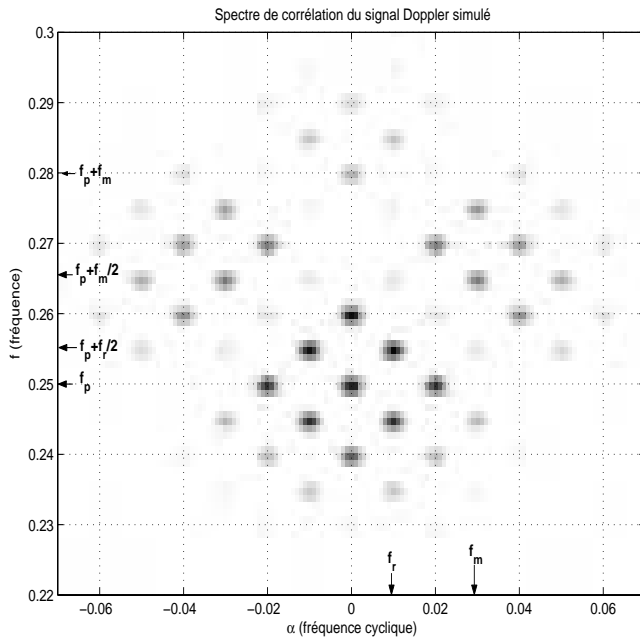


Fig.3 - Spectre de Corrélation.

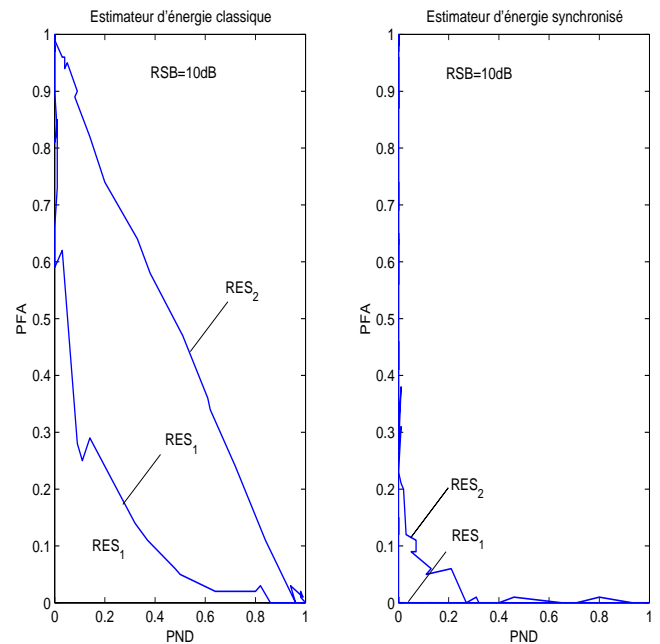
énergétiquement, est centré autour du couple fréquentiel :  $(\alpha = 0, f = f_p + f_m)$ . Toutes les autres raies, gravitant autour des quatre principaux pics, sont espacées sur l'axe des fréquences de  $f = f_r/2$  et sur l'axe des fréquences cycliques de  $\alpha = f_r$ .

A titre d'illustration, nous avons reporté sur la figure (3) le spectre de corrélation du signal Doppler simulé pour les valeurs suivantes :  $f_p = 0.25$ ,  $f_m = 0.03$ ,  $f_r = 0.01$ ,  $f_e = 1$ ,  $m = 0.5$  et  $\beta = 5$ . La durée du signal est de 1 seconde (1000 points).

Par manque de place, nous ne montrerons pas les calculs et les simulations des spectres de corrélations en présence d'un micro-embole. En revanche nous indiquons que les spectres de corrélation sont très semblables en ce qui concerne la position des pics de corrélation, par contre les niveaux de puissance de pics diffèrent.

Cette remarque nous a guidés naturellement à penser que la puissance moyenne des spectres de corrélation des signaux Doppler, en présence ou non d'un micro-embole, pourrait être un paramètre informatif pertinent à partir duquel pourrait être effectué les tests de détection. Une autre façon, plus simple et moins coûteuse en temps de calcul est de calculer la différence synchronisée d'énergie (c'est-à-dire périodiquement).

Nous avons procédé à un ensemble de simulations dont nous présentons les résultats sur des courbes COR pour deux estimateurs différents. Le premier est un estimateur d'énergie classique. Nous calculons l'énergie sur une fenêtre de Hanning de 128 points avec un recouvrement de 60 points (meilleur compromis). Le second estimateur est basé sur le calcul de la différence synchronisée de l'énergie (c'est-à-dire périodiquement) avec la même fenêtre et recouvrement. Le signal Doppler (1000 points) considéré est un signal modulé en amplitude avec porteuse (indice de modulation égale à 0.5), la fréquence modulante est  $f_m = 0.01$ , la fréquence de la porteuse est  $f_p = 0.1$ , la fréquence d'échantillonnage est  $f_e = 1$ . L'embole (la sur-

Fig.4 - Courbes COR pour différents emboles ( $RES_1$  et  $RES_2$ ,  $RES_1 > RES_2$ ).

intensité) est placé à l'instant 451 pour une durée de 22 échantillons. Deux tailles d'emboles sont générées, la plus grande correspond à un niveau  $RES_1$  et l'autre, la plus petite, à un niveau  $RES_2$ . Le  $RES_1$  dépasse d'environ 2dB le niveau le plus énergétique du signal modulé tandis que le  $RES_2$  est inférieur de 1 dB au niveau le plus énergétique du signal modulé (l'embole est masqué par l'énergie systolique). La statistique a été établie sur 100 signaux pour chaque niveau de seuil. Et nous avons testé 300 niveaux de seuil.

Les courbes COR présentées en figure (4) montrent la supériorité de l'estimateur cyclique sur l'estimateur standard. Lorsque la signature embolique dépasse le niveau le plus énergétique, les deux estimateurs possèdent des probabilités de non détection (PND) et des probabilités de fausses alarmes (PFA) intéressantes, le détecteur synchronisé affichant quant même de bien meilleures performances. Lorsque la signature embolique est masquée par le niveau le plus énergétique du signal Doppler, l'estimateur standard affiche de très mauvaises performances alors que le détecteur synchronisé procure toujours de bonnes performances.

A l'aide d'un détecteur synchronisé, il est maintenant possible de détecter des micro-emboles, encore "indétectables" avec les techniques classiques, avec une faible probabilité de non-détection et une faible probabilité de fausse alarme.

### 1.3 CONCLUSIONS

Les résultats préliminaires sur la détection de micro-emboles, à l'aide de techniques basées sur les propriétés de cyclostationnarité, sont intéressants et semblent très

prometteurs. Toutefois cette étude doit être approfondie par une étude statistique plus importante et doit conduire à la proposition d'un détecteur précis et robuste dans le cas de signaux réels.

## Références

- [1] J.M. Girault, D. Kouamé, A. Ouahabi et F.Patat. *Micro-embolic detection : an ultrasound Doppler signal processing view point*. IEEE Trans. Biomed. Eng., 47, 1431–1439, 2000.
- [2] C. Capdessus, M. Sidahmed et J.L. Lacoume. *Cyclostationary processes : application in gear faults early diagnosis*. Mechanical systems and signal processing, 371–385, 2000.
- [3] , J. Antoni, J. Daniere et F. Guillet. *Effective vibration analysis of IC engines using cyclostationarity. Part 1 - A methodology for condition monitoring*, Journal of sound and vibration, 815–837, 2002.
- [4] W.A. Gardner. *Statistical Spectral Analysis : A non probabilistic theory*. Englewood Cliffs NJ - Prentice-Hall, 1987.
- [5] W.A. Gardner. *Exploitation of Spectral Redundancy in Cyclostationary Signals*. IEEE Signal Processing Magazine, 14–36, 1991.



# Analyse des signaux pour un dispositif de mesure et de stimulation du système nerveux central

C. MOULIN<sup>1</sup>, D. BARBIER<sup>6</sup>, G. CHARVET<sup>1</sup>, R. GUILLEMAUD<sup>1</sup>, M. ANTONAKIOS<sup>1</sup>, H. FANET<sup>1</sup>, B. YVERT<sup>2</sup>, S. JOUCLA<sup>2</sup>, P. MEYRAND<sup>2</sup>, L. ROUSSEAU<sup>3</sup>, V. PERRAIS<sup>3</sup>, B. MERCIER<sup>3</sup>, F. GOY<sup>4</sup>, S. BENOIT<sup>4</sup>, S. SPIRKOVITCH<sup>5</sup>

<sup>1</sup>CEA LETI, Département pour les Micro Technologies pour la Biologie et la Santé, 17 r. des martyrs, 38054 Grenoble Cedex 9  
celine.moulin@cea.fr

<sup>2</sup>Laboratoire de Neurobiologie des Réseaux, CNRS UMR5816 Bâtiment B2 av. des facultés, 33405 Talence Cedex  
b.yvert@lnr.u-bordeaux1.fr

<sup>3</sup>Groupe ESIEE, 2 Bd. Blaise Pascal Cité Descartes, 93162 Noisy Le Grand  
mercierb@esiee.fr

<sup>4</sup>Bio-Logic, 1 r. Europe, 38640 Claix  
francois.goy@bio-logic.fr

<sup>5</sup>MEMSCAP S.A., parc des fontaines, 38 926 Crolles Cedex  
serge.spirkovitch@memscap.com

<sup>6</sup>INSA de Lyon, Laboratoire Physique de la Matière, Bâtiment Blaise Pascal, 69621 Villeurbanne Cedex  
daniel.barbier@insa-lyon.fr

**Résumé** – Un des enjeux actuels en Neurosciences est de pouvoir enregistrer simultanément les activités d'un grand nombre de cellules au sein de grands réseaux de neurones, et de pouvoir stimuler de manière dynamique ces réseaux afin d'en contrôler les activités. Le but du projet Neurocom est de réaliser un système multiélectrode haute densité intégré sur silicium, permettant d'enregistrer et de stimuler de grands réseaux de neurones in vitro. Ce dispositif sera constitué d'une microstructure d'électrodes stérilisable hybridée sur un circuit analogique intégré (préamplification, filtrage, multiplexage, stimulation), lui-même interfacé via une carte numérique de commande et acquisition reliée à un PC. Afin de pouvoir mieux appréhender les phénomènes bioélectriques et électrochimiques à l'interface capteur et donc mieux spécifier le cahier des charges et l'architecture du système, la maquette de test NEUROCOM1 a été conçue en électronique discrète et est actuellement utilisée pour conduire différents tests.

**Abstract** – One of the current issues in Neurosciences is to be able to simultaneously record the activities of a large number of cells within large-area networks of neurons, and to be able to stimulate in a dynamic way these networks in order to control their activities. The goal of the Neurocom project is to develop a high density microelectrode array system integrated on silicon, to record and stimulate wide-area networks of living (in vitro) neurons. This device will consist of an electrode microstructure connected to an integrated analog circuit (preamplification, filtering, multiplexing, stimulation) interfaced via a digital board connected to a PC for acquisition and control. In order to better apprehend the bioelectric and electrochemical phenomena occurring at the sensor interface, and thus to better specify the architecture of the system, the NEUROCOM1 prototype was created using discrete electronics and is currently being used to lead various tests.

## 1. Introduction

L'analyse des activités du système nerveux repose actuellement principalement sur deux grands champs d'exploration très fertiles : d'un côté l'électrophysiologie cellulaire (ex. : patch clamp [1], [2]), et d'un autre les techniques d'imagerie fonctionnelle (ex. : IRMf, EEG...). A l'heure actuelle, un des enjeux des neurosciences est de parvenir à combiner ces deux niveaux d'analyse en enregistrant un réseau de neurones biologiques dans sa globalité, tout en préservant l'accès simultané à l'information cellulaire [3], [4]. La maîtrise des procédés de microfabrication développés pour l'industrie de la microélectronique a permis aux matrices de micro électrodes ou MEAs (Micro Electrode Array) de se développer depuis maintenant une trentaine d'années pour proposer une direction afin de traiter cette problématique [5]. Les systèmes commerciaux actuels (MCS, Panasonic...) sont basés sur une électronique d'acquisition et/ou de stimulation discrète,

s'interfaçant avec des MEAs d'une centaine de microélectrodes au maximum, ce qui s'avère insuffisant pour obtenir une cartographie de l'activité bioélectrique de la totalité de l'échantillon biologique (ex. : moelle épinière de souris : dimensions 1mm \* 1cm ou plus).

## 2. Le projet NEUROCOM

Le projet Neurocom, financé en partie par le ministère de la recherche, a pour vocation de construire un système d'étude du système nerveux in vitro (ex vivo), à partir d'une MEA de plusieurs centaines de microélectrodes au pas de 100 µm. Le projet comprend plusieurs axes de développement : la MEA elle-même qui constitue l'interface avec le milieu biologique, un ASIC analogique (Application Specific Integrated Circuit) permettant la stimulation et l'enregistrement du tissu nerveux en parallèle sur toutes les microélectrodes, une carte numérique d'acquisition,

commande et traitement, ainsi qu'une interface homme-machine (IHM) intégrant des outils logiciels de visualisation et de traitement des données adaptée aux besoins des biologistes.

Le système Neurocom est composé de 4 modules principaux (FIG. 1) :

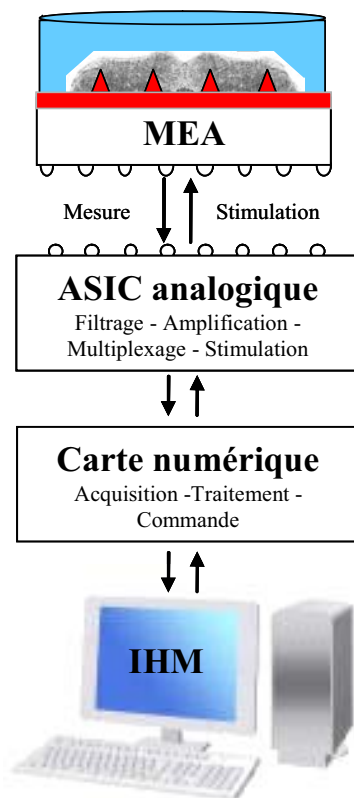


FIG. 1 : système Neurocom

**La MEA** constitue à la fois un capteur et un stimulateur électrochimique de la bioélectricité émanant des réseaux de neurones. Elle est actuellement en cours de développement à l'ESIEE en collaboration avec MEMSCAP, et doit comporter à terme un millier de microélectrodes microstructurées en platine, de dimensions de l'ordre de la dizaine de microns, avec un pas d'une centaine de microns.

**L'ASIC analogique** développé par le CEA-LETI, a pour but d'acquérir (amplification, filtrage), et multiplexer les signaux biologiques de l'ordre de la dizaine de  $\mu V$  au mV (potentiels d'action (PAs) et champ de potentiels locaux (LFPs)), et de générer les stimuli en courant ou tension adéquats au plus près de la MEA pour éviter les problèmes dus aux couplages, qui, ici, sont accentués par la forte valeur des impédances des microélectrodes.

**La carte numérique** convertit les signaux analogiques transmis par l'ASIC, en signaux numériques. Cette carte permet de plus de gérer les signaux de commande logiques de l'ASIC, et de générer des signaux de stimulation analogique à transférer vers l'ASIC.

**L'IHM-PC** permettra de visualiser tout ou partie des signaux, avec des fonctions de traitement des signaux en ligne pour offrir une visualisation de la cartographie des signaux biologiques adaptée aux besoins des biologistes.

Un montage mécanique spécifique a également été créé pour permettre la connexion entre la MEA et le système de

mesure, et pour assurer une protection électromagnétique adaptée.

### 3. Compréhension des signaux en vue d'une intégration électronique

#### 3.1 Problématique

Une des difficultés majeures des mesures et stimulations avec des MEAs, réside en la complexité de l'interface capteur et stimulateur bio-électrochimique [6]. En effet, l'interface électrochimique que constituent les microélectrodes métalliques plongées dans le liquide physiologique, est modifiée par son environnement (pH, T, matériaux des microélectrodes, composition de l'électrolyte...) [7], [8]. Les systèmes commerciaux actuels proposent des solutions de traitement du signal analogique réglables pour pallier les variations du fonctionnement du capteur, ce qui apparaît difficilement réalisable sur l'ASIC compte tenu du nombre de voies à traiter en parallèle. Dans le cadre du projet Neurocom, il devient donc important de mieux comprendre et maîtriser les signaux électriques mis en jeu en mesure et stimulation de tissus vivants comme des réseaux de neurones. Or ces informations ne sont pas disponibles dans la littérature et/ou ne correspondent pas à notre cas d'étude ; nous avons donc été amenés à développer un dispositif expérimental dédié : la maquette de test Neurocom1, et à réaliser des campagnes d'expérimentations avec les biologistes.

#### 3.2 La maquette de test Neurocom1

Les objectifs de cette maquette sont de permettre de tester les différentes fonctionnalités à implémenter sur l'ASIC et de permettre d'enregistrer les signaux biologiques et électrochimiques afin d'analyser leurs caractéristiques, de comprendre leur origine et les paramètres qui influent sur leur valeur.

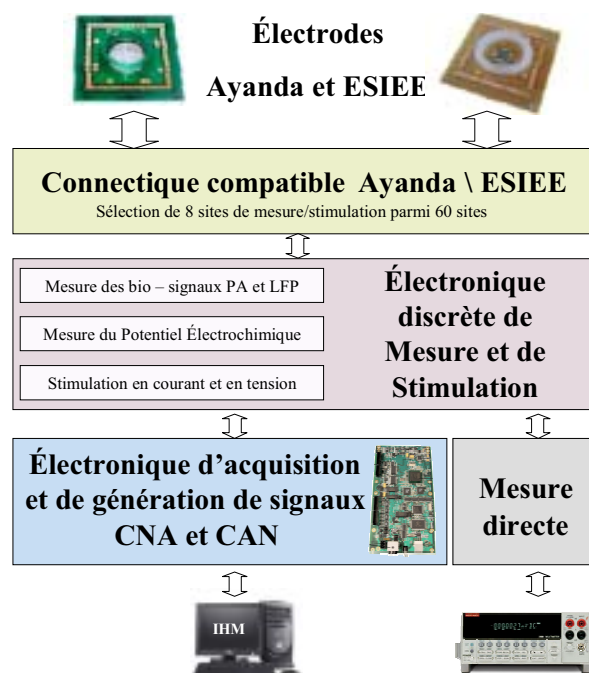


FIG. 2 : synoptique de la maquette Neurocom1

Ce prototype est constitué (FIG. 2) :

- d'une **carte analogique de test** développée au CEA-LETI permettant de s'interfacer avec des MEAs commerciales de type MCS et Ayanda et également avec des MEAs développées par le groupe ESIEE ;
- d'une **carte numérique** Data Translation pour l'acquisition, le traitement des données et la commande de la carte analogique ;
- et d'un **logiciel** permettant le pilotage de la carte numérique et l'acquisition des signaux.

La carte analogique est constituée de 11 voies de test qui permettront d'enregistrer des potentiels électrochimiques, les signaux biologiques, de stimuler en courant ou en tension avec possibilité de passer de l'enregistrement à la stimulation avec des commutateurs CMOS, et également de configurer l'électronique des électrodes de référence (FIG. 3).

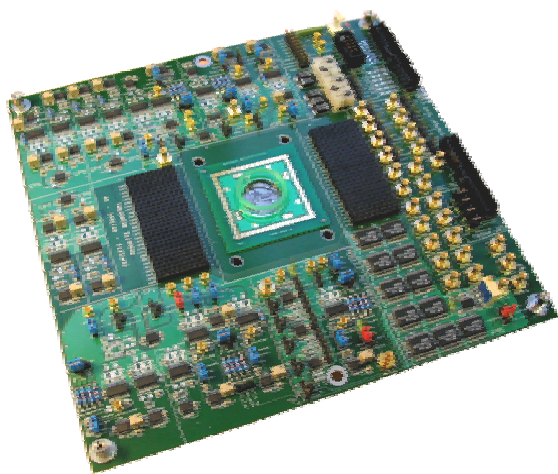


FIG. 3 : carte analogique de mesure et stimulation

## 4. La campagne d'expérimentation

La campagne d'expérimentation s'effectue sur deux fronts. Un premier type de test concerne la compréhension des phénomènes physiques à l'interface capteur, un deuxième l'acquisition d'informations sur les signaux bioélectriques.

### 4.1 Tests « physiques »

Les tests « physiques » sont effectués dans des conditions « idéales », c'est-à-dire que l'on n'a pas de perturbation biologique, que les milieux électrolytiques employés sont simples (ex. : PBS (Phosphate Buffered Saline)), que les mesures sont effectuées à température ambiante dans des conditions électrochimiques stationnaires (à savoir aucun mouvement de fluide de convection, ou lié à de la fluidique). Voici une liste des tests principaux :

- Caractérisation des impédances des microélectrodes et de leur modification en fonction : de la fréquence et de l'amplitude du signal imposé, du type de microélectrodes étudiées (matériau et surface), et de l'électrolyte utilisé (composition ionique...);
- Etude des limites de réversibilité (voltamétrie cyclique) des électrodes ;
- Etude des caractéristiques (fréquences, amplitudes) du bruit et du potentiel électrochimique en fonction du type

de référence utilisé (matériau, connexion électrique, forme, surface), du type d'électrolyte, et des microélectrodes employées.

Certains tests tels que la voltamétrie cyclique ou les mesures d'impédances ont été conduits à l'aide d'appareils commerciaux bas courants adaptés (VMP2/Z, et BiStat de Bio-Logic).

### 4.2 Tests « biologiques »

Les tests « biologiques » sont réalisés dans des conditions expérimentales réelles permettant au tissu nerveux de rester vivant [9]. Le milieu électrolytique peut donc être plus complexe (présence de protéines, de gaz dissout...) et peut être amené à changer au cours de l'expérimentation pour « faire réagir » le tissu nerveux. Il y a présence de tissu nerveux au contact des microélectrodes et éventuellement on peut avoir une couche de « coating » entre le tissu et les microélectrodes pour permettre de faire adhérer le tissu aux microélectrodes. Il peut y avoir circulation de fluide dans la cuve de la MEA. La température peut être amenée à changer au cours de l'enregistrement, et sera la plupart du temps différente de la température ambiante. Les buts de ces tests sont donc de :

- Déterminer les caractéristiques en terme de fréquence et d'amplitude des signaux bioélectriques en fonction du type de tissu nerveux (et pour des conditions de test données) ;
- Déterminer dans quelle mesure les conditions expérimentales font varier les mesures physiques (potentiel électrochimique, impédances...) mesurées dans des conditions « idéales ».

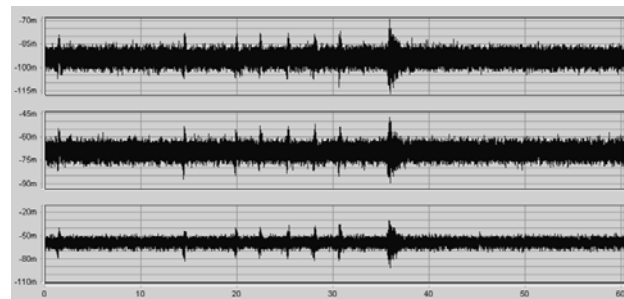


FIG. 4 : exemple de signaux d'activités spontanées enregistrées dans un bulbe rachidien avec la maquette

## 5. Résultats préliminaires

La maquette Neurocom 1 nous a permis d'enregistrer l'activité bioélectrique (PAs et LFPs) (FIG. 4) de neurones de moelle épinière de souris mises en culture avec un bruit électronique équivalent aux systèmes commerciaux actuels (environ 1  $\mu$ Vrms). Nous avons donc pu valider la chaîne de mesure à intégrer sur l'ASIC et vérifier les caractéristiques des biosignaux (amplitudes et fréquences). Le système de lecture est très sensible aux bruits ; en effet, nous avons pu observer des bruits d'origine électromagnétique tels que le 50 Hz ou induits par des éléments actifs de la maquette tels qu'un filtre à capacités commutées, ou encore les circuits de stimulation. Nous avons également pu nous rendre compte de la sensibilité du système aux vibrations mécaniques de

l'environnement de travail (activité humaine, incubateur, système de perfusion). Ces observations vont nous permettre de spécifier le système Neurocom aussi bien du point de vue de l'environnement expérimental que de l'électronique et de la MEA, afin de le rendre moins sensible à ces perturbations.

- De même nous avons vérifié le principe de la chaîne de stimulation en générant divers stimuli en courant biphasiques et monophasiques. Nous avons pu nous rendre compte lors des expérimentations de l'importance de bien contrôler les stimuli envoyés. En effet on a pu observer des réactions irréversibles qui, à plus ou moins long terme, endommagent à la fois les microélectrodes et le tissu nerveux [7].

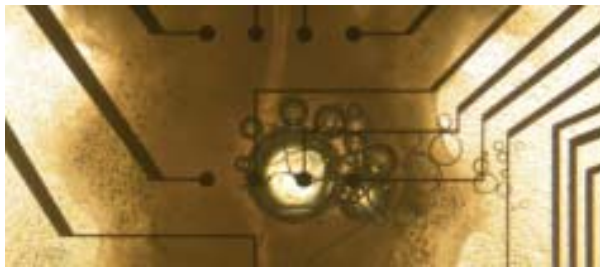


FIG. 5 : dégagement d' $O_2$  dû à un courant de fuite continu de 500 nA appliqué pendant 30 min sur une moelle épinière de souris de 12 jours embryonnaires mise en culture pendant 7 jours sur une matrice Ayanda au LNR

Enfin la maquette ainsi que le BiStat de Bio-Logic ont permis de donner des informations sur les MEAs :

- spectroscopie d'impédance (FIG. 6) ;
- voltamétrie cyclique (limites de réversibilités) ;
- mesure des potentiels électrochimiques et des bruits induits par l'environnement capteur.

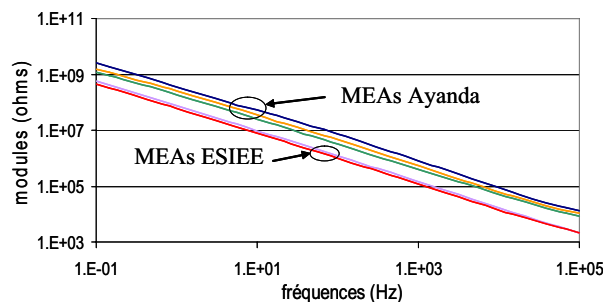


FIG. 6 : impédances moyennes des microélectrodes de différentes MEAs en platine d'Ayanda et développées dans le cadre de Neurocom par le groupe ESIEE

## 6. Conclusion

Le projet Neurocom, avec le développement d'un système de matrice de micro-électrodes à haute densité avec une électronique intégrée, a mis en évidence la nécessité d'améliorer la compréhension et la connaissance des signaux électriques mis en jeu pour des applications dans le domaine de la biologie. Cette connaissance n'est disponible que de façon partielle dans la littérature en particulier parce que la problématique est multidisciplinaire (biologie, électrochimie, électronique, micro-technologie), et à une échelle nouvelle (micro-électrode).

Une carte électronique spécifique a été développée de façon à tester des configurations multiples et avec un accès à tous les signaux importants à la fois pour les enregistrements et la stimulation de tissus. L'étude expérimentale nous a permis ensuite de caractériser les signaux et d'identifier les facteurs importants sur la qualité des mesures. Les connaissances ainsi acquises vont être utilisées à différents niveaux :

- Elles permettront de mieux appréhender les phénomènes électrochimiques et bioélectriques à l'interface afin de pouvoir déterminer des configurations d'expérimentation préférentielles (ex. : choix de la référence...) ou donner des indications sur la MEA à développer (matériaux, dimensions) ;
- Elles vont permettre de déterminer un cahier des charges pour l'ASIC (type de stimulation, caractéristiques des signaux : dynamique d'entrée, impédance d'entrée, amplification, bande passante...) ;
- Des architectures intégrables innovantes (adaptées) pourront être développées en fonction des caractéristiques des signaux (ex. : circuit de suppression de la composante électrochimique).

Enfin ces connaissances vont permettre de développer des dispositifs où les signaux d'enregistrement sont mieux maîtrisés et donc plus reproductibles. Cette évolution permettra d'envisager des développements futurs pour l'analyse automatique de signaux en connexion avec le système nerveux central (tri de spike par exemple [10]) pour des recherches en biologie mais aussi en vue de développements d'implants.

## Références

- [1] M. Joffre. *Electrophysiology moléculaire : La technique du patch clamp*. vol. 1, Hermann, 2001.
- [2] J. T. Fulton. *Processes in biological vision, The analysis of individual neural circuits*. ch. 10.8.2, 2004.
- [3] G. Buzsaki. *Large-scale recording of neuronal ensembles*. *Nature Neuroscience*, vol. 7, pp. 446-451, 2004.
- [4] M. Chicurel. *Windows on the brain*. *Nature*, vol. 412, pp. 266-268, 2001.
- [5] L. Bousse. *Whole cell biosensors*. *TRANSDUCERS '95 - EUROSENSORS IX*, pp. 483-486, 1995.
- [6] G. T. Kovacs. *Electronic sensors with living cellular components*. *Proceeding of the IEEE*, vol. 91, pp. 915-929, 2003.
- [7] E. Margalit et al.. *Retinal prosthesis for the blind*. *Survey of ophthalmology*. vol. 47, pp. 335-356, 2002.
- [8] W. L. Rutten. *Selective electrical interfaces with the nervous system*. *Annual Review of Biomedical Engineering*, vol. 4, pp. 407-452, 2002.
- [9] Yvert B, et al.. *Multiple Spontaneous Rhythmic Activity Patterns Generated by the Embryonic Mouse Spinal Cord Occur Within a Specific Developmental Time Window*. *J. Neurophysiol.*, vol. 91, pp. 2101-2109, 2004.
- [10] C. Pouzat et al.. *Improved spike-sorting by modeling firing statistics and burst-dependent spike amplitude attenuation: a Markov chain Monte Carlo approach*. *J. Neurophysiol.*, vol. 6, pp. 2910-2928, 2004.

# Détection de familles d'astéroïdes: un problème de segmentation non supervisée

Olivier J.J. MICHEL, Philippe BENDJOYA, Pablo ROJO GUERRA

LUAN, UMR 6525-CNRS

Université de Nice-Sophia Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice cedex 2, France

olivier.michel@univ-nice.fr, philippe.bendjoya@univ-nice.fr

**Résumé** – Nous présentons une méthode de segmentation de données qui utilise les étapes de construction d'un graphe de représentation minimal par l'algorithme de Prim. Les relations entre l'entropie de la distribution des sommets du graphe et la longueur de ce dernier permettent de proposer un critère entropique de détermination du seuil nécessaire à la détection des familles d'objets. Nous présentons une application à la détermination de famille d'astéroïdes à partir de données physiques.

**Abstract** – An unsupervised clustering method is presented. It makes use of intermediate steps of the Prim algorithm for the minimal spanning tree construction. The links exhibited between the entropy of the vertices of the graph and the entropy of their distribution is reminded. A entropic criterion for setting a new detection threshold is presented.

## 1 Introduction

### 1.1 Contexte astrophysique

Une famille d'astéroïdes est un groupe d'objets issus de la fragmentation d'un astéroïde "père" lors d'une collision hyper énergétique avec un autre astéroïde. L'identification de ces familles et leur étude constituent un enjeu important pour la compréhension de l'évolution collisionnelle des astéroïdes dans la ceinture principale (typiquement entre Mars et Jupiter). L'ensemble des objets d'une même famille forme une sorte de puzzle 3D dont la compréhension contient des informations sur la structure interne de l'astéroïde père, la physique de la fragmentation, la formation de nuages proto-planétaires...

Les familles ainsi définies ne sont cependant pas toutes identifiables. Un choc trop violent peut pulvériser l'astéroïde père en une myriade d'objets très petits non observables dont les caractéristiques dynamiques (vitesse d'éjection, paramètres orbitaux) sont trop largement dispersées. Dans le cas de familles a priori facilement observables, les éléments orbitaux des fragments issus du choc sont perturbés au cours du temps par des perturbations du champ gravitationnel perçu (présence des planètes, essentiellement Jupiter); ces derniers amplifient les différences initiales au point de ne pas permettre de reconstruire l'histoire commune de ces fragments. Ces familles ne peuvent donc être détectées que dans un espace de paramètres constituant des 'pseudo-invariants' du mouvement. Ces "éléments propres", notés  $(a, e, i)$ <sup>1</sup> peuvent être calculés pour chaque objet observé. Le problème de détection des familles d'astéroïdes se résume alors à un problème de segmentation de zones de l'espace 3D  $(a, e, i)$ ; un aspect spécifique à ce problème tient aussi à la nature non euclidienne de la distance proposée (à partir d'arguments physiques) entre objets, et qui sous-tend la mesure par rapport à laquelle il faut chercher des sur-densités.

Cette métrique, développée depuis le début des années 1990 [1, 15] est aujourd'hui très largement acceptée.

### 1.2 Le Problème de segmentation

La détermination de familles "naturelles" au sens de la proximité ou du partage de caractéristiques communes implique les tâches consécutives de détection d'existence d'un groupe pertinent, puis de décision (quels en sont les membres?). Ces deux tâches sont largement compliquées par la présence d'objets "parasites" dont les caractéristiques peuvent être très proches de celles des objets qui nous intéressent. De plus, aucune information n'est ici a priori disponible sur le nombre de familles à détecter, pas davantage que sur leur taille, ou la séparation (dans l'espace  $(a, e, i)$ ) attendue entre les familles. Les techniques de segmentation usuelles (analyse en composantes principales, factorielle des correspondances, méthodes "K-Means", algorithme de Forgy-Jancey...) [9] ne peuvent apporter de réponse satisfaisante dans ce contexte. De plus, ces approches concentrées sur le rassemblement de points autour d'un centre ne permettent pas d'aborder les situations pour lesquelles les familles recherchées peuvent avoir des formes compliquées, non forcément convexes.

Divers travaux se sont attachés à apporter des solutions à ce problème, s'appuyant sur des algorithmes de classification hiérarchique [16], ou de détection de sur-densité mettant en jeux plusieurs échelles de résolution [2]. Ces approches sont coûteuses en temps de calcul et nécessitent la définition de nombreux paramètres de réglages. Nous proposons une alternative, exploitant les propriétés des graphes de représentation minimaux (MST pour *Minimal Spanning Tree*), l'existence d'algorithmes de calculs efficaces (en  $O(n \log n)$ ) et leurs propriétés asymptotiques, qui en font des estimateurs efficaces de l'entropie de la distributions des points reliés par le MST [7, 8]. Cette dernière propriété est conditionnée par l'utilisation d'une me-

1.  $a$  est le demi grand axe de l'orbite elliptique,  $e$  son excentricité, et  $i$  l'angle d'inclinaison par rapport au plan de l'écliptique.

sure de distance asymptotiquement euclidienne (dans la limite des petites distances); une expression alternative de distance est donc proposée à partir d'arguments relevant d'analyse dimensionnelle; ces points sont l'objet de la section suivante.

## 2 MST et entropie de Rényi

### 2.1 Entropie de Rényi

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats établis dans [7, 11, 8, 12], et utilisés dans la suite. L'entropie de Rényi d'ordre  $\alpha$  de la loi de probabilité  $P$  complète est définie par :

$$H_\alpha(P) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left( \sum_{i=1}^n p_i^\alpha \right) \quad (1)$$

La propriété de convexité de  $H_\alpha$  n'est obtenue que pour  $0 < \alpha < 1$ . Seul ce dernier cas sera considéré dans la suite. Cette définition se généralise sans difficulté au cas de fonctions de densité de probabilité continues  $\lambda$ :

$$H_\alpha(\lambda) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left( \int \lambda^\alpha d\mu \right) \quad (2)$$

où  $\mu$  est la mesure.

### 2.2 MST, estimation de $H_\alpha$

Soit  $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$  une réalisation de  $n$  vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribués où  $X_i \in A_0 \subset \mathbb{R}^d$  suit une distribution notée  $P$ , de densité de Lebesgue  $\lambda$ . Un arbre de représentation est un graphe  $\mathcal{T}$  non dirigé, défini par un ensemble de sommets  $\mathcal{X}$  et un ensemble de liens  $(X_i, X_j)$  de mesure  $d_{i,j}$ , connectant les sommets entre eux. La longueur totale d'ordre  $\gamma$  du graphe est définie par

$$L_{n,\gamma} = \sum_{d_{i,j} \in \mathcal{T}} |d_{i,j}|^\gamma$$

Le graphe acyclique minimal de représentation (MST) est parmi tous les graphes totalement connectés, le graphe  $\mathcal{T}^*$  dont la longueur  $L_{n,\gamma}$  est minimale.  $\mathcal{T}^*$  peut être calculé de façon exacte à l'aide d'algorithmes dont le coût varie en  $n \log n$ .

Dans [7, 8] nous avons établi que la quantité

$$\hat{H}_\alpha(\lambda) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2(n^{-\alpha} L_{n,\gamma}^\alpha) + \beta(\alpha, d) \quad (3)$$

où  $\gamma = (1-\alpha)d$ ,  $0 < \alpha < 1$  (donc  $0 < \gamma < d$ ), est un estimateur consistant de l'entropie de Rényi de la densité de Lebesgue de la distribution des sommets de  $\mathcal{T}^*$ .  $\beta$  est une constante, dépendant de  $d$  et  $\gamma$ , mais non de la densité  $\lambda$ .

Cette propriété ne tient cependant que si (réf. dans [7])

$$\lim_{|e| \rightarrow 0} |d_{i,j}| \simeq \|X_i - X_j\|$$

où  $\|e\|$  est la norme Euclidienne.

Soit  $\Pi_{A_0} = \{A_{01}, \dots, A_{0k}\}$  une partition de  $A_0$ . Soient  $\pi = (p_{A_0}, \dots, p_{A_k})$  la distribution de probabilité discrète associée aux événements  $x \in A_{0j}$ ,  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Nous avons établi dans [11]

$$\hat{H}_\alpha(\lambda \times \pi) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left( \frac{1}{n^\alpha} \sum_{j=1}^k L_{n_{A_{0j}}, \gamma} \right) + \beta(\gamma, d) \quad (4)$$

La propriété de super-additivité des MST [14] assure que  $\hat{H}_\alpha(\lambda \times \pi) \leq \hat{H}(\lambda|A_0)$

## 3 Méthode de détection, seuillage

### 3.1 Description

L'utilisation des MST offre certains avantages. Cela permet de commuter un problème de segmentation multidimensionnelle en un problème de partition de graphe; une telle approche est connue et ses principales limitations ont déjà fait l'objet d'études (voir [5, 10]). Cependant, si le coût de calcul (en flops) reste faible, la complexité de l'analyse combinatoire à mettre en place s'avère rédhibitoire dès lors que le problème est reformulé pour permettre une estimation robuste des familles à l'aide des  $k$ -MST (sous graphes minimaux de  $k$  points parmi  $n$ ); le problème posé est alors NP-complet. Les temps de calcul mis en jeux par les algorithmes de construction approchée de  $k$ -MST [7] ne permettent que difficilement d'apporter une solution sur des données expérimentales sur les astéroïdes, pouvant compter jusqu'à  $5.10^5$  objets (dans un futur proche).

Une solution suggérée récemment par Olman [13] dans un contexte bio informatique, exploite les étapes intermédiaires de calculs de MST dans l'algorithme d'agrégation récursive de Prim<sup>2</sup>.

Soit  $L(p)$  la fonction qui exprime la longueur du segment qui connecte un nouveau point au graphe lors de l'itération  $p$  de l'algorithme de Prim.  $L(p)$  présente des "vallées" lorsqu'une sur-densité de points est détectée : de fait, cet algorithme va connecter préférentiellement les points proches les uns des autres consécutivement dès lors qu'un premier point de la "famille" sera connecté au graphe (voir figure 1). La difficulté est la détermination du seuil à appliquer à  $L(p)$  pour déterminer les frontières de la famille ainsi détectée (section suivante). Le comportement de cet algorithme est illustré sur la figure 1, sur des données de simulation calculées à partir d'un modèle physique de collisions.

Les résultats de ce détecteur sont développés dans [12] et les courbes opérationnelles de réception (COREs) y sont présentées. Cette approche ne fait aucune hypothèse sur la convexité des familles à détecter.

### 3.2 Estimation du seuil

La section précédente met en évidence la nécessité de définir un seuil sur la courbe  $L(p)$ ; ce seuil permet de détecter les limites des vallées qui sont la signature de l'existence de sur-densités dans l'espace  $(a, e, i)$ , que l'on associe à l'existence de famille d'astéroïdes. L'objet de cette section est de proposer une méthode de détermination du seuil, en exploitant les relations entre la longueur d'un MST et l'entropie de la distribution des points qui en forment les sommets. Cette relation n'existe cependant que si la métrique utilisée est asymptotiquement euclidienne, dans la limite des petites distances. La métrique utilisée dans [1, 16], homogène à une vitesse ( $ms^{-1}$ ), ne possède pas cette propriété. Nous avons proposé dans [12] une distance

2. Soit  $\mathcal{T}_p$  le graphe obtenu après  $p$  itérations. L'algorithme consiste à construire le MST complet par adjonction du plus proche voisin de  $\mathcal{T}_p$ , non encore connecté au graphe. Le graphe résultant est alors  $\mathcal{T}_{p+1}$ . Le processus d'agrégation est itéré jusqu'à ce que tous les points soient connectés, soit après  $n-1$  itérations. L'algorithme peut être initialisé aléatoirement en n'importe quel point. Cet algorithme peut être implanté avec une complexité en  $O(n \log n)$  et conduit au graphe acyclique minimal unique [10]



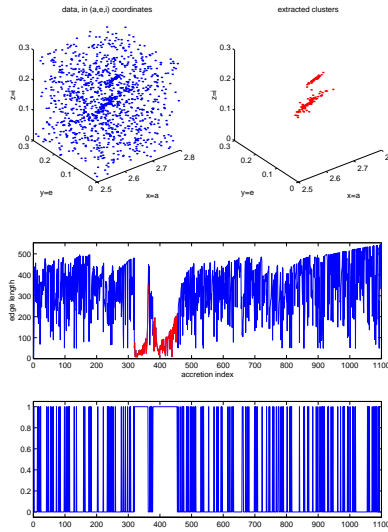


FIG. 1: Exemple : 2 familles (totalisant 250 et 150 objets) un environnement de 1250 objets; Chaque objet est caractérisé par  $(a, e, i)$ . Au centre :  $L(p)$  en fonction de l'itération  $p$  dans la construction du MST. Il apparaît nettement deux vallées. Un seuil  $\eta$  appliqué à  $L(p)$  ( $S(L(p)) = 1$  si  $L(p) < \eta$ , 0 sinon) conduit au dernier graphique. Les objets connectés entre eux lors des itérations successives et telles que  $S(L(p)) = cste = 1$  sont représentés sur la figure supérieure droite.

euclidienne un espace transformé  $(x, y, z)$  :

$$x = k'_2 \cdot \frac{e}{\sqrt{a}} \quad y = k'_3 \cdot \frac{\sin i}{\sqrt{a}} \quad z = k'_1 a$$

où  $(k'_1, k'_2, k'_3)$  sont des constantes dimensionnées. La distance euclidienne reste alors homogène à une vitesse. Cette transformation présente une singularité en  $a = 0$ ; cependant, pour les ensemble d'astéroïdes de la ceinture principale,  $a > 2.3^3$ , et cette transformation fortement non linéaire va préserver la notion de voisinage (deux voisins dans  $(a, e, i)$  resteront voisins dans  $(x, y, z)$ ). L'algorithme de segmentation par détection des vallées de la fonction  $L(p)$  définie au paragraphe précédent s'applique également dans l'espace  $(x, y, z)$ . Les courbes CORES obtenues expérimentalement sur des données de simulation sont équivalentes sinon meilleures à celles obtenues dans  $(a, e, i)$  (voir [12]).

On définit l'entropie associée à l'ensemble des  $K$  familles détectées en considérant que pour l'ensemble  $A_0$  des objets appartenant à une famille (les "outliers" sont exclus), la définition des familles  $A_i, i = 1, \dots, K$  définit une partition  $\pi_{A_0}$  au sens de l'équation 4. Le MST est construit dans l'espace  $(x, y, z)$ , avec  $d_{i,j}^E = \|X_i - X_j\|$ ,  $X_i = (x_i, y_i, z_i)$ . La longueur de graphes ou de sous graphes permet alors d'estimer l'entropie de Rényi d'ordre  $\alpha = \frac{d-\gamma}{d} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$  à une constante additive près :

$$L_j = \sum_{i,k/(X_i, X_k) \in A_j^2} d_{i,k}^{(E)}$$

$$H_{int} = 3 \log_2 \left( \frac{\sum_{j=1}^K L_j}{(\sum_{j=1}^K \text{Card}(A_j))^{2/3}} \right)$$

3.  $a = 0UA$  correspond à un astéroïde au centre du soleil...

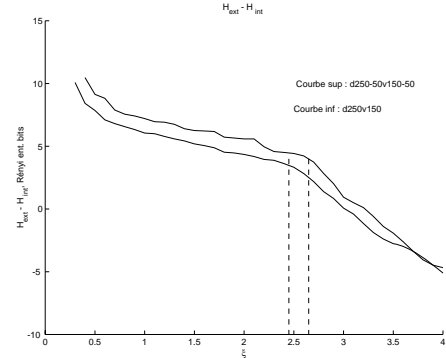


FIG. 2: Différence entre l'entropie de la distribution des outliers ( $H_{ext}$  et l'entropie de la distribution des objets regroupés en familles ( $H_{int}$ ), pour 2 fichiers de données simulées (d250-50v150-50 et d250v150).

De même, l'entropie associée à la distribution des "outliers" (objets n'appartenant à aucune famille identifiée) peut être estimée par :

$$A_{ext} \subset \mathcal{X} \quad A_{ext} \cup A_0 = \mathcal{X}$$

$$H_{ext} = 3 \log_2 \left( \frac{L_{ext}}{(\text{Card}(A_{ext}))^{2/3}} \right)$$

Une définition raisonnée de ce qu'est une famille d'objets s'appuie sur la proximité (au sens d'une métrique  $d$  ou  $d^{(E)}$  définie précédemment) des valeurs prises par les paramètres caractéristiques des objets qui constitue cette famille. Par opposition, les "outliers" sont des objets dont les caractéristiques sont dispersées. Naturellement, l'entropie de la distribution des caractéristiques est faible au sein d'une famille, et significativement plus importante pour les "outliers". Nous proposons alors le seuil de construire le seuil suivant: Soit  $\xi$  le paramètre permettant de définir le seuil  $\eta$  à appliquer à la fonction  $L(p)$  (voir section 3.2), via la relation

$$\eta = \xi \cdot \text{std} \left[ d_{i,j}^{(E)}, d_{i,j}^{(E)} \in \mathcal{T}^* \right]$$

Une augmentation de  $\xi$  (donc de  $\eta$ ) conduit à élargir la ou les familles déjà existantes, voire à en proposer de nouvelles. D'après les équations précédentes, l'entropie  $H_{int}$  doit rester faible tant que des outliers, de paramètres distants de ceux des familles et fortement dispersés, ne sont pas adjoints aux familles d'objets. Dans cette perspective, l'entropie  $H_{int}$  doit augmenter et corrélativement,  $H_{ext}$  doit diminuer. La figure 2 représente la différence  $H_{int} - H_{ext}$  en fonction de  $\xi$ . La détection du coude de la courbe  $H_{int} - H_{ext} = f(\xi)$  conduit sur cet exemple à retenir  $\xi = 2.65$  pour le fichier d250-50v150-50. Ce fichier contient 2 familles d'objets assez proches (voir figure 1); Le fichier d250v150 ne contient que la plus grosse de ces deux familles.

### 3.3 Validation

Il existe dans la littérature un nombre important de définition d'indice de validité d'une segmentation. Parmi les plus souvent mentionnés, les indices de Dunn, Davies Bouldin et plus récemment Chou et Sun ont été testés sur la partition de  $A_0$  obtenue par notre algorithme. Il est important de souligner que les outliers (constituant une sorte de "famille" en un sens étendu)

$\xi$ optimal		
-	d250v150	d250_50v150_50
Dunn's measure	2.3	0.6
Davies-Bouldin's measure	2.6	2.7
CS's measure	2.7	3.4
Entropy's measure	2.45	2.65
CORE (Bayes Minimax)	2.5	2.5

FIG. 3: *Values estimées de  $\xi$  optimal*

ne sont pas pris en compte dans le calcul de ces indices. Soit  $C$  l'ensemble des indices associé à l'ensemble des familles définies par la partition  $\pi_{A_0}$ , et  $n_C$  le nombre de ces familles.

**Indice de Dunn[6]**

$$DI(A_0) = \min_{i \in C} \left\{ \min_{j, j \neq i} \left\{ \frac{\delta(A_i, A_j)}{\max_{k \in C} \{\Delta(A_k)\}} \right\} \right\} \quad \text{où}$$

$$\delta(A_i, A_j) = \min\{d(\underline{x}_i, \underline{x}_j) \mid \underline{x}_i \in A_i, \underline{x}_j \in A_j\}$$

$$\Delta(A_j) = \max\{d(X_i, X_j) \mid X_i, X_j \in A_j\}$$

$d$  est la métrique utilisée, i.e.  $d^{(E)}$ .

**Indice de Davies Bouldin**

Dans [4], un ensemble de propriétés qui doivent être vérifiées par un indice de validité de segmentation est proposé. Un choix simple conduit à définir l'indice suivant:

$$DB(\pi_{A_0}) = \sum_{i=1}^{n_C} R_i \quad \text{où}$$

$$R_i = \max_{j \in C, j \neq i} \left\{ \frac{s_i + s_j}{d_{ij}} \right\} \quad \text{avec}$$

$$d_{ij} = \|V_i - V_j\| \quad \text{and} \quad s_i = \frac{1}{\text{card}(A_i)} \sum_{X \in A_i} \|X - V_i\|$$

et  $V_i$  est le barycentre de  $A_i$ .

**Indice de Chien et Sun[3]**

Plus adapté aux cas où les familles peuvent être de tailles très différentes, cet indice est défini par:

$$CS(\pi_{A_0}) = \frac{\sum_{i=1}^{n_C} \left\{ \frac{1}{\text{Card} A_i} \sum_{X_j \in A_i} \max_{X_k \in A_i} \{d_{j,k}\} \right\}}{\sum_{i=1}^{n_C} \left\{ \min_{j, j \neq i} \{d(V_i, V_j)\} \right\}} \quad \text{où}$$

$$V_i = \frac{1}{\text{card}(A_i)} \sum_{x_j \in A_i} X_j$$

Ces indices ne sont pas équivalents et sont plus ou moins sensibles à la géométrie des familles. L'étude de leur sensibilité dépasse le cadre de cet article. Cependant, les résultats obtenus sont cohérents avec le critère entropique proposé: Pour chacun des ces définition, le seuil  $\xi_{opt}$  retenu est celui qui optimise l'indice de validité de la segmentation. L'ensemble des résultats est présenté dans le tableau 3. La dernière ligne indique la valeur de  $\xi$  à l'intersection de la courbe CORE du détecteur et de la seconde diagonale dans le graphe  $P_{FA}, P_D$ , qui correspondrait donc à un critère Minimax dans un test d'hypothèse binaire Bayésien (interloper vs famille).

## 4 Résultats, Conclusions

Des résultats obtenus sur des fichiers de simulation (calculés à partir de modèle physique de collisions) permettent de situer les performances de la méthode proposée par rapport aux

méthodes pré-existante, à travers l'étude de courbes CORE, dans le cas où une ou plusieurs familles d'objets sont présentes dans les données. Quelques indices de validité de segmentation sont calculés et exploités pour déterminer le seuil optimal et permettent de valider et établir l'intérêt de la méthode, par construction insensible à la non convexité des familles et à une éventuelle structure 'filamentaire' de ces familles.

## Références

- [1] Ph. Bendjoya, A. Cellino, Cl. Froeschlé, V. Zappala: "Asteroid dynamical families: a reliability test for different new identification methods." *A & A.* vol. **272**, pp.651-670, 1993.
- [2] P. Bendjoya: "A classification of 6479 asteroids into families by means of the wavelet clustering method." *A & A. Supp.* vol. **102**, pp.25-55, 1993.
- [3] Chien-Hsing Chou, Mu-Chun Sun, Eugene Lai: "A new cluster validity measure for clusters with different densities.", 2003.
- [4] Davies, DL, Bouldin, D.W. "A cluster separation measure". *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol.1, No2,1979
- [5] R.O.Duda, P.E.Hart, D.G.Stork: "Pattern Classification", Wiley Interscience Ed., 2001.
- [6] Dunn, J. C. "Well separated clusters and optimal fuzzy partitions", *J. Cybern.* Vol.4, pp.95-104, 1974.
- [7] A.O.Hero, O.Michel: "Asymptotic theory of greedy approximations to minimal K-point random graphs", *IEEE Trans. on Information theory*, vol. IT-45, no.6, pp.1921-1939, Sept. 1999.
- [8] A.O. Hero, B.Ma, O. Michel and J.D. Gorman, "Applications of Entropic Spanning Graphs," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol.19, No.5, pp.85-95, 2002.
- [9] A.K.Jain, M.N.Murty, P.J.Flynn: "Data clustering: a review", *ACM Computing Surveys*, vol.31-3, pp.264-323., 1999.
- [10] D. Marchette: "Random graphs for statistical pattern recognition", Wiley Series in Probability and Statistics, 2004.
- [11] O.Michel, A.O.Hero, P.Flandrin: "Entropie conditionnelle de Rényi et Segmentation", Grets'i'2001, Toulouse, France, paper 254.
- [12] O.Michel, P.Bendjoya: "Unsupervised clustering with MST: Application to asteroid data", PSIP'05, Toulouse, pp.29-33.
- [13] <http://csbl.bmb.uga.edu/> olman, mentionné by A.O.Hero (private communications)
- [14] J.E.Yukich: "Probability Theory of Classical Euclidean Optimization problems.", *Lecture Notes in mathematics*, 1675, Springer, 1998.
- [15] V. Zappala, A. Cellino, P. Farinella, and Z. Knezevic: "Asteroid families. I - Identification by hierarchical clustering and reliability assessment." *Astronomical Journal*, vol. **100**, pp.2030-2046, 1990.
- [16] Zappala V., Bendjoya Ph., Cellino A., Farinella P., Froeschlé Cl.: "Asteroid families: search in a 12,487 asteroid sample with two different clustering techniques" *Icarus*, vol. **116**, pp.291-314, 1995.



# Géométrie des ensembles de chirps et détection des ondes gravitationnelles

Éric CHASSANDE-MOTTIN

CNRS, Observatoire de la Côte d’Azur, ARTEMIS  
BP 4229 06304 Nice Cedex 4 FRANCE  
ecm@obs-nice.fr

**Résumé** — Un réseau mondial de détecteurs a pour objectif la première détection directe des ondes gravitationnelles dont l’existence est prédite par la théorie de la relativité d’Einstein. On s’intéresse aux méthodes d’analyse des données de ce réseau, et en particulier ce qui concerne la détection des “chirps” gravitationnels en provenance de binaires d’étoiles à neutrons ou de trous noirs. Pour ces sources, un banc de filtres adaptés est mis en œuvre, calculant la corrélation entre les données et un ensemble de signatures caractéristiques. Une difficulté réside dans le choix de cet ensemble, dont on montre qu’il passe par la définition et l’utilisation d’une distance entre chirps. En partant de modèles généraux de chirps, nous obtenons une nouvelle formulation de cette distance offrant une vision simple de la géométrie sous-jacente. On applique ce résultat au cas spécifique des chirps gravitationnels.

**Abstract** — A worldwide network of detectors is targeting the first direct detection of gravitational waves whose existence is predicted by Einstein’s theory of general relativity. We are interested in the processing methods of the data of this network, and in particular in what concerns the detection of gravitational “chirps” coming from binaries of neutron stars or black holes. For such sources, a bank of matched filters is implemented, and calculates the correlation between the data and a set of generic signatures. A difficulty resides in the choice of this set, which as shown, requires the definition and use of a distance measurement between chirps. Starting from general chirp models, we obtain a new formulation of the distance which offers a simple understanding of the underlying geometry. We apply this result to the specific case of gravitational chirps.

## 1 Motivations

Dans la théorie de la relativité générale, la gravitation résulte de la courbure de l’espace-temps. L’évolution dynamique de la courbure est décrite par les équations d’Einstein. Leur résolution montre l’existence de solutions radiatives : les ondes gravitationnelles (OGs). Un réseau mondial de détecteurs [1], actuellement en cours de mise en service, vise à la vérification expérimentale de cette prédiction. L’objectif est de faire la détection directe des OGs en provenance de systèmes astrophysiques (formés d’objets suffisamment massifs pour provoquer un rayonnement gravitationnel d’amplitude détectable).

Les binaires d’étoiles à neutrons ou de trous noirs sont des candidats privilégiés pour la principale raison qu’elles émettent une signature gravitationnelle dont on sait obtenir un modèle. L’OG émise est un signal modulé en fréquence ou *chirp*  $s(t) = A(t) \cos \varphi(t)$ . Son amplitude  $A(t) \equiv A a(t) > 0$  et sa phase  $\varphi(t) \equiv \phi(t) + \theta$  sont connues à un facteur d’échelle  $A > 0$  et une phase  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2]$  près et suivent en première approximation (dite “newtonienne”) [3] les lois suivantes :

$$a(t) = \mathcal{A} (\tau - t)^\alpha U(\tau - t), \quad (1a)$$

$$\phi(t) = 2\pi C \left( \frac{\tau - t}{\mathcal{M}} \right)^\beta U(\tau - t), \quad (1b)$$

où  $\alpha = -1/4$ ,  $\beta = 5/8$ ,  $C \approx 241$ ,  $\mathcal{A}$  est une constante de normalisation et  $U(t) = 1$  si  $t > 0$ ,  $= 0$  sinon. Ces expres-

sions dépendent de paramètres physiques  $p \equiv \{\tau, \mathcal{M}\}$  liés à la binaire considérée, à savoir le temps de coalescence  $\tau$  et la *chirp mass*  $\mathcal{M}$ .

La détection d’un tel signal dans le bruit instrumental s’effectue à l’aide d’un filtre adapté mesurant la corrélation entre les données et un *patron d’onde* défini par les éqs. (1). À cause de la coloration du bruit, une opération de blanchiment est préalablement appliquée.

On ne connaît pas *a priori* les paramètres  $p$ . La mesure de corrélation doit donc être répétée pour toutes les valeurs de  $p$  physiquement admissibles, d’où la mise en œuvre d’un banc de filtres adaptés. Une difficulté réside dans le choix de l’ensemble des patrons d’ondes pour ce banc qui doit, à la fois, couvrir toutes les possibilités et ne pas être sur-dimensionné (pour des raisons d’économie de calcul numérique).

Qualitativement, on doit choisir une grille de patrons d’ondes aux mailles ni trop serrées (patrons d’onde corrélés entre eux) ni trop lâche (décorrélés). L’introduction d’une distance (voir par ex., [3]) mesurant le degré de corrélation entre deux chirps gravitationnels donne une réponse quantitative à cette question.

La distance dépend de la densité spectrale de puissance (DSP) du bruit instrumental. Les conditions de fonctionnement du détecteur peuvent fluctuer et causer des non-stationnarités. La distance et par conséquent la grille doivent être réactualisées régulièrement. La mise à jour n’est pas envisageable avec la méthode actuelle (trop coûteuse)

de calcul de la distance.

Nous proposons ici une méthode d'estimation rapide de la distance. En Sect. 2, nous reprenons la définition de la distance dans un cadre plus large que celui des OGs, en l'étendant à des modèles généraux de chirps. Le résultat est une formulation approchée qui donne une vision simple de la géométrie des ensembles de chirps. On utilise ce résultat en Sect. 3 dans le contexte des OGs.

## 2 Distance dans les ensembles de chirps arbitraires

On suppose que les signaux sont correctement échantillonnés à la fréquence  $f_s \equiv 1/t_s$ . On considère le problème de détection  $(H_1) : x_k = s_k + b_k$  vs.  $(H_0) : x_k = b_k$  avec  $k = 0, \dots, N-1$  où le bruit  $b$  est gaussien et blanc et où l'amplitude  $a_k = a(t_s k) > 0$  et la phase  $\phi_k = \phi(t_s k)$  du chirp  $s_k = s(t_s k) = A a_k \cos(\phi_k + \theta)$  sont arbitraires (ils n'obéissent donc pas aux éqs. (1)) à l'exception de la normalisation  $\sum_k a_k^2 = N$ .

Le rapport de vraisemblance généralisé (RVG) est une approche classique pour ce type de problème. La statistique est obtenue en remplaçant dans le rapport de vraisemblance, les paramètres inconnus, ici  $A$  et  $\theta$ , par leurs estimateurs au maximum de vraisemblance. Ceci conduit au *filtre adapté à détection d'enveloppe*  $\ell(x; a, \phi)$  qui s'exprime par [2]

$$\ell(x; a, \phi) = \frac{n_s x_c^2 - 2n_x x_c x_s + n_c x_s^2}{n_c n_s - n_x^2}, \quad (2)$$

où  $x_c \equiv \sum_k x_k a_k \cos \phi_k$  et  $x_s \equiv \sum_k x_k a_k \sin \phi_k$  désignent la corrélation des données avec les formes d'ondes en quadrature du patron d'onde, et  $n_c \equiv \sum_k a_k^2 \cos^2 \phi_k$ ,  $n_x \equiv \sum_k a_k^2 \cos \phi_k \sin \phi_k$  et  $n_s \equiv \sum_k a_k^2 \sin^2 \phi_k$  servent à la normalisation de la statistique.

On veut évaluer l'erreur commise lorsque l'amplitude et la phase du chirp effectivement présent dans les données sont légèrement différentes de celles du patron d'onde. Autrement dit, on veut connaître la perte relative sur la hauteur maximale du pic de détection de la statistique  $\ell$ .

Pour simplifier les notations, on concatène l'amplitude et la phase du chirp dans un vecteur caractéristique  $c$  de taille  $2N$  tel que  $c_k = a_k$  et  $c_{N+k} = \phi_k$  pour  $k = 0, \dots, N-1$ . On distingue par un astérisque le patron d'onde  $c^*$  du chirp reçu  $c$ . L'erreur relative due à la désadaptation s'écrit :

$$\mathcal{L}(c; c^*) \equiv \frac{\ell(s; c) - \ell(s; c^*)}{\ell(s; c)}. \quad (3)$$

D'un point de vue géométrique,  $\mathcal{L}$  s'interprète comme une *distance* (au sens large). On vérifie que  $\mathcal{L} \geq 0$  et que  $\mathcal{L}(c; c) = 0$  (i.e., la distance séparant deux chirps identiques est nulle). En résumé, avec ces définitions, plus la distance entre chirp effectif et patron d'onde est petite (i.e., leur amplitude et phase sont proches), plus la perte de contraste à la détection est petite.

<sup>1</sup>Dans la suite, toutes les sommes sont prises par défaut pour  $k = 0, \dots, N-1$  et  $i, j = 0, \dots, 2N-1$

Il est difficile de percevoir à partir des définitions (2) et (3) les variations de  $\mathcal{L}$ . Pour  $c^* \approx c$ , on obtient une expression approchée plus simple et intuitive par un développement de Taylor pour des petites variations de  $c^* - c$ . Le calcul, détaillé en Annexe, conduit à

$$\mathcal{L}(c; c^*) \approx \frac{1}{N} \sum_k a_k^2 [(\alpha_k - \bar{\alpha})^2 + (\Delta_k - \bar{\Delta})^2], \quad (4)$$

où  $\bar{\alpha} = 1/N \sum_k a_k^2 \alpha_k$  et  $\bar{\Delta} = 1/N \sum_k a_k^2 \Delta_k$ . Ceci met en évidence le lien explicite de la distance et des différences de phase  $\Delta_k = \phi_k^* - \phi_k$  et d'amplitude  $\alpha_k = (a_k^* - a_k)/a_k$  (ce dernier s'apparente plutôt à l'écart du logarithme des amplitudes).

Dans la représentation donnée par l'amplitude et la phase du chirp, la distance  $\mathcal{L}$  est similaire à une distance  $L^2$ , ce qui met en évidence la simplicité de la géométrie associée.

Tous ces développements se généralisent (par le biais d'une approximation de phase stationnaire) au cas d'un bruit coloré de DSP  $\Gamma(f)$  en remplaçant  $a_k$  par  $a_k/\sqrt{f_s \Gamma(f_k)}$  où  $f_k = f(t_s k)$  et  $f(t) \equiv (2\pi)^{-1} \dot{\phi}(t)$  est la fréquence instantanée.

## 3 Grilles de chirps newtoniens

Nous revenons à la question initiale de la définition d'une grille de patrons d'onde pour la détection des OGs. Nous désignons indifféremment un patron d'onde par son paramètre  $p^* = \{\tau^*, \mathcal{M}^*\}$  ou le couple phase et amplitude  $c^* = (a^*, \phi^*)$  tel que il est défini en éq. (1). Notons que l'amplitude est normalisée (à l'aide d'un choix adéquat de  $A$ ) de manière à satisfaire la condition  $\sum_k a_k^2 = N$ .

L'idée est de construire une grille (i.e., un échantillonnage du plan  $p^*$ ) de sorte que, pour tout signal effectif de paramètre  $p$ , la grille contienne un patron d'onde "suffisamment proche" i.e.,  $\mathcal{L}(c; c^*) \lesssim \lambda$  où  $\lambda$  est la distance maximale, typiquement  $\lambda \approx 10\%$ . L'échantillonnage de  $\tau^*$  est fixé égal à celui du signal (régulier d'intervalle  $t_s$ ) pour des raisons d'implémentation. Il reste donc à déterminer la discrétisation de la direction associée à la chirp mass  $\mathcal{M}^*$ , ce qui nous conduit à considérer

$$\check{\mathcal{L}}(\mathcal{M}; \mathcal{M}^*) = \min_{\tau^*, \tau \text{ fixé}} \mathcal{L}(p; p^*). \quad (5)$$

Pour la procédure de sélection des nœuds de la grille (ou le "placement" des patrons d'onde), on doit évaluer  $\check{\mathcal{L}}(\mathcal{M}; \mathcal{M}^*)$  pour tout couple  $\mathcal{M}, \mathcal{M}^*$  admissible (en pratique, on se limite à un voisinage  $\mathcal{M}^* \approx \mathcal{M}$  à  $\mathcal{M}$  fixé). La minimisation dans la définition de  $\check{\mathcal{L}}(\mathcal{M}; \mathcal{M}^*)$  demande des ressources de calculs conséquentes.

Nous proposons une méthode originale de calcul de la distance  $\check{\mathcal{L}}(\mathcal{M}; \mathcal{M}^*)$  qui s'appuie sur l'approximation de la distance donnée en éq. (4).

**Descente au gradient** — En notant que  $\partial_{\tau^*} \Delta_k = -2\pi f_k^*$  et  $\partial_{\tau^*} \alpha_k = -\dot{a}_k^*/a_k$ , la différentiation de l'approximation (4) montre que le gradient peut être évalué numériquement en  $O(N)$  opérations par

$$\partial_{\tau^*} \mathcal{L}(p; p^*) \approx -\frac{2}{N} \sum_k a_k^2 \left[ \frac{\dot{a}_k^*}{a_k} (\alpha_k - \bar{\alpha}) + 2\pi f_k^* (\Delta_k - \bar{\Delta}) \right], \quad (6)$$

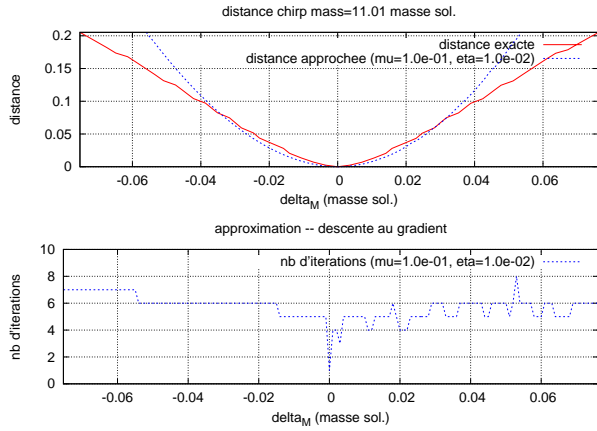


FIG. 1 – Valeur exacte de  $\tilde{\mathcal{L}}(\mathcal{M}; \mathcal{M} + \delta_{\mathcal{M}})$  pour  $\mathcal{M} = 11.01M_{\odot}$  comparée à son estimation  $\tilde{\mathcal{L}}_{\infty}$  et le nombre d'itérations de la descente au gradient (avec  $\mu = 10^{-1}$  et  $\eta = 10^{-2}$ ) jusqu'à convergence.

et avec les expressions de  $\dot{a}_k^*$  et  $f_k^*$  obtenues des éqs. (1).

On dispose de la direction de plus grande pente que l'on peut employer pour calculer  $\tilde{\mathcal{L}}$  par une descente au gradient. Pour  $p = \{\tau, \mathcal{M}\}$  et un écart  $\delta_{\mathcal{M}}$  fixés, on initialise au point  $\{\tau_0^* = \tau, \mathcal{M}^* = \mathcal{M} + \delta_{\mathcal{M}}\}$ , et on procède en itérant  $\tau_{i+1}^* = \tau_i^* - \mu \partial_{\tau} \mathcal{L}(p; p_i^*)$  et en mettant à jour la distance  $\tilde{\mathcal{L}}_{i+1} = \mathcal{L}(p; p_i^*)$  avec l'éq. (4) jusqu'à la convergence décidée par le critère  $|\tilde{\mathcal{L}}_{i+1} - \tilde{\mathcal{L}}_i|/\tilde{\mathcal{L}}_i \leq \eta$ . On note  $\tilde{\mathcal{L}}_{\infty}(\mathcal{M}, \mathcal{M}^*)$ , l'estimation ainsi obtenue.

La figure 1 montre le résultat d'une simulation faite dans le cas simplifié d'une amplitude  $a_k$  constante et d'un bruit blanc. L'algorithme converge rapidement ( $< 10$  itérations). L'estimation approche la distance exacte à 10% près dans le voisinage utile du minimum (i.e.,  $\tilde{\mathcal{L}} \lesssim 0.1$ ). À titre d'illustration, on compare en figure 2 les distances  $\mathcal{L}$  (avant minimisation) exacte et approchée en limite du domaine de validité de l'estimation de  $\tilde{\mathcal{L}}$ . On note que l'approximation de  $\mathcal{L}$  est bonne pour des  $\delta_{\tau}$  proches de zéro, mais le minimum exact se trouve en limite de cette région et les termes d'ordre supérieur à 2 peuvent plus être négligés.

## Conclusions

La représentation d'un chirp donnée par son amplitude et sa phase est agrémentée d'une géométrie locale simple, dans le sens où la distance entre deux individus (suffisamment proches) est reliée simplement à la paramétrisation choisie. Nous montrons comment cette distance est utile au calcul ou à la mise à jour des grilles de patron d'ondes gravitationnelles. L'approche proposée est validée dans son principe dans un cas simplifié.

Notons que l'algorithme de descente au gradient peut être remplacé par une minimisation du type quasi-Newton puisqu'on peut disposer en plus du gradient d'une estimation de la courbure locale  $\partial_{\tau}^2 \mathcal{L}$ .

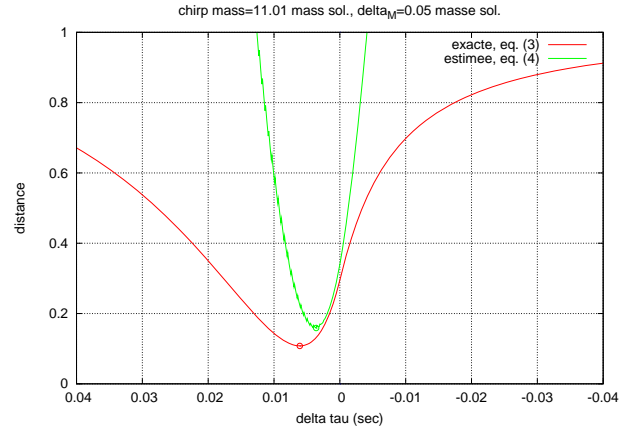


FIG. 2 – Valeurs exacte (eq. (3)) et approchée (eq. (4)) de  $\mathcal{L}(p; p^*)$  pour  $p = \{\tau \text{ fixé}, \mathcal{M} = 11.01M_{\odot}\}$  et  $p^* = \{\tau + \delta_{\tau}, \mathcal{M} + \delta_{\mathcal{M}}\}$  avec  $\delta_{\mathcal{M}} = 0.05M_{\odot}$ ,  $f_s = 2048$  Hz et  $N = 8192$  ( $t_s N = 2$  s).

## Références

- [1] GEO600 : <http://www.geo600.uni-hannover.de>; LIGO : <http://www.ligo.org>; Virgo : <http://www.virgo.infn.it>; TAMA : <http://tamago.mtk.nao.ac.jp>.
- [2] É. Chassande-Mottin and A. Pai. Best chirplet chain : near-optimal detection of gravitational wave chirps. En préparation, 2005.
- [3] B. J. Owen. Search templates for gravitational waves from inspiraling binaries : Choice of template spacing. *Phys. Rev. D*, 53 :6749–6761, 1996.

## Annexe : approximation de la distance entre chirps

On détaille ici l'approximation de Taylor de la distance pour des petites variations de  $c^* - c$ ,

$$\ell(s; c^*) = \ell(s; c) + \sum_j \partial_j \ell|_{c^*=c} (c_j^* - c_j) + \frac{1}{2} \sum_{ij} \partial_{ij}^2 \ell|_{c^*=c} (c_i^* - c_i)(c_j^* - c_j) + \dots, \quad (7)$$

où l'on a noté  $\partial_j \equiv \partial/\partial c_j^*$  et  $\partial_{ij}^2 \equiv \partial^2/\partial c_i^* \partial c_j^*$ .

**Dérivée première, extremum local** — On note respectivement  $n$  et  $d$ , le numérateur et le dénominateur de la statistique  $\ell$  en Eq. (2). En supprimant les arguments par souci de compacité, on a  $\partial_j \ell = (\partial_j n - \ell \partial_j d)/d$ .

Les dérivées du numérateur

$$\begin{aligned} \partial_j n = & \partial_j n_s x_c^2 + 2n_s x_c \partial_j x_c \\ & - 2(\partial_j n_x x_c x_s + n_x \partial_j x_c x_s + n_x x_c \partial_j x_s) \\ & + \partial_j n_c x_s^2 + 2n_c x_s \partial_j x_s, \end{aligned}$$

et du dénominateur

$$\partial_j d = \partial_j n_c n_s + n_c \partial_j n_s - 2n_x \partial_j n_x,$$

peuvent être explicitement obtenues au point  $c^* = c$  en y insérant les dérivées de chaque terme.

Pour  $j < N$ , la dérivée s'effectue par rapport à l'amplitude  $c_j^* = a_k$  avec  $k = j$  et conduit à

$$\partial_j n_c|_{c^*=c} = a_k(1 + \cos 2\phi_k)$$

$$\partial_j n_x|_{c^*=c} = a_k \sin 2\phi_k$$

$$\partial_j n_s|_{c^*=c} = a_k(1 - \cos 2\phi_k)$$

$$\partial_j x_c|_{c^*=c} = a_k/2(\cos \theta \cos 2\phi_k - \sin \theta \sin 2\phi_k + \cos \theta)$$

$$\partial_j x_s|_{c^*=c} = a_k/2(-\sin \theta \cos 2\phi_k - \cos \theta \sin 2\phi_k + \sin \theta).$$

et pour  $j \geq N$ , la dérivée s'effectue par rapport à la phase  $c_j^* = \phi_k^*$  avec  $k = j - N$ ,

$$\partial_j n_c|_{c^*=c} = -a_k^2 \sin 2\phi_k$$

$$\partial_j n_x|_{c^*=c} = a_k^2 \cos 2\phi_k$$

$$\partial_j n_s|_{c^*=c} = a_k^2 \sin 2\phi_k$$

$$\partial_j x_c|_{c^*=c} = a_k^2/2(-\sin \theta \cos 2\phi_k - \cos \theta \sin 2\phi_k + \sin \theta)$$

$$\partial_j x_s|_{c^*=c} = a_k^2/2(\cos \theta \cos 2\phi_k - \sin \theta \sin 2\phi_k + \cos \theta).$$

Après simplification et à l'aide des expressions suivantes

$$\ell(s; c) = n_c \cos^2 \theta + n_x \sin 2\theta + n_s \sin^2 \theta,$$

et respectivement pour  $j < N$  et  $j \geq N$ ,

$$\partial_j d|_{c^*=c} = a_k(N + (n_s - n_c) \cos 2\phi_k - 2n_x \sin 2\phi_k)$$

$$\partial_j d|_{c^*=c} = a_k^2((n_c - n_s) \sin 2\phi_k - 2n_x \cos 2\phi_k),$$

il apparaît que le numérateur peut se factoriser sous la forme

$$\partial_j n|_{c^*=c} = \ell(s; c) \partial_j d|_{c^*=c}.$$

On déduit que  $\partial_j \ell|_{c^*=c} = 0$ . Le point  $c^* = c$  est donc un extremum local.

**Dérivée seconde, métrique** — La dérivée première s'annulant pour  $c^* = c$ , la dérivée seconde de  $\ell$  peut être calculée en utilisant le fait que  $\partial_{ij}^2 \ell|_{c^*=c} = [(\partial_{ij}^2 n - \ell(s; c^*) \partial_{ij}^2 d)/d]|_{c^*=c}$ . Seules les dérivées secondes de  $n$  et  $d$  doivent donc être évaluées ce que l'on fait par un calcul direct similaire à celui produit pour la dérivée première.

Le résultat final est que l'on peut écrire la dérivée seconde de  $\ell$  sous la forme générale

$$\partial_{ij}^2 \ell|_{c^*=c} = A^2(X_{kl} + D_k \delta_{kl}) + O(\delta + \epsilon) \quad \text{quand } \delta, \epsilon \rightarrow 0. \quad (8)$$

où  $\delta_{kl}$  désigne le symbole de Kronecker qui est égal à 1 si  $k = l$  et s'annule sinon.

Nous définissons les variables  $\delta$  et  $\epsilon$  et discutons leur ordre de grandeur, après avoir précisé les expressions des termes croisés  $X_{kl}$  et diagonaux  $D_k$  et de leurs indices  $(k, l)$  selon les cas de figure, en fonction de  $(i, j)$  :

- si  $i, j < N$ , on a  $k = i, l = j$  et

$$X_{kl} = \frac{a_k a_l}{N} ((1 + \hat{c}_k)(1 + \hat{c}_l) + \hat{s}_k \hat{s}_l)$$

$$D_k = -1 + \hat{c}_k,$$

- si  $i, j \geq N$ , on a  $k = i - N, l = j - N$  et

$$X_{kl} = \frac{a_k^2 a_l^2}{N} ((1 - \hat{c}_k)(1 - \hat{c}_l) + \hat{s}_k \hat{s}_l)$$

$$D_k = a_k^2(-1 + \hat{c}_k),$$

- si  $i < N$  et  $j \geq N$ , on a  $k = i$  et  $l = j - N$ ,

$$X_{kl} = \frac{a_k a_l^2}{N} (\hat{s}_k(1 + \hat{c}_l) - (1 + \hat{s}_k)\hat{s}_l)$$

$$D_k = -a_k \hat{s}_k,$$

avec une expression symétrique pour le cas  $i \geq N$  et  $j < N$ . Pour obtenir ces expressions, on a noté  $\hat{c}_k \equiv \cos 2(\phi_k + \theta)$  et  $\hat{s}_k \equiv \sin 2(\phi_k + \theta)$  et on a utilisé le fait que

$$\ell(s; c) = \frac{A^2 N}{2} (1 + \delta \cos 2\theta - \epsilon \sin 2\theta) = \frac{A^2 N}{2} + O(\delta + \epsilon)$$

$$d|_{c^*=c} = \frac{N^2}{4} (1 - \delta^2 - \epsilon^2) = \frac{N^2}{4} + O(\delta^2 + \epsilon^2),$$

lorsque  $\delta, \epsilon \rightarrow 0$ . Ces variables définies par  $\delta \equiv (n_c - n_s)/(n_c + n_s)$  et  $\epsilon \equiv 2n_x/(n_c + n_s)$  s'interprètent comme une mesure de l'écart à la quadrature des deux formes d'ondes  $a_k \cos \phi_k$  et  $a_k \sin \phi_k$ , ou autrement dit, de l'écart à l'orthonormalité des vecteurs de  $\mathbb{R}^N$  formés de la collection de leur échantillons [2]. Il est intéressant de noter que  $\delta$  et  $\epsilon$  sont liés à la somme oscillante suivante :

$$\delta + i\epsilon = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k^2 \exp i2\phi_k.$$

Qualitativement, si la phase varie suffisamment rapidement, les contributions positives et négatives se compensent en sommant. Les quantités  $\delta$  et  $\epsilon$  prennent donc des valeurs intuitivement beaucoup plus petites que la majoration triviale  $\delta, \epsilon \leq 1$ . Un traitement quantitatif de cette intuition est possible dans le cas où l'amplitude  $a_k = 1$  est constante [2]. On montre que, si la fréquence instantanée du chirp ne s'approche pas trop des fréquences nulles ou de Nyquist,  $\delta$  et  $\epsilon$  sont effectivement petits devant 1. Nous supposons que ceci est vérifié. Par conséquent, l'éq. (8) peut être considérée comme une bonne approximation de la dérivée seconde de  $\ell$ .

**Approximation de la distance** — En combinant

$$\mathcal{L}(c; c^*) \approx \frac{-1}{2\ell(s; c)} \sum_{ij} \partial_{ij}^2 \ell|_{c^*=c} (c_i^* - c_i)(c_j^* - c_j)$$

avec l'éq. (8) et les expressions des termes  $X$  et  $D$ , on obtient une approximation de  $\mathcal{L}$  à l'ordre 2. L'expression qui en résulte (trop longue pour être écrite explicitement ici) peut être raisonnablement simplifiée en y sélectionnant les termes dominants. En particulier, les termes du type  $1/N \sum_k a_k(a_k - a_k^*)\hat{c}_k$  et  $1/N \sum_k a_k^2(\phi_k - \phi_k^*)\hat{c}_k$  (et similaires avec  $\hat{s}_k$ ) sont des sommes oscillantes. En supposant que les changements de signe de  $\hat{c}_k$  et  $\hat{s}_k$  sont plus rapides que ceux de  $a_k - a_k^*$  et  $\phi_k - \phi_k^*$ , leur contribution peut être négligée par le même argument employé précédemment pour  $\delta$  et  $\epsilon$ . De cette sélection, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c; c^*) = & \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (a_k^* - a_k)^2 - \left( \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k(a_k^* - a_k) \right)^2 \\ & + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k^2(\phi_k^* - \phi_k)^2 - \left( \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k^2(\phi_k^* - \phi_k) \right)^2 \end{aligned}$$

d'où découle l'équation (4).

# Analyse statistique de la détection de planètes par imagerie directe

A. FERRARI<sup>1</sup>, J.-Y. TOURNERET<sup>2</sup>, E. SERRADEL<sup>1</sup>, C. AIME<sup>1</sup>

<sup>1</sup>LUAN, Université de Nice-Sophia-Antipolis, 06108 Nice cedex 2, France

<sup>2</sup>ENSEEIH/TéSA, 2 rue Charles Camichel, BP 7122, 31071 Toulouse cedex 7, France

ferrari@unice.fr, jean-yves.tourneret@tesa.prd.fr, eduard.serradell-domingo@unice.fr, aime@unice.fr

**Résumé** — Cette communication est consacrée à la détection de planètes par imagerie directe. L'accent est mis sur les deux facteurs dégradants : les résidus de turbulence atmosphérique et la présence du coronographe. Une modélisation statistique des mesures permet de proposer et d'étudier un détecteur utilisant des images à court temps de pose. Une simulation numérique met en évidence le gain de cette technique par rapport à une image long temps de pose ou au traitement courte pose habituel.

**Abstract** — This communication is devoted to exo-planet detection by direct imaging. Specific attention is given to degrading factors : the residues of atmospheric turbulence and the side effects of the coronagraph. Relying on a statistical modeling of the measurements, a detector based on short time exposure images is proposed and analyzed. A numerical simulation highlights the detection gain of this technique with respect to a long time exposure image or a classical short exposure processing.

## 1 Introduction

Depuis la première découverte d'une planète autour d'une étoile de type solaire par M. Mayor et D. Queloz en 1995, on assiste à une explosion de l'intérêt porté à la détection des exoplanètes. Plus d'une centaine de planètes ont ainsi déjà été détectées par différentes techniques *indirectes* comme par exemple la vélocimétrie radiale (effet Doppler de la composante radiale de la vitesse de l'étoile par rapport au centre de masse du système), les transits (variation photométrique de l'étoile lorsque la planète passe devant le disque stellaire), ...

La détection *directe* des planètes par imagerie constitue cependant un objectif essentiel car elle fournira des informations comme sa masse (en levant l'ambiguïté des mesures indirectes), son albédo et même la composition chimique de son atmosphère si une analyse du spectre est possible. Bien que des télescopes ayant une résolution angulaire suffisante existent, deux facteurs principaux rendent aujourd'hui impossible l'imagerie directe d'une planète :

1. La diffraction de la lumière de l'étoile au niveau de la planète : le rapport entre l'intensité de l'étoile diffractée et celle de la planète pour les systèmes visés est de l'ordre de  $10^6$  dans l'infrarouge et  $10^9$  dans le visible. La réalisation d'images de ces planètes nécessitera donc l'utilisation d'un *coronographe* afin de réduire la lumière de l'étoile, [2].
2. La dégradation de l'image liée à la turbulence atmosphérique dans la mesure où l'instrument envisagé n'est pas spatial : la solution passe ici par l'utilisation d'une *optique adaptative* [13] à très haute performance.

Un certain nombre de projets internationaux centrés sur ces deux aspects sont aujourd'hui en phase de construction

ou d'étude dans le but d'obtenir des images de planètes extrasolaires depuis le sol. L'objectif de cette communication est l'étude des performances d'un tel système prenant en compte les deux facteurs dégradants mentionnés.

Une première solution a été récemment proposée dans [3] reposant sur le calcul de la variance de l'image finale. L'étude proposée ici diffère de cette solution par le fait qu'elle envisage la possibilité où  $M$  images « courtes poses » sont acquises durant la même durée d'observation. En particulier elle a pour objectif d'étudier l'apport possible du traitement d'un ensemble d'images à court temps de pose par rapport à une image à fort flux.

Dans ce contexte une solution proposée en 1995 dans [12] et expérimentée dans [4], le dark-speckle, consiste à faire une carte des fréquences de l'événement « 0 photons ». La présence d'une planète, ayant pour effet d'augmenter légèrement le flux, apparaîtra en négatif sur la carte. Cette méthode avait été analysée dans [6], sans toutefois prendre en compte l'effet du coronographe. Elle avait permis de conclure que ses performances étaient très voisines de celles du détecteur optimal de Neyman-Pearson.

Cette communication propose d'étudier les performances de détection en tenant compte de la présence du coronographe, ce qui a pour effet de complexifier considérablement le développement analytique. Le modèle statistique des données est développé dans la section 2. Le problème est alors traité comme un test d'hypothèses binaire pour lequel une statistique de test est proposée. La technique du dark-speckle apparaît comme un cas particulier pour lequel un rapport signal à bruit est calculé dans la section 4. Cette quantité permet de mettre en évidence l'influence des différents paramètres et en particulier la perte de performance liée à la présence du coronographe. L'intensité de la planète étant inconnue, le détecteur optimal de Neyman Pearson ne peut être mis en œuvre. L'utilisation du

test localement le plus puissant est alors envisagé. Celui-ci permet de mettre en évidence que, suivant la configuration envisagée, un gain peut être obtenu par traitement des images courte pose.

## 2 Modèle

On utilise ici le modèle développé dans [3] pour décrire l'intensité mesurée par un instrument comportant une optique adaptative et un coronographe. Dans ce modèle, l'amplitude complexe au foyer du télescope se décompose en la somme :

- d'un terme  $c(\vec{x})$  qui désigne la réponse du coronographe à l'étoile et qui donc est un terme déterministe réel et à symétrie de révolution :  $c(\vec{x}) = c(|\vec{x}|)$ .
- d'un terme  $\Psi_s(\vec{x})$  décrivant le résidu de turbulence atmosphérique. Nous supposons que ce terme qui est à l'origine des speckles résiduels possède une distribution Gaussienne :  $\Psi_s(\vec{x}) \sim \mathcal{N}_c(0, \sigma^2(|\vec{x}|))$ .

L'intensité instantanée  $i(\vec{x})$  au foyer du télescope en  $\vec{x}$  s'écrit alors :

$$i(\vec{x}) = |\Psi_s(\vec{x}) + c(\vec{x})|^2 \quad (1)$$

La présence d'une planète en  $\vec{x}$ , dont la lumière est incohérente avec celle de l'étoile, ajoute ainsi à  $i(\vec{x})$  un terme déterministe noté  $m(\vec{x})$ .

Alors que l'hypothèse Gaussienne sur l'amplitude complexe en un point est bien admise, la complexité des transformations mises en œuvres dans l'optique adaptative font que son extension à un vecteur d'amplitudes complexes en plusieurs points n'est pas naturelle. Par ailleurs l'utilisation d'une telle hypothèse, outre le fait qu'elle introduit des paramètres qui ne sont pas accessibles, ne permet pas d'aboutir à un résultat analytique, [7]. Compte tenu de cela nous nous limiterons dans la suite à une description monodimensionnelle du processus. Afin de simplifier les notations la dépendance envers la position  $\vec{x}$  sera omise.

Compte tenu des hypothèses précédentes,  $i$  est proportionnel à une variable aléatoire distribuée suivant une loi du  $\chi^2$  décentrée à deux degrés de liberté, [8] ou distribution de Rice modifiée, [3]. La présence d'une planète aura pour effet de décaler cette distribution de  $m$  :

$$p(i; m, c, \sigma) = \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{i - m + c^2}{\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{2c\sqrt{i - m}}{\sigma^2}\right) H(i - m) \quad (2)$$

où  $I_0(x)$  désigne la fonction de Bessel modifiée du premier type d'ordre 0 et  $H()$  la fonction de Heaviside. Rappelons que :

$$E[i] = \sigma^2 + c^2 + m, \text{ var}[i] = \sigma^4 + 2c^2\sigma^2 \quad (3)$$

La figure 1 montre une image « longue pose » obtenue en utilisant le logiciel CAOS [5] permettant d'obtenir des simulations réalistes de la propagation atmosphérique ainsi que de la correction de l'optique adaptative. On peut voir autour de la « pastille » centrale (masquant le résidu d'étoile sur l'axe optique) la zone dans laquelle la lumière diffractée de l'étoile a été atténuée par le coronographe, rendant ainsi possible la détection de la planète. Cette dernière

est repérée par la flèche. Cette figure illustre parfaitement la difficulté du problème qui provient en partie de l'effet d'amplification des speckles aux endroits où la partie déterministe  $c(\vec{x})$  est importante comme le montre (3).

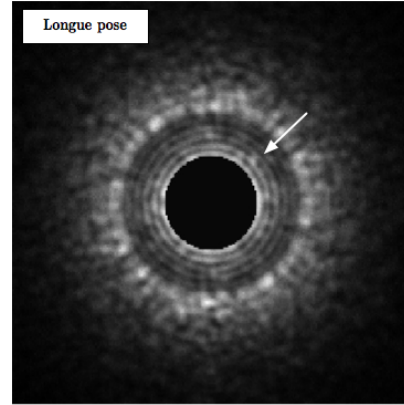


FIG. 1 – Image longue pose (4 sec.) obtenue en bande K. Les paramètres principaux sont : une atmosphère modélisée sous hypothèse de Taylor par 5 couches turbulentes, un télescope de 8m. de diamètre avec un coronographe de Lyot, une étoile de magnitude 5 et un rapport d'intensité entre la planète et l'étoile de  $5.10^{-5}$ . Dans cette simulation les effets de la turbulence atmosphérique sont réduits par une optique adaptative « extrême » corrigeant 95% des défauts du front d'onde.

Le modèle précédent décrit l'intensité à « fort flux » pour un pixel de l'image. Or, compte tenu de la faible intensité des objets observés, il est nécessaire de prendre en compte la nature quantique de la détection de la lumière. Le modèle physique associé est issu de la théorie semi-classique de la détection. Il définit la distribution des mesures comme étant la *transformée de Poisson Mandel* de la distribution de l'intensité à fort flux :

$$\Pr(N = n; m, c, \sigma) = \int_0^{+\infty} \frac{i^n}{n!} e^{-i} p(i; m, c, \sigma^2) di \quad (4)$$

En terme statistiques cette distribution correspond à un mélange « continu » de lois de Poisson généralement noté  $MP(p)$ . On pourra se référer par exemple à [10] pour une revue des principales propriétés de ces distributions.

Dans le cas  $m = 0$ , un calcul direct montre que :

$$\Pr(N = n; 0, c, \sigma) = \frac{\exp\left(-\frac{c^2}{\sigma^2}\right)}{1 + \sigma^2} \left(\frac{\sigma^2}{1 + \sigma^2}\right)^n {}_1F_1\left(n + 1; 1; \frac{c^2}{\sigma^2 + \sigma^4}\right) \quad (5)$$

où  ${}_1F_1(a; b; z)$  désigne la fonction confluyente hypergéométrique de Kummer, [1, p. 505]. En utilisant (13.1.27) et (13.1.2) de [1], cette fonction se simplifie en :

$${}_1F_1(n + 1; 1; z) = \exp(z) \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!k!(n-k)!} z^k \quad (6)$$

Dans le cas  $m \neq 0$ , en remplaçant (2) dans (4) on obtient après changement de variable :

$$\Pr(N = n; m, c, \sigma^2) = \exp(-m) \sum_{k=0}^n \frac{m^{n-k}}{(n-k)!} \Pr(N = k; 0, c, \sigma) \quad (7)$$

Cette relation de convolution montre que la présence d'une planète se manifeste par l'ajout à  $X \sim \Pr(N = n; 0, c, \sigma)$  d'une variable aléatoire  $Y$  ayant une distribution de Poisson de moyenne  $m$ ,  $Y \sim \mathcal{P}(m)$ . Soulignons le caractère général de ce résultat : la convolution d'une  $MP(g)$  avec une distribution de Poisson de paramètre  $m$  est une  $MP(f)$  avec  $f(i) = g(m - i)$  (voir par exemple [10]).

### 3 Statistique de test

On considère que l'on dispose de  $M$  images et on note  $n_k, k = 1, \dots, M$  les nombres de photons reçus sur le pixel à tester. La statistique de test du détecteur de Neyman Pearson pour les deux hypothèses  $m = 0$  et  $m \neq 0$  s'écrit :

$$T_\infty = \sum_{k=1}^M \log \left( \frac{\Pr(N = n_k; m, c, \sigma)}{\Pr(N = n_k; 0, c, \sigma)} \right) \quad (8)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha(k; m, c, \sigma^2) N_k \quad (9)$$

avec :

$$\alpha(k; m, c, \sigma) = \log \left( \frac{\Pr(N = k; m, c, \sigma)}{\Pr(N = k; 0, c, \sigma)} \right) \quad (10)$$

où  $N_k$  désigne le nombre de fois où  $k$  photons ont été mesurés sur le même pixel des  $M$  images. Les  $N_k$  suivent donc une distribution multinomiale de « probabilité de cellule »  $\Pr(N = k; 0, c, \sigma)$  (ou  $\Pr(N = k; m, c, \sigma)$ ) et d'indice  $M$ , [9].

L'évaluation des performances du détecteur reposant sur cette statistique est impossible compte tenu de la complexité du coefficient  $\alpha(k; m, c, \sigma)$ . Cependant, en substituant (7, 5) dans (10) on montre que :

$$\alpha(0; m, c, \sigma) = -m, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha(k; m, 0, \sigma) = \frac{m}{\sigma^2} \approx 0 \quad (11)$$

La figure 2 donne l'allure de  $\alpha(k; m, c, \sigma)$  en fonction de  $k$  pour différentes valeurs de  $c$  confirmant le fait que, dans la mesure où  $c$  est petit, seuls les  $\alpha(k; m, c, \sigma)$  pour  $k$  voisins de 0 possèdent des valeurs significatives et donc que seuls les  $N_k$  pour  $k$  petit joueront un rôle dans le processus de détection. Compte tenu de cela on définit une nouvelle statistique de test  $T_L$  obtenue en tronquant à  $L$  la somme dans (9).

Une façon d'évaluer les performances de  $T_L$  pour d'abord déterminer une valeur de  $L$  « optimale » et ensuite définir un rapport signal à bruit spécifique au problème consisterait bien entendu à utiliser une mesure de distance du type  $f$ -divergence entre  $T_L|m = 0$  et  $T_L|m \neq 0$ . Cependant, compte tenu de la difficulté de son calcul nous considérons comme critère d'évaluation le coefficient de déflexion

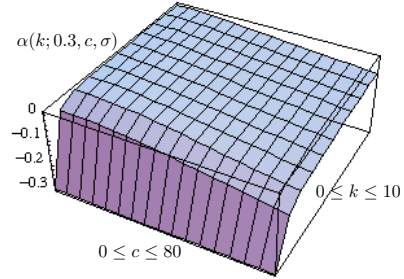


FIG. 2 – Allure de  $\alpha(k; m, c, \sigma)$  en fonction de  $k$  et  $c$ .

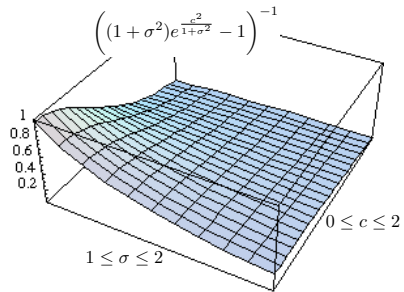


FIG. 3 – Rapport signal sur bruit  $d_0^2$  « normalisé ».

qui étant donné la loi des  $N_k$  s'écrit :

$$d_L^2 = \frac{(\mathbb{E}[T_L|m \neq 0] - \mathbb{E}[T_L|m = 0])^2}{\text{var}[T_L|m = 0]^2} \quad (12)$$

$$= \frac{N}{\xi} \sum_{k=0}^L (\Pr(N = k; m, c, \sigma) - \Pr(N = k; 0, c, \sigma)) \alpha(k; m, c, \sigma)^2, \quad (13)$$

avec :

$$\xi = \sum_{k=0}^L \Pr(N = k; 0, \cdot) (1 - \Pr(N = k; m, \cdot)) \alpha(k; \cdot)^2 - \sum_{k,q=0, k \neq q}^L \Pr(N = k; 0, \cdot) \Pr(N = q; 0, \cdot) \alpha(k; \cdot) \alpha(q; \cdot).$$

### 4 Étude de $T_0$

La technique dark-speckle correspond au cas extrême où l'on considère  $L = 0$ . En remplaçant (7,5) dans (13) on obtient après simplification :

$$d_0^2 = \frac{N(1 - e^{-m})^2}{(1 + \sigma^2)e^{\frac{c^2}{1+\sigma^2}} - 1} \quad (14)$$

La figure (3) représente le rapport signal sur bruit  $d_0^2$  « normalisé » en fonction de  $c$  et  $\sigma^2$ . Ce résultat montre que, dans la mesure où  $c$  et  $\sigma$  sont « petits », la statistique  $N_0$  contient une grande partie de l'information relative au



problème de détection posé, ce qui justifie l'utilisation de la technique de dark-speckle. Ceci n'est cependant plus vraie lorsque la composante déterministe  $c$  augmente, ce qui rend nécessaire l'utilisation des  $N_k$ ,  $k > 0$  pour la détection.

À ce titre, un développement limité de  $d_1^2$  donne :  $d_1^2 = d_0^2 + O(c^2)$  confirmant l'importance de l'utilisation de  $N_k$ , avec  $k > 0$  quand  $c$  est « grand ».

## 5 Test localement le plus puissant

Contrairement à  $T_0$ , l'utilisation de  $T_L$  pour  $L > 0$  nécessite la connaissance de  $m$  (diverses techniques « en ligne » ou « hors ligne » permettent d'obtenir des estimations de  $c(|\vec{x}|)$  et  $\sigma^2(|\vec{x}|)$ ). L'estimation de  $m$  à partir de (7) nécessitant une maximisation complexe pour chaque pixel de l'image et  $m$  étant supposé très « petit » on retiendra dans la suite l'utilisation du test localement le plus puissant (LMP), [11] :

$$T_\infty^{LMP} = \left. \frac{\partial T_\infty}{\partial m} \right|_{m=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \left. \frac{\partial \alpha(k; m, c, \sigma^2)}{\partial m} \right|_{m=0} N_k \quad (15)$$

L'utilisation des résultats de la section 2 conduit à :

$$T_\infty^{LMP} = -M + \sum_{k=1}^{\infty} \beta(k; c, \sigma^2) N_k \quad (16)$$

avec :

$$\begin{aligned} \beta(k; c, \sigma^2) &= \left. \frac{\Pr(N = n - 1; m, c, \sigma)}{\Pr(N = n; m, c, \sigma)} \right|_{m=0} \\ &= \left( 1 + \frac{1}{\sigma^2} \right) \frac{{}_1F_1\left(n; 1; \frac{c^2}{\sigma^2 + \sigma^4}\right)}{{}_1F_1\left(n + 1; 1; \frac{c^2}{\sigma^2 + \sigma^4}\right)} \end{aligned}$$

Les performances de ce test tronqué à  $L$  fréquences,  $T_L^{LMP}$ , se calculent en utilisant une expression analogue à celle de la déflexion (13). Il est ainsi possible d'évaluer analytiquement la perte de performance de  $T_L^{LMP}$  par rapport à  $T_L$ . Soulignons enfin que les performances de  $T_\infty^{LMP}$  peuvent s'obtenir en utilisant la distribution asymptotique ( $M$  grand) du LMP.

Le test  $T_\infty^{LMP}$  a été calculé sur des images courtes poses obtenues dans la configuration de l'image de la figure 1 : durant les 4 sec. une image courte pose de 1 ms. a été retenue toutes les 5 ms. ce qui conduit à traiter  $M = 800$  images. La figure 4 montre le résultat obtenu. Ce résultat montre un gain sensible par rapport à une simple intégration, (c.f. figure 1) et à la technique de dark-speckle (c.f. figure 4) pour la configuration étudiée.

## Références

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, 1972.
- [2] C. Aime and R. Soummer. *Astronomy with High Contrast Imaging*, chapter Introduction to Stellar Coronagraphy with Entrance Pupil Apodization. EAS Publications Series, 2002.
- [3] C. Aime and R. Soummer. Influence of speckle and Poisson noise on exoplanet detection with a coronagraph. In *European Signal Processing Conference*, 2004.
- [4] A. Boccaletti, C. Moutou, and L. Abe. Refined laboratory simulations of dark-speckle coronagraphy. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 141 :157–164, 2000.
- [5] M. Carillet, C. Véraud, B. Femenía, A. Riccardi, and L. Fini. Modelling astronomical adaptive optics : I. the software package caos. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2004.
- [6] A. Ferrari and C. Aime. Étude statistique de la détection d'exo-planètes en imagerie courte pose. In *Colloque sur le Traitement du Signal et des Images, GRETSI*, Toulouse, 2001. Paper 256.
- [7] A. Ferrari, G. Letac, and J.-Y. Tournet. Multivariate mixed Poisson distributions. In *European Signal Processing Conference*, Vienna, 2004.
- [8] N. L. Johnson, S. Kotz, and N. Balakrishnan. *Continuous Univariate Distributions*, volume 2. John Wiley, New York, 2nd edition, 1995.
- [9] N. L. Johnson, S. Kotz, and N. Balakrishnan. *Discrete Multivariate Distributions*. John Wiley, 1997.
- [10] D. Karlis and E. Xekalaki. Mixed Poisson distributions. *International Statistical Review*, 73(1) :35–58, 2005.
- [11] S. M. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Detection Theory*. Signal Processing Series. Prentice Hall, 1998.
- [12] A. Labeyrie. Images of exo-planets obtainable from dark speckles in adaptive telescopes. *Astronomy and Astrophysics*, 298 :544–548, 1995.
- [13] F. Roddier. *Adaptive Optics in Astronomy*. Cambridge University Press, 1999.

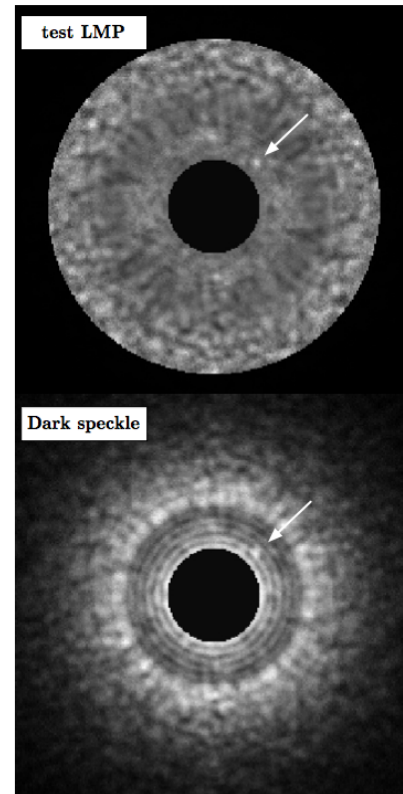


FIG. 4 – Test LMP et Dark-Speckle .



# Deux applications de processus ponctuels aux réseaux de communication

Olivier DOUSSE, Hung X. NGUYEN, Patrick THIRAN

Faculté Informatique et Communications  
EPFL, CH-1015 Lausanne, Suisse

Olivier.Dousse@epfl.ch, Hung.Nguyen@epfl.ch  
Patrick.Thiran@epfl.ch

**Résumé** – Cet article résume des résultats récents obtenus en utilisant des processus ponctuels (plus précisément, des bruits impulsionnels) pour deux applications dans le contexte des réseaux de communication: d’une part, la modélisation du trafic TCP/IP dans les réseaux d’épine dorsale, et d’autre part les propriétés de connectivité des réseaux ad hoc sans fil sous des contraintes de débit.

**Abstract** – This paper summarizes recent results obtained by using shot noise processes for two applications in communication networks: first, TCP/IP traffic models for backbone networks; and next the study of connectivity under rate constraints in wireless ad hoc networks.

## 1 Introduction

Les bruits impulsionnels (« shot noise ») forment une classe de processus aléatoires particulièrement utiles pour modéliser une grande catégorie de signaux rencontrés en biologie, physique ou informatique. Dans cet article, nous développons deux applications récentes de ces processus dans le contexte des réseaux de communication.

Les processus considérés dans cet articles sont des bruits impulsionnels de Poisson (voir par exemple [3]), qui s’écrivent comme des sommes

$$R(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_n(t - T_n)$$

où  $\{T_n, n \in \mathbb{Z}\}$  est une suite de variables aléatoires représentant les points d’un processus de Poisson sur la ligne  $\mathbb{R}$  (pour la première application) ou sur le plan  $\mathbb{R}^2$  (pour la seconde application), et où  $\{X_n(t), n \in \mathbb{Z}\}$  est une suite de fonctions aléatoires réelles (appelées impulsions), que nous supposons ici indépendantes et identiquement distribuées i.i.d définies sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^2$ , et indépendantes de la suite  $\{T_n\}$ .

La première application, développée à la section 2, est la modélisation des flux TCP/IP dans les réseaux d’épine dorsale Internet. Dans ce cas, la fonction  $X_n(\cdot)$  constituant les impulsions représente le débit instantané d’un flux TCP/IP, tandis que le processus d’arrivée des impulsions aléatoires est formé par la séquence des temps d’arrivée  $\{T_n\}$  des flux. Le processus ponctuel est donc uni-dimensionnel. On s’intéresse alors aux statistiques de deuxième ordre des flux TCP/IP.

La seconde application, développée à la section 3, concerne les réseaux “ad hoc” sans fil. Contrairement aux réseaux sans fil de type cellulaires, les utilisateurs (nœuds) d’un réseau ad hoc communiquent entre eux de proche en proche, sans passer par une infrastructure d’antennes fixes. Si la destination ne peut être atteinte directement à partir de la source, la communication s’établit en plusieurs sauts, les nœuds intermédiaires placés sur le chemin entre source et destination jouant alors le rôle de relais. Le processus ponctuel est ici formé par la position

des nœuds, et est en général bidimensionnel. La condition pour l’existence d’une communication directe entre deux nœuds du réseau est qu’elle puisse s’effectuer à un débit minimal fixé. Deux facteurs limitent ce débit: d’une part, l’atténuation du signal avec la distance séparant les nœuds, et d’autre part, les interférences créées par les communications concurrentes. Le calcul exact du débit qui peut être obtenu pour un tel canal multi-utilisateurs reste un problème ouvert en théorie de l’information, ce qui nous amène à faire des hypothèses supplémentaires. La première est assez pessimiste. Elle consiste à considérer les communications interférentes comme une source de bruit, s’ajoutant au bruit de fond, et modélisée par un bruit impulsionnel. Le graphe de connectivité résultant de ce modèle sera présenté à la section 3.1. La seconde est au contraire optimiste, et consiste à traiter un modèle de canal particulier, appelé “cannal relai” (relay channel), dans lequel une seule paire source-destination est active, tous les autres nœuds pouvant alors coopérer comme relais éventuels pour acheminer dans l’information de la source vers la destination. La contribution de ces relais peut à nouveau être modélisée par un processus ponctuel, comme nous le verrons à la section 3.2.

## 2 Application 1: modélisation du trafic TCP/IP

L’analyse et la modélisation de trafic dans l’Internet peut se faire à plusieurs niveaux de granularité différents, selon les données à disposition et le but poursuivi. Le niveau de granularité le plus fin est celui du paquet IP, mais il mène à des difficultés de modélisation à cause des la forte dépendance statistique entre paquets. Le niveau supérieur groupe les paquets en flux, définis comme les ensembles de paquets ayant les mêmes adresses de source et destination, mêmes numéros de port, et même numéro de protocoles. Les paquets à l’intérieur d’un flux sont fortement corrélés, mais les flux eux-mêmes sont nettement moins corrélés entre eux (en tout cas dans le coeur des

réseaux d'épine dorsale). D'autre part, pour un grand nombre d'applications, l'unité d'intérêt pour l'utilisateur est le flux plutôt que le paquet individuel. La modélisation du trafic à ce niveau de granularité a connu un intérêt important ces dernières années [2, 7, 8], et c'est celui que nous adoptons dans cet article. Enfin, signalons qu'on peut encore monter d'un niveau, en groupant les flux par session [10].

En général, les opérateurs dimensionnent les réseaux IP d'épine dorsale (« backbone IP networks ») de manière à éviter toute congestion à l'intérieur de ceux-ci, les goulots d'étranglement étant déplacés au réseau d'accès. Alors qu'un lien congestionné a pour effet de corrélérer les débits des flux TCP/IP l'empruntant, à cause du mécanisme AIMD (Additive Increase, Multiplicative Decrease) opéré par la source, un lien non congestionné n'introduit pas une telle corrélation. D'autre part, un grand nombre de flux d'origines et destinations variées sont multiplexés sur un lien du backbone, ce qui rend la séquence de leurs temps d'arrivées sur le lien proche d'une distribution de Poisson.

Désignons par  $\{T_n, n \in \mathbb{Z}\}$  la séquence des temps d'arrivée des flux, et par  $\{X_n(t), n \in \mathbb{Z}\}$  la suite des impulsions, représentant l'évolution du débit de chaque flux. Les observations du paragraphe précédent nous amènent à faire l'hypothèse que les variables  $T_n$  suivent un processus de Poisson et que les impulsions  $X_n$  sont i.i.d. Ces hypothèses sont assez bien vérifiées en pratique [2], et nous conduisent à décrire le débit instantané  $R(t)$  de l'agrégat des flux sur le lien comme le processus ponctuel

$$R(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_n(t - T_n). \quad (1)$$

Ce modèle, introduit dans [2] et validé sur des traces réelles du réseau IP de Sprint, nous permet de calculer les moments du premier et deuxième ordre de  $R(t)$ , si on dispose de la séquence des durées des flux  $\{D_n, n \in \mathbb{Z}\}$ , de la séquence des tailles des flux  $\{S_n, n \in \mathbb{Z}\}$  et de la distribution des pertes de paquets. Notons que

$$S_n = \int_0^{D_n} X_n(t) dt.$$

Alors que d'autres méthodes [4] de calcul de ces moments sont basées sur une modélisation fine du protocole TCP/IP à l'aide de chaînes de Markov, le modèle (1) est plus simple et moins détaillé, se contentant d'une modélisation du protocole par une équation aux récurrences du premier ordre. Il donne néanmoins d'excellentes bornes, comme nous le verrons ci-dessous.

Pour un flux TCP/IP, le mécanisme AIMD permet de déterminer une borne assez étroite de la fonction d'auto-covariance de  $X_n(t)$ . Le protocole TCP limite le nombre maximal de paquets d'un flux TCP/IP en transit dans le réseau par une fenêtre coulissante, qui avance d'un paquet chaque fois que l'acquittement d'un paquet précédemment envoyé a été reçu. L'algorithme AIMD consiste à adapter la taille de cette fenêtre en fonction des pertes de paquets. Grosso modo, si on néglige les effets de "slow-start" et de "congestion avoidance", la fenêtre est augmentée linéairement chaque fois que l'acquittement attendu est reçu, et est divisée par deux chaque fois qu'un acquittement n'est pas reçu en deans un certain intervalle de temps (time-out interval): c'est le mécanisme AIMD. En le formulant en terme d'évolution du taux instantané  $X_n(t)$  du  $n$ ème flux

sur un interval infinitésimal  $[t, t + dt]$  au lieu de fenêtre coulissante, on trouve

$$X_n(t + dt) - X_n(t) = -\frac{X_n(t)}{2} p_l(t) + \alpha dt, \quad (2)$$

où  $\alpha$  désigne un facteur inverse au temps aller-retour d'un paquet, et  $p_l(t)$  est la probabilité de perte d'un paquet dans l'intervalle  $[t, t + dt]$ . Soit  $r_d(\tau) = \mathbb{E}[X_n(t)X_n(t + \tau) \mid D_n = d]$  la fonction d'autocorrélation des flux conditionnée sur leur durée. En supposant que les pertes suivent un processus de Poisson, d'intensité constante  $\lambda_\ell$ , on déduit de (2) l'équation différentielle

$$\frac{dr_d(\tau)}{d\tau} = -\frac{\lambda_\ell r_d(\tau)}{2} + \alpha \mathbb{E}[X_n(t) \mid D_n = d]. \quad (3)$$

pour  $\tau > d$ . On calcule [1, 2] que  $\mathbb{E}[X_n(t) \mid D_n = d] = 2\alpha/\lambda_\ell$  et  $r_d(0) = 4\mathbb{E}^2[S_n \mid D_n = d]/3d^2$ , dont on déduit la solution de (3) pour  $|\tau| > d$ :

$$r_d(\tau) = \frac{\mathbb{E}^2[S_n \mid D_n = d]}{d^2} \left( 1 + \frac{1}{3} \exp\left(\frac{-\alpha|\tau|d}{\mathbb{E}[S_n \mid D_n = d]}\right) \right).$$

A partir de ce résultat, on obtient une borne la fonction d'auto-covariance  $C_R(\tau)$  sur l'entière distribution des durées des flux. En notant  $1/\lambda = \mathbb{E}[T_n]$  la temps moyen entre arrivées de flux, on trouve [9]

$$C_R(\tau) \leq \lambda \mathbb{P}(D_n > |\tau|) \left( \frac{1}{3} \mathbb{E} \left[ \frac{S_n^2(D_n - |\tau|)}{D_n^2} e^{-\alpha|\tau| \frac{D_n}{S_n}} \mid D_n > |\tau| \right] + \mathbb{E} \left[ \frac{S_n^2(D_n - |\tau|)}{D_n^2} \mid D_n > |\tau| \right] \right). \quad (4)$$

Cette borne comporte deux termes. Le premier décroît exponentiellement avec  $\tau$ , le second seulement linéairement. Il existe donc deux régimes différents: pour de faibles valeurs de  $\tau$ , le premier terme exponentiel domine la somme, tandis que le second terme linéaire l'emporte pour de grandes valeurs de  $\tau$ . C'est en effet le comportement observé à la figure 1, qui compare la borne avec la fonction  $C_R(\tau)$  obtenue par simulation (Simulateur ns, les paramètres de simulation sont décrits dans [9]). On remarque l'excellente approximation du résultat de simulation par l'expression (4), dans laquelle par ailleurs le taux de pertes  $\lambda_\ell$  n'apparaît pas.

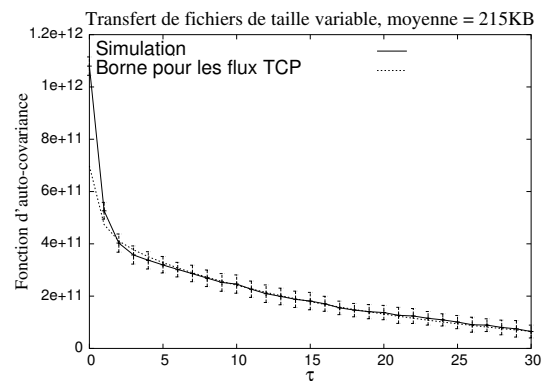


FIG. 1: Résultats de simulation montrant la fonction d'auto-covariance  $C_R(\tau)$  en fonction de l'écart temporel  $\tau$ .

### 3 Application 2: connectivité et débit dans les réseaux ad hoc

Dans cette seconde application, nous considérons des réseaux sans fil ad hoc. Nous supposons que les positions des noeuds du réseau ad hoc suivent un processus de Poisson  $\mathcal{N}$  sur  $\mathbb{R}^2$  d'intensité  $\lambda > 0$ .

La puissance du signal émis par le noeud  $i$  et reçue par le noeud  $j$  est  $PL(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ , où  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{x}_j$  sont les positions respectives des noeuds  $i$  et  $j$  dans le plan,  $L(\cdot)$  est la fonction d'atténuation des ondes radio dans le milieu, et  $P$  est la puissance émettrice (supposée identique pour tous les noeuds).

#### 3.1 Modèle basé sur le rapport signal sur bruit et interférences

Nous supposons que le noeud  $i$  peut transmettre des données au noeud  $j$  si le signal reçu par  $j$  est assez puissant, en comparaison au bruit. Ce dernier est la somme d'une composante constante  $N_0$ , représentant le bruit thermique de fond, et d'une composante représentant les interférences générées par les transmissions correspondantes. Formellement, cette condition s'écrit

$$\frac{PL(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{N_0 + \gamma P \sum_{k \neq i,j} L(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)} \geq \beta, \quad (5)$$

où  $\beta$  est le rapport signal sur bruit requis pour pouvoir décoder l'information transmise. Le coefficient  $\gamma$  est l'inverse du gain du système, il pondère l'effet des interférences et dépend de l'orthogonalité des codes utilisés pendant les transmissions simultanées. Un lien, représentant une communication directe entre les noeuds  $i$  et  $j$ , existe si (5) est valable dans les deux directions  $i$  vers  $j$  et  $j$  vers  $i$ . Cette condition définit un graphe  $\mathcal{G}(\gamma, \lambda)$ , dont certaines propriétés sont analysées dans [5]. En particulier, l'existence d'une transition de phase est démontrée: lorsque la densité spatiale des noeuds  $\lambda$  est suffisamment élevée, il existe une valeur  $\gamma^*(\lambda)$ , appelée seuil de percolation, telle que si  $\gamma < \gamma^*$  alors le graphe comporte une composante de noeuds connectés de taille et d'étendue infinie (on parle de phase sur-critique); tandis que si  $\gamma > \gamma^*$ , alors toutes les composantes de noeuds connectés sont de taille presque sûrement finie (phase sous-critique). Les figures 2 et 3 montrent le graphe  $\mathcal{G}(\gamma, \lambda)$ , pour la même réalisation du processus  $\mathcal{N}$ , et deux valeurs différentes de  $\gamma$ . La première,  $\gamma = 0$ , revient à négliger les interférences, et donne un graphe sur-critique, tandis que la seconde  $\gamma = 0.02 > \gamma^*(\lambda)$  tient compte des interférences, et rend le graphe sous-critique. Néanmoins, en augmentant la densité  $\lambda$  de noeuds, on rend à nouveau le graphe sur-critique (fig 4).

Nous remarquons que le terme d'interférence est un bruit impulsionnel sur  $\mathbb{R}^2$ , qui s'écrit

$$I(\mathbf{x}) = P \sum_{i \in \mathcal{N}, \mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}} L(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \quad (6)$$

et dont la valeur influence fortement le seuil de percolation  $\gamma^*(\lambda)$ . En particulier, il est nécessaire que l'espérance de  $I(\mathbf{x})$  soit finie, ce qui entraîne que pour des fonctions d'atténuation isotropiques  $L(\mathbf{x}) = l(\|\mathbf{x}\|)$ ,

$$\int_y^\infty l(t)dt < \infty, \text{ pour } y \text{ suffisamment grand.}$$

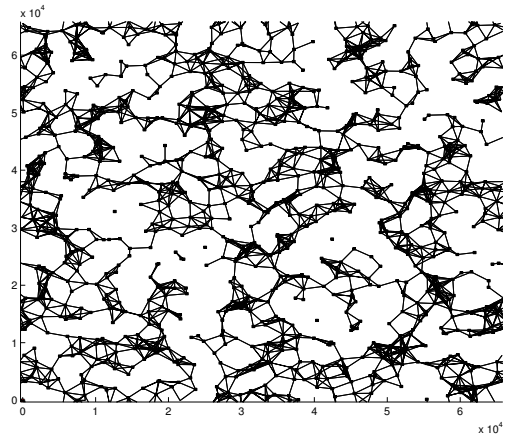


FIG. 2: Un exemple de graphe  $\mathcal{G}(0, \lambda)$  avec  $\gamma = 0 < \gamma^*(\lambda)$ .

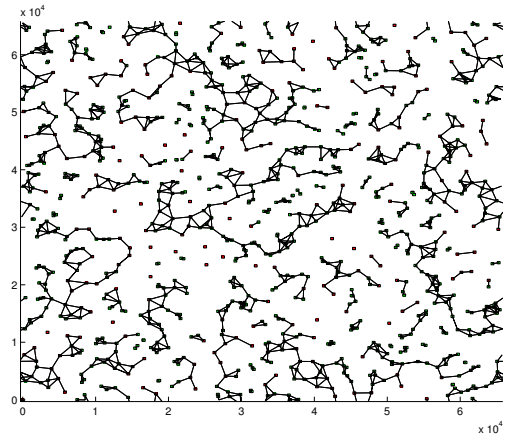


FIG. 3: Un exemple de graphe  $\mathcal{G}(0.2, \lambda)$  avec  $\gamma = 0.02 > \gamma^*(\lambda)$ . Les interférences fragmentent le graphe en un grand nombre de petites cliques.

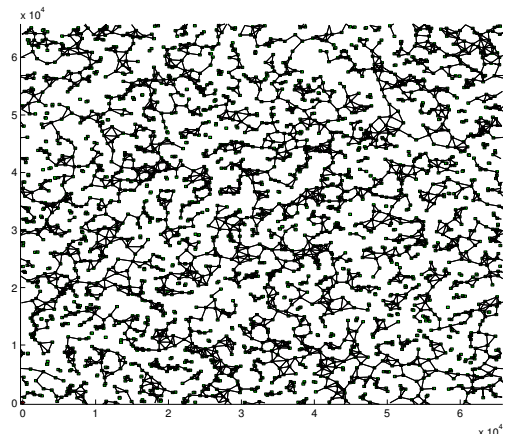


FIG. 4: Un exemple de graphe  $\mathcal{G}(0.2, \lambda)$  avec  $\gamma = 0.02 < \gamma^*(\lambda)$ .

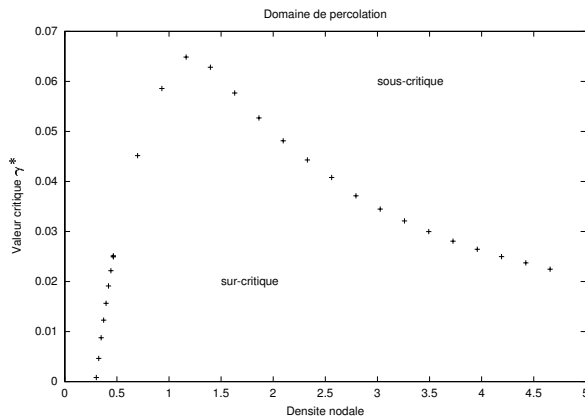


FIG. 5: Seuil critique  $\gamma^*(\lambda)$  en fonction de la densité nodale  $\lambda$ . [Les paramètres de simulation sont  $\beta = 1$ ,  $N_0 = 10^4$  et  $P = 10^5$ .]

Nous avons montré que cette condition est non seulement nécessaire, mais pratiquement suffisante (si on ajoute les hypothèses naturelles d'avoir une fonction  $l(\cdot)$  continue, strictement décroissante, et telle que  $\beta N_0/P < l(0) \leq 1$ ) pour démontrer l'existence d'un seuil de percolation  $\gamma^*(\lambda) > 0$  pour des valeurs de  $\lambda$  suffisamment grandes. La forme de la fonction  $\gamma^*(\lambda)$  obtenue par simulation est représentée à la figure 5.

### 3.2 Modèle basé sur le canal-relai

La définition de connectivité basée sur le rapport (5) ne permet pas d'établir directement des résultats validés par la théorie de l'information, à cause de l'hypothèse sur les noeuds traitant les interférences comme du bruit. Pour obtenir un résultat de nature fondamentale en théorie de l'information, on prend la définition suivante: on suppose que deux noeuds sont connectés si et seulement si ils peuvent échanger des données à un débit au moins égal à  $R$ , les autres noeuds pouvant servir de relais.

Nous montrons alors dans [6] que la proportion de noeuds pouvant communiquer dans ce modèle est au plus  $\hat{\theta}$  avec grande probabilité (i.e., une probabilité tendant vers 1 quand le nombre total de noeuds du réseau  $n \rightarrow \infty$ ), où

$$\hat{\theta} = \mathbb{P}[I(0) \geq N_0 (e^{2R} - 1)],$$

avec  $I(0)$  désignant le même processus ponctuel que (6) à l'origine:

$$I(0) = P \sum_{i \in \mathcal{N}} L(x_i).$$

En d'autres termes, même dans le cas le plus favorable où une seule paire de noeuds communique entre eux et où tous les autres noeuds ne peuvent qu'aider à cet échange d'information (au contraire du modèle de la section 3.1), une connectivité à un taux  $R > 0$  donné ne peut être garantie à toutes les paires possibles de noeuds du réseau. La démonstration de ce résultat fait appel à des résultats connus sur la capacité des réseaux multi-utilisateurs en théorie de l'information, et à des propriétés de stationnarité et d'ergodicité du processus ponctuel  $I$ .

Par contre, si on s'impose de connecter au moins une fraction  $0 < \theta < 1$  de noeuds du réseau, il existe un taux  $R > 0$ , indépendant du nombre de noeuds  $n$  dans le réseau, tel que n'importe quel noeud pris dans un sous-ensemble de  $n\theta$  noeuds

du réseau puisse communiquer au taux  $R$  et avec grande probabilité avec n'importe quel autre noeud de ce sous-ensemble [6]. En d'autres termes, si on laisse tomber une fraction  $1 - \theta$  de noeuds particulièrement mal placés, on peut assurer un taux  $R$  à tous les autres noeuds. Cette fraction  $1 - \theta$  de noeuds éliminés peut être aussi petite que l'on veut, mais non nulle.

## 4 Conclusion

Cet article a montré l'importance et l'utilité des processus ponctuels de Poisson pour la modélisation de réseaux de communication, que ce soit dans sur support filaire (Application 1) ou sans fil (Application 2).

**Remerciements** Ce travail est financé en partie par le fonds DICS 1830 de la Fondation Hasler, Berne, et par le Pôle de Recherche National MICS du Fonds National Suisse.

## Références

- [1] E. Altman, K. Avrachenkov and C. Barakat, "A stochastic model for TCP/IP with stationary random losses", *Proc ACM SIGCOMM*, Sep. 2000.
- [2] C. Barakat, P. Thiran, G. Iannaccone, C. Diot et P. Owezarski, "Modeling Internet Backbone Traffic at the Flow Level", *IEEE Transactions on Signal processing*, vol. 51(8), pp. 2111-2124, Août 2003.
- [3] D. Daley and D. Vere-Jones, *An introduction to the theory of point processes*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [4] D. R. Figueiredo, B. Liu, V. Misra and D. Towsley, "On the Autocorrelation Structure of TCP Traffic", *Computer Networks Journal*, 'Special Issue on 'Advances in Modeling and Engineering of Long-Range Dependent Traffic', 2002.
- [5] O. Dousse, F. Baccelli et P. Thiran, "Impact of Interferences on Connectivity of Ad Hoc Networks", *IEEE/ACM Transactions on Networking*, vol. 13(2), pp. 425-436, Avril 2005.
- [6] O. Dousse, M. Franceschetti et P. Thiran, "Information theoretic bounds on the throughput scaling of wireless relay networks", in *Proc. Infocom'05*, Miami, Mars 2005.
- [7] N. Hohn, D. Veitch and P. Abry, "Cluster processes: a natural language for network traffic", *IEEE Transactions on Signal processing*, *IEEE Transactions on Signal processing*, vol. 51(8), Août 2003.
- [8] M. Krunz and A. Makowski, "Modelling video traffic using M/G/Infinity input processes: A compromise between Markovian and LRD models", *IEEE Journal on Selected Areas in Communication*, vol. 16, pp. 733-748, Juin 1998.
- [9] H. X. Nguyen, P. Thiran, G. Iannaccone, C. Diot et C. Barakat, "On the Correlation of TCP Traffic in Backbone Networks", in *Proc. ISCAS'04*, Mai 2004.
- [10] C. Nuzman, I. Saniee, W. Sweldens and A. Weiss, "A compound model for TCP connection arrivals", in *Proc. ITC workshop*, Monterey, Sept. 2000.

# Traitement du signal et modélisation probabiliste du trafic Internet

Fabrice GUILLEMIN

France Télécom, 2 Avenue Pierre Marzin, 22300 Lannion  
 Fabrice.Guillemain@francetelecom.com

**Résumé** – On présente dans cet article une modélisation probabiliste du trafic Internet sur un lien haute vitesse d'un réseau commercial. Le modèle probabiliste est validé en utilisant des outils de traitement du signal (densités spectrales, filtres en ondelettes). La conclusion principale est que la prédominance des applications peer-to-peer a un effet de lissage sur trafic global et qu'aucun phénomène d'auto-similarité n'est observé, bien que les densités spectrales puissent laisser penser le contraire.

**Abstract** – We present in this paper a probabilistic model for representing the bit rate rate of Internet traffic on a high speed backbone link of an IP commercial network. This probabilistic model is validated by using tools from digital signal processing (spectral densities, wavelet filters). The main conclusion is that the prevalence of peer-to-peer applications tends to smooth out traffic and that there is no evidence for self-similarity, even though the analysis of spectral densities may be misleading.

## 1 Introduction

L'observation au début des années 1990 de phénomènes ressemblant à de l'auto-similarité dans des traces de trafic capturées sur le réseau local de Bellecore par Leland, Willinger et Taquq [8, 11] a ouvert la voie à une nouvelle activité de recherche dans le domaine du télétrafic : la modélisation du trafic Internet par des modèles auto-similaires, par exemple le mouvement brownien fractionnaire (cf. Norros [16]). Il s'en est suivi une myriade d'études sur des modèles de files d'attente avec des processus auto-similaires en entrée, cf. par exemple Norros [15], Massoulié et Simonian [13].

Les processus auto-similaires ont la particularité de posséder des dépendances à long terme. Bien que les concepts de dépendance à long terme et d'auto-similarité ne soient pas du tout équivalents, le pas est souvent franchi dans la communauté des réseaux pour affirmer qu'un processus exhibant des dépendances à long terme est auto-similaire. Connue depuis plusieurs années en télétrafic (cf. par exemple les travaux de Garrett [9] sur la vidéo), la dépendance à long terme dans le cadre de l'Internet est prétendument engendrée par l'hétérogénéité des tailles de fichiers transférés à travers le réseau, celles-ci pouvant atteindre plusieurs centaines de Megaoctets [5]. Là encore, la dépendance à long terme, due par exemple à des transferts de fichiers avec des volumes suivant des lois de Pareto, a donné naissance à une littérature abondante dans le domaine des files d'attente, cf. Mazumdar et Likhonov [12], Dumas et Simonian [6] et les nombreux articles de Zwart, Boxma, et Borst qui ont mis au point une technologie pour calculer le comportement asymptotique d'une kyrielle de files d'attente alimentées par la superposition de processus avec des dépendances à long terme.

En dehors de l'activité intense sur les processus avec un comportement auto-similaire dans le domaine du télétrafic et des files d'attente, l'auto-similarité se prête particulièrement bien à l'étude du trafic par des méthodes de traitement du signal, en particulier via la théorie des ondelettes pour l'estimation du paramètre de Hurst quand le trafic est monofractal. A cet égard, l'estimateur de ce paramètre conçu par Abry

et Veitch [1] à l'aide des ondelettes fait autorité dans le domaine et sert souvent de point de comparaison pour évaluer d'autres estimateurs (cf. par exemple [4]). Cet estimateur tire parti de la divergence du spectre de puissance près de l'origine (i.e., sur des fréquences très faibles). Les ondelettes se révèlent également très puissantes pour étudier des processus plus compliqués comme par exemple les processus multifractals. Ces derniers ayant été introduits dans le domaine du télétrafic par Lévy Véhel [18] et ensuite repris par d'autres, Feldmann *et al* [7] notamment.

Les outils de traitement du signal sont effectivement efficaces pour calculer des paramètres de trafic, une fois que le modèle est bien identifié (un mouvement brownien fractionnaire par exemple). Ce type d'outil ne permet par contre pas de valider ou d'invalider un modèle dans son ensemble ; un algorithme, aussi fût-il, donne toujours un résultat, mais ne permet pas de garantir que le processus a bien la forme supposée. L'application de l'algorithme de Abry et Veitch sur du trafic de cœur de réseau de Sprint [19] donne par exemple des paramètres de Hurst compris entre 0.6 et 0.9, valeurs qui sont devenues peu à peu standard dans la littérature sur la modélisation du trafic Internet. Mais une telle démarche ne garantit rien que le trafic est effectivement auto-similaire, même si l'approche est étayée par des études de fonctions d'autocorrélation dont le calcul se révèle souvent délicat dans la pratique. Par ailleurs, une singularité du spectre de puissance peut être très bien due à une non stationnarité (cf. par exemple [17]).

L'identification des modèles relève en premier lieu de la modélisation probabiliste. De nombreux modèles ont été proposés dans la littérature pour représenter le trafic sur un lien d'un réseau IP haut débit (cf. par exemple [3] pour la modélisation du trafic dans le réseau de Sprint). Dans le présent article, on considère du trafic ADSL capturé sur le réseau IP commercial de France Télécom et on s'appuie sur l'article [2]. L'originalité de ce type de trafic vient de la prédominance des applications peer-to-peer (p2p), représentant près de 80% en volume, et que le trafic global peut être décrit par des files  $M/G/\infty$ , cette file d'attente ayant été déjà proposée dans la littérature [10, 14].

## 2 Trafic dans un réseau IP commercial

### 2.1 Remarques préliminaires

On considère dans cette section une trace de trafic capturée sur un lien à 1 Gbit/s du réseau haute vitesse de France Télécom, qui dessert plusieurs plaques ADSL en région parisienne. Plusieurs captures ont été effectuées pour différents niveaux de charge du lien (de 15% à 45%). L'analyse décrite ci-après se rapporte à une trace d'octobre 2003 entre 21h et 23h, période d'activité de pointe des clients ADSL ; la charge du lien est de l'ordre de 45%. On ne s'intéresse par la suite qu'au trafic TCP descendant (i.e., du cœur de réseau vers les plaques ADSL).

Le trafic observé dans les mesures décrites ici semble plus ou moins stationnaire. Cette hypothèse est toujours délicate à vérifier sur du trafic réel et peu de tests de stationnarité donnent des réponses positives. D'une manière générale, il existe des variations journalières dans le trafic et des motifs se répètent de manière plus ou moins périodique avec des périodes de plusieurs heures (comportement cyclostationnaire). Quand on s'intéresse à une plage de temps plus courte (une à deux heures), l'amplitude des variations des transferts de données, qui peuvent s'étaler sur plusieurs dizaines de minutes, rend invalides les tests de stationnarité. Pour juger de la stationnarité du trafic dans l'exemple considéré ici, on a vérifié une dérive assez négligeable de la moyenne du débit calculée par un algorithme auto-régressif du premier ordre.

La composition du trafic est donnée par le tableau 1. On remarque d'emblée que la majeure partie du trafic est due aux applications p2p (principalement eDonkey). Pour calculer la contribution des différentes applications au trafic global, on n'a considéré que les numéros de port et donc une partie référencée "autres" dans le tableau 1 est certainement engendrée par des applications p2p utilisant des ports non conventionnels. Quand on peut analyser le trafic de manière exhaustive jusqu'à la couche "application" (du modèle OSI), on s'aperçoit très vite que la proportion du trafic p2p avoisine les 70-80%.

	Applications	pourcentage
non p2p	http	14.5
	ftp	1.5
	nntp	1.0
	autres	26.7
	trafic non p2p total	43.7
p2p	eDonkey	50.6
	KaZaA&Morpheus	3.8
	Napster	1.5
	Gnutella	0.4
	total du trafic p2p	56.3

TAB. 1 – Composition du trafic ADSL par application.

La présence du trafic p2p a un impact fondamental sur le comportement global du trafic. En effet, les fichiers téléchargés par un protocole p2p sont la plupart du temps segmentés en fichiers de taille moyenne (des *chunks* de l'ordre de 10 M octets), ceux-ci pouvant être rapatriés de manière asynchrone et en parallèle par un pair. Cette remarque concerne les transferts de "gros" fichiers, mais les protocoles p2p se distinguent également par une activité intense en termes de signalisation.

### 2.2 Décomposition du trafic

Pour modéliser le trafic, on adopte une approche fondée sur la notion de flot. Un flot est constitué par un ensemble de paquets IP ayant en commun les adresses et les ports de source et de destination. Une fois la notion de flot définie, l'idée de l'approche est de décomposer le trafic en plusieurs classes élémentaires, une classe correspondant subjectivement à un type de transfert (téléchargement de gros fichiers ou transaction éphémère pour un type de protocole donné). En introduisant une distinction arbitraire, par exemple en appelant souris un transfert d'au plus 20 paquets sur une unique connexion TCP et éléphant un transfert de plus de 20 paquets, on peut classer le trafic global de la manière suivante :

- souris p2p (signalisation des protocoles p2p),
- souris non p2p (pages web essentiellement et la signalisation associée),
- éléphant d'acquittements (i.e., un éléphant dont la taille moyenne des paquets est inférieure ou égale à 80 octets),
- éléphant de transfert de données (i.e., un éléphant dont la taille moyenne des paquets est supérieure à 80 octets).

Etant donné que le trafic observé est issu du réseau de cœur vers les clients ADSL, les éléphants d'acquittements sont engendrés par des pairs qui téléchargent des fichiers à partir de terminaux connectés aux plaques ADSL desservies par le lien observé.

Pour chaque classe (p2p et non p2p), il est possible d'agréger les souris pour donner naissance à de nouvelles entités, appelées par la suite macro-souris. Le point essentiel est que le processus d'arrivée des macro-souris peut être raisonnablement approché par un processus de Poisson. Une macro-souris p2p peut être reliée à une notion "d'appel" dans le réseau p2p : un pair cherchant un contenu envoie un certain nombre de requêtes à d'autres pairs pour localiser le fichier. L'agrégation des souris non p2p correspond au fait que lors du rapatriement d'une page Web, plusieurs connexions TCP peuvent être simultanément ouvertes pour le transfert de plusieurs objets.

En ce qui concerne les éléphants, ceux transportant des acquittements donnent naissance à un trafic de faible intensité, qui peut être approché par un bruit blanc. Les éléphants de données ne sont pas continuellement actifs mais sont composés de rafales. Quand on souhaite modéliser le débit sur le lien, on est alors amené à segmenter les éléphants en mini-éléphants, une telle entité étant composée d'une rafale d'au moins 20 paquets et un mini-éléphant est terminé quand aucun paquet n'est observé pendant 20 secondes. Le processus d'arrivée des mini-éléphants peut être approché par un processus de Poisson. Il reste un trafic résiduel dû aux paquets des éléphants qui ne peuvent pas être inclus dans les mini-éléphants. Ce trafic est de très faible intensité et peut être négligé dans l'analyse.

Le point remarquable est que chaque classe d'entités (mini-éléphants, macro-souris p2p et non p2p) vérifie les propriétés suivantes :

1. La distribution de la durée  $S$  d'une entité, qui est évidemment une variable aléatoire, peut être approchée par une loi de Weibull à deux paramètres, i.e.

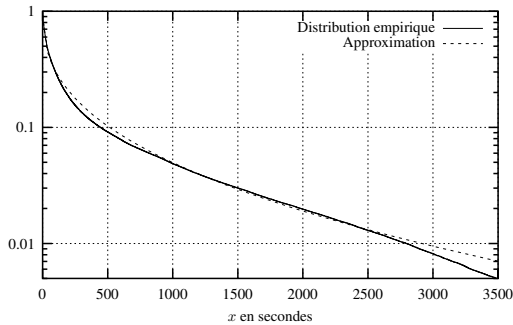
$$\mathbb{P}(S > x) \approx \exp(-(x/\eta)^\beta),$$

où  $\eta$  est le paramètre d'échelle et  $\beta$  celui de forme.

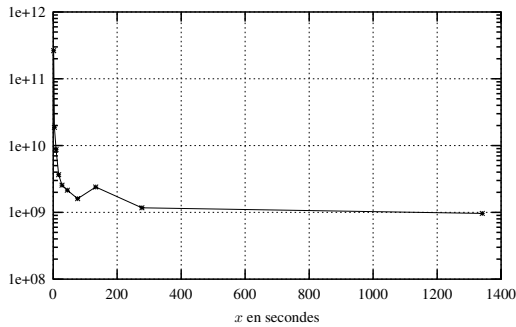
2. Le débit d'une classe est certes une variable aléatoire mais dépend assez peu de la durée, si bien que la quantité

$\mathbb{E}[Y^2 | S]$  peut être approchée par une constante  $\kappa$ , où  $Y$  est le débit fluide, égal au volume d'une entité divisé par sa durée.

L'approximation par une loi de Weibull à deux paramètres et la faible dépendance du débit par rapport à la durée sont illustrées par la figure 1 pour les mini-éléphants. Ce dernier phénomène semble être dû au fait que les protocoles p2p limitent eux-mêmes les débits des connexions TCP. Ceci a une importance fondamentale pour les caractéristiques spectrales du trafic qui seront analysées par la suite.



Durée des mini-éléphants.



Carré du débit en fonction de la durée  $\mathbb{E}[Y^2 | S]$ .

FIG. 1 – Durée et débit des mini-éléphants.

Les différentes valeurs des paramètres  $\eta$ ,  $\beta$  et  $\kappa$  pour les différentes classes sont données par le tableau 2. Dans celui-ci, le paramètre  $\lambda$  fait référence à l'intensité du processus de Poisson décrivant les arrivées des entités d'une classe. Par la suite, les éléphants, les macro-souris non p2p et les macro-souris p2p sont caractérisés par des grandeurs indexées respectivement par  $e$ ,  $m$  et  $\mu$ .

	mini-éléphants	m-souris non p2p	m-souris p2p
$\lambda$	40	326.47	903.3
$\beta$	0.399	0.873	1.207
$\eta$	64.043	3.172	6.36
$\mathbb{E}[S]$	192.95s	3.249s	5.695s
$\kappa$	4e9	3.5e8	= 1.5e6
$Y$	6.32e	1.87e4	1.22e3
$\sigma^2$	20.25e12	9.6e11	9.35e10
$\lambda\kappa$	1.6004e11	1.14e11	1.35e9

TAB. 2 – Caractéristiques des mini-éléphants et des macro-souris.

### 3 Modélisation du débit

Une hypothèse classique en télétrafic pour modéliser le débit de la superposition d'un grand nombre de flux de paquets est de supposer que celui-ci peut être représenté par le débit fluide auquel s'ajoute un bruit blanc dû aux arrivées discrètes des paquets. Si on intègre dans le bruit blanc le débit des éléphants d'acquittements, on obtient alors la représentation suivante pour le débit instantané  $\{X_t\}$  sur le lien observé

$$X_t \sim \sum_i \Lambda_t^i + \sigma \varepsilon_t + d. \quad (1)$$

Dans cette équation,  $\{\varepsilon_t\}$  est un bruit blanc standard et  $\sigma$  est l'amplitude du bruit donnée par  $\sigma^2 = \sigma_e^2 + \sigma_m^2 + \sigma_\mu^2 + \sigma_a^2$ , où  $\sigma_e$ ,  $\sigma_m$  et  $\sigma_\mu$  sont respectivement les amplitudes des bruits des mini-éléphants, des macro-souris non p2p et des macro-souris p2p (cf. le tableau (2)), et  $\sigma_a$  est le bruit des éléphants d'acquittements, qui ont un débit moyen  $d$ . Enfin,  $\{\Lambda_t^i\}$ ,  $i \in \{e, m, \mu\}$ , sont les débits fluides des mini-éléphants, des macro-souris non p2p et p2p. Un débit fluide  $\{\Lambda_t^i\}$  se représente comme  $\Lambda_t^i = Y_i N_t^i$ , où  $N_t^i$  est le nombre de clients dans une file  $M/G/\infty$  avec des lois de service Weibull et  $Y^i$  est le débit fluide d'une entité (égal à son volume divisé par sa durée).

Comme les processus  $\{X_t\}$  et  $\{\Lambda_t^i\}$  sont (plus ou moins) stationnaires au second ordre, la représentation (1) se traduit alors en termes de densités spectrales par

$$\psi(x) = \sum_i \psi_i(x) + \frac{\sigma^2}{2\pi},$$

où  $\psi(x)$  est la densité spectrale du processus  $\{X_t\}$  et  $\psi_i(x)$  celle du débit fluide  $\{\Lambda_t^i\}$ ,  $i \in \{e, m, \mu\}$ .

Avec la modélisation présentée ci-dessus, reposant sur des modèles de files d'attente  $M/G/\infty$  avec des services Weibull, on a la représentation intégrale suivante pour la fonction  $\psi_i$  :

$$\psi_i(x) = \frac{\lambda_i \kappa_i}{\pi x} \int_0^\infty \sin(hx) e^{-(h/\eta_i)^{\beta_i}} dh. \quad (2)$$

Il n'existe malheureusement aucune expression explicite (en termes de fonctions spéciales) pour la fonction  $\psi_i(x)$  définie par l'équation (2). On sait néanmoins que  $\psi_i(x) = \lambda_i \kappa_i / (\pi x^2)$  pour  $x$  suffisamment grand. Par ailleurs, au voisinage de l'origine, on a un comportement du type

$$\psi_i(x) \sim \kappa_i \lambda_i \eta_i (1 - c_i x^2) / (\pi \beta_i)$$

pour une certaine constante  $c_i > 0$  qui dépend des différents paramètres. Ainsi, la densité spectrale n'a pas de singularité en 0. Cependant, pour des valeurs faibles du paramètre  $\beta_i$ , la fonction  $\psi_i(x)$  peut être approchée par  $\lambda_i \kappa_i / (\pi x^2)$  pour des valeurs de  $x$  assez petites, le comportement parabolique en 0 n'apparaissant que pour de très petites valeurs de  $x$ . Ceci peut laisser supposer que le spectre est en  $1/f^2$  alors que ce n'est qu'un artefact de la loi de Weibull avec un paramètre de forme relativement petit (de l'ordre de 0.4 comme pour les mini-éléphants). Enfin, le comportement en  $c/x^2$  pour les hautes fréquences peut être utilisé avec une décomposition en ondelettes pour estimer le niveau de bruit et ensuite pour appliquer un filtre en ondelettes afin d'éliminer le bruit.

Le processus à temps continu  $\{X_t\}$  n'est pas directement observable. En lieu et place, on calcule le débit  $\{X_n\}$  sur des intervalles successifs de  $\Delta = 100$  millisecondes et on estime

le débit fluide d'une composante  $i \in \{e, m, \mu\}$  sur le  $i$ ème intervalle de mesure par

$$\tilde{\Lambda}_n^i = \frac{1}{\Delta} \int_{n\Delta}^{(n+1)\Delta} \Lambda_s^i ds. \quad (3)$$

En utilisant un filtre en ondelettes pour éliminer le bruit, on obtient le débit filtré  $\{\bar{X}_n\}$  sur les intervalles de temps successifs de longueur  $\Delta$ ; la densité spectrale de ce débit est notée  $\bar{\psi}$ . En supposant que  $\tilde{\Lambda}_n^i \sim \Lambda_{n\Delta}^i$ , pour valider la représentation (1), on doit avoir pour  $x \in [0, \pi]$ ,  $\bar{\psi}(x/\Delta) \sim \Delta \sum_i \psi_i(x)$ , soit  $\bar{\psi}(x/\Delta) \sim \Delta \psi_e(x)$  près de l'origine. Dans les basses fréquences, la figure 2 montre un assez bon accord entre résultats empirique et théorique et un comportement en  $1/f^2$  du spectre sur la plage de fréquences atteignables sur une trace de 2 heures alors qu'il n'y a en réalité pas de singularité en 0. Le spectre du trafic global dans les basses fréquences est proche de celui des mini-éléphants.

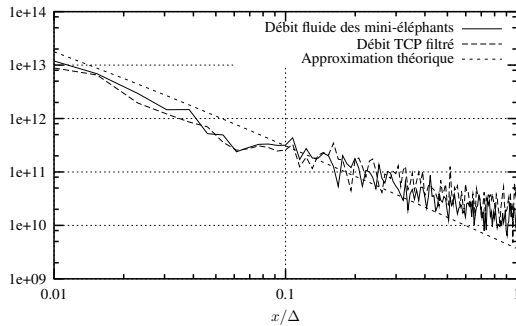


FIG. 2 – Densités spectrales empiriques des débit  $\{\bar{X}_n\}$  et  $\{\tilde{\Lambda}_n^e\}$ , et l'approximation  $\Delta \psi_e(x)$ .

## 4 Conclusion

En utilisant une décomposition du trafic en classes élémentaires, il est possible de modéliser le trafic Internet dans un réseau commercial par des modèles usuels de files d'attente. L'importance du trafic p2p dans ce type de réseau provoque un lissage du trafic global, ceci étant dû à plusieurs facteurs : limitation des débits par l'accès ADSL et par les protocoles p2p eux-mêmes, très forte agrégation sur les liens haute vitesse, etc. En particulier, on n'observe pas de phénomènes d'auto-similarité, comme dans les réseaux locaux ou de campus.

Il ressort de cette analyse que, hormis des problèmes de non stationnarité, un spectre de puissance en  $1/f$  semble apparaître, alors qu'il n'en est rien. Un tel comportement peut être un artefact de certaines lois comme la loi de Weibull.

## Références

[1] P. Abry and D. Veitch. Wavelet analysis of long range dependent traffic. *IEEE Trans. Information Theory*, 44(1) :2–15, January 1998.

[2] N. Ben Azzouna, F. Clérot, C. Fricker, and F. Guillemin. A flow-based approach to modeling ADSL traffic on an IP backbone link. *Annals of Telecommunications*, 59(11-12) :1260–1299, 2004.

[3] C. Barakat, P. Thiran, G. Iannaccone, C. Diot, and P. Owezarski. A flow-based model for internet backbone traffic. In *Proc. ACM SIGCOMM Internet Measurement Workshop*, Marseille, November 2002.

[4] S. Bregni and L. Primerano. The modified Allan variance as time-domain analysis tool for estimating the Hurst parameter of long-range dependent traffic. In *Proc. Globecom 2004*, Dallas, TX, December 2004.

[5] M. Crovella and A. Bestavros. Self-similarity in world wide web. Evidence and possible causes. *IEEE/ACM Trans. on Networking*, pages 835–846, December 1997.

[6] V. Dumas and A. Simonian. Asymptotic bounds for the fluid queue fed by sub-exponential on/off sources. *Adv. in Appl. Probab.*, 32 :244–255, 2000.

[7] A. Feldmann, A.C. Gilbert, W. Willinger, and T. Kurtz. The changing nature of network traffic : Scaling phenomena. In *Computer Communication Review*, volume 28, pages 5–19, 1998.

[8] H.J. Fowler and W.E. Leland. Local area network traffic characteristics, with implications for broadband network congestion management. *IEEE J. Sel. Areas in Commun.*, 9(7) :1139–1149, 1994.

[9] M. Garrett and W. Willinger. Analysis, modeling and generation of self-similar VBR video traffic. In *Proc. Sigcomm*, London, England, 1994.

[10] M. Krunz and A. Makowski. Modeling video traffic using  $M/G/\infty$  input processes : A compromise between markovian and lrd models. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications (JSAC)*, 16(5) :733–748, June 1998.

[11] W. Leland, M. Taqqu, W. Willinger, and D. Wilson. On the self-similar nature of ethernet traffic. *IEEE/ACM Trans. Net.*, pages 1–15, 1994.

[12] N. Likhanov and R. Mazumdar. Loss in large buffers fed by a heterogeneous long-tailed sources. *Advances in Applied Probability*, 32(4) :1168–1189, 2000.

[13] L. Massoulié and A. Simonian. Large buffer asymptotics for the queue with fbm input. *Journal of Applied Probability*, 1999.

[14] M. Parulekar and A. M. Makowski.  $M/G/\infty$  input processes : A versatile class of models for network traffic. In *Proc. INFOCOM*, pages 419–426, 1997.

[15] I. Norros. A storage model with self-similar input. *Queueing Systems*, 16 :387–396, 1994.

[16] I. Norros. On the use of fractional Brownian motion in the theory of connectionless networks. *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, 13(6), August 1995.

[17] S. Vaton, H. Korezlioglu, and T. Chonavel. Is the apparent self-similarity of broadband traffic due to non stationarity ? In Demetres Kouvatsos, editor, *ATM Networks : Performance Modelling and Analysis*, volume 4, 1997.

[18] J. Lévy Véhel and R. Riedi. *Fractals in Engineering*, chapter Fractional Brownian motion and data traffic modeling : The other end of the spectrum. Springer, 1997.

[19] Z.L. Zhang, V. Ribeiro, S. Moon, and C. Diot. Small time scaling behavior of Internet backbone traffic : An empirical study. In *Proc. Infocom 2003*, 2003.



# Estimation de la Matrice de Trafic en temps réel par filtres de Kalman

Augustin Soule, Kavé Salamatian  
LIP6-UPMC

## Abstract—

Dans ce travail nous développons une nouvelle approche pour l'estimation de matrices de trafic. Nous construisons un modèle d'états pour représenter les flots de paires Origine Destination d'un grand réseau d'opérateur. Ce modèle est suffisamment riche pour capturer les corrélations spatio-temporelles des flots. Nous appliquons ensuite un filtre de Kalman à ce système linéaire dynamique. Cette approche diffère des approches précédentes car tandis que les approches précédentes étaient focalisées uniquement sur l'ingénierie de trafic, nous nous concentrerons sur la détection d'anomalies. Notre modèle est suffisamment riche pour définir le comportement normal d'un flot et ainsi détecter les comportements anormaux. De plus la simplicité du modèle permet d'effectuer les calculs en temps réel. Nous avons ensuite validé cette méthode à l'aide de traces d'un grand fournisseur d'accès américain.

**Index Terms**—Traitement du signal et Télétrafic Internet, Métrologie des réseaux, statistiques, Filtre de Kalman, Matrices de Trafic, Système linéaires dynamiques,...

## I. INTRODUCTION

La gestion des réseaux d'opérateurs est une tâche de plus en plus complexe. Le nombre et la complexité des équipements actifs a incroyablement augmenté ces dernières années. Dans le même temps le trafic s'est complexifié allant jusqu'à contenir une part non négligeable de trafic hostile. Les opérateurs se reposent sur des outils de surveillance pour les aider à gérer ce gigantesque système que constitue l'Internet.

Une vue d'ensemble de la demande de trafic dans un domaine est souvent appelé Matrice de Trafic. La matrice de trafic est la représentation sous forme matricielle du volume de trafic entre une paire de noeud Origine et Destination (OD). Il est possible de définir la demande de trafic entre les liens, les routeurs ou encore les POP (point of presence) [1]. Dans ce travail nous nous concentrons sur la demande de trafic entre POP. C'est en effet cette granularité qui permet une vue globale du réseau de l'opérateur. La méthode est néanmoins applicable à tout les niveaux d'aggrégation souhaité.

La mesure directe de la matrice de trafic s'avère complexe car les routeurs ne supportent pas tous cette fonctionnalité. De plus la surcharge au niveau du réseau pour le rapatriement de telles statistiques est coûteuse et nécessite l'envoi de volume important de données. Il convient donc d'inférer les matrices de trafic à partir des données que l'opérateur collecte déjà. L'opérateur collecte dans son centre de contrôle beaucoup de données à l'aide du protocole SNMP (Simple Network Management Protocol). Par exemple il collecte à des intervalles de 5 minutes le volume de trafic traversant chaque lien du réseau. Mais le trafic traversant un lien est la somme de plusieurs composantes de

la matrice de trafic. L'inférence des matrices de trafic consiste à utiliser ce genre de données de volume sur un lien afin d'estimer les éléments composants chaque terme. Ce domaine de recherche a été très actif ces dernières années [1], [2], [3]. Les approches précédentes d'estimation de la matrice de trafic ne sont pas forcément capables de donner une estimation en temps réel de la matrice de trafic, que ce soit pour des problèmes de modèle ou encore de complexité. Le travail présenté dans cet article présente une méthode permettant une estimation temps réels de la matrice de trafic.

Nous allons utiliser les mesures effectuées sur la partie européenne du réseau de Sprint pour développer un modèle linéaire dynamiques d'espace d'état. Ce modèle décrit l'évolution temporelle de la matrice de trafic ainsi que la corrélation spatiale de celle-ci. Mais les valeurs de la matrice de trafic n'étant pas directement observable, nous utilisons un filtre de Kalman pour estimer et prédire ces valeurs en utilisant les volumes de trafic observé sur les liens. Cette approche permet un suivi, même à des échelles de temps très petites, en temps réel de la matrice de trafic.

## II. MÉTHODE

Un modèle réaliste, *i.e.* capable de prédire la dynamique du réseau, doit intégrer la corrélation des données observées, à l'aide de SNMP, avec chacune des paires OD qui la constitue. Ce modèle doit capturer l'évolution temporelle de chaque pair OD qui traverse le réseau. Soit  $X_t$  un vecteur contenant les valeurs de la matrice de trafic. Nous supposons que la dynamique temporelle des éléments de la matrice de trafic est capturée par un modèle Linéaire et invariant dans le temps de la forme  $X_{t+1} = CX_t + W_t$ , où la matrice  $C$  représente la corrélation spatiale et temporelle de la matrice de trafic,  $W_t$  représente un bruit contenant l'imprécision du modèle. D'autre part le volume de trafic sur chaque lien (les données SNMP) que nous représentons par un vecteur  $Y_t$  est lié au vecteur  $X_t$  par une relation linéaire de la forme  $Y_t = AX_t + V_t$ , où  $A$  représente la matrice de routage et  $V_t$  représente un bruit de mesure.

$$\begin{cases} X_{t+1} &= CX_t + W_t \\ Y_t &= AX_t + V_t \end{cases} \quad (1)$$

On obtient ainsi un modèle d'état classique sur lequel un filtre de Kalman peut être appliqué. Le filtre de Kalman est le filtre linéaire optimal au sens du Minimum de Variance de l'Erreur d'Estimation de l'état  $X_t$  en utilisant l'observation  $Y_t$ .

En conséquent l'estimation de la matrice de trafic ce fait en deux étapes :

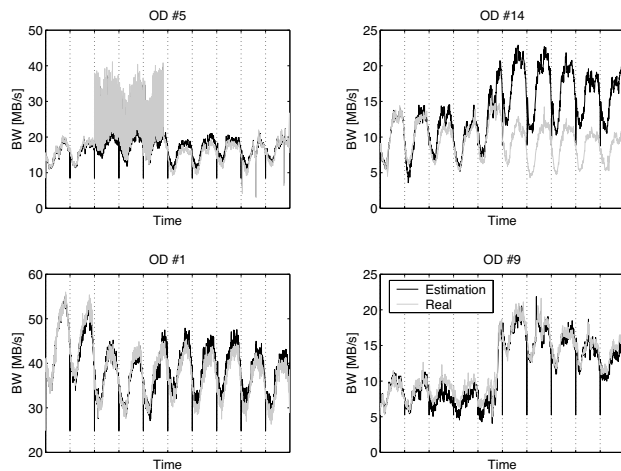


Fig. 1. Paire Origine Destination Réelle (Gris clair) et inférée (Gris foncé) à l'aide du filtre de Kalman. Une seule calibration est utilisée lors du premier jour.

- Dans une première étape il faut passer par une estimation de la matrice  $C$  décrivant l'évolution temporelle de la matrice de trafic ainsi que les matrices de covariance des bruits  $W_t$  et  $V_t$ . Cette calibration s'effectue sur une mesure partielle de la matrice de trafic. Pour calibrer ces paramètres, nous avons implémenté la méthode décrite dans [4] qui consiste à utiliser une méthode EM pour trouver les paramètres les plus probables.
- Dans la seconde étape, le modèle obtenu dans la première étape est utilisé et un suivi de l'état du système, *i.e.* de la matrice de trafic, est effectué en appliquant un filtre de Kalman prenant en entrée les volumes de trafic observés sur les liens du réseau. Ce suivi permet au filtre de Kalman de faire évoluer les variables d'état en fonction des observations et donc d'être capable d'estimer la dynamique des paires OD. De plus il est possible de calculer l'innovation de la demande de trafic. Il est alors possible en regardant l'innovation de détecter que le modèle n'est plus valable et qu'une nouvelle étape de calibration est nécessaire.

### III. VALIDATION DE LA MÉTHODE

Dans cette section, nous allons présenter les résultats numériques obtenus en appliquant notre méthode sur des données réelles. Les données ont été collectées en utilisant NetFlow [5] sur tout les routeurs connectant les clients au cœur du réseau européen de Sprint. 1 paquet sur 250 a été collecté. Nous avons ensuite regroupé ces valeurs toutes les 1 à minutes. De plus nous avons conjointement enregistré les données de routage pour reproduire la matrice de routage. Nous avons ainsi reconstruit la matrice de trafic entre les 11 POP soit 121 paires Origine Destination. Nous allons présenter brièvement les résultats obtenus à l'aide du filtre de Kalman.

Dans la figure 1 nous montrons un exemple de la qualité de notre approche. Nous présentons ainsi 4 paires Origine Destination différentes. Pour les paires OD 1, 5, 9, l'estimation est correcte tout au long des 10 jours. Tandis que pour la paire OD 14, le 5<sup>e</sup> jour elle dévie complètement. En utilisant l'innovation,

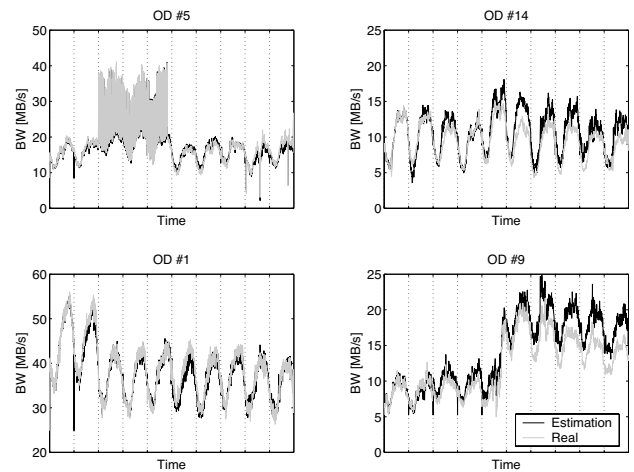


Fig. 2. Paire Origine Destination Réelle (Gris clair) et inférée (Gris foncé) à l'aide du filtre de Kalman. Plusieurs calibrations sont utilisées au cours des dix jours.

nous pouvons détecter automatiquement ce type de comportement et calibrer le modèle à chaque fois que les paires OD changent de comportement rendant le modèle invalide. Nous présentons dans la figure 2 le résultat de l'estimation pour les mêmes paires OD après avoir recalibré le modèle.

### IV. CONCLUSIONS

Dans cet article nous avons présenté l'application des filtres de Kalman au suivi et à l'estimation en temps réel de la matrice de trafic dans un réseau d'opérateur. La validation de cette méthode a été effectuée sur un des mesures obtenues dans une situation réaliste sur un réseau opérationnel. Les résultats obtenus montrent que cette application semble prometteuse. En particulier l'estimation par filtre de Kalman semble particulièrement adaptée à la détection d'anomalies. C'est vers cette direction que nos recherches actuelles nous mènent.

### REFERENCES

- [1] Alberto Medina, Nina Taft, Kavé Salamatian, Supratik Bhattacharyya, and Christophe Diot, "Traffic matrix estimation : existing techniques and new directions," in *Proceedings of the 2002 conference on Applications, technologies, architectures, and protocols for computer communications*. 2002, pp. 161–174, ACM Press.
- [2] Yin Zhang, Matthew Roughan, Carsten Lund, and David Donoho, "An information-theoretic approach to traffic matrix estimation," in *Proceedings of the 2003 conference on Applications, technologies, architectures, and protocols for computer communications*. 2003, pp. 301–312, ACM Press.
- [3] Augustin Soule, Antonio Nucci, Rene Cruz, Emilio Leonardi, and Nina Taft, "How to identify and estimate the largest traffic matrix elements in a dynamic environment," in *ACM Sigmetrics*, New York, 2004.
- [4] Zoubin Ghahramani and Geoffrey E. Hinton, "Parameter estimation for linear dynamical systems," Tech. Rep. CRG-TR-96-2, University of Toronto, 22<sup>e</sup> February 1996.
- [5] CISCO, "Netflow services and applications," 2002.

# Marginales non gaussiennes et longue mémoire : analyse et synthèse de trafic Internet

Antoine SCHERRER<sup>1</sup>, Patrice ABRY<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme (UMR 7623, CNRS)  
Ecole Normale Supérieure de Lyon, 46, Allée d'Italie 69364 LYON CEDEX 07 - France

<sup>2</sup> Laboratoire de Physique (UMR 5672, CNRS)  
Ecole Normale Supérieure de Lyon, 46, Allée d'Italie 69364 LYON CEDEX 07 - France  
antoine.scherrer@ens-lyon.fr, patrice.abry@ens-lyon.fr

**Résumé** – La modélisation statistique du trafic Internet constitue actuellement un outil incontournable pour le dimensionnement des réseaux, la prévision de leurs comportements et performances, permettant d'assurer la disponibilité, la qualité de service (QoS) ainsi que la sécurité des réseaux. Nous proposons de modéliser les séries temporelles de trafic par un processus non gaussien à longue mémoire. Nous montrons que ce modèle reste pertinent pour un très large continuum de niveaux d'agrégation et pour une large variété de trafic. Nous décrivons les procédures permettant d'estimer les paramètres de ce modèle ainsi que celles permettant de synthétiser numériquement des réalisations de processus dont marginales et covariances sont prescrites.

**Abstract** – Internet traffic statistical modeling has now become a major tool used for network design, performance and behaviour prediction and hence to ensure availability, quality of service (QoS) as well as security to all its end-users. We propose to model Internet time series with a non Gaussian long range dependent process. We show that this model remains relevant over a large range of aggregation levels and for a wide variety of different traffics. We describe the procedures used to estimate the corresponding parameters as well as those enabling to numerically synthesize realisations of such processes with prescribed marginals and covariances.

## 1 Motivation

La modélisation statistique des séries de télétrafic informatique, du trafic Internet par exemple, constitue désormais un exercice obligatoire de la gestion des réseaux. Celle-ci, en effet, se révèle indispensable pour réaliser des prévisions de performances pertinentes, améliorer le fonctionnement du réseau, y assurer une certaine qualité de service (QoS), en optimiser la gestion ou décider de règles de tarifications. Le trafic Internet présente deux caractéristiques statistiques principales, unanimement reconnues, et qu'il est essentiel de prendre en compte pour réaliser des modélisations efficaces : il est **non gaussien**[1] et à **longue mémoire**[2, 3, 4, 5]. Souvent, les modélisations du trafic s'intéressent à l'une ou l'autre de ces caractéristiques mais n'essaient pas d'atteindre une description simultanément pertinente des deux. Souvent, les travaux qui visent ce double objectif reposent sur une superposition de processus de Poisson modulés par une chaîne de Markov [6], impliquant un grand nombre de paramètres à estimer afin d'ajuster et la distribution marginale et la structure de longue mémoire.

Dans ce travail, nous nous intéressons à une modélisation conjointe de la distribution marginale et de la structure de covariance de séries de télétrafic informatique, qui capture en peu de paramètres à la fois leur caractère non gaussien et leur longue mémoire. Nous proposons l'utilisation d'un processus stochastique non gaussien à longue mémoire, dont la distribution marginale est une loi Gamma,  $\Gamma_{\alpha,\beta}$ , et dont la structure de corrélation est celle d'un processus FARIMA( $\phi, d, \theta$ ). A partir de plusieurs jeux de traces célèbres de télétrafic informatique,

nous montrons comment ce modèle à 5 paramètres,  $\alpha, \beta, d, \phi, \theta$  capture efficacement leurs caractéristiques statistiques de premier et second ordres. Nous observons notamment que cette modélisation reste pertinente pour une très large gamme de niveaux d'agrégation  $\Delta$ . Nous proposons ensuite une procédure analytique permettant de synthétiser numériquement des réalisations de processus possédant conjointement les marginales et covariance choisies a priori pour reproduire celles du trafic réel. Disposer de telles procédures constitue un enjeu essentiel. D'une part, elles permettent d'étudier par simulations numériques les performances de filières d'attente et de réseaux qui ne pourraient être atteintes par calcul analytique du fait des propriétés statistiques non standards du trafic correspondant. D'autre part, elles fournissent des simulateurs de trafic utilisés pour nourrir des maquettes de réseau afin d'étudier la qualité de leur fonctionnement et la QoS produite.

## 2 Trafic Internet

Nous avons travaillé à partir d'une variété de traces de trafic informatique collectées entre 1989 et 2003, correspondant à des types de trafic et de réseau différents (Local, Métropolitain, Wide Area Network, ..., périphérie ou cœur de réseau, ...). Ces traces sont disponibles sur les sites des principaux groupes de recherches universitaires impliqués (WAND, Auckland, Nelle-Zélande, CAIDA, LBL, UNC, Etats-Unis, ...), le tableau 1 les présente en détails.

A partir de ces traces, sont extraites des séries temporelles cor-

Trace	Date de départ	Durée (s)	Liaison	# Pkts (10 <sup>6</sup> )	IAT (ms)	Lien
PAUG	1989-08-29(11 :25)	2620	LAN(10BaseT)	1	2.6	ita.ee.lbl.gov/index.html
LBL-TCP-3	1994-01-20(14 :10)	7200	WAN(10BaseT)	1.7	4	ita.ee.lbl.gov/index.html
AuckIV	2001-04-02(13 :00)	10800	WAN(OC3)	9	1.2	wand.cs.waikato.ac.nz/wand/wits
CAIDA	2002-08-14(10 :00)	600	Backbone(OC48)	65	0.01	www.caida.org/analysis/workload/oc48/
UNC	2003-04-06(16 :00)	3600	WAN(xxx)	4.6	0.8	www-dirt.cs.unc.edu/ts/

TAB. 1 – Description des traces

respondant par exemple à la suite des nombres de paquets comptés (ou agrégés) dans des boîtes temporelles successives de durée  $\Delta$ , notée  $X_\Delta(k)$ . Un travail équivalent peut être conduit pour la modélisation des séries de nombre d'octets agrégés ou d'inter-arrivée des paquets.

Une question centrale dans la modélisation du trafic Internet réside dans le choix d'un niveau d'agrégation  $\Delta$  pertinent. La solution de cette délicate question dépend à la fois de l'utilisation qui sera faite de la modélisation, de la nature des données et de contraintes techniques. Il est donc essentiel de proposer des modèles qui incorporent naturellement et facilement la possibilité de travailler à différents niveaux d'agrégation.

### 3 Modélisation : Processus non gaussiens à mémoire longue

Pour modéliser les séries  $\{X_\Delta(k), k \in \mathbb{Z}\}$ , nous proposons l'utilisation d'un processus stochastique stationnaire de marginale  $\Gamma_{\alpha,\beta}$  et de covariance FARIMA( $\phi, d, \theta$ ), et ce pour chaque niveau d'agrégation indépendamment.

• **Marginale non gaussienne.** – La distribution *gamma*,  $\Gamma_{\alpha,\beta}$ ,  $\Gamma_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)} (\frac{x}{\beta})^{\alpha-1} \exp(-\frac{x}{\beta})$ , ( $\Gamma$  étant la fonction Gamma standard[7]), est caractérisée par deux paramètres strictement positifs : la forme ( $\alpha$ ), et l'échelle ( $\beta$ ). Elle fournit des variables aléatoires positives, de moyenne  $\mu = \alpha\beta$  et de variance  $\sigma^2 = \alpha\beta^2$  et possède la propriété intéressante d'être stable sous addition et par multiplication par une constante. Enfin l'inverse du paramètre de forme,  $1/\alpha$  peut être envisagé comme un indicateur de distance à la loi Normale de même moyenne et variance.

• **Longue mémoire.** – Comme cela est désormais largement admis, le trafic Internet possède une propriété de longue mémoire, mais il possède aussi des dépendances à court terme, dont la structure dépend des mécanismes réseaux mis en œuvre. C'est pourquoi il est naturel d'utiliser un modèle de covariance pouvant rendre compte de ces deux structures : le modèle FARIMA (Fractionnaly Integrated Auto-regressive Moving Average).

Un processus FARIMA est défini par deux polynômes  $\Phi$  et  $\Theta$  d'ordre respectif  $P$  et  $Q$  et une intégration fractionnaire (d'ordre  $d \in (-1/2, 1/2)$ ) :

$X_l = \sum_{p=1}^P \phi_p X_{l-p} + \Delta^{-d}(\epsilon_l - \sum_{q=1}^Q \theta_q \epsilon_{l-q})$ , où  $\epsilon_l$  sont des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées de moyenne nulle et de variance  $\sigma_\epsilon^2$  et où  $\Delta^{-d}$  est défini par son développement en séries entières :

$\Delta^{-d} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i(-d)B^i$ ,  $B$  étant l'opérateur de retard  $B\epsilon_i = \epsilon_{i-1}$ , et  $b_i(-d) = \Gamma(i+d)/\Gamma(d)\Gamma(i+1)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ,  $\Gamma$  étant la fonction Gamma. Le spectre de  $X$  prend la forme :

$$f_X(\nu) = \sigma_\epsilon^2 |1 - e^{-i2\pi\nu}|^{-2d} \frac{|1 - \sum_{q=1}^Q \theta_q e^{-iq2\pi\nu}|^2}{|1 - \sum_{p=1}^P \phi_p e^{-ip2\pi\nu}|^2}, \quad (1)$$

$-1/2 < \nu < 1/2$ . Pour  $d \in (0, 1/2)$ , ce processus possède une propriété de longue mémoire [8]. Les polynômes  $P$  et  $Q$ , d'une part, l'ordre d'intégration  $d$ , d'autre part rendent respectivement compte des corrélations statistiques à court et long termes. Dans la plupart des cas, nous nous limiterons à des polynômes  $P$  et  $Q$  d'ordre 1, le nombre de paramètres pour la covariance est alors réduit à 3 :  $\phi, d, \theta$ .

### 4 Analyse

Nous détaillons maintenant les procédures d'analyse et d'estimation des paramètres du modèle proposé, utilisées pour l'étude des séries  $X_\Delta$ , pour chaque  $\Delta$  indépendamment.

• **Paramètres de la loi Gamma.** – Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont estimés par une procédure standard correspondant à un estimateur à maximum de vraisemblance pour des données i.i.d.. L'initialisation est réalisée à partir des estimateurs standards de moyenne et variance  $\hat{\mu}$  et  $\hat{\sigma}^2$ , selon  $\hat{\beta} = \hat{\sigma}^2/\hat{\mu}$  et  $\hat{\alpha} = \hat{\mu}/\hat{\beta}$ .

• **Paramètre de la covariance.** – L'estimation des paramètres de la covariance du FARIMA(1,d,1) est réalisée en deux étapes. Nous procédons en d'abord à une analyse en ondelettes de la série  $X_\Delta$ , afin d'estimer le paramètre de longue mémoire  $d$ . Soient  $\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2}\psi_0(2^{-j}t - k)$  les dilatées et translatées sur la grille dyadique d'une ondelette mère de référence  $\psi_0$ . On note  $d_X(j, k) = \langle \psi_{j,k}, X_\Delta \rangle$  les coefficients d'ondelettes. Les coefficients d'ondelettes d'un processus stochastique stationnaire de spectre  $f_X$  satisfont :

$$\mathbb{E}d_X(j, k)^2 = \int f_X(\nu) 2^j |\Psi_0(2^j \nu)|^2 d\nu, \quad (2)$$

où  $\Psi_0$  rend compte de la transformée de Fourier de  $\psi_0$  et  $\mathbb{E}$  l'espérance mathématique.

Le spectre d'un processus à longue mémoire se comporte en une loi de puissance à l'origine :  $S_X(\nu) \simeq_{|\nu| \rightarrow 0} C|\nu|^{-2d}$ . On peut alors montrer que ces coefficients d'ondelettes se comportent en :

$$\mathbb{E}d_X(j, k)^2 = C2^{j(2d)}, \quad (3)$$

La moyenne temporelle  $S_j = 1/n_j \sum_{k=1}^{n_j} |d_X(j, k)|^2$  estime la moyenne d'ensemble  $\mathbb{E}d_X(j, k)^2$ . On trace ensuite le diagramme log-échelle,  $\log_2 S_j$  en fonction de  $\log_2 2^j = j$ , dans lequel la longue mémoire se matérialise par l'apparition d'un segment de droite dans la limite des grandes échelles ( $j$  grand). Une régression linéaire pondérée permet d'en estimer la pente donc  $d$ . Cette estimation ondelette du paramètre de longue mémoire est robuste et efficace [8]. Les données sont ensuite *quasiment blanchies* par intégration fractionnaire d'ordre  $-d$ , cela a pour effet de gommer la longue mémoire. On peut ensuite utiliser une procédure classique d'estimation ARMA (procédure itérative reposant sur l'algorithme de Gauss-Newton) pour mesurer  $\theta$  et  $\phi$ .

• **Validation et application aux données.** – Appliquées à

des réalisations synthétiques de processus  $\Gamma_{\alpha,\beta}$  farima( $\phi, d, \theta$ ), produits par la procédure décrite à la section suivante, ces procédures d'estimation se révèlent présenter des performances statistiques très satisfaisantes.

Ces procédures sont mises en œuvre sur des portions de données réelles jugées stationnaires. La stationnarité est ici vérifiée expérimentalement en vérifiant la consistance des estimations des paramètres obtenues sur des blocs adjacents sans chevauchement.

## 5 Synthèse

Nous présentons maintenant une procédure de synthèse permettant de produire des réalisations d'un processus  $X$  possédant une marginale  $\Gamma_{\alpha,\beta}$  et une covariance de FARIMA(1,d,1), prescrites a priori pour correspondre à celles des données.

- **Principe.** – Le principe général de la synthèse de processus non gaussiens de covariance prescrite est décrit dans [9]. Nous l'adaptions au cas de la synthèse d'un processus  $X$  possédant une marginale  $\Gamma_{\alpha,\beta}$  et une covariance de farima(1,d,1), prescrites a priori pour correspondre à celles des données analysées et en détaillons les point-clés.

- On obtient une variable  $\Gamma_{\alpha,\beta}$  en sommant  $2\alpha$  variables aléatoires gaussiennes indépendantes de moyenne nulle et de variance  $\beta/2$  (en effet, en sommant le carré de deux variables aléatoires gaussiennes i.i.d, on obtient une variable exponentielle ; en sommant  $\alpha$  exponentielles, on obtient une gamma) :

$$X = \sum_{i=1}^{i=\alpha} Y_{2i}^2 + Y_{2i+1}^2. \quad (4)$$

- On peut montrer (cf. ci-dessous) que la covariance  $\gamma_X$  et la corrélation  $\rho_X = \gamma_X / \sigma_X^2$  du processus  $X(k)$  sont liées à  $\rho_Y$  et  $\gamma_Y$ , identiques pour les  $2\alpha$  processus  $Y_i(k)$ , par :

$$\rho_Y = \sqrt{\rho_X}, \quad \gamma_Y = \sqrt{\gamma_X / (4\alpha)}. \quad (5)$$

- On synthétise les  $2\alpha$  processus gaussiens  $Y_i$  de covariance  $\gamma_Y$  par la méthode dite “circulant embedded matrix” (voir, par exemple, une présentation pédagogique et comparée dans [10]), puis on utilise la relation 4.

- **Calcul de la covariance.** – Pour obtenir l'un et l'autre des résultats de la relation 5, il faut décomposer  $Y_i(t+k)$  en une prédiction et une innovation [11] :  $Y(t+k) = \rho_Y(k)Y(t) + Z(t,k)$ . Il est alors aisé de vérifier que  $\mathbb{E}Y(t)Z(t,k) = 0$ . En reportant cette décomposition dans 4, on calcule l'ordre mais non difficile permet d'obtenir le résultat souhaité.

- **Limitations.** – Cette procédure de synthèse ne fonctionne que dans le cas où  $\alpha$  est pas entier.

L'équation 5 implique aussi que  $\gamma(k)$  soit positive, ce qui impose les restrictions suivantes sur  $\phi$  et  $\theta$  :  $\phi > 0$  et  $\phi > \theta$ .

## 6 Résultats et Discussion.

Les figures 1 et 2 illustrent les résultats obtenus. La figure 1 superpose les marginales empiriques aux lois théoriques  $\Gamma_{\alpha,\beta}$  pour les données réelles et synthétiques (colonnes de gauche et droite, respectivement). La figure 2 superpose les diagrammes log-échelle expérimentaux à ceux calculés analytiquement en combinant les relations 1 et 2 pour les données réelles et synthétiques (colonnes de gauche et droite, respectivement). Par

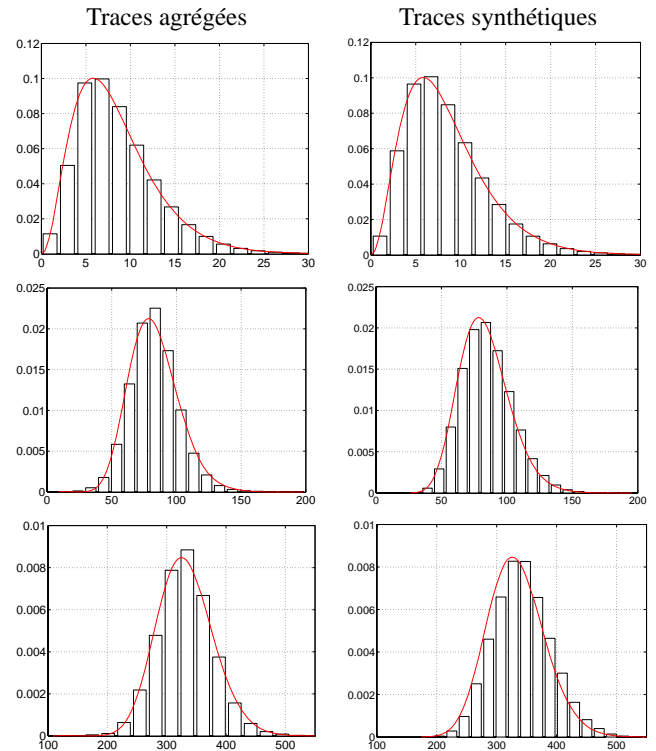


FIG. 1 – **Analyse et synthèse des marginales.** Colonne de gauche : ajustements par des lois  $\Gamma_{\alpha,\beta}$  des marginales des séries  $X_\Delta$  agrégées à  $\Delta = 10, 100, 400$  ms (de haut en bas). Colonne de droite : les mêmes ajustements pour des processus synthétiques dont les paramètres ont été choisis a priori pour correspondre à ceux de la trace réelle. Données AUCKIV.

soucis de place, ceux-ci ne seront présentés que sur la trace AUCKIV. Des conclusions identiques restent néanmoins valables pour toutes les traces analysées. Ces figures montrent que le modèle  $\Gamma_{\alpha,\beta}$  FARIMA( $\phi, d, \theta$ ) décrit de façon très satisfaisante les marginales et covariance des données de trafic  $X_\Delta$  et ce pour une très large gamme de paramètres  $\Delta$  (pour la trace considérée,  $10ms \leq \Delta \leq 10s$ ). Ce modèle offre donc une modélisation souple et valide pour un très large continuum de  $\Delta$ . Cette adéquation des lois  $\Gamma_{\alpha,\beta}$  aux marginales de  $X_\Delta$  résulte essentiellement du fait que les lois  $\Gamma_{\alpha,\beta}$  constituent une famille stable sous addition (donc par agrégation). Le paramètre  $\alpha$  augmente avec  $\Delta$ , indiquant que les marginales de  $X_\Delta$  évoluent vers une gaussienne pour les grands  $\Delta$  ; ainsi la loi  $\Gamma_{\alpha,\beta}$  fournit qualitativement une version adaptée aux traces agrégées  $X_\Delta$  du théorème de la limite centrale.

La forme des diagrammes log-échelle de la figure 2 rend compte de l'existence de longue mémoire (une droite croissante dans la limite des grandes échelles) ainsi que de celle de corrélation à court terme (décrochement de la droite matérialisant la longue mémoire pour les petites échelles). La pertinence du modèle FARIMA( $\phi, d, \theta$ ) se matérialise par le fait que  $\hat{d}$  ne varie pas quand  $\Delta$  évolue, indiquant qu'il rend bien compte d'une propriété de longue mémoire présente dans les données et persistante sous-agrégation. Au contraire, les estimés  $\hat{\phi}$  et  $\hat{\theta}$  décroissent quand  $\Delta$  augmente, matérialisant le

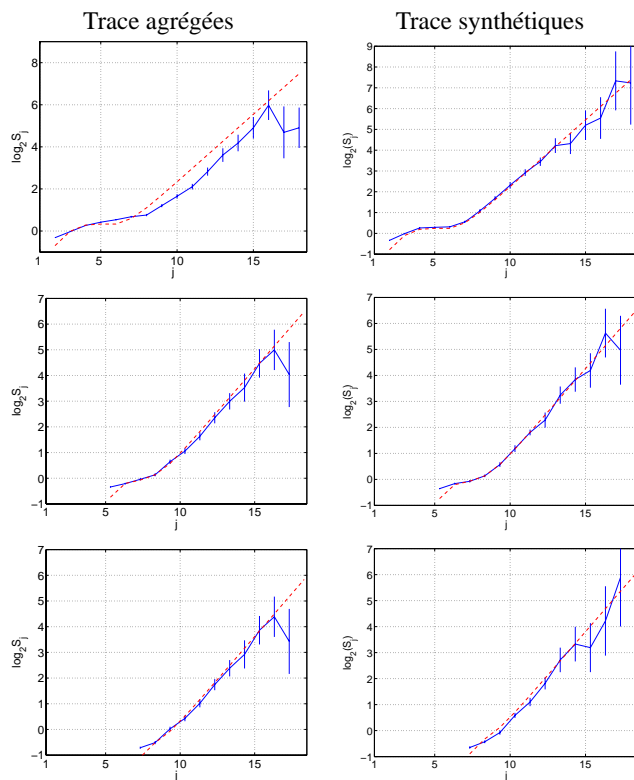


FIG. 2 – **Analyse et synthèse des covariances.** Colonne de gauche : ajustements des diagrammes log-échelle des séries  $X_\Delta$  agrégées à  $\Delta = 10, 100, 400$  ms (de haut en bas) par ceux, calculés numériquement, de processus FARIMA( $\hat{\phi}, \hat{d}, \hat{\theta}$ ). Colonne de droite : les mêmes ajustements pour des processus synthétiques dont les paramètres ont été choisis a priori pour correspondre à ceux de la trace réelle. Données AUCKIV.

fait que les corrélations à court termes sont, elles, peu à peu gommées par le niveau croissant d'agrégation. La structure de covariance de  $X_\Delta$  tend alors vers celle d'un processus asymptotiquement autosimilaire, bien approximée par celle d'un FARIMA(0,d,0).

Les colonnes de gauche des figures 1 et 2 illustrent les mêmes analyses réalisées sur des traces synthétiques simulées à partir de la procédure décrite plus haut pour des paramètres correspondants à ceux estimés sur la trace réelle de la même ligne. On note d'une part que la procédure de synthèse fournit des traces qui possèdent parfaitement les statistiques prescrites et d'autre part, que la ressemblance entre séries expérimentales et simulées est très satisfaisante.

## 7 Conclusion et perspectives

Nous avons ici proposé l'utilisation d'un processus stochastique non gaussien à longue mémoire comme modèle parcimonieux pour les séries temporelles de trafic informatique. Nous avons mis en évidence le fait que ce modèle était pertinent pour une très large gamme de niveau d'agrégation. Nous avons présenté des procédures d'estimation des paramètres du modèle ainsi que de synthèse numérique pour produire des réalisations de ces processus. Des routines MATLAB, développées par nos

soins implantent la totalité de ces procédures.

La procédure de synthèse de processus dont les statistiques d'ordre 1 et 2 sont prescrites peut être étendue à d'autres types de marginales (log-normal, exponentiel, chi-2, Pareto, ...) et covariances (celles d'un bruit gaussien fractionnaire, d'un FARIMA(p,d,q),...). Ces calculs et développements algorithmiques sont en cours. Par ailleurs, il sera intéressant d'utiliser la possibilité de synthétiser des traces ressemblant à celles observées sur Internet pour nourrir des maquettes de réseaux étudiant l'évolution de la qualité de service selon des scénarios donnés. On pourra notamment simuler des traces dont les paramètres s'écartent de façon contrôlée de ceux des traces réelles pour évaluer l'impact induit sur la qualité de service.

• **Remerciements.** – Nous remercions nos collègues, S. Maron, F. Hernandez-Campos et C. Park d'UNC, USA, et D. Veitch et N. Hohn de CubinLab, Université de Melbourne, qui nous ont fourni les données et en ont assuré la mise en forme.

## Références

- [1] Benjamin Melamed, "An overview of tes processes and modeling methodology," in *Performance/SIGMETRICS Tutorials*, 1993, pp. 359–393.
- [2] K. Park and W. Willinger, "Self-similar network traffic : An overview," in *Self-Similar Network Traffic and Performance Evaluation*, Kihong Park and Walter Willinger, Eds., pp. 1–38. Wiley (Interscience Division), 2000.
- [3] W. E. Leland, M. S. Taqqu, W. Willinger, and D. V. Wilson, "On the self-similar nature of ethernet traffic (extended version)," *ACM/IEEE transactions on Networking*, vol. 2, no. 1, pp. 1–15, Feb. 1994.
- [4] J. Beran, *Statistics for Long-memory processes*, Chapman & Hall, 1994.
- [5] G. Samorodnitsky and M. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman & Hall, 1994.
- [6] S. Paulo, V. Rui, and P. António, "Multiscale fitting procedure using markov modulated poisson processes," *Telecommunication Systems*, vol. 23 (1/2), pp. 123–148, June 2003.
- [7] M. Evans, N. Hastings, and B. Peacock, *Statistical Distributions*, Wiley (Interscience Division), June 2000.
- [8] P. Abry, P. Flandrin, M.S. Taqqu, and D. Veitch, "Wavelets for the analysis, estimation and synthesis of scaling data," in *Self-Similar Network Traffic and Performance Evaluation*, K. Park and W. Willinger, Eds. 2000, WILEY.
- [9] M. Crouse and R. Baraniuk, "Fast, exact synthesis of gaussian and nongaussian long-range-dependent processes," *IEEE Trans. on Info. Theory*, 1999.
- [10] J.M. Bardet, G. Lang, G. Oppenheim, A. Philippe, and M.S. Taqqu, *Long-Range Dependence : Theory and Applications*, chapter Generators of long-range dependent processes : a survey, pp. 579–623, Birkhäuser, 2003.
- [11] S.B. Lowen, S.S. Cash, M. Poo, and M.C. Teich, "Quantal neurotransmitter secretion rate exhibits fractal behavior," *The journal of Neuroscience*, vol. 17, no. 15, pp. 5666–5677, Aug. 1997.

# Quelques perspectives en imagerie médicale

Isabelle BLOCH

Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications  
Département TSI - CNRS UMR 5141 LTCI - 46 rue Barrault, 75013 Paris

Isabelle.Bloch@enst.fr

**Résumé** — La complexité du corps humain et de sa vision par des techniques d'imagerie médicale nécessite le développement de méthodes et d'outils de traitement et d'interprétation d'images répondant à cette complexité, et de nombreuses techniques avancées ont trouvé dans l'imagerie médicale un champ d'application particulièrement riche. Dans cet article, nous présentons quelques perspectives d'évolution de ce domaine. Loin d'être exhaustives, elles se restreignent à un petit nombre de coups de projecteur, laissant de côté nombre de problématiques tout aussi intéressantes. Après quelques mots sur les nouvelles sources de données et d'images, nous mentionnons quelques tendances nouvelles en segmentation et en reconnaissance, sur la modélisation du corps et de ses fonctions, sur les applications en neurologie et neurosciences, et concluons sur les contributions possibles au dossier patient numérisé.

**Abstract** — The complexity of the human body and its vision through medical imaging techniques requires the development of methods and tools for image processing and interpretation addressing this complexity. Several advanced techniques found a particularly rich field of application in the domain of medical imaging. In this paper, we present a few perspectives in this domain. They are far from being exhaustive, and are restricted to a few aspects only, leaving aside a number of very interesting problems. After a few words on new data and image sources, we mention some new trends in segmentation and recognition, modeling of the human body and its functions, on applications for neurology and neurosciences, and we conclude on the possible contributions to the electronic patient records.

## 1 Nouvelles sources d'information, nouvelles images

Malgré des limites imposées par la physique des processus sous-jacents aux acquisitions d'images, l'imagerie médicale évolue encore de manière importante. Au-delà des améliorations sur la qualité des images, il s'agit de véritables changements d'échelles et de panorama, offrant de nouveaux champs d'investigation sur des structures non visibles avec les techniques classiques.

Ainsi, de nouveaux scanners X font leur apparition avec des tailles de voxels bien inférieures au millimètre cube, donnant ainsi accès à des informations distales (petits vaisseaux sanguins ou bronches par exemple). D'autres évolutions des techniques à rayons X portent sur les développements de la mammographie numérique 3D, qui élimine les artefacts de superposition de la mammographie numérique classique, et permet d'envisager de grands progrès dans le diagnostic et le pronostic.

En ultrasons, des perspectives importantes concernent l'évolution des acquisitions tridimensionnelles en temps réel, l'utilisation d'agents de contraste, ainsi que la combinaison d'images acquises selon des points de vue différents (*spatial compounding*).

En médecine nucléaire, l'apparition de nouveaux détecteurs à semi-conducteurs, reposant donc sur des principes physiques très différents de ceux utilisés pour les détecteurs traditionnels, permet, avec un système compact et léger, d'obtenir des images ayant plus de contraste, une meilleure résolution, un taux de comptage plus élevé.

Autre évolution importante, les machines combinées TEP-CT [27], qui font actuellement leur apparition dans les hôpitaux, fournissent des images anatomiques et fonctionnelles pendant le même examen, facilitant ainsi le recalage entre ces images, même si les difficultés liées aux mouvements physiologiques (en particulier la respiration) subsistent.

En imagerie par résonance magnétique (IRM), les modalités d'acquisition se multiplient, les séquences pouvant ainsi être associées pour offrir des informations complémentaires sur les structures observées. Des séquences rapides permettent soit des acquisitions du corps entier en imagerie anatomique, soit des acquisitions fonctionnelles en IRMf. Des séquences spécifiques permettent de mettre en évidence des pathologies. L'IRM de diffusion, donnant accès à la structure des faisceaux de fibres de matière blanche, connaît un développement qui s'accélère et tend à être de plus en plus associée à d'autres acquisitions, tant pour la recherche en neurosciences que pour des applications cliniques. Les recherches actuelles conduisent au développement de systèmes à haut champ, qui seront exploités par exemple dans le projet Neurospin. Les futures machines de ce site utiliseront des champs allant de 3 à 11 teslas pour l'homme, et jusqu'à 17 teslas pour le petit animal. Elles devront permettre d'identifier des ensembles de moins de 5000 neurones, de quelques centaines de microns d'épaisseur, alors qu'actuellement les machines ne permettent d'imager que des zones de plusieurs millions de neurones, dont seule une partie est vraisemblablement activée. Des champs entièrement nouveaux pour le traitement d'images s'ouvriront alors.

Depuis quelques années, une nouvelle technique est développée. Il s'agit de la tomographie par cohérence optique (OCT), qui exploite la cohérence de la lumière, et peut être ainsi considérée comme le parallèle optique des techniques ultrasonores. Ces techniques fournissent actuellement des informations sur les structures superficielles, avec une résolution de 1 à 10 microns, pour une profondeur accessible de 2 à 3 millimètres.

Mais les nouvelles sources de données ne concernent pas que les techniques d'imagerie. Beaucoup d'informations proviennent également de nouveaux modèles biologiques ou biomécaniques. Nous y reviendrons dans la section 3.

## 2 Segmentation et reconnaissance

Bien que la segmentation et la reconnaissance de structures en imagerie médicale soient des thèmes de recherche anciens, ils suscitent toujours beaucoup de travaux, tant les problèmes rencontrés sont difficiles et évoluent avec les techniques d'acquisition. Ils concernent à la fois les structures normales et pathologiques, ainsi que des zones relatives à des fonctions en imagerie fonctionnelle.

Les méthodes fondées sur des modèles sont de plus en plus développées. En effet, la complexité des données 3D en imagerie médicale nécessite le développement de modèles intégrant de multiples connaissances et de grandes quantités d'informations, ainsi que des contraintes de type topologique, géométrique ou encore morphologique.

Ainsi les méthodes de type modèles déformables ont suscité un grand engouement et de nombreux développements. Ces modèles peuvent décrire des propriétés que doivent satisfaire les objets (portant sur leur régularité, sur la position de leurs surfaces par rapport aux forts gradients de l'image, etc.), ou être des modèles des objets à segmenter eux-mêmes (par exemple des modèles de reins, de vaisseaux sanguins, de cœur). Ils peuvent être soit continus, soit discrets (maillages simplexes par exemple) [21, 32]. Les mises en œuvre par des techniques d'ensembles de niveaux [26] sont maintenant très répandues, soit en laissant libres les changements éventuels de topologie, soit au contraire en contraignant la topologie. Enfin, des modèles « sans contours » s'inspirant de la méthode de Mumford et Shah ont été développés et leurs versions multi-phases permettent de segmenter plusieurs structures simultanément [8, 28].

La création de bases de données importantes d'images dans de nombreuses équipes permet d'envisager l'utilisation d'outils statistiques afin de définir des modèles statistiques d'apparence, qui sont maintenant exploités dans diverses directions [11, 30].

Plus récemment, des modèles de l'agencement spatial des structures ont été développés. Alors que les relations de type topologique ont été utilisées depuis longtemps, elles sont maintenant enrichies avec d'autres relations, telles que des relations de direction, de distance, ou des relations plus complexes telles que celles qui sont utilisées dans les descriptions anatomiques (par exemple [31] ou le site Neuranat<sup>1</sup> pour la neuro-anatomie). L'introduction de ces relations relève du domaine du raisonnement spatial

et comporte une composante de modélisation des connaissances et une composante de raisonnement et de fusion. Ce domaine, beaucoup développé en intelligence artificielle avec les modèles de raisonnement spatial qualitatif (voir par exemple [29] pour un panorama), émerge petit à petit en traitement d'images [5, 6, 10]. Il bénéficie en particulier du développement de la théorie des ensembles flous en traitement d'images [3], qui permet de combiner notions qualitatives et quantitatives dans le même formalisme, ainsi que de celui de la fusion d'informations [4]. Les formalismes qualitatifs ont été beaucoup utilisés dans le domaine des systèmes d'information géographique. Des tentatives de rapprochement avec l'imagerie médicale se sont concrétisées récemment, par la conférence *Mapping the human body: spatial reasoning at the interface between human anatomy and geographic information science* (Buffalo, USA).

Dans ces problèmes de segmentation et de reconnaissance de structures, la question de la validation reste toujours centrale et sans solution définitive. Des séries d'images annotées et segmentées par des experts peuvent servir de base à cette validation, mais demandent encore à être étendues. De plus, la notion de qualité de la segmentation a un sens qui dépend des objectifs et de l'utilisation ultérieure des résultats. Cela justifie alors la définition de protocoles de validation ou d'évaluation rétrospective, en fonction des étapes ultérieures. Enfin, des mesures absolues ne sont pas toujours nécessaires : par exemple le suivi de l'évolution d'une pathologie s'appuiera plus sur des mesures relatives, permettant de mettre en évidence des tendances dans l'évolution. Les contraintes sont alors moins fortes pour les algorithmes et plus réalistes.

## 3 Modélisation du corps et de ses fonctions

Nous avons mentionné dans la section 1 l'importance des modèles comme nouvelles sources de données. Les enjeux sont d'une double nature. Il s'agit d'une part d'utiliser des modèles biologiques, anatomiques, ou encore biomécaniques comme guide pour l'interprétation des images. C'est le cas par exemple des descriptions neuro-anatomiques déjà mentionnées. Il s'agit également d'exploiter les sources d'imagerie pour constituer des modèles du corps humain, soit du point de vue anatomique, soit du point de vue fonctionnel. Ce domaine est susceptible de beaucoup progresser grâce aux grosses bases de données qui sont en train d'être constituées dans plusieurs laboratoires et hôpitaux.

Par exemple, mentionnons les modèles de respiration, construits soit à partir de modèles mathématiques comme dans le fantôme NCAT [25] (structures thoraciques définies par des NURBS, et dont les points de contrôle sont modifiés pour simuler la respiration), soit de modèles biomécaniques, comme celui développé dans [24] à partir de propriétés physiologiques et adapté à différents scénarios de respiration.

D'autres modèles concernent les pathologies, et des modèles d'évolution de tumeurs ont par exemple été publiés. Parmi les plus récents, citons l'utilisation de données is-

1. <http://www.chups.jussieu.fr/ext/neuranat>



sues d'IRM de diffusion pour améliorer les modèles de diffusion et prolifération non isotropes de la croissance de tumeurs cérébrales [16]. L'intégration de tels modèles dans les techniques de traitement et d'interprétation d'images constitue une piste prometteuse de recherches.

Le domaine cardiaque est un domaine dans lequel de nombreux modèles sont développés, et ont considérablement évolué ces dernières années. La création de la conférence FIMH (*Functional Imaging and Modeling of the Heart*) en 2001 en atteste. Dans ce contexte, citons le projet *Integrative Biology*<sup>2</sup> [15]. Ce projet est dédié aux problèmes cardiaques et aux tumeurs cancéreuses et repose sur le développement de modèles computationnels détaillés permettant d'étudier ces pathologies. Par exemple, un modèle des fibres structurelles du cœur a été mis au point.

De manière plus générale, le projet *Physiome*<sup>3</sup> [2], qui vise à la compréhension et à la description quantitative de l'organisme, de sa physiologie et de ses pathologies, dans le but d'améliorer la santé, regroupe des travaux sur la modélisation du cœur et des poumons, de la fonction cardiaque, des flux sanguins et des échanges, etc.

Les modèles ne sont pas seulement de nature mathématique ou computationnelle. Ils peuvent également être de nature plus descriptive, et des travaux sur les ontologies commencent à apparaître dans le domaine de l'imagerie médicale. Les ontologies permettent de modéliser à la fois des concepts et des relations entre ces concepts et ont vocation à être réutilisés. Citons par exemple les travaux menés à Rennes sur l'ontologie du cortex cérébral [13].

Ces travaux pourront servir de support à des applications en fouille de données, domaine qui prend de l'importance en imagerie médicale. Ils constituent également des ressources précieuses pour l'enseignement et la formation.

## 4 Neurologie et neurosciences

Les applications en neurologie et en neurosciences suscitent toujours de nombreux travaux. Les problématiques s'enrichissent et les nouvelles images disponibles permettent de tenter de répondre à des questions de plus en plus complexes. Il s'agit en particulier de cartographier l'architecture cérébrale et ses fonctions. Ces travaux s'appuient sur de nombreux développements : détection et reconnaissance des structures gyrales et des sillons, analyse des faisceaux de fibres en IRM de diffusion [18, 22] et des liens qu'ils établissent entre les aires cérébrales, identification des aires fonctionnelles... Récemment, des travaux visent à étudier les plissements de la surface corticale et la sulcogénèse [23]. L'analyse d'images IRM anténatales fournit des informations permettant d'envisager une meilleure compréhension de la croissance du cerveau et de la variabilité des plissements d'un individu à l'autre [7]. On trouvera dans [17] un panorama des questions importantes, des solutions et des perspectives, ainsi qu'une importante bibliographie.

La détection d'activations repose encore beaucoup sur la méthode SPM<sup>4</sup> (*Statistical Parametric Mapping*), mais d'autres méthodes, reposant sur des principes différents,

ont pu être développées récemment avec succès (par exemple [9, 12, 19]).

Dans les cas pathologiques, l'étude de la réorganisation du cerveau (voir par exemple [14, 20]), le suivi des évolutions entre des images pré-opératoires et post-opératoires, la localisation de foyers épileptiques ou d'autres types de pathologies, sont autant d'enjeux cruciaux que les développements conjoints des techniques d'imagerie, de leur implantation dans les hôpitaux et des techniques de traitement et d'interprétation d'images permettent d'aborder. Des travaux menés par exemple au sein de l'Institut d'Imagerie Neurofonctionnelle IFR 49<sup>5</sup> portent entre autres sur la neuroimagerie intégrée des démences (devenu un enjeu majeur de santé publique), sur l'exploitation de l'imagerie en neurochirurgie (par exemple pour l'implantation d'électrodes intracérébrales, les bilans pré-opératoires, la résection de tumeurs), sur l'étude des fonctions cognitives chez l'adulte et l'enfant. Dans tous ces domaines, le traitement d'images peut apporter beaucoup, et la complexité des questions posées donnera sûrement lieu à de nouveaux développements originaux à la fois du point de vue théorique et méthodologique et du point de vue applicatif.

De même, la fusion de données issues de plusieurs types d'imagerie fonctionnelle, ou de données d'imagerie et de données électrophysiologiques (EEG, MEG), a déjà donné lieu à des contributions (par exemple [1]) et est également appelée à prendre de plus en plus d'ampleur.

## 5 Contribution de l'imagerie au dossier patient

Si les discussions sur le dossier patient sont anciennes, elles se sont amplifiées récemment avec la création du GIP-DMP<sup>6</sup>. Les questions importantes sont actuellement publiées sous forme de fiches et concernent surtout l'identification, le format, les interfaces, les droits d'accès, les aspects juridiques. Très peu de travaux concernent l'exploitation des images, les résultats de traitement d'images, les annotations, dans le contexte du DMP. Ils sont pour l'instant développés dans les laboratoires de recherche, et là encore les développements en imagerie médicale pourraient certainement contribuer à la constitution des DMP. Des outils partagés comme BrainVisa et Anatomist<sup>7</sup> ou ITK<sup>8</sup> constitueraient alors des supports de développement et d'utilisation primordiaux.

## Références

- [1] A. Aubert, R. Costalat, H. Duffau, and H. Benali. Modeling of pathophysiological coupling between brain electrical activation, energy metabolism and hemodynamics: insights for the interpretation of intracerebral tumor imaging. *Acta Biotheor.*, 50(4):281–295, 2002.
- [2] J. B. Bassingthwaite. The Macro-Ethics of Genomics to Health: The Physiome Project. *Comptes Rendus de l'Académie Française*, 326:1105–1110, 2003.

5. <http://www.ifr49.org/>

6. [http://www.sante.gouv.fr/htm/dossiers/gip\\_dmp/sommaire.htm](http://www.sante.gouv.fr/htm/dossiers/gip_dmp/sommaire.htm)

7. <http://brainvisa.info/>

8. <http://www.itk.org/>

2. <http://www.integrativebiology.ox.ac.uk/>

3. <http://www.physiome.org/>

4. <http://www.fil.ion.ucl.ac.uk/spm/>

- [3] I. Bloch. Traitement d'images. In B. Bouchon-Meunier and C. Marsala, editors, *Traitement de données complexes et commande en logique floue*, chapter 3, pages 95–152. Hermes, Paris, France, 2003.
- [4] I. Bloch (sous la direction de). *Fusion d'informations en traitement du signal et des images*. Hermès, Paris, France, 2003.
- [5] I. Bloch. Fuzzy Spatial Relationships for Image Processing and Interpretation: A Review. *Image and Vision Computing*, 23(2):89–110, 2005.
- [6] I. Bloch, T. Géraud, and H. Maître. Representation and Fusion of Heterogeneous Fuzzy Information in the 3D Space for Model-Based Structural Recognition - Application to 3D Brain Imaging. *Artificial Intelligence Journal*, 148:141–175, 2003.
- [7] A. Cachia, J.-F. Mangin, D. Rivière, F. Kherif, N. Boddart, A. Andrade, D. Papadopoulos-Orfanos, J.-B. Poline, I. Bloch, M. Zilbovicius, P. Sonigo, F. Brunelle, and J. Régis. A Primal Sketch of the Cortex Mean Curvature: A Morphogenesis Based Approach to Study the Variability of the Folding Patterns. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 22(6):754–765, jun 2003.
- [8] T. F. Chan, B. Y. Sandberg, and L. A. Vese. Active contours without edges for vector-valued images. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 11(2):130–141, 2000.
- [9] P. Ciuciu, J.B. Poline, G. Marrelec, J. Idier, C. Pallier, and H. Benali. Unsupervised robust nonparametric estimation of the hemodynamic response function for any fMRI experiment. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 22(10):1235–1251, 2003.
- [10] O. Colliot, O. Camara, and I. Bloch. Un modèle déformable intégrant des relations spatiales pour la segmentation de structures cérébrales. *Revue I3*, 2005.
- [11] T.F. Cootes, D. Cooper, C.J. Taylor, and J.Graham. Active shape models - their training and application. *Computer Vision Image Understanding*, 61(1):38–59, January 1995.
- [12] O. Coulon, J.-F. Mangin, J.-B. Poline, V. Frouin, and I. Bloch. Group Analysis of Individual Activation Maps using 3D Scale-Space Primal Sketches and a Markovian Random Field. In M. Moore, editor, *Spatial Statistics: Methodological Aspects and Applications*, CRM Series in Statistics LNS 159, chapter 10, pages 201–212. Springer Verlag, New York, 2001.
- [13] O. Dameron, B. Gibaud, and M. Musen. Using Semantic Dependencies for Consistency Management of an Ontology of Brain Cortex Anatomy. In *1st International Workshop on Formal Biomedical Knowledge Representation, KRMED04*, pages 30–38, 2004.
- [14] J. Doyon and H. Benali. Reorganization and plasticity in the adult brain during learning of motor skills. *Curr Opin Neurobiol.*, 15(2):161–167, 2005.
- [15] D. A. Gavaghan, S. Lloyd, D. R. S. Boyd, P. W. Jeffreys, A. C. Simpson, D. F. Mac Randal, L. Sastry, and L. Kleese van Dam. Integrative Biology - Exploiting e-Science to Combat Fatal Diseases. In *AHM2004*, 2004.
- [16] S. Jbabdi, E. Mandonnet, H. Duffau, L. Capelle, K.R. Swanson, M. Péligrini-Issac, R. Guillemin, and H. Benali. Simulation of anisotropic growth of low-grade gliomas using diffusion tensor imaging. *Magnetic Resonance in Medicine*, 2005.
- [17] J.-F. Mangin. Une vision structurelle de l'analyse des images cérébrales. Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris 11, 2005.
- [18] J.-F. Mangin, C. Poupon, C. Clark, D. Le Bihan, and I. Bloch. Eddy-Current Distorsion Correction and Robust Tensor Estimation for MR Diffusion Imaging. *Medical Image Analysis*, 6(191-198), 2002.
- [19] G. Marrelec, P. Ciuciu, M. Péligrini-Issac, and H. Benali. Estimation of the hemodynamic response function in event-related functional MRI: Bayesian networks as a framework for efficient Bayesian modeling and inference. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 23(8):959–967, Aug. 2004.
- [20] S. Meunier, L. Garnero, A. Ducorps, L. Mazieres, S. Lehericy, S. T. du Montcel, B. Renault, and M. Vidailhet. Human brain mapping in dystonia reveals both endophenotypic traits and adaptive reorganization. *Ann Neurol.*, 50(4):521–527, 2001.
- [21] J. Montagnat, H. Delingette, and N. Ayache. A Review of Deformable Surface: Topology, Geometry and Deformation. *Image and Vision Computing*, 19:1023–1040, 2001.
- [22] C. Poupon, J.-F. Mangin, C. A. Clark, V. Frouin, J. Régis, D. Le Bihan, and I. Bloch. Towards Inference of Human Brain Connectivity from MR Diffusion Tensor Data. *Medical Image Analysis*, 5:1–15, 2001.
- [23] J. Régis, J.-F. Mangin, T. Ochiai, V. Frouin, D. Rivière, A. Cachia, M. Tamura, and Y. Samson. "Sulcal root" generic model: a hypothesis to overcome the variability of the human cortex folding patterns. *Neurol Med Chir (Tokyo)*, 45:1–17, 2005.
- [24] A. Santhanam, C. Fidopiastis, F. Hamza-Lup, J. Rolland, and C. Imielinska. Physically-based deformation of high-resolution 3D models for augmented reality based medical visualization. In *Augmented Environments for Medical Imaging AMI-ARCS & MICCAI 2004*, pages 21–31, Rennes, France, 2004.
- [25] W. P. Segars, D. S. Lalush, and B. M. W. Tsui. Modeling respiratory mechanics in the MCAT and spline-based MCAT phantoms. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 48(1):89–97, 2001.
- [26] J. A. Sethian. *Level set methods: evolving interfaces in geometry, fluid mechanics, computer vision and material science*. Cambridge University Press, 1996.
- [27] D.W. Townsend, J.P.J. Carney, J.T. Yap, and N.C. Hall. PET/CT today and tomorrow. *The Journal of Nuclear Medicine*, 45(1 (Suppl.)):4S–14S, January 1999.
- [28] L. A. Vese and T. F. Chan. A multiphase level set framework for image segmentation using the Mumford and Shah model. *International Journal of Computer Vision*, 50(3):271–293, 2002.
- [29] L. Vieu. Spatial Representation and Reasoning in Artificial Intelligence. In O. Stock, editor, *Spatial and Temporal Reasoning*, pages 5–41. Kluwer, 1997.
- [30] T. Vik. *Modèles statistiques d'apparences non gaussiens. Application à la création d'un atlas probabiliste de perfusion cérébrale en imagerie médicale*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, Strasbourg I, Strasbourg, France, 2004.
- [31] S. G. Waxman. *Correlative Neuroanatomy*. McGraw-Hill, New York, 24 edition, 2000.
- [32] C. Xu, D.L. Pham, and J.L. Prince. Medical image segmentation using deformable models. In J.M. Fitzpatrick and M. Sonka, editors, *Handbook of Medical Imaging*, volume 2, pages 129–174. SPIE Press, 2000.

# Modèle numérique d'estimation 2D de la déformation des tissus mous biologiques à partir d'images échographiques radiofréquence : Résultats sur simulations numériques et données expérimentales

Elisabeth BRUSSEAU, Ghada SAID, Patrick CLARYSSE

CREATIS UMR CNRS 5515 INSERM U630

Bâtiment Blaise Pascal, 7 avenue Jean Capelle, 69621 Villeurbanne, France

elisabeth.brusseau@creatis.insa-lyon.fr, ghada.said@creatis.insa-lyon.fr

patrick.clarysse@creatis.insa-lyon.fr

**Résumé** – L'objectif de cette étude est l'estimation 2D de la déformation des tissus mous biologiques sous l'action d'une contrainte, à partir du traitement numérique d'images ultrasonores radiofréquence. Peu de travaux ont été effectués sur ce sujet. Dans cet article, nous proposons un nouveau modèle numérique 2D itératif et adaptatif, permettant l'estimation des paramètres de la déformation sans limite de résolution. Ce modèle intègre une stratégie de minimisation d'une fonction objectif avec contraintes d'inégalités linéaires. Des cartographies des champs de déplacement et de déformation axiaux et latéraux sont présentés, conformes à la théorie.

**Abstract** – The aim of this study is the estimation of the 2D strain occurring in soft biological tissues under load, from the processing of radiofrequency ultrasound images. Few works have been performed on that subject. In this article, we propose a new adaptive and iterative 2D numerical model, allowing full-resolved strain parameters estimation. This model is based on an objective function minimization with linear inequalities constraints. Lateral and axial, displacement and strain fields are presented, that corroborate the theory.

## 1 Contexte et objectifs

L'élastographie est une technique d'imagerie émergente, basée sur l'échographie. Son but est de fournir au médecin une information sur l'élasticité locale du tissu. Ce paramètre, non disponible avec les modalités d'imagerie actuelles, présente un intérêt majeur en diagnostic clinique car le développement d'une pathologie s'accompagne souvent d'une modification de l'élasticité des tissus. A titre d'exemple, certaines tumeurs cancéreuses comme celles du sein ou de la prostate, se présentent sous la forme de nodules beaucoup plus rigides que les tissus sains environnants [1]. Les maladies diffuses, telles que la cirrhose du foie, sont connues pour réduire de manière significative l'élasticité du tissu [2]. L'élastographie ultrasonore permet d'accéder à l'élasticité locale via une cartographie de la déformation puisque, sous l'action d'une même contrainte, les zones molles se déforment davantage que les zones rigides. En pratique, deux images ultrasonores (US) radiofréquence (RF) sont acquises l'une avant compression du milieu, l'autre après. L'estimation locale de la déformation est alors réalisée par une analyse des signaux RF acquis avant et après compression. Il est à noter que la compression du milieu est généralement effectuée à l'aide de la sonde échographique et est donc dirigée dans l'axe du faisceau ultrasonore (direction axiale, fig. 1).

Les techniques d'estimation de la déformation actuellement utilisées en élastographie sont principalement monodimensionnelles, caractère limitatif puisque la déformation des tissus est tridimensionnelle. En effet lorsqu'un milieu biologique subit une compression suivant une dimension (axiale), il en résulte également une dilatation dans les deux autres dimensions (latérale et azimutale). Si l'on ne tient pas compte de ces dilatations, le profil de déformation sera d'autant plus erroné que la com-

pression appliquée sera importante. Estimer avec précision la déformation d'un milieu suivant une dimension nécessite donc de prendre en compte le mouvement 3D du tissu. Dans cette étude, nous considérons l'estimation de la déformation en 2D à partir d'acquisitions ultrasonores RF bidimensionnelles.

Très peu de méthodes 2D ont été développées. Trois approches peuvent être citées. La première est le suivi de speckle 2D, technique classique d'estimation du déplacement, duquel se déduit la déformation par calcul du gradient. Cependant l'estimation manque de robustesse vis-à-vis de la décorrélation des signaux induite par la compression. En effet, en première approximation, le signal US RF acquis après compression du milieu peut être vu comme une réplique localement déphasée et comprimée du signal avant compression [3-4]. La seconde approche [5] propose d'opérer d'abord, une compensation globale de la déformation axiale par un étirement temporel des signaux après compression, ainsi qu'une interpolation latérale. Puis pour chaque signature acoustique 1D, sa version déformée est itérativement recherchée dans les directions axiale et latérale. Deux limites sont pourtant à souligner : l'étirement temporel global n'est pas adéquat puisqu'il conduit à modifier la forme des signatures acoustiques qui initialement ne s'étaient pas déformées. De plus la résolution du déplacement latéral est limitée par le taux d'interpolation opéré. La dernière approche [6] compense la déformation d'une région 2D RF de l'image après compression jusqu'à l'obtention du minimum de l'erreur quadratique moyenne avec la région avant compression. Cette minimisation est réalisée par un algorithme Levenberg-Marquardt, qui faute de contraintes peut conduire à une fonction objectif présentant de nombreux minima locaux.

Nous proposons donc un nouveau modèle numérique de traitement 2D des données US RF pour l'estimation de la défor-

mation axiale avec prise en compte du déplacement latéral. Ce modèle, itératif et adaptatif, intégrant une stratégie de minimisation sous contraintes, permet l'estimation des paramètres de la déformation sans limite de résolution.

## 2 Méthode

Soient  $I_1(x, y)$  et  $I_2(x, y)$  les images (matrices de signaux) US RF respectivement acquises avant et après compression du milieu. Le principe de la méthode consiste pour chaque région US RF 2D sélectionnée sur l'image avant compression du milieu et notée  $R_1$ , à rechercher sa version déformée  $R_2$  dans l'image après compression et à en estimer la déformation. Il est à noter que les images ultrasonores sont caractérisées par une résolution anisotrope. La résolution ultrasonore axiale est déterminée par la longueur de l'onde émise, fonction de la fréquence centrale. La résolution latérale est limitée par la largeur du faisceau ultrasonore et est dégradée par rapport à la résolution axiale.

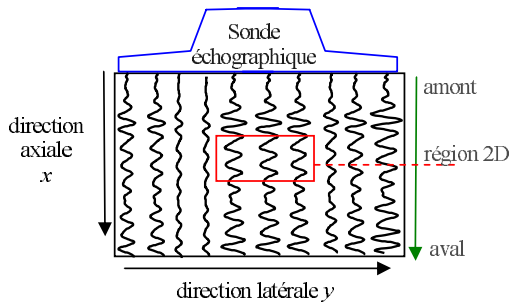


FIG. 1: Géométrie de l'acquisition

La déformation de la région US RF 2D peut être modélisée de la façon suivante. Dans la direction axiale,  $R_2$  est vue comme une réplique localement déphasée et comprimée de  $R_1$ . Le déphasage résulte du cumul des déformations axiales des régions en amont (fig. 1). Dans la direction latérale, seuls des déplacements seront considérés en raison de la résolution. Localement, après avoir compensé le déphasage axial, l'inverse du facteur de compression axial,  $\alpha$ , et le déplacement latéral  $\tau$  seront estimés comme les arguments qui minimisent la fonction objectif  $f(\alpha, \tau)$ . Cette fonction représente l'opposé du coefficient de corrélation entre la région 2D initiale et sa version déformée compensée pour le facteur d'échelle axial et le déplacement latéral. Si aucune contrainte n'est introduite, la fonction  $f$  a l'inconvénient majeur de conduire à un problème d'optimisation présentant de nombreux minima locaux. Cependant si la zone de recherche est suffisamment réduite,  $f$  sera généralement caractérisée par un minimum global. La méthode développée comporte donc 3 étapes :

- 1/ déplacement 2D adaptatif de la région d'étude;
- 2/ estimation conjointe du facteur d'échelle axial  $\alpha$  et du déplacement latéral  $\tau$ ;
- 3/ détermination des champs de déformations.

### 2.1 Déplacement 2D adaptatif de la région d'étude.

Afin de considérer la même zone tissulaire avant et après déformation et ainsi limiter la zone de recherche, un déplacement adaptatif de la région d'étude est réalisé. Alors que sur  $I_1(x, y)$ , la région d'étude  $R_1$  est déplacée régulièrement d'un pas axial  $\Delta_{ax}$  et d'un pas latéral  $\Delta_{lat}$ ,  $R_2$  est déplacée d'un pas adaptatif sur  $I_2(x, y)$ . Le déplacement axial résulte du cumul des déformations axiales des régions en amont, et le déplacement latéral est fonction des déplacements latéraux des régions adjacentes. Soit  $p_{R1}$  la position de  $R_1$  sur  $I_1(x, y)$ . La position  $p_{R2}$  de la région correspondante  $R_2$  sur  $I_2(x, y)$  est donnée par :

$$p_{R1}(m, n) = m \cdot \Delta_{ax} \vec{i} + n \cdot \Delta_{lat} \vec{j} \quad (1)$$

$$p_{R2}(m, n) = \sum_{k=0}^{m-1} (1 + \varepsilon_k) \Delta_{ax} \vec{i} + \sum_{k=0}^{n-1} u_k \vec{j} \quad (2)$$

avec  $\varepsilon_k$  la déformation axiale des régions situées en amont aux positions  $p_{R1}(k, n)$  et  $u_k$  le déplacement latéral. Le déphasage axial est ainsi directement compensé. Seuls le facteur d'échelle axial et le déplacement latéral, de faible amplitude, sont à estimer.

### 2.2 Estimation conjointe du facteur d'échelle axial $\alpha$ et du déplacement latéral $\tau$

Deux régions acoustiques RF 2D en correspondance sur les images avant et après déformation étant sélectionnées,  $R_1(x, y)$  à la position  $p_{R1}$  sur  $I_1$  et  $R_2(x, y)$  à la position  $p_{R2}$  sur  $I_2$ , l'estimation conjointe des paramètres  $(\alpha, \tau)$  est réalisée par la minimisation de la fonction objectif  $f(\alpha, \tau)$  avec contraintes d'inégalités linéaires :

$$[\hat{\alpha}, \hat{\tau}] = \arg \min_{\alpha, \tau} f(\alpha, \tau) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{min} &\leq \alpha \leq \alpha_{max} \\ \tau_{min} &\leq \tau \leq \tau_{max} \end{aligned}$$

avec

$$f(\alpha, \tau) = \frac{-\sum (R_1(x, y) - \overline{R_1}(x, y))(R_2(\alpha x, y + \tau) - \overline{R_2}(\alpha x, y + \tau))}{\sqrt{\sum (R_1(x, y) - \overline{R_1}(x, y))^2 \cdot \sum (R_2(\alpha x, y + \tau) - \overline{R_2}(\alpha x, y + \tau))^2}} \quad (4)$$

La stratégie d'optimisation mise en œuvre est une méthode de descente, avec vérification des conditions de Kuhn et Tucker. Soit  $x_0(\alpha_0, \tau_0)$ , le vecteur de paramètres initial appartenant à  $K = \{(\alpha, \tau) \mid \alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max}, \tau_{min} \leq \tau \leq \tau_{max}\}$  l'ensemble des points admissibles.  $K$  formant un pavé de  $\mathbb{R}^2$ ,  $x_0$  est choisi comme le centre de cet ensemble convexe. La minimisation consiste alors à générer une séquence d'itérés admissibles selon le schéma :

$$x_{l+1} = x_l + \rho_l \cdot SD_l \quad (5)$$

où  $\rho_l$  est le pas de descente, déterminé par une recherche linéaire et  $SD_l$ , la direction de descente. Cette dernière est une direction de Newton calculée par résolution du sous problème quadratique associé, faisant intervenir le Hessien du Lagrangien. Celui-ci n'est pas calculé directement mais il est initialisé à la matrice identité et une approximation définie positive

en est construite itérativement avec des mises à jour de type BFGS. La sélection adaptative de  $R_1$  et  $R_2$  ainsi que l'introduction des contraintes sont primordiales pour limiter l'occurrence de minima locaux.

### 2.3 Estimation des déformations

Le facteur de compression axiale  $1/\alpha_k$  et le déplacement latéral  $\tau_k$  étant localement connus, les champs de déformations peuvent être déterminés. La déformation axiale, directement liée au facteur d'échelle, est obtenue par la formule suivante:

$$\varepsilon_k = 1/\alpha_k - 1 \quad (6)$$

La déformation latérale est calculée comme le gradient du déplacement.

## 3 Résultats

Afin d'évaluer la méthode développée, de premiers tests ont été réalisés sur des données simulées.

### 3.1 Sur des données simulées

Un milieu numérique a été créé, consistant en un cube de 5 cm d'arête au centre duquel se trouve une inclusion de 2 cm de diamètre. Le module d'Young de l'inclusion a été fixé à 100 kPa, et celui du milieu cubique à 50 kPa. La compression axiale appliquée est de 1.5 kPa. La déformation du milieu a été calculée à l'aide des éléments finis et les images échographiques RF correspondant aux milieux avant et après compression ont été générées à l'aide du logiciel FIELD II [7], spécifiquement dédié à la simulation des données ultrasonores. Les propriétés acoustiques du milieu cubique et de l'inclusion ont été choisies proches. La simulation ultrasonore a été effectuée pour une sonde de fréquence centrale 3 MHz, et pour une fréquence d'échantillonnage de 100 MHz.

Les paramètres utilisés pour l'estimation de la déformation sont les suivants: la région d'intérêt  $R_1$  mesure 5,1 mm en axial et 0,56 mm en latéral. La dimension axiale correspond à 10 fois la longueur d'onde  $\lambda$ . Sur l'image avant déformation, cette région est déplacée régulièrement avec un recouvrement de 75 % dans la direction axiale (soit  $\Delta_{ax} = 1,2$  mm) et de 60 % dans la direction latérale ( $\Delta_{lat} = 0,23$  mm). Les valeurs minimales et maximales du facteur d'échelle axial et du déplacement latéral recherchés sont  $\alpha_{min}=1$ ,  $\alpha_{max}=1,08$ ,  $\tau_{min}=-0,9$  mm,  $\tau_{max}=+0,9$  mm. La dimension axiale de la région d'intérêt et les bornes des facteurs d'échelle résultent d'études antérieures pour l'estimation 1D de la déformation [4]. Enfin  $x_0$  est fixé à ( $\alpha_0=1,04$ ,  $\tau_0=0$ ), centre du domaine admissible.

Les résultats obtenus sont présentés figure 2. Nous pouvons remarquer que, bien que l'inclusion ne soit pas détectable à l'échographie (fig.2j), elle est clairement mise en évidence sur l'image des déformations axiales (fig.2f). En axial, les champs de déformation et de déplacement sont très proches de la théorie. En latéral le déplacement est conforme à la théorie, mais son estimation est plus bruitée en raison de la mauvaise résolution dans cette direction. Cependant l'inclusion est également visible sur l'image des déformations latérales. Enfin, la fonction objectif étant basée sur le coefficient de corrélation entre

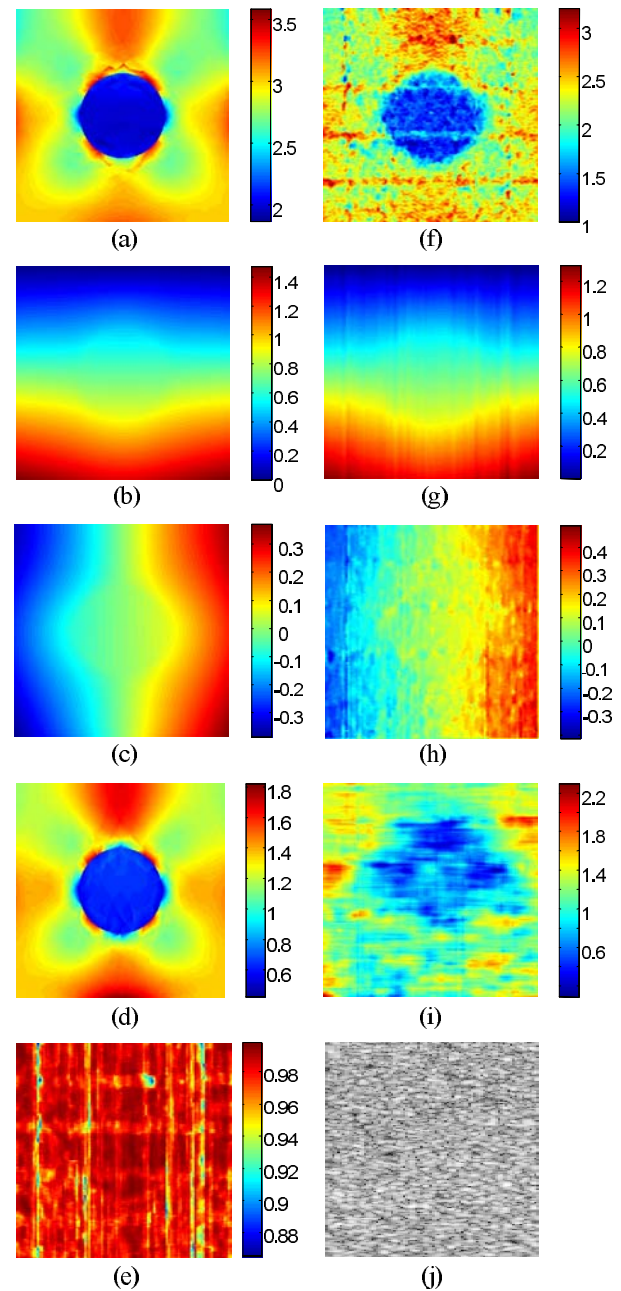


FIG. 2: Résultats sur données simulées.

Les champs de déplacements et de déformations théoriques, issus du calcul par éléments finis, sont notés (a)-(d) et ceux estimés sont représentés (f)-(i).

(a),(f): déformations axiales en % ou % de compression, (b),(g): déplacements axiaux en mm, (c),(h): déplacements latéraux en mm, (d),(i): déformations latérales en % ou % de dilatation, (e) image des coefficients de corrélation, (j) image échographique du milieu.



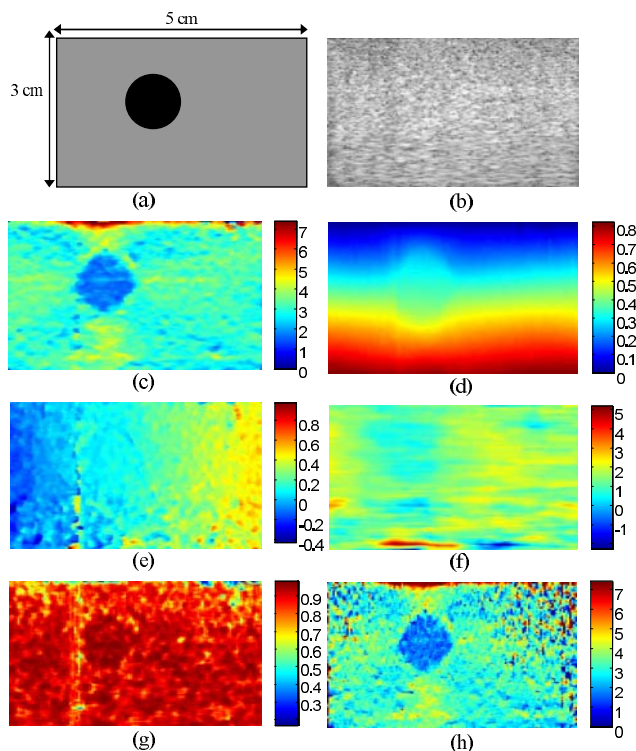


FIG. 3: Résultats sur données expérimentales. (a) schéma du milieu, (b) image échographique, (c) déformations axiales en %, (d) déplacements axiaux en mm, (e) déplacements latéraux en mm, (f) déformations latérales en %, (g) image des coefficients de corrélation, (h) déformations axiales estimées avec une méthode 1D.

la région 2D initiale et sa version déformée compensée, ce dernier a été estimé en moyenne à 0.96, son minimum étant 0.86.

### 3.2 Sur des données expérimentales

Des résultats issus d'une expérience sont également présentés. Les images échographiques RF ont été acquises pour un objet test de forme parallélépipédique, de dimensions  $3 \times 5 \times 4$  cm<sup>3</sup> (axial x latéral x azimutal) contenant une inclusion cylindrique plus dure (fig.3a). Cet objet test a été fabriqué avec un cryogel d'alcool de polyvinyl (PVA-C), matériau imitant les propriétés mécaniques et acoustiques des tissus biologiques, et dont le module d'Young augmente avec le nombre de cycles de congélation-décongélation [8]. Le milieu parallélépipédique a été soumis à 1 cycle de congélation-décongélation alors que l'inclusion cylindrique a subi 3 cycles. Le milieu a été déformé en abaissant la sonde de 0,9 mm, générant ainsi une déformation moyenne de 3%. Les images US RF ont été acquises avec une sonde de fréquence centrale 7 Mhz et une fréquence d'échantillonnage de 50 MHz. Chaque image est composée de 128 lignes RF. Les paramètres d'estimation sont les mêmes que précédemment, exceptée la taille de  $R_1$ , 2,2 mm ( $=10.\lambda$ ) en axial et 0.65 mm en latéral. Le déplacement de cette région d'intérêt s'effectue toujours avec un recouvrement de 75% en axial et de 60% en latéral.

Les résultats sont présentés en figure 3. Alors que l'inclusion n'est pas visible sur l'échographie (fig.3b), elle apparaît claire-

ment sur l'image des déformations axiales (fig.3c). Le déplacement axial (fig.3d) maximal est estimé à 0,83 mm, et la déformation axiale moyenne à 3,05%, corroborant les conditions expérimentales. L'estimation des déplacements latéraux est bruitée, mais reste conforme à la théorie. Son amplitude non négligeable démontre la nécessité de tenir compte du mouvement latéral pour une meilleure estimation de la déformation axiale. La distribution des coefficients de corrélation entre une région 2D initiale et sa version déformée compensée est uniforme et estimée en moyenne à 0.89. Le calcul de la déformation axiale avec la méthode 1D des facteurs d'échelle (fig.3h) montre la dégradation de l'estimation avec le mouvement latéral.

## 4 Conclusions et perspectives

Un nouveau modèle numérique 2D d'estimation de la déformation des tissus mous biologiques à partir de données US RF a été développé. Son caractère adaptatif et itératif permet une estimation précise et sans limite de résolution des paramètres de la déformation. Les premiers résultats obtenus sont très encourageants. Une étude va être menée pour automatiser le choix des paramètres latéraux (taille de la région d'intérêt,  $\tau_{min}$ ,  $\tau_{max}$ ), automatisation déjà existante pour les paramètres axiaux. Enfin l'évaluation de la méthode va se poursuivre en incluant notamment des essais sur des échantillons de tissus biologiques *in vitro*, puis *in vivo*.

## Références

- [1] T.A. Krouskop, T.M. Wheeler, F. Kallel, B.S. Garra, T. Hall. *Elastic moduli of Breast and Prostate Tissues under Compression*. Ultrason. Imaging, 20:260-274, 1998.
- [2] W.A.D. Anderson et J.M. Kissane. *Pathology*. St. Louis : C.V. Mosby Co. - 9ème édition, 1953.
- [3] K.S. Alam, J. Ophir, E. Konofagou. *An adaptive strain estimator for elastography*. IEEE UFFC, 45(2):461-472, 1998.
- [4] E. Brusseau, C. Perrey, P. Delachartre, M. Vogt, D. Vray, H. Ermert. *Axial Strain Imaging using a Local Estimation of the Scaling Factor from RF Ultrasound Signals*. Ultrason. Imaging, 22(2):95-107, 2000.
- [5] E. Konofagou, J. Ophir. *A new elastographic method for estimation and imaging of lateral displacements, lateral strains, corrected axial strains and Poisson's ratio in tissues*. Ultras. Med. Biol., 24:1183-99, 1998.
- [6] R.L. Maurice, J. Ohayon, Y. Frétygny, M. Bertrand, G. Soulez, G. Cloutier. *Non-invasive vascular elastography: Theoretical framework*. IEEE TMI, 23(2):164-180, 2004.
- [7] J.A. Jensen. *Field: A program for simulating ultrasound systems*. Med. Biol. Eng. Comp., 10th NordicBaltic Conference on Biomedical Imaging, 1996, Vol.4, Supplement 1, Part 1, pp. 351-353.
- [8] K.C. Chu, B.K. Rutt. *Polyvinyl Alcohol Cryogel: An Ideal Phantom Material for MR Studies of Arterial Flow and Elasticity*. Mag. Res. Med., 37(2):314-319, 1997.

# Modélisation de courbes de quaternions duaux par des courbes de Bézier et des splines

Gwenael GUILLARD, Chafiaa HAMITOUCHE, Christian ROUX

Dépt. ITI, LaTIM INSERM U650, GET-ENST Bretagne  
CS 83818, 29238 Brest Cedex, France  
gwenael.guillard@enst-bretagne.fr

**Résumé** – Le travail présenté dans cet article concerne le problème de modélisation de courbes de quaternions duaux. Nous proposons une nouvelle méthode d'interpolation entre deux quaternions duaux basée sur la définition d'angle entre deux quaternions duaux unitaires. Ces notions sont alors utilisées pour définir des algorithmes pour des courbes de Bézier et des splines

**Abstract** – This paper deals with dual quaternion curve modeling. We propose a new method of interpolation between two dual quaternions based on the definition of two unit dual quaternions. These notions are thus used in order to define algorithms for Bezier curves and splines.

## 1 Introduction

Les quaternions duaux sont utilisés dans une grande variété de domaines tels que la stéréo-vision [1], le guidage de robot par vision [2], le recalage [3] et la mécanique en général. Dans chacun de ces domaines, il est nécessaire de pouvoir tant interpolier qu'approcher des courbes se situant dans l'espace des quaternions duaux. Les algorithmes existant, par exemple [4], présentent l'inconvénient de quitter cet espace.

Nous proposons ici une nouvelle méthode d'interpolation se basant sur la définition préalable de la notion d'angle entre deux quaternions duaux unitaires. Ensuite, ayant une interpolation, nous proposons deux algorithmes de génération de courbes. Le premier est un algorithme de De Casteljau pour représenter des courbes de Bézier. Le second est un algorithme de Boor afin de générer des courbes splines.

Ces méthodes étant développées dans l'espace des quaternions duaux, il convient de prendre les plus grandes précautions à l'introduction de chaque nouvelle notion. En effet, cet ensemble n'est pas un espace vectoriel mais un module. Ces deux espaces algébriques présentent certes des similitudes mais aussi de grandes différences.

## 2 Les quaternions duaux

Cette partie présente rapidement les quaternions duaux. Après une description des quaternions puis des nombres duaux, nous introduirons les quaternions duaux avec de nouvelles méthodes d'approximation et d'interpolation.

### 2.1 Les quaternions

Introduit par Hamilton [5], l'ensemble des quaternions  $\mathbb{H}$  est l'extension des nombres complexes à  $\mathbb{R}^4$  avec trois parties imaginaires. Un tel nombre est défini comme :

$$\mathbf{q} = w + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

où  $w, x, y$  et  $z$  sont des nombres réels. Les quaternions  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  et  $\mathbf{k}$  sont munis des propriétés suivantes :

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k},$$

ce qui permet de définir l'addition, la multiplication et la multiplication par un réel et de munir  $\mathbb{H}$  d'une structure de corps et d'espace vectoriel sur les réels. En plus de ces opérations algébriques, on peut définir un conjugué, une norme et un inverse  $\mathbf{q}^{-1}$ . Cette norme induit de plus un produit scalaire lequel permet de définir un angle non orienté  $\theta$ . Enfin, une interpolation des quaternions unitaires (slerp<sup>1</sup>) a été proposée dans [6].

### 2.2 Les nombres duaux

Introduits par Clifford [7] afin d'étudier la géométrie non euclidienne, les nombres duaux ont ensuite été développés par Study durant ses recherches sur la géométrie des droites. Un nombre dual est donné [8] par :

$$\bar{\lambda} = \lambda + \epsilon \hat{\lambda}$$

avec  $\lambda$  et  $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}$  et  $\epsilon$  un élément tel que  $\epsilon^2 = 0$ . L'ensemble de ces nombres, noté  $\mathbb{D}$ , peut être muni d'une addition, d'une multiplication et d'une multiplication par un réel faisant de  $\mathbb{D}$  un anneau mais pas un corps : seuls les nombres duaux dont la partie réelle est non nulle possède pour inverse  $\bar{\lambda}^{-1} = \frac{1}{\lambda^2} \bar{\lambda}^*$ , où  $\bar{\lambda}^*$  est le conjugué de  $\bar{\lambda}$  défini par  $\bar{\lambda}^* = \lambda - \epsilon \hat{\lambda}$ .

### Fonction duale

Il est possible d'associer à une fonction réelle analytique  $f$  une fonction duale  $\bar{f}$ . Pour chaque nombre dual  $\bar{x} = x + \epsilon \hat{x}$ , on pose  $\bar{f}(\bar{x}) = f(x) + \epsilon \hat{x} f'(x)$ , où  $f'$  désigne la dérivée de  $f$  [9]. Ainsi, on peut définir des fonctions cosinus et sinus duales :

$$\overline{\cos \theta} = \cos \theta - \epsilon \hat{\theta} \sin \theta, \quad \overline{\sin \theta} = \sin \theta + \epsilon \hat{\theta} \cos \theta$$

Elles vérifient les équations trigonométriques usuelles [8].

<sup>1</sup> Acronyme anglais de Spherical Linear intERPolation

## Vecteur dual

La notion de nombre dual s'étend aisément à celle de vecteur dual [10]  $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \epsilon \hat{\mathbf{v}}$ , où  $\mathbf{v}$  et  $\hat{\mathbf{v}}$  sont des vecteurs réels de  $\mathbb{R}^3$ . On peut définir une addition, une multiplication et une multiplication par un scalaire. Comme l'a montré Study, les vecteurs duaux sont très intéressants pour représenter les droites de l'espace. Une droite est notée  $\bar{\mathbf{g}} = \mathbf{g} + \epsilon \hat{\mathbf{g}}$ , où  $\mathbf{g}$  est son vecteur directeur et  $\hat{\mathbf{g}}$  est son moment.

## 2.3 Les quaternions duaux

Les quaternions duaux sont définis comme les nombres et les vecteurs duaux [1][9] :

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \epsilon \hat{\mathbf{q}}$$

où  $\mathbf{q}$  et  $\hat{\mathbf{q}}$  sont des quaternions. On notera  $\mathbb{H}[\epsilon]$  cet ensemble. L'addition, la multiplication et la multiplication par un nombre dual sont définies :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{q}}_0 + \bar{\mathbf{q}}_1 &= (\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_1) + \epsilon(\hat{\mathbf{q}}_0 + \hat{\mathbf{q}}_1), \\ \bar{\mathbf{q}}_0 \bar{\mathbf{q}}_1 &= \mathbf{q}_0 \mathbf{q}_1 + \epsilon(\mathbf{q}_0 \hat{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{q}_1 \hat{\mathbf{q}}_0), \\ \lambda \bar{\mathbf{q}} &= \lambda \mathbf{q} + \epsilon(\lambda \hat{\mathbf{q}}),\end{aligned}$$

Il est très important ici de remarquer que  $\mathbb{H}[\epsilon]$  n'est pas un espace vectoriel sur  $\mathbb{D}$  mais un module. Cela tient au fait que  $\mathbb{D}$  lui-même n'est pas un corps mais seulement un anneau.

## Norme et produit scalaire

Nous utilisons la pseudo-norme<sup>2</sup> présentée dans [1]. Tout d'abord, il convient de définir le conjugué d'un quaternion dual  $\bar{\mathbf{q}}$  comme  $\bar{\mathbf{q}}^* = \mathbf{q}^* + \epsilon \hat{\mathbf{q}}^*$ , et, comme dans le cas des vecteurs réels ou celui des quaternions, on définit la pseudo-norme

$$\|\bar{\mathbf{q}}\|^2 = \bar{\mathbf{q}} \bar{\mathbf{q}}^* = \mathbf{q} \mathbf{q}^* + \epsilon(\mathbf{q} \hat{\mathbf{q}}^* + \hat{\mathbf{q}} \mathbf{q}^*)$$

Il convient de remarquer que  $\|\bar{\mathbf{q}}\|$  est un nombre dual et non un réel. Pour simplifier, nous parlerons de *norme* mais nous n'utiliserons aucune des propriétés des normes sans nous être assurés de leur véracité dans notre cas. Etant donnée cette norme, on définit un produit scalaire :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{q}}_0 \cdot \bar{\mathbf{q}}_1 &= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{q}}_0 \bar{\mathbf{q}}_1^* + \bar{\mathbf{q}}_1 \bar{\mathbf{q}}_0^*) \\ &= \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}_1 + \epsilon(\mathbf{q}_0 \cdot \hat{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{q}_1 \cdot \hat{\mathbf{q}}_0)\end{aligned}\quad (1)$$

Ici encore, le nombre n'est pas un réel mais un nombre dual. Ce n'est pas un vrai produit scalaire mais il est symétrique.

## Interprétation géométrique

Tout comme les quaternions représentent les rotations, les quaternions duaux représentent les transformations rigides [1]. Une telle transformation est une vis : une rotation et une translation autour et le long d'un même axe. Elle dépend donc d'un vecteur dual (l'axe)  $\bar{\mathbf{l}}$ , d'un angle  $\theta$  et d'un pas de translation  $d$ . Le quaternion dual associé est alors

$$\bar{\mathbf{q}} = \frac{\cos \frac{\theta + \epsilon d}{2}}{2} + \frac{\sin \frac{\theta + \epsilon d}{2}}{2} (1 + \epsilon \hat{\mathbf{l}}) \quad (2)$$

<sup>2</sup>Ce n'est pas une norme car elle ne satisfait pas le critère  $\|q\| = 0 \Leftrightarrow \bar{\mathbf{q}} = 0$ .

## 3 Interpolation de deux quaternions duaux

Nous présentons dans cette partie une nouvelle méthode d'interpolation entre deux quaternions duaux unitaires. Cette interpolation repose sur la notion d'angle entre deux quaternions unitaires.

### 3.1 Angle entre deux quaternions duaux unitaires

Nous ne considérons dans cette partie que les quaternions duaux unitaires, c'est à dire tels que  $\|\bar{\mathbf{q}}\| = 1 = 1 + \epsilon 0$ . L'idée est, par analogie avec  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{H}$  de trouver un nombre dual  $\bar{\theta} = \theta + \epsilon \hat{\theta}$  vérifiant

$$\bar{\mathbf{q}}_0 \cdot \bar{\mathbf{q}}_1 = \overline{\cos \theta} = \cos \theta - \epsilon \hat{\theta} \sin \theta.$$

La condition  $\|\bar{\mathbf{q}}\| = 1$  induit

$$\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{q}} = 0. \quad (3)$$

Utilisant l'équation (1), la condition d'unité sur  $\bar{\mathbf{q}}_0$  et  $\bar{\mathbf{q}}_1$  amène  $\|\bar{\mathbf{q}}_0\| = \|\mathbf{q}_0\| = 1 = \|\mathbf{q}_1\| = \|\bar{\mathbf{q}}_1\|$ . Aussi il existe un réel  $\theta \in [0, \pi]$  vérifiant

$$\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}_1 = \cos \theta \quad (4)$$

Si  $\theta \neq 0$  et  $\theta \neq \pi$  alors  $\sin \theta \neq 0$  et l'on peut considérer le réel

$$\hat{\theta} = -\frac{\mathbf{q}_0 \cdot \hat{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{q}_1 \cdot \hat{\mathbf{q}}_0}{\sin \theta}. \quad (5)$$

Dans le cas contraire, utilisant (3), on peut écrire

$$\bar{\mathbf{q}}_0 \cdot \bar{\mathbf{q}}_1 = 1 + \epsilon(\mathbf{q}_0 \cdot \hat{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{q}_1 \cdot \hat{\mathbf{q}}_1) = 1$$

On considère alors, avec les notations (2)

$$\hat{\theta} = |d_1 - d_0|. \quad (6)$$

Cette équation est écrite dans l'espace des réels et se justifie en observant que  $\sin \theta$  étant non nul, les quaternions unitaires  $\mathbf{q}_0$  et  $\mathbf{q}_1$  sont égaux ou opposés et représentent donc la même rotation [6]. Aussi les deux transformations associées respectivement à  $\bar{\mathbf{q}}_0$  et  $\bar{\mathbf{q}}_1$  ne diffèrent que d'une translation. On vérifie que l'on a bien

$$\overline{\cos \theta} = \cos \theta + \epsilon \hat{\theta} \sin \theta = 1 + \epsilon 0 = 1.$$

Dans les deux cas, nous avons bien trouvé un nombre dual  $\bar{\theta} = \theta + \epsilon \hat{\theta}$ , défini par les équations (4)(5)(6), vérifiant

$$\bar{\mathbf{q}}_0 \cdot \bar{\mathbf{q}}_1 = \overline{\cos \bar{\theta}}. \quad (7)$$

Nous appelons ce nombre  $\bar{\theta}$  l'angle dual entre les quaternions duaux unitaires  $\bar{\mathbf{q}}_0$  et  $\bar{\mathbf{q}}_1$ .

### 3.2 Interpolation entre deux quaternions duaux unitaires

Cette notion d'angle entre deux quaternions duaux unitaires va nous être utile pour proposer une alternative géométrique à l'interpolation proposée par [4][11]. Notre méthode présente l'avantage de rester dans l'espace des quaternions duaux. Cependant, si les quaternions duaux unitaires considérés sont tous deux des vecteurs réels (resp. des quaternions), alors l'interpolation proposée aboutit au même résultat qu'une interpolation linéaire (resp. une slerp).



Désirant interpoler entre deux quaternions duaux unitaires  $\bar{\mathbf{q}}_0$  et  $\bar{\mathbf{q}}_1$ , nous cherchons une combinaison linéaire de  $\bar{\mathbf{q}}_0$  et  $\bar{\mathbf{q}}_1$  et donc deux nombres duaux  $\bar{c}_0$  et  $\bar{c}_1$  vérifiant

$$\bar{\mathbf{q}} = \bar{c}_0 \bar{\mathbf{q}}_0 + \bar{c}_1 \bar{\mathbf{q}}_1. \quad (8)$$

Comme  $\bar{\mathbf{q}}$ ,  $\bar{\mathbf{q}}_0$  et  $\bar{\mathbf{q}}_1$  doivent être des quaternions duaux, on a

$$1 = \bar{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{q}} = \bar{c}_0^2 + 2 \bar{c}_0 \bar{c}_1 \overline{\cos \bar{\theta}} + \bar{c}_1^2$$

où  $\bar{\theta}$  est l'angle entre  $\bar{\mathbf{q}}_0$  et  $\bar{\mathbf{q}}_1$  défini en (7). Etant donné le réel  $t \in [0, 1]$ , on considère  $\bar{\mathbf{q}}$  le quaternion dual unitaire faisant un angle  $t\bar{\theta}$  avec le quaternion dual unitaire  $\bar{\mathbf{q}}_0$ . Alors, d'après la définition (7)

$$\bar{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{q}}_0 = \overline{\cos(t\bar{\theta})}.$$

Appliquer le produit scalaire (1) à l'équation (8) puis les formules trigonométriques duales mène à

$$\overline{\sin^2 \bar{\theta}} \bar{c}_0 = \overline{\sin((1-t)\bar{\theta})} \overline{\sin \bar{\theta}}. \quad (9)$$

De même, on montre que

$$\overline{\sin^2 \bar{\theta}} \bar{c}_1 = \overline{\sin(t\bar{\theta})} \overline{\sin \bar{\theta}} \quad (10)$$

Deux cas se présentent donc : soit  $\overline{\sin \bar{\theta}}$  est un nombre dual inversible, c'est à dire que sa partie réelle  $\sin \theta$  ne s'annule pas, soit il ne l'est pas. Dans le premier cas, d'après (8), (9) et (10)

$$\bar{\mathbf{q}}(t) = \overline{\sin((1-t)\bar{\theta})} (\overline{\sin \bar{\theta}})^{-1} \bar{\mathbf{q}}_0 + \overline{\sin(t\bar{\theta})} (\overline{\sin \bar{\theta}})^{-1} \bar{\mathbf{q}}_1,$$

ou, avec un abus de notation,

$$\bar{\mathbf{q}}(t) = \frac{\overline{\sin((1-t)\bar{\theta})}}{\overline{\sin \bar{\theta}}} \bar{\mathbf{q}}_0 + \frac{\overline{\sin(t\bar{\theta})}}{\overline{\sin \bar{\theta}}} \bar{\mathbf{q}}_1.$$

Dans le cas où,  $\overline{\sin \bar{\theta}}$  n'est pas inversible, on considère comme quaternion dual unitaire interpolé

$$\bar{\mathbf{q}}(t) = (1-t)\bar{\mathbf{q}}_0 + t\bar{\mathbf{q}}_1.$$

Nous pouvons donner deux raisons à ce choix. La première est que si  $\overline{\sin \bar{\theta}}$  n'est pas inversible, cela signifie que les deux transformations représentées par les quaternions duaux ne diffèrent que d'une translation. Il est donc cohérent de choisir alors une interpolation linéaire. D'un autre côté, si  $\overline{\sin \bar{\theta}}$  n'est pas inversible alors  $\bar{\theta} = \hat{\epsilon}\theta$  et il vient

$$\overline{\sin \bar{\theta}} = \hat{\epsilon}\theta, \quad \overline{\sin(t\bar{\theta})} = \epsilon t\theta,$$

ce s'écrit, formellement et en abusant des notations, permet d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\sin((1-t)\bar{\theta})}}{\overline{\sin \bar{\theta}}} \bar{\mathbf{q}}_0 + \frac{\overline{\sin(t\bar{\theta})}}{\overline{\sin \bar{\theta}}} \bar{\mathbf{q}}_1 &= \frac{\epsilon(1-t)\hat{\theta}}{\hat{\epsilon}\theta} \bar{\mathbf{q}}_0 + \frac{\epsilon t\hat{\theta}}{\hat{\epsilon}\theta} \bar{\mathbf{q}}_1 \\ &= (1-t)\bar{\mathbf{q}}_0 + t\bar{\mathbf{q}}_1 \end{aligned}$$

On en déduit les formules d'interpolation :

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}}(t) &= \frac{\overline{\sin((1-t)\bar{\theta})}}{\overline{\sin \bar{\theta}}} \bar{\mathbf{q}}_0 + \frac{\overline{\sin(t\bar{\theta})}}{\overline{\sin \bar{\theta}}} \bar{\mathbf{q}}_1, & \text{si } \overline{\sin \bar{\theta}} \text{ est inversible,} \\ \bar{\mathbf{q}}(t) &= (1-t)\bar{\mathbf{q}}_0 + t\bar{\mathbf{q}}_1, & \text{sinon.} \end{aligned}} \quad (11)$$

## 4 Génération de courbes dans l'espace des quaternions duaux

### 4.1 Un algorithme de De Casteljau pour les quaternions duaux

L'algorithme de De Casteljau est probablement l'un des plus importants dans le domaine de la génération de courbe. La première étape dans  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  est d'interpoler, pour chaque  $t \in [0, 1]$  une seconde génération de points  $\mathbf{p}_1^0$  depuis des paires de points successifs de la première génération  $\mathbf{p}_0^0$  et  $\mathbf{p}_1^0$ . Appliquant itérativement cette étape, on arrive à un seul point  $\mathbf{p}(t)$ , pour chaque  $t \in [0, 1]$ . La courbe résultante est appelée courbe de Bézier. Cet algorithme a été appliqué aux quaternions unitaires dans [6] en remplaçant l'interpolation linéaire par la slerp.

Nous proposons ici de remplacer ces deux interpolations par l'interpolation (11), auquel cas l'algorithme devient :

---


$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}}_0, \dots, \bar{\mathbf{q}}_n &\in \mathbb{H}[\epsilon] \text{ et } t \in [0, 1], \\ \bar{\mathbf{q}}_i^{(0)}(t) &= \bar{\mathbf{q}}_i, \text{ pour } i = 0, \dots, n \\ \bar{\mathbf{q}}_i^{(j)}(t) &= \frac{\overline{\sin((1-t)\bar{\theta})}}{\overline{\sin \bar{\theta}}} \bar{\mathbf{q}}_i^{(j-1)}(t) + \frac{\overline{\sin(t\bar{\theta})}}{\overline{\sin \bar{\theta}}} \bar{\mathbf{q}}_{i+1}^{(j-1)}(t), \\ j &= 1, \dots, n, i = 0, \dots, n-j, \\ \text{où } \bar{\theta} &\text{ est l'angle dual entre } \bar{\mathbf{q}}_i^{(j-1)}(t) \text{ et } \bar{\mathbf{q}}_{i+1}^{(j-1)}(t). \end{aligned}$$


---

### 4.2 Un algorithme de De Boor pour les quaternions duaux

Il est bien connu que les courbes de Bézier ne sont pas suffisamment flexible et qu'elles manquent de contrôle local. Par construction, chaque quaternion dual unitaire donné aura une influence sur la totalité de la courbe. Ceci aboutit de plus à un coût de calcul élevé. Une solution à ce problème sont les B-splines. S'il existe une définition analytique de ces courbes, nous préférons adapter l'algorithme géométrique de De Boor-Cox.

Dans cet algorithme, le processus d'interpolation est restreint à un plus petit sous-ensemble de points de contrôle. Comme pour l'algorithme de de Casteljau, nous remplaçons l'interpolation linéaire et la slerp par l'interpolation (11) :

---


$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}}_0, \dots, \bar{\mathbf{q}}_n &\in \mathbb{H}[\epsilon] \text{ et } t \in [0, 1], \\ \text{il existe un entier } r &\text{ tel que } t \in [t_r, t_{r+1}]. \\ \bar{\mathbf{q}}_i^0 &= \bar{\mathbf{q}}_i \text{ pour } i = r-k+1, \dots, r \\ \bar{\mathbf{q}}_i^{(j)}(t) &= \frac{\overline{\sin((1-T)\bar{\theta})}}{\overline{\sin \bar{\theta}}} \bar{\mathbf{q}}_i^{(j-1)}(t) + \frac{\overline{\sin(T\bar{\theta})}}{\overline{\sin \bar{\theta}}} \bar{\mathbf{q}}_{i+1}^{(j-1)}(t) \\ \text{où } T &= \frac{t - t_i}{t_{i+k-j} - t_i} \text{ pour } j = 1, \dots, k-1 \text{ et } i = r-k+1, \\ &\dots, r, \text{ et où } \bar{\theta} \text{ est l'angle dual entre } \bar{\mathbf{q}}_i^{(j-1)}(t) \\ &\text{ et } \bar{\mathbf{q}}_{i+1}^{(j-1)}(t). \\ \bar{\mathbf{q}}(t) &= \bar{\mathbf{q}}_{r,k} \end{aligned}$$


---

## 5 Résultats et discussion

Afin de visualiser ces algorithmes, nous avons séparés la partie duale de la partie réelle et sur chacune de ces parties, nous avons tracé les quatre composantes du quaternion, Fig. (2). Sur les résultats, le meilleur contrôle local d'une courbe spline par rapport à une courbe de Bézier apparaît clairement sur chacune des huit composantes. Les propriétés connues de ces deux types de courbes, tant dans  $\mathbb{R}^n$  que dans  $\mathbb{H}$  se retrouvent ici, en particulier celle de l'enveloppe convexe : les courbes restent dans l'enveloppe convexe des points de contrôle.

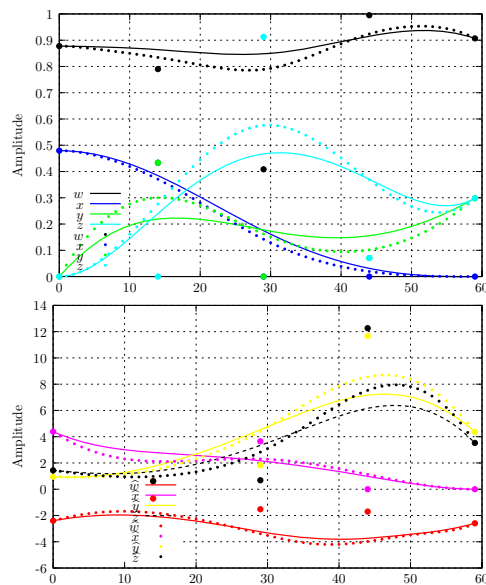


FIG. 1 – Approximation de quaternions duaux unitaires. En ligne pleine sont représentées les composantes de la courbe de Bézier, en pointillés les composantes de la courbe spline. En haut, les composantes de la partie réelle, en bas, celles de la partie duale.

Au delà de ces premiers résultats, il convient de tester ces résultats dans des contextes utilisant les quaternions duaux. Par exemple, il sera intéressant d'interpoler des transformations rigides et de comparer avec les méthodes existantes.

## 6 Conclusion

Nous avons présenté une méthode d'interpolation des quaternions duaux unitaires. Nous avons pour cela défini la notion d'angle entre deux quaternions duaux unitaires. Il nous a été possible ensuite de construire deux algorithmes géométriques de génération de courbes, l'un pour des courbes de Bézier, l'autre pour les courbes spline. Le potentiel d'application est important, notamment pour le calcul de mouvement à partir de moment clés, mais aussi en stéréo vision et en mécanique. Ces algorithmes sont actuellement utilisés pour la modélisation du lien forme-fonction des complexes ostéo-articulaires par les surfaces réglées [12] (le mouvement est représenté par l'axode et la morphologie par la surface focale géodésique). Nous avons en effet montré la pertinence de cette représentation et, afin de nous munir d'outils d'analyse des surfaces réglées, nous avons choisi de représenter les surfaces réglées et leurs pro-

priétés différentielles par des quaternions duaux unitaires. Dès lors, grâce aux algorithmes présentés ici, il nous est possible d'interpoler et d'approximer de telles surfaces puis de les analyser.

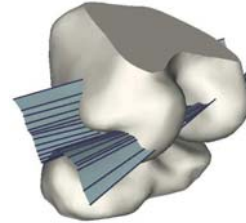


FIG. 2 – Surface réglée liée au mouvement de flexion d'un genou.

## Références

- [1] K. Daniilidis, "Hand-eye calibration using dual quaternions," *International Journal of Robotics Research*, vol. 18, no. 3, pp. 286–298, 1999.
- [2] T. Horsch and H. Nolzen, "Local motion planning avoiding obstacles with dual quaternions," in *Proceedings of the IEEE Robotics and Automation Conference*, pp. 241–245, May 1992.
- [3] M. Walker, L. Shao, and R. Volz, "Estimating 3D location parameters using dual quaternions," *CVGIP : Image Understanding*, vol. 54, no. 3, pp. 358–367, 1991.
- [4] B. Jüttler, "Visualization of moving objects using dual quaternion curves," *Computer and Graphics*, vol. 18, no. 3, pp. 315–326, 1994.
- [5] W. R. Hamilton, *Lectures on quaternions*. McMillan and co. Ltd, 1905.
- [6] K. Shoemake, "Animating rotation with quaternion curves," *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, vol. 19, no. 3, pp. 245–254, 1985.
- [7] W. Clifford, "Preliminary sketch of biquaternions," *Proceedings of London Mathematical Society*, vol. 4, pp. 381–395, 1873.
- [8] A. Yang and F. Freudenstein, "Application of dual-number quaternion algebra to the analysis of spatial mechanisms," *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 31, pp. 300–308, 1964.
- [9] J. Goddard, *Pose and motion estimation from vision using dual quaternion-based extended Kalman filtering*. PhD thesis, The University of Tennessee, TN, USA, 1997.
- [10] H. Stachel, "Instantaneous spatial kinematics and the invariants of the axodes," *Proceedings Ball 2000 Symposium*, 2000.
- [11] Q. J. Ge and B. Ravani, "Computer aided geometric design of motion interpolants," *ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 116, no. 1, pp. 756–762, 1994.
- [12] G. Guillard, C. Hamitouche, D. Gil, C. Roux, and E. Stindel, "Analyse du lien forme-fonction du complexe ostéo-articulaire par identification axode-surface focale," in *Accepté à Forum GBM'05*.

# Détection-estimation conjointe de l'activité cérébrale en imagerie fonctionnelle (IRMf)

Salima MAKNI<sup>1</sup>, Philippe CIUCIU<sup>1</sup>, Jérôme IDIER<sup>2</sup>, Jean-Baptiste POLINE<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Service Hospitalier Frédéric Joliot (CEA/DSV/DRM)  
4 Place du Général Leclerc, 91401 Orsay cedex, France

<sup>2</sup>IRCCyN (CNRS)  
1 rue de la Noë, BP 92101 44321 Nantes cedex 3, France  
makni@shfj.cea.fr, ciuciu@shfj.cea.fr,  
Jerome.Idier@irccyn.ec-nantes.fr, poline@shfj.cea.fr

**Résumé** — En imagerie par résonance magnétique fonctionnelle (IRMf), pour une meilleure compréhension des activations cérébrales, deux questions sont classiquement abordées : d'une part, la détection et la localisation de cette activité dans le cerveau humain, et d'autre part l'estimation de la dynamique de la réponse du système vasculaire cérébral. Généralement ces deux aspects sont traités séparément, en supposant une forme de réponse connue pour faire la détection, et en ayant préalablement localisé les zones d'activation pour faire l'estimation. Dans [1], détection et estimation sont abordées conjointement dans une région du cerveau où le bruit est modélisé comme étant la somme d'une dérive basse fréquence et d'un bruit blanc gaussien. Toutefois, il est désormais connu que le bruit présent dans les données IRMf est temporellement corrélé. Dans cette communication, nous étendons l'approche proposée dans [1] en modélisant le bruit comme un processus autoregressif d'ordre 1 variable spatialement. Nous illustrons l'apport de cette modélisation sur données synthétiques et réelles.

**Abstract** — Analysis of functional Magnetic Resonance Imaging (fMRI) data essentially focuses on two questions: first, a detection problem that studies which parts of the brain are activated by a given stimulus and second, an estimation problem that investigates the temporal dynamic of the brain response during activations. Up to now, these questions have been addressed independently. However, the activated areas need to be known prior to the analysis of the temporal dynamic of the response. On the other hand, a typical shape of the response has to be assumed a priori for detection purpose. This situation motivates the need for new methods in neuroimaging data analysis that are able to go beyond this unsatisfactory trade-off. In [1], a novel detection-estimation approach was proposed to perform these two tasks simultaneously in region-based analysis. In this paper, to deal with the noise modeling in fMRI data, we modelled the noise as the sum of a spatially varying low frequency drift and a random white component. However, it was shown that fMRI time series generally demonstrate serial correlation. To account for this important feature, we propose an extension of [1] that relies on AR(1) noise model and we demonstrate the gain brought by this generalization both on artificial and real data sets.

## 1 Introduction

Grâce à sa bonne résolution spatiale, l'Imagerie par Résonance Magnétique fonctionnelle (IRMf) permet de cartographier l'activité du cerveau lorsque le sujet sain ou pathologique perçoit un stimulus ou réalise une tâche [3]. Toutefois, sa faible résolution temporelle l'empêche de suivre la dynamique des activations au niveau neuronal. En effet, le couplage entre l'activation des neurones et le système vasculaire, en sortie duquel le signal IRMf est mesuré, introduit un délai hémodynamique et un filtrage passe-bas qu'il convient de caractériser pour tenter d'accéder à une réponse à haute résolution temporelle. Beaucoup d'approches voxeliques ont été proposées pour estimer ce filtre, encore appelé fonction de réponse hémodynamique (FRH) [4, 5]. Dans [4], il a été observé que pour des voxels voisins, la forme de la FRH estimée pour chacun d'entre eux présente une certaine régularité spatiale à un facteur d'échelle près. Ainsi l'introduction d'un facteur d'amplitude (modulation) qui refléterait la

variabilité du niveau de réponse d'un voxel à un autre, semble une hypothèse justifiée. Dans [1], nous avons proposé d'estimer l'hémodynamique régionale au sein d'un ensemble de voxels d'activité homogène, *i.e.*, d'une région d'intérêt. Il s'agit d'estimer conjointement une *forme* de filtre sur cette région tout en introduisant une spécificité de l'activité en chaque voxel à travers un facteur de modulation, encore appelé *amplitude neurale*. En IRMf, le signal mesuré est composé de trois termes : un terme de signal utile qui est la convolution de la séquence binaire, codant les temps d'arrivée du stimulus, par la FRH, un terme de bruit physiologique (cœur, respiration, mouvement) et finalement une composante de bruit d'acquisition et d'incertitude sur le modèle. Dans [1], nous avons supposé que cette dernière composante est un bruit blanc gaussien variable spatialement. Toutefois, il a été démontré que le bruit IRMf est temporellement corrélé. Dans cette communication, nous présentons donc une variante de [1] qui tient compte de cette caractéristique.

## 2 Modélisation

### 2.1 Modèle simplifié

Nous présentons ici une forme simplifiée du problème traité (un seul stimulus) par souci de clarté. Soit  $\mathcal{R} = (V_j)_{j=1:J}$  une région d'intérêt supposée fonctionnellement homogène, et soit  $\mathbf{y}_j = (y_{j,t_n})_{n=1:N}$ , le signal IRMf acquis au voxel  $V_j$  dans  $\mathcal{R}$ , et mesuré aux temps  $(t_n = nTR)_{n=1:N}$ , où  $TR$  désigne le délai entre deux acquisitions successives. Sous l'hypothèse d'un couplage vasculaire cérébral *linéaire* et *invariant* dans le temps,  $\mathbf{h} = (h_{d\Delta t})_{d=0:D}$  désigne la réponse impulsionnelle inconnue du système ayant pour entrée la séquence binaire  $\mathbf{x} = (x_n)_{n=1:N}$  codant les *temps d'arrivée* du stimulus et pour sortie les données  $\mathbf{y}_j$ . Dans [1], nous avons proposé un modèle régional d'activation cérébrale, intégrant une modulation spatiale de l'activité :

$$\mathbf{y}_j = a_j \mathbf{X} \mathbf{h} + \mathbf{P} \mathbf{l}_j + \mathbf{b}_j, \quad \forall V_j \in \mathcal{R} \quad (1)$$

où  $\mathbf{a} = (a_j)_{j=1:J}$  et  $a_j$  désigne l'amplitude au voxel  $j$ .  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{D+1}$  est la matrice binaire correspondante à la séquence  $\mathbf{x}$ . La matrice  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^Q$  est une base orthonormée de fonctions (*e.g.*, base de cosinus avec  $3 \leq Q \leq 10$ ), fixée *a priori*, modélisant la dérive basse fréquence présente dans les données, et due au repliement spectral de phénomènes physiologiques (battements cardiaques, respiration). Le vecteur  $\mathbf{l}_j$  définit les coefficients de régression sur cette base à estimer conjointement avec  $(\mathbf{h}, \mathbf{a})$ . Enfin,  $\mathbf{b}_j$  modélise un terme d'erreurs de modèle et d'acquisition. Comme dans [6, 7], nous considérons un modèle autoregressif de premier ordre (*i.e.*, AR(1)) variable spatialement,  $b_{j,t_n} = \rho_j b_{j,t_n-1} + \varepsilon_{j,t_n}$ ,  $\forall j, t$ , pour tenir compte de l'autocorrélation temporelle du bruit des données IRMf, et de sa non-stationnarité spatiale avec  $\varepsilon_j \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_{\varepsilon_j}^2 \mathbf{I}_N)$ .

### 2.2 Détection-estimation conjointe de l'activité fonctionnelle

Nous nous plaçons dans un cadre bayésien où l'approche proposée correspond à une méthode de déconvolution *semi-aveugle* non supervisée qui consiste à estimer conjointement les paramètres d'intérêt  $(\mathbf{h}, \mathbf{a})$  et d'autres paramètres statistiques (du bruit et de l'*a priori*).

### 2.3 Modèle *a priori*

Afin d'obtenir une estimée de  $\mathbf{h}$  suffisamment régulière, on introduit des connaissances *a priori* sur  $\mathbf{h}$  sous la forme de contraintes aux bords  $h_0 = h_{P\Delta t} = 0$  et d'une distribution  $p(\mathbf{h}; \sigma_h^2) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_h^2 \mathbf{R})$ , où  $\mathbf{R}$  est une matrice de corrélation imposant une contrainte de régularité sur  $\mathbf{h}$ . De plus, dans une région d'intérêt donnée du cerveau, seule une partie des voxels peut être activée par le stimulus en question. Afin de prendre en compte cette propriété, on introduit le couple de variables aléatoires  $z_j = (q_j, a_j)$ ,  $j = 1:J$ , où  $q_j$  est une variable binaire indiquant si le voxel  $V_j$  est activé ( $q_j = 1$ ) ou non ( $q_j = 0$ ) par le stimulus en question. Conditionnellement à  $q_j$ ,  $a_j$  est une variable aléatoire gaussienne qui représente l'amplitude neurale pour le voxel  $V_j$ . Il s'agit donc d'un modèle *a priori* de

mélange gaussien à deux classes :  $\lambda \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) + \bar{\lambda} \mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$ , où  $\lambda = Pr(q_j = 1)$ ,  $\bar{\lambda} = 1 - \lambda$ .

Les coefficients  $\boldsymbol{\ell} = [\ell_1^t, \dots, \ell_J^t]^t$  doivent aussi être estimés. Pour cela, on suppose que  $\boldsymbol{\ell}$  est un processus aléatoire indépendant de  $\mathbf{h}$  tel que  $p(\boldsymbol{\ell}; \eta^2) = \prod_j p(\ell_j; \eta^2)$  et  $\ell_j \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \eta^{-2} \mathbf{I}_Q)$ . Pour les hyperparamètres  $\boldsymbol{\theta} = \{\lambda, \sigma_1^2, \sigma_0^2, \mu_1, \rho, \sigma_\varepsilon^2, \eta^2\}$ , le recours à des *a priori* non informatifs conduit à :

$$p(\sigma_\varepsilon^2) = \prod_j p(\sigma_{\varepsilon_j}^2) = \prod_j \sigma_{\varepsilon_j}^{-2} \quad (2)$$

$$p(\lambda, \mu_1, \sigma_1^2, \sigma_0^2) = \lambda^{1/2} \bar{\lambda}^{1/2} \sigma_1^{-1} \sigma_0^{-1}. \quad (3)$$

### 2.4 Distribution *a posteriori*

Compte tenu de (1)–(3), la règle de Bayes nous donne :

$$p(\mathbf{h}, \mathbf{a}, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}) \propto \eta^{-JQ} \left( \prod_j \epsilon_j^{-N-1} (1 - \rho_j^2)^{1/2} \mathbb{1}_{[-1,1]}(\rho_j) \right) \exp \left( -\frac{\mathbf{h}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{h}}{2\sigma_h^2} - \sum_j \left( \frac{\tilde{\mathbf{y}}_j^t \boldsymbol{\Lambda}_j \tilde{\mathbf{y}}_j}{2\sigma_{\varepsilon_j}^2} + \frac{\|\ell_j\|^2}{2\eta^2} \right) \right) \prod_j \sum_{i=0}^1 \frac{\lambda_i^2 \lambda_{1-i}}{\sigma_i^2 \sigma_{1-i}} \exp \left( -\frac{(a_j - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} \right) \quad (4)$$

avec  $\tilde{\mathbf{y}}_j = \mathbf{y}_j - a_j \mathbf{X} \mathbf{h} - \mathbf{P} \ell_j$ , et  $\boldsymbol{\Lambda}_j$  est l'inverse de la covariance d'un AR(1) de paramètre  $\rho_j$  et de variance 1.

### 2.5 Estimateurs

À partir de (4), il s'agit de construire des estimateurs pour les différents paramètres inconnus et de classer les voxels de la région d'intérêt en voxels activés et inactivés. Comme dans [1], nous recourons à un échantillonneur de Gibbs. Il s'agit de simuler successivement des réalisations des paramètres inconnus selon leurs distributions conditionnelles *a posteriori*, d'itérer ce procédé jusqu'à convergence, puis de calculer des estimateurs marginaux du type espérance *a posteriori*.

Par rapport à [1], l'échantillonnage des paramètres autoregressifs  $\rho$  pose une difficulté supplémentaire. En effet, la distribution conditionnelle  $p(\rho_j | \text{rest})$  s'écrit :

$$p(\rho_j | \text{rest}) \propto (1 - \rho_j^2)^{1/2} \exp \left( -\frac{A_j}{2\sigma_{\varepsilon_j}^2} \left( \rho_j - \frac{B_j}{A_j} \right)^2 \right) \mathbb{1}_{[-1,1]} \quad (5)$$

où  $A_j = \sum_{n=2}^{N-1} \tilde{y}_{j,n}^2$  et  $B_j = \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{y}_{j,n} \tilde{y}_{j,n+1}$ . La distribution (5) ne s'identifiant pas à une loi connue, nous proposons de l'approcher par une loi beta  $g(\rho_j) \sim \mathcal{B}(\alpha_j, \beta_j)$  définie sur l'intervalle  $[-1, 1]$ , qui servira de loi instrumentale au sein d'un algorithme de Metropolis-Hastings [8]. La procédure d'identification des paramètres de cette loi se fait de la façon suivante :

1. Trouver une loi beta qui se rapproche de  $p(\rho_j | \text{rest})$ . Pour cela, on écrit la loi beta sous la forme  $g(\rho_j) \propto (1 + \rho_j)^{\alpha_j-1} (1 - \rho_j)^{\beta_j-1}$ ,  $\forall |\rho_j| < 1$ .
2. On écrit le développement de Taylor au second ordre

de  $\ln(1+\rho_j)$  et  $\ln(1-\rho_j)$  au voisinage de  $m_j=B_j/A_j$  :

$$\ln(1 \pm \rho_j) = \ln(1 \pm m_j) \pm \frac{\rho_j - m_j}{1 \pm m_j} - \frac{1}{2} \frac{(\rho_j - m_j)^2}{(1 \pm m_j)^2} + O((\rho_j - m_j)^3).$$

3. On définit les scalaires  $(a_j, b_j, c_j)$  tels que :

$$a_j \ln(1 + \rho_j) + b_j \ln(1 - \rho_j) + c_j = -\frac{A_j}{2\sigma_{\varepsilon_j}^2} (\rho_j - m_j)^2 + O((\rho_j - m_j)^3).$$

4. Par identification, on détermine donc  $a_j$  et  $b_j$  :

$$a_j = A_j (1 - m_j^2) (1 + m_j) / 2\sigma_{\varepsilon_j}^2, \\ b_j = A_j (1 - m_j^2) (1 - m_j) / 2\sigma_{\varepsilon_j}^2,$$

5. On obtient ainsi  $g(\rho_j) \propto (1 - \rho_j^2)^{1/2} (1 + \rho_j)^{a_j} (1 - \rho_j)^{b_j} \mathbb{1}_{[-1,1]}$ , avec  $\alpha_j = a_j + 3/2$  et  $\beta_j = b_j + 3/2$ .

L'algorithme est décrit dans la table 1.

### 3 Simulation

#### 3.1 Génération des données

Nous avons simulé une séquence *aléatoire* pour un stimulus. Les intervalles inter-stimuli sont aléatoires et suivent une distribution uniforme sur  $[2.5, 3.5]$  sec. Les temps d'arrivée du stimulus sont placés sur une grille échantillonnée au pas  $\delta t = 0.5$  sec. La région d'intérêt  $\mathcal{R}$  contient  $J_1 = 22$  voxels activés et  $J_0 = 38$  voxels non activés. La distribution des amplitudes choisie est :  $\mathbf{a}_{j \in C_1} \sim \mathcal{N}(\mu_1 = 10, \sigma_1^2 = 3)$  et  $\mathbf{a}_{j \in C_0} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2 = 1)$ .

Pour tous les voxels, la séquence binaire  $\mathbf{x}_t$  est ensuite convoluée par une FRH,  $\mathbf{h}_c$ , reportée en Fig. 2(a). Un bruit AR(1)  $\mathbf{b}_j$  est ensuite additionné au signal induit par le stimulus  $\mathbf{a}_j \mathbf{X} \mathbf{h}$  pour chaque voxel  $V_j$ . Tous les coefficients AR ont été fixés à la même valeur :  $\rho_j = \rho = 0.4, \forall j = 1 : J$ . Des dérivées basse fréquence  $\mathbf{P} \mathbf{\ell}_j$  sont aussi ajoutées à la série temporelle. Ces dérivées ont été générées à partir d'une base de cosinus avec des coefficients  $\mathbf{\ell}_j$  générés à partir d'une distribution normale.

#### 3.2 Résultats

Les résultats d'estimation des FRH et des amplitudes neuronales obtenues avec les deux modèles de bruit gaussien (blanc (BBG) et AR(1) (BAR(1))) sont représentés à la Figure 1. Les résultats montrent tout d'abord que le modèle de bruit temporellement corrélé induit une forme de FRH estimée plus proche de  $\mathbf{h}_c$ . Les coefficients AR estimés ont des valeurs en moyenne égale à 0.35. Finalement, on obtient une meilleure estimation des amplitudes neuronales avec une covariance plus faible en utilisant le modèle de bruit corrélé (Figure 1(c)-(d)).

## 4 Données réelles

#### 4.1 Génération des données

Cette nouvelle approche a été également testée sur des données IRMf issues d'un protocole de repérage des zones

TAB. 1 – Etape de l'algorithme

<ul style="list-style-type: none"> <li>Initialisation : choisir <math>\mathbf{h}^0, \mathbf{a}^0, \mathbf{l}^0, \theta^0</math>.</li> <li>Itération <math>k</math> : générer <math>\mathbf{h}^k, \mathbf{a}^k, \mathbf{l}^k, \theta^k</math> selon les lois conditionnelles a posteriori : <ul style="list-style-type: none"> <li>HRF : <math>\mathbf{h}^k \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_h, \mathbf{R}_h)</math>. <math display="block">\mathbf{m}_h = \mathbf{R}_h \sum_j \mathbf{S}_j^t \mathbf{Q}_j \mathbf{y}_j, \quad \mathbf{R}_h^{-1} = \mathbf{R}^{-1} + \sum_j \mathbf{S}_j^t \mathbf{Q}_j \mathbf{S}_j,</math> <math display="block">\mathbf{S}_j = \mathbf{a}_j \mathbf{X}, \quad \mathbf{Q}_j = \sigma_{\varepsilon_j}^{-2} \mathbf{\Lambda}_j</math> </li> <li>variance de la HRF : <math>(\sigma_h^2)^k \sim \mathcal{IG}(D/2, \mathbf{h}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{h}/2)</math>.</li> <li>variables de nuisance : <math>\mathbf{\ell}^k \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{\ell_j}, \boldsymbol{\Sigma}_{\ell_j})</math>, <math display="block">\boldsymbol{\Sigma}_{\ell_j}^{-1} = \eta^{-2} \mathbf{I}_Q + \sigma_{\varepsilon_j}^{-2} \mathbf{P}^t \mathbf{\Lambda}_j \mathbf{P},</math> <math display="block">\boldsymbol{\mu}_{\ell_j} = \sigma_{\varepsilon_j}^{-2} \boldsymbol{\Sigma}_{\ell_j} \mathbf{P}^t \mathbf{\Lambda}_j (\mathbf{y}_j - \mathbf{S}_j \mathbf{h}).</math> </li> <li>amplitudes : Pour chaque voxel <math>j</math>, <ul style="list-style-type: none"> <li><math>u_j^k \sim \mathcal{U}[0, 1]</math> ; si <math>u_j^k \leq \lambda_{1,j}^k</math>, alors <math>q_j^k = 1</math> sinon <math>q_j^k = 0</math>. <math display="block">\lambda_{i,j} = (1 + \tilde{\lambda}_{1-i,j} / \tilde{\lambda}_{i,j})^{-1},</math> <math display="block">\tilde{\lambda}_{i,j} = \frac{\lambda_i^2 \lambda_{1-i}}{\sigma_i} \sigma_{i,j} \exp(\mu_{i,j}^2 / 2\sigma_{i,j}^2), \quad i = 0, 1.</math> </li> <li><math>a_j^k   q_j^k = i \sim \mathcal{N}(\mu_{i,j}^k, (\sigma_{i,j}^2)^k), \quad i = 0, 1.</math> <math display="block">\sigma_{i,j}^{-2} = \sigma_i^{-2} + \mathbf{g}^t \mathbf{Q}_j \mathbf{g}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{X} \mathbf{h}</math> <math display="block">\mu_{i,j} = \sigma_{i,j}^2 (\mathbf{g}^t \mathbf{Q}_j \mathbf{e}_j + i \mu_i \sigma_i^{-2}),</math> </li> </ul> </li> <li>variances du bruit blanc <math>\varepsilon_j^2</math> : <math display="block">\forall j, \quad \sigma_{\varepsilon_j}^2 \sim \mathcal{IG}\left(\frac{N+1}{2}, \frac{1}{2} \ \tilde{\mathbf{y}}_j\ _{\mathbf{\Lambda}_j}^2\right).</math> </li> <li>paramètres du mélange : <ul style="list-style-type: none"> <li>poids : <math>\lambda^k \sim \mathcal{B}(J_1 + 3/2, J_0 + 3/2)</math>.</li> <li>Variance de la classe 0 : <math>(\sigma_0^2)^k \sim \mathcal{IG}\left(\frac{J_0 - 1}{2}, \frac{\nu_0}{2}\right)</math>. <math display="block">\nu_i = \sum_{j \in C_i} (a_j - \eta_i)^2 \quad \text{et} \quad \eta_i = \frac{1}{J_i} \sum_{j \in C_i} a_j, \quad (i = 0, 1).</math> </li> <li>variance et moyenne de la classe 1 : <math display="block">(\sigma_1^2)^k \sim \mathcal{IG}\left(\frac{J_1 - 1}{2}, \frac{\nu_1}{2}\right), \quad \mu_1^k \sim \mathcal{N}\left(\eta_1, \frac{\sigma_1^2}{J_1}\right).</math> </li> </ul> </li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Itérer jusqu'à <math>K_0</math> (nombre d'itérations maximum). Finalement, Calculer la moyenne a posteriori selon : <math display="block">\hat{\kappa}^{\text{MP}} = \frac{1}{K_0 - I + 1} \sum_{k=I}^{K_0} \kappa^k, \quad \forall \kappa \in \{\mathbf{h}, \mathbf{a}, \mathbf{l}, \theta\}</math> </li> </ul> <p>(les échantillons <math>\kappa^1, \dots, \kappa^I</math> sont rejetés pour tenir compte de la période de chauffage de l'échantillonneur)</p>
--	---

activées par différents stimuli (moteur, visuel, auditif,...). L'expérience comportait  $N = 125$  scans ( $TR = 2.4$  sec.). Ici, on s'intéresse au stimulus suivant : clic avec la main droite (clicD). La région d'intérêt choisie  $\mathcal{R}_1$  est un clus-

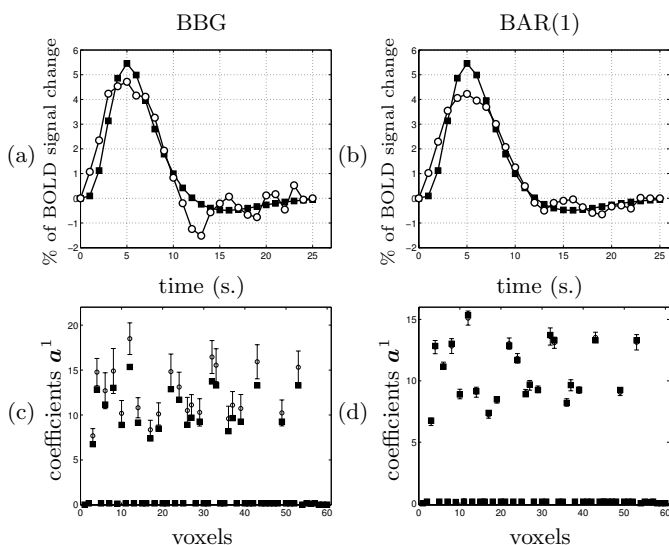


FIG. 1 – (a) et (b) représentent l'estimation de la FRH en utilisant un modèle de bruit BBG et BAR(1). Les symboles ■ et ○ représentent la vraie FRH  $h_c$  utilisée et son estimée. (c) et (d) représentent l'estimation des amplitudes en utilisant les modèles BBG et BAR(1). Les symboles ■ and ○ représentent les vraies amplitudes et leurs estimées. Les barres d'erreurs sont calculées à partir des variances a posteriori estimées à partir des amplitudes échantillonnées.

ter SPM (Statistical Parametric Mapping) obtenu à partir d'une carte  $t$  seuillée avec  $P=0.001$ . Cette région contient 178 voxels localisés autour du voxel de coordonnées en millimètres : ( $X=-36, Y=-21, Z=48$ ).

## 4.2 Résultats

Les résultats d'estimation des FRH et des cartes d'amplitudes neuronales obtenues avec les deux modèles de bruit BBG et BAR(1) sont représentés en Figure 2. Ces résultats montrent tout d'abord que le modèle BAR(1) induit une forme de FRH à peu près similaire à celle obtenue avec le modèle BBG (avec le modèle BAR(1), on a une HRF moins passe-bas car la corrélation des données se répartit entre celle du signal utile et celle du bruit). Les coefficients AR estimés ont des valeurs en moyenne égale à 0.2. On observe aussi que les amplitudes estimées ont des valeurs plus élevées en utilisant le modèle de bruit BAR(1) que le modèle BBG. Un autre résultat intéressant concerne la détection des voxels activés : on observe un taux de faux positifs moins élevé avec le modèle BAR(1).

## 5 Conclusion

Les résultats de nos différents tests ont montré que le modèle BAR(1) apporte des améliorations mais ceci au prix d'un temps de calcul plus élevé. Nos simulations ont illustré que ce modèle de bruit a une influence sur l'estimation des amplitudes neuronales a posteriori et sur les barres d'erreur. Ces conclusions ont été confirmées sur des données IRMf. Nous avons aussi noté des améliorations de détection en terme de réduction du taux de faux positifs.

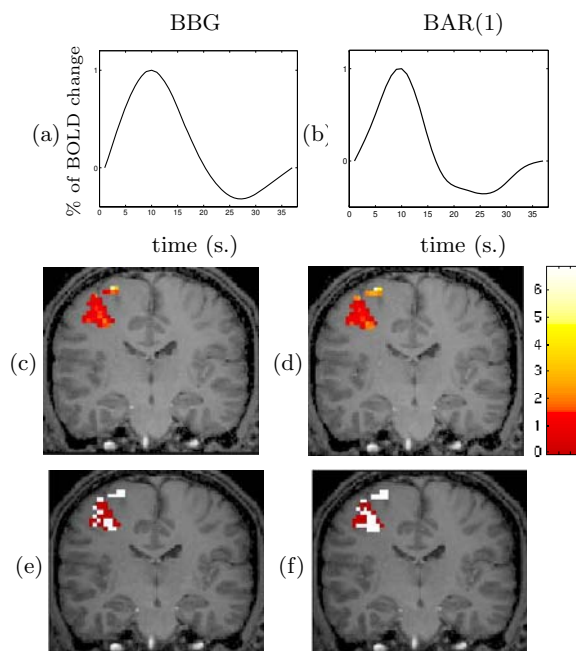


FIG. 2 – (a) et (b) représentent l'estimation de la FRH dans la région  $\mathcal{R}_1$ . (c) et (d) représentent la carte spatiale des amplitudes estimées pour la condition clicD. (e) et (f) représentent la carte spatiale des résultats de détection (Les voxels blanc sont activés, ceux en rouge inactivés).

## Références

- [1] S. Makni, P. Ciuciu, J. Idier et J.-B. Poline, « Joint detection-estimation of brain activity in functional MRI : a multichannel deconvolution solution », *to appear in IEEE Trans. SP*, vol. 53, n°9, Sep. 2005.
- [2] E. T. Bullmore, M. Brammer, S. C. Williams, S. Rabe-Hesketh, N. Janot, A. David, J. Mellers, R. Howard et P. Sham, « Statistical methods of estimation and inference for functional MR image analysis », *Magn. Reson. Med.*, vol. 35, pp. 261–277, 1996.
- [3] P. A. Bandettini, A. Jesmanowicz, E. C. Wong et J. S. Hyde, « Processing strategies for time-course data sets in functional MRI of the human brain », *Magn. Reson. Med.*, vol. 30, pp. 161–173, 1993.
- [4] P. Ciuciu, J.-B. Poline, G. Marrelec, J. Idier, C. Pallier et H. Benali, « Unsupervised robust non-parametric estimation of the hemodynamic response function for any fMRI experiment », *IEEE Trans. Med. Imag.*, vol. 22, n°10, pp. 1235–1251, 2003.
- [5] M. Woolrich, M. Jenkinson, J. M. Brady et S. Smith, « Constrained linear basis set for HRF modelling using variational Bayes », *Neuroimage*, vol.21, pp.1748–1761, 2004.
- [6] M. Woolrich, B. Ripley, M. Brady et S. Smith, « Temporal autocorrelation in univariate linear modelling of fMRI data », *Neuroimage*, vol. 14, n°6, pp. 1370–1386, 2001.
- [7] M. Woolrich, M. Jenkinson, J. Brady, and S. Smith, “Fully Bayesian spatio-temporal modelling of fMRI data,” *IEEE Trans. Med. Imag.*, vol. 23(2), pp. 213–231, 2004.
- [8] W. K. Hastings, « Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications », *Biometrika*, vol. 57, pp. 97, 1970.

# L'analyse des images dans les grands relevés d'astronomie visible/proche-infrarouge

Emmanuel BERTIN<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institut d'Astrophysique de Paris  
98bis, bd Arago, F-75014 Paris, France  
bertin@iap.fr

**Résumé** — Le volume et la nature des données issues des grands relevés d'imagerie astronomique posent des problèmes spécifiques en matière de traitement et d'analyse. Je présente les réponses actuelles, mais aussi les questions en suspens concernant la détection et l'analyse morphologique des sources dans le domaine visible/proche-infrarouge.

**Abstract** — The amount and the nature of the data coming from large astronomical imaging surveys raises specific issues concerning image processing and analysis. I present both the current solutions and yet unanswered questions about source detection and morphological analysis in the visible/near-infrared domain.

## 1 Introduction : les images astronomiques

Les images obtenues aux longueurs d'ondes visibles et proche-infrarouge représentent, et de loin, le plus gros volume de données scientifiques archivées en astronomie. Ces images se caractérisent par un bruit de fond comprenant en proportions variables une composante poissonnienne (bruit de photons) et une composante gaussienne (électronique), auxquelles viennent s'ajouter des contaminations optiques plus ou moins corrélées avec la position des sources (réflexions parasites), des artefacts liés aux détecteurs (impacts de rayons cosmiques, pixels "chauds"), et enfin des "intrus" tels que les traînées de satellites. Sur ce fond, les astronomes cherchent à détecter et classer automatiquement les astres qui s'y trouvent. Ce court article passe en revue les difficultés et les solutions techniques mises en œuvre pour ces deux types de tâches, en particulier en France.

## 2 L'extraction de sources

On désigne par extraction de sources le processus consistant à générer un catalogue d'objets célestes contenant au minimum les mesures des positions et du flux des objets à partir d'une image. Le problème de l'extraction automatique des sources du ciel profond remonte au milieu des années 60, avec les premiers comptages informatisés de radio-sources, et les premiers projets d'exploitation de l'énorme quantité d'informations s'accumulant depuis près de 80 ans sur les plaques photographiques [13]. De 1970 au milieu des années 1990, les machines à numériser les plaques photographiques furent les grands pourvoyeurs des catalogues automatisés à grande échelle du ciel visible.

Les techniques automatisées d'extraction de sources ont relativement peu évolué depuis, simplement parce que les

performances des méthodes simples utilisées en astronomie remplissent les conditions requises par la plupart des programmes scientifiques. En effet, la tâche est relativement aisée, en comparaison d'autres problèmes d'analyse automatique d'image : nous avons ici affaire essentiellement à des objets intrinsèquement lumineux sur un fond sombre, et les effets de perspective ou d'ombre peuvent être ignorés. Il y a cependant quelques difficultés : les objets n'ont pas de bord net, qu'ils soient résolus ou non ; au sein d'une même image, les algorithmes doivent gérer une grande variété de structure et de taille des objets (jusqu'à un facteur 10000), et de rapports S/B (de 0 à près de 80dB). La réponse impulsionnelle est souvent variable et a une forte influence sur l'interprétation des images, en particulier l'identification des galaxies mal résolues (la population de sources largement dominante sur les trois-quarts du ciel). Heureusement, une mesure de la réponse impulsionnelle est naturellement disponible en de nombreux points du champ sous la forme d'images d'étoiles. Enfin, le volume de données à analyser (plusieurs Tpixels/an pour un relevé typique) impose des contraintes sur le débit des algorithmes, de l'ordre du Mpixel/s.

La majorité des algorithmes mis en œuvre pour l'extraction de sources astronomiques faibles [51], [20], [21], [53], [18], [47], [3], [5], [11] fonctionnent sur le principe du seuillage d'images filtrées [43]. A quelques variantes près le schéma de traitement et d'analyse est le suivant :

1. Une distance angulaire maximale (de l'ordre de la minute d'arc) est fixée, déterminant l'échelle en pixels au-delà de laquelle une fluctuation sera considérée comme faisant partie du fond de ciel, et non une source à détecter. Cette échelle définit l'échelle de modélisation du fond de ciel (au moyen de splines par exemple).
2. Un filtrage linéaire adapté (*matched filter*), basé sur un profil de source légèrement plus large que la réponse impulsionnelle, et représentatif de la popula-



tion d'objets faibles, est appliqué à l'image soustraite du modèle de fond de ciel.

3. L'image filtrée est segmentée par seuillage (8-connexité) à différents seuils de valeur de pixel ; c'est donc la brillance de surface, et non le flux total qui détermine la détectabilité d'une source bien résolue.
4. Un arbre est construit à partir des composantes seuillées et une extraction de zones est décidée selon un critère de contraste local.
5. Les pixels voisins de chaque ensemble connexe identifié comme source, mais situés sous le seuil de détection, sont associés de manière probabiliste à chaque source, et les différentes mesures (position, flux, morphologie) sont effectuées (Fig. 1).

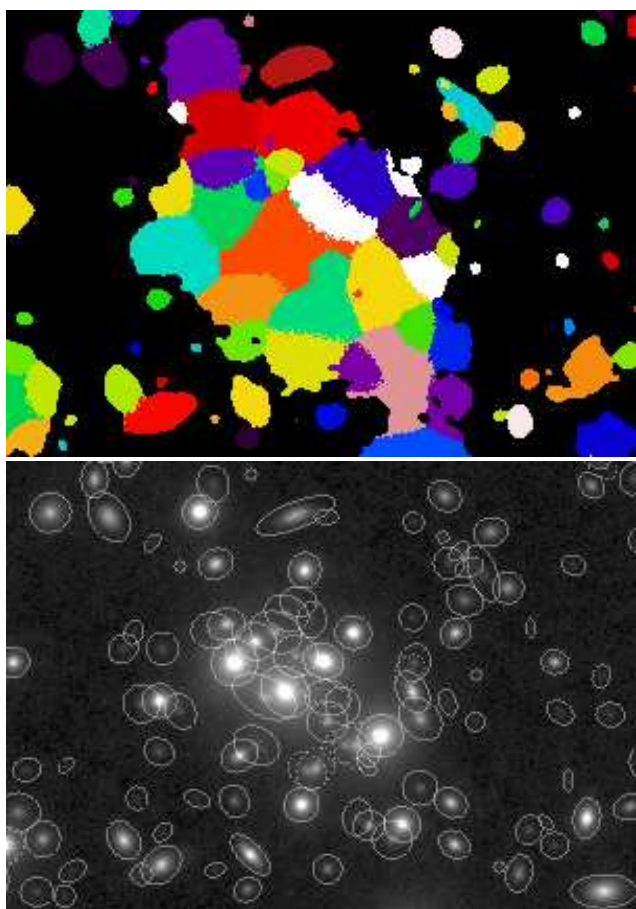


FIG. 1 – Cartes de segmentation initiale (*haut*) et d'identification des sources (*bas*) obtenues par le logiciel SEXTRACTOR [5] sur un amas dense de galaxies faibles. Chaque ellipse identifie le centre et l'extension photométrique d'une galaxie détectée.

Le filtrage adapté est justifié par la stationnarité à moyenne échelle du bruit de fond, la contribution dominante pour la majorité des images du ciel profond. Les composantes basse-fréquence du bruit sont, elles, absorbées dans le modèle du fond. L'approche par multi-seuillage, bien que généralement rapide et performante, pose malgré tout quelques problèmes pour les champs très encombrés

d'étoiles (dans la voie lactée), dans lesquels une détection de pics est plus adaptée ([33], [16], [50], [29], [30]). Plus généralement, le multi-seuillage peut être avantageusement remplacé par un filtrage (isotropique) multi-échelle [42], [7], [22], [15], [8], [25], [49], [14], [31], notamment pour les images avec peu de photons par pixel, au prix cependant d'un impact parfois prohibitif sur le temps de calcul.

Convenablement paramétrées, les techniques "rustiques" que nous venons d'évoquer atteignent des taux de complétude et de fiabilité dépassant souvent 95% sur les simulations réalistes d'images astronomiques [28], une performance suffisante pour la grande majorité des applications scientifiques. Les quelques % de problèmes restants résident essentiellement dans des superpositions entre sources, ou avec des défauts optiques. Les résoudre demande un effort supplémentaire considérable, et probablement l'emploi de techniques d'apprentissage automatique, afin d'aboutir à un véritable modèle de vision [7]. Les quelques tentatives naïves faites à ce jour en ce domaine restent peu convaincantes [26], [1].

### 3 Classification morphologique

#### 3.1 Séparation étoiles/galaxies

À la base, les sources détectées sur les images astronomiques peuvent être divisées en deux grandes classes : les sources ponctuelles (les étoiles) et les sources étendues (nébuleuses, et surtout galaxies). Le profil des sources ponctuelles isolées est celui de la réponse impulsionnelle locale ; distinguer automatiquement une étoile d'une galaxie est donc en principe chose aisée, et un classificateur optimal au sens bayésien peut être dérivé analytiquement [44], [53]. Malheureusement, les sources sont rarement parfaitement isolées ; compagnons d'étoiles doubles serrées, étoiles d'avant-plan et nébulosités d'arrière-plan contaminent largement les 2 classes. De plus, les images n'ont pas toujours un comportement linéaire en flux (saturations, images photographiques). Dans les années 90, l'introduction de techniques d'apprentissage automatique a permis de résoudre ce problème de manière simple et efficace : par logique floue [48], [27], arbres de décision [54], [19], [55], ou réseaux neuronaux supervisés [45], [4], [34], [5], [2], [1], [37] (Fig. 2).

#### 3.2 Classification des galaxies

Les statistiques concernant les formes des galaxies sont au coeur de questions fondamentales de l'astrophysique moderne, en tant que marqueurs de la morphogénèse, de l'évolution des galaxies, des interactions, ou encore de distorsions produites par des lentilles gravitationnelles. Mais les catalogues de galaxies faibles construits jusqu'ici ne contiennent guère que la position, le flux, et les paramètres d'ellipse décrivant l'étendue apparente des sources, en omettant des informations telles que la présence de bras spiraux, d'un bulbe, d'une barre, d'un anneau, de queues de marée, de régions de formation stellaires,... Ces paramètres définissent en astronomie le *type* de la galaxie. Différents systèmes de classification existent, le plus connu



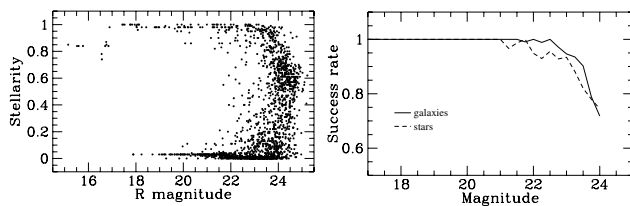


FIG. 2 – Classification automatique étoile/galaxie au moyen d'un MLP entraîné sur des simulations réalistes d'images astronomiques [5]. Les attributs utilisés sont des aires isophotales et l'intensité maximale des pixels. *Gauche* : valeur de sortie du réseau pour des sources réelles (0=galaxie, 1=étoile) en fonction de leur magnitude (grandeur logarithmique caractérisant le flux en astronomie, d'autant plus élevée que le flux est faible). *Droite* : taux de succès de classification pour les 2 classes, dérivé de simulations.

étant celui de Hubble [17], révisé par de Vaucouleurs [9].

L'analyse morphologique totalement automatique et fiable des centaines de millions de galaxies détectées dans les relevés du ciel est le grand défi actuel en matière d'analyse automatique des données astronomiques. Les premières tentatives de classification morphologique automatique à grande échelle remontent aux années 90 [48], [52], [35], [32]. Les algorithmes d'apprentissage (surtout rétropropagation sur perceptron multi-couche) atteignent des performances proches de celles d'experts humains [24]. Malheureusement, les classificateurs produits dans ces études ne sont pas transposables d'un relevé, voire d'une observation à l'autre. Les attributs sélectionnés sont en effet basés sur des mesures de contours très sensibles à la fois au bruit et à la réponse impulsionnelle.

Depuis quelques années, les recherches sont également motivées par les mesures fines à grande échelle des distorsions gravitationnelles faibles, et s'orientent vers un dispositif de classification plus indépendant des conditions de rapport S/B et de la réponse impulsionnelle des observations. L'immense majorité des galaxies détectées dans les grands relevés sont en effet faibles, mal résolues, et imagées dans des conditions de qualité variable. Une solution robuste est l'ajustement non-linéaire des paramètres d'un modèle analytique de galaxies convolué par la réponse impulsionnelle locale [46], [40], [38], [39]. Outre son coût en calcul, cette approche est malheureusement limitée à une décomposition bulbe+disque, sans prendre en compte d'autres caractéristiques morphologiques plus subtiles. Plus récemment ont été investiguées [6], [41], [23] des décompositions linéaires sur des bases de fonctions choisies de sorte qu'elles génèrent des vecteurs de coefficients corrigés des variations de qualité d'image. Les implémentations actuelles se heurtent malheureusement encore à une gestion trop délicate des dégénérescences survenant sur les galaxies mal-résolues.

### 3.3 EFIGI

Dans ce contexte a été lancé en France fin-2004 le projet EFIGI [12], dans le cadre d'une Action Concertée Incita-

tive CNRS de 3 ans, regroupant 2 laboratoires des STIC (LTCI et LRDE) et 5 laboratoires d'astronomie. Le but d'EFIGI est de créer pour la communauté un système performant de classification automatique d'images de galaxies, déclinable en *web-service* pour l'Observatoire Virtuel (voir F. Genova, cette conférence). Le projet contient des aspects de collecte et formatage d'échantillons (Fig. 3), de traitement du signal, d'apprentissage automatique, et de calcul distribué.



FIG. 3 – Extrait d'un échantillon d'images de galaxies bien résolues aux longueurs d'ondes visibles, issues du relevé SDSS [56] et compilées dans le cadre du projet EFIGI pour l'apprentissage de leur classification morphologique. En haut à droite de chaque vignette, est indiquée une série de codes décrivant l'aspect de la galaxie [10].

## 4 Conclusion

La détection et la classification automatiques des sources sont des passages obligés pour l'exploitation scientifique des grands relevés modernes d'imagerie astronomique. Ces deux activités représentent un terrain d'application stimulant pour les techniques de traitement du signal, en raison notamment des contraintes imposées par le volume des données et des exigences sévères de l'astrophysique sur le comportement statistique des algorithmes. Un projet tel qu'EFIGI illustre l'intérêt suscité par le rapprochement des communautés des STIC et de l'astronomie sur ces questions.

## Références

- [1] Andreon S., Gargiulo G., Longo G., Tagliaferri R., Capuano N., 2000, MNRAS **319**, 700
- [2] Bazell D., Peng Y., 1998, ApJS **116**, 47
- [3] Beard S.M., McGillivray H.T., Thanisch P.F., 1990, MNRAS **247**, 311
- [4] Bertin E., 1994, Ap&SS **217**, 49

- [5] Bertin E., Arnouts S., 1996, *A&A* **117**, 393
- [6] Bertin E., Thion A., Mellier Y., van Waerbeke L., 2001, in *Gravitational Lensing : Recent Progress and Future Goals*, ASP Conf. Series **237**, 365
- [7] Bijaoui A., Rué F., 1995, *Signal Processing* **46**, 229
- [8] Damiani F., Maggio A., Micela G., Sciortino S., 1997, *ApJ* **483**, 350
- [9] de Vaucouleurs G., de Vaucouleurs A., Corwin H.G., 1976, "Second Reference Catalogue of bright galaxies (RC2)", University of Texas Press, Austin
- [10] de Vaucouleurs G., de Vaucouleurs A., Corwin H.G., Buta R.J., Paturel G., Fouqué P., 1991, "Third Reference Catalogue of bright galaxies (RC3)", Springer-Verlag, New York
- [11] Drory N., 2003, *A&A* **397**, 371
- [12] EFIGI : EXTRACTION DE FORMES IDÉALISÉES DE GALAXIES EN IMAGERIE, <http://www.efigi.org>
- [13] Fellgett P.B., 1970, *Optics Technology* **2**, 61
- [14] Freeman P.E., Kashyap V., Rosner R., Lamb D.Q., 2002, *ApJS* **138**, 185
- [15] Grebenev S.A., Forman W., Jones C., Murray S., 1995, *ApJ* **445**, 607
- [16] Herzog A.D., Illingworth G., 1977, *ApJS* **33**, 55
- [17] Hubble E.P., 1926, *ApJ* **64**, 321
- [18] Irwin M.J., 1985, *MNRAS* **214**, 575
- [19] Jarrett T.H., Chester T., Cutri R., Schneider S., Skrutskie M., Huchra J.P., 2000, *AJ* **119**, 2498
- [20] Jarvis J.F., Tyson J.A., 1979, in "Instrumentation in Astronomy III", *SPIE* **172**, 422
- [21] Jarvis J.F., Tyson J.A., 1981, *AJ* **86**, 476
- [22] Kaiser N., Squires G., Broadhurst T., 1995, *ApJ* **449**, 460
- [23] Kelly B.C., McKay T.A., 2004, *AJ* **127**, 625
- [24] Lahav O., Naim A., Buta R.J., Corwin H.G., de Vaucouleurs G., Dressler A., Huchra J.P., van den Bergh S., Raychaudhury S., Sodr   L. Jr., Storrie-Lombardi M.C., 1995, *Science* **267**, 859
- [25] Lazzati D., Campana S., Rosati P., Panzera M.R., Tagliaferri, G., 1999, *ApJ* **524**, 414
- [26] M  h  nen P., Hakala P.J., 1995, *ApJ* **452**, 77
- [27] M  h  nen P., Frantti T., 2000, *ApJ* **541**, 261
- [28] McCracken H.J., Le F  vre O., Foucaud S., Lilly S.J., Crampton D., Mellier Y., 2001, *A&A* **376**, 756
- [29] Mighell K.J., 1989, *MNRAS* **238**, 807
- [30] Mighell K.J., 1999, in "Astronomical Data Analysis Software and Systems VIII", ASP Conf. Series **172**, 317
- [31] Moretti A., Lazzati D., Campana S., Tagliaferri G., 2002, *ApJ* **570**, 502
- [32] Naim A., Lahav O., Sodr   L. Jr., Storrie-Lombardi M.C., 1995, *MNRAS* **275**, 567
- [33] Newell B., O'Neil, Jr E.J., 1977, *PASP* **89**, 925
- [34] Odewahn S.C., Stockwell E.B., Pennington R.L., Humphreys R.M., Zumach W.A., 1992, *AJ* **103**, 318
- [35] Odewahn S.C., 1995, *PASP* **107**, 770
- [36] Odewahn S.C., 1997, in "Applications of Digital Image Processing XX", *SPIE* **3164**, 110
- [37] Odewahn S.C., de Carvalho R.R., Gal R.R., Djorgovski S.G., Brunner R., Mahabal A., Lopes P.A.A., Kohl Moreira J.L., Stalder B., 2004, *AJ* **128**, 3092
- [38] Peng C.Y., Ho L.C., Impey C.D., Rix H.-W., 2002, *AJ* **124**, 266
- [39] Pignatelli E., Fasano G., Cassata P., 2005, *A&A*,    para  tre
- [40] Ratnatunga K.U., Griffiths R.E., Ostrander E., 1999, *AJ* **118**, 86
- [41] Refregier A., 2003, *MNRAS* **338**, 35
- [42] Rosati P., Burg R., Giacconi R., 1994, in "The Soft X-ray Cosmos", Eds. E.M. Schlegel, R. Petre, AIP Conf. Proceedings **313**, 260
- [43] Rosenfeld A., 1969, in "Picture Processing by Computer", Academic Press, New-York, 127
- [44] Seabok W.L., 1979, *AJ* **84** 1526
- [45] Serra-Ricart M., Gaitan V., Delgado S., Perez-Fournon I., 1992, in "Astronomical Data Analysis Software and Systems I", ASP Conf. Series **25**, 254
- [46] Simard L., 1998, in *Astronomical Data Analysis Software and Systems VII*, ASP Conf. Series **145**, 108
- [47] Slezak E., Bijaoui A., Mars G., 1988, *A&A* **201**, 9
- [48] Spiekermann G., 1992, *AJ* **103**, 2102
- [49] Starck J.-L., Bijaoui A., Valtchanov I., Murtagh F., 2000, *A&AS* **147**, 139
- [50] Stetson P.B., 1987, *PASP* **99**, 191
- [51] Stobie R.S., Smith G.M., Lutz R.K., Martin R., 1979, in "International Workshop on Image Processing in Astronomy", Eds. G. Sedmak, M. Capaccioli, R.J. Allen., Osservatorio Astronomico di Trieste, Trieste, 48
- [52] Storrie-Lombardi M. C., Lahav O., Sodr   L. Jr., Storrie-Lombardi L.J., 1992, *MNRAS* **259**, 8
- [53] Valdes F., 1982, in "Instrumentation in Astronomy IV", *SPIE* **331**, 465
- [54] Weir N., Fayyad U.M., Djorgovski S., 1995, *AJ* **109**, 2401
- [55] White R.L., 2000. in "Astronomical Data Analysis Software and Systems IX", ASP Conf. Series **216**, 577
- [56] York D.G. et al., 2000, *AJ* **120**, 157

# Statistiques direction-multipôle pour la séparation de composantes dans le fonds de rayonnement cosmologique

Jean-François CARDOSO<sup>1,3</sup> Pierrick ABRIAL<sup>2</sup> Yassir MOUDDEN<sup>2</sup> Jean-Luc STARCK<sup>2</sup> Jacques DELABROUILLE<sup>3</sup>

<sup>1</sup>LTCI ENST/CNRS

<sup>2</sup>CEA DAPNIA

<sup>3</sup>Équipe ADAMIS APC / PCC

cardoso@enst.fr, {pierrick.abrial,yassir.moudden,jstarck}@cea.fr, delabrou@cdf.in2p3.fr

**Résumé** — Cet article décrit des statistiques de corrélation localisées en fréquence et position sur la sphère et leur application pour la séparation de composantes dans les observations multi-spectrales du fonds de rayonnement cosmologique

**Abstract** — We introduce correlation statistics which are localized both in frequency and position on the sphere and their use for component separation in multi-spectral observations of the cosmological microwave background.

## 1 Le rayonnement cosmologique

Le fonds de rayonnement cosmologique ou CMB (Cosmic microwave background) est un des piliers de la théorie cosmologique moderne. Le modèle cosmologique standard (dit de Big Bang) prédit que l'Univers observable est baigné d'un rayonnement de corps noir à une température proche de 3 degrés Kelvin. Son observation par Penzias et Wilson en 1965 fût que la première étape d'une démarche à la fois théorique et observationnelle qui a placé les observations du CMB au coeur de la cosmologie.

Le CMB apparaît extrêmement homogène : sa température apparente ne varie que de quelques centaines de micro-Kelvin sur la voûte céleste. Les instruments modernes sont capables, avec une résolution et une sensibilité croissantes de mesurer les "anisotropies du CMB", c'est-à-dire ses variations de température  $\delta T(\theta, \phi)$  autour de la valeur moyenne (meilleure mesure de cette moyenne :  $2.725 \pm 0.001$  K [4]) en fonction de la direction de visée  $(\theta, \phi)$ . Par ailleurs, la théorie standard prédit que cette carte de fluctuations peut être modélisée comme une réalisation d'un champ gaussien aléatoire, stationnaire sur la sphère. Dans ce modèle, toute l'information scientifique portée par le CMB est donc encodée par la densité spectrale (il s'agit du spectre des fréquences *spatiales*) de puissance de ce champ. Les cosmologues sont capables de proposer des modèles fins de ce spectre, paramétrés par la constante de Hubble, la densité totale d'énergie cosmique, la fraction de matière noire, etc. . . Ainsi *l'estimation spectrale du CMB* offre une voie d'accès unique à la mesure des paramètres fondamentaux de notre Univers.

On dispose aujourd'hui de plusieurs observations du CMB, desquels il faut "extraire la science". Un objectif majeur est la détermination non-paramétrique, puis paramétrique du spectre (spatial) harmonique du CMB. Mais la tâche est ardue pour de nombreuses raisons ; nous n'en

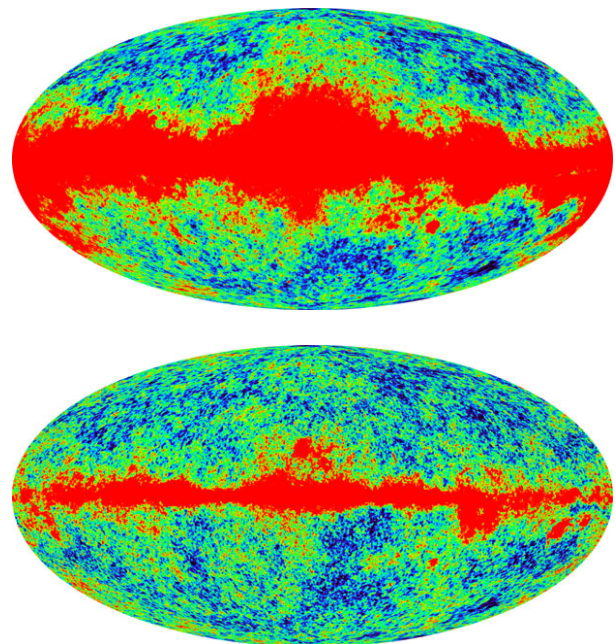


FIG. 1 – Anisotropies du CMB vues à 33 GHz et 40 GHz par la mission W-MAP.

évoquerons que quelques unes, pour lesquelles ce travail apporte une contribution. 1) Les observations sont entachées d'un bruit inhomogène, le rapport signal-sur-bruit se dégradant avec la fréquence ; les propriétés statistiques du bruit sont imparfaitement connues 2) le CMB n'est pas le seul rayonnement observé : des émissions dites d'avant-plan (foregrounds) viennent s'y superposer ; celles provenant de notre Galaxie sont fortement inhomogènes : la figure 1 montre deux des cartes des "anisotropies" du rayonnement micro-ondes obtenues par le satellite W-MAP de la NASA dans des bandes centrées autour de 33 GHz et

40 GHz. 3) ces avant-plans sont plus ou moins bien caractérisés. Les plus contaminants doivent être masqués : la figure 2 montrent les masques utilisés par l'équipe WMAP à différents niveaux de paranoïa pour censurer le rayonnement de la Voie Lactée et d'autres sources extragalactiques plus localisées. 4) un bon rendement scienti-

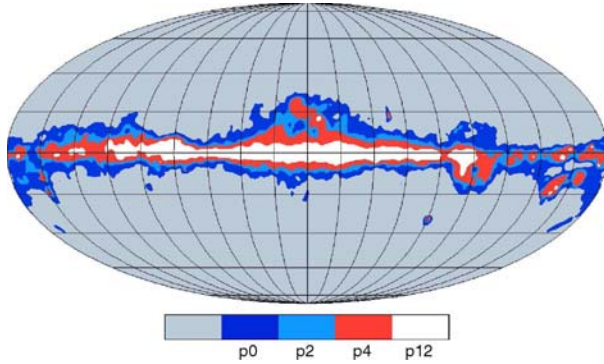


FIG. 2 – Les masques employés pour censurer les émissions les plus contaminantes.

fique exige d'exploiter conjointement les observations de chaque bande.

**Plan** La section 2 donne quelques éléments d'analyse spectrale sur la sphère et décrit brièvement notre méthode pour l'estimation directe des spectres de composantes dont on observe des mélanges multi-spectraux. La section 3 décrit les statistiques utilisées pour localiser l'information de corrélation à la fois en fréquence et en position. Ces statistiques donnent une grande souplesse d'utilisation à notre méthode d'estimation spectrale et répondent, au moins partiellement, aux difficultés évoquées plus haut.

## 2 Estimation spectrale sur la sphère

Nous donnons ici quelques éléments d'estimation spectrale sur la sphère. Une direction  $\xi$  du ciel ou un point de la sphère sont repérés en co-latitude et longitude par  $(\theta, \phi)$ . On notera  $\xi = (\theta, \phi)$ .

**Sphère univariée** Une fonction sur la sphère  $x(\xi) = x(\theta, \phi)$  se décompose sur une base doublement indexée d'harmoniques sphériques :

$$x(\xi) = \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m=-\ell}^{m=+\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\xi) \quad (1)$$

formant un système orthonormé :  $\int_{S^2} Y_{\ell m}(\xi) Y_{\ell' m'}(\xi) d\Omega(\xi) = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}$  pour  $d\Omega(\xi) = \sin \theta d\theta d\phi$  la mesure de Lebesgue sur la sphère. La variable  $\ell$  correspond à la fréquence (mais on emploie souvent le terme de 'multipôle') car toute combinaison linéaire des  $(2\ell + 1)$  harmoniques sphériques d'un  $\ell$  donné est une fonction propre du Laplacien sphérique, associée à la valeur propre  $-\ell(\ell + 1)$ .

Si  $x(\theta, \phi)$  est un champ stationnaire, les coefficients harmoniques  $a_{\ell m}$  présentent une structure de corrélation très

simple :

$$E\{a_{\ell m} a_{\ell' m'}^*\} = C_{\ell} \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \quad (2)$$

ce qui permet, dans l'hypothèse gaussienne, d'écrire la vraisemblance du modèle dans l'espace des coefficients harmoniques de façon très simple. En effet, l'expression (2) montre que, si un modèle prédit une forme  $C_{\ell}(\eta)$  du spectre harmonique en fonction d'un vecteur  $\eta$  de paramètres, la vraisemblance de  $\eta$  devant des données  $x(\theta, \phi)$  est proportionnelle à  $\exp -L(\eta)$  avec

$$L(\eta) = \frac{1}{2} \sum_{\ell \geq 0} (2\ell + 1) \left( \frac{\hat{C}_{\ell}}{C_{\ell}(\eta)} + \log C_{\ell}(\eta) \right) \quad (3)$$

où  $\hat{C}_{\ell}$  est l'estimateur empirique du spectre harmonique :

$$\hat{C}_{\ell} = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{|m| \leq \ell} a_{\ell m}^2 \quad (4)$$

La formule (3) a la même structure que l'approximation classique de Whittle pour la vraisemblance d'un processus stationnaire. Toutefois, dans le cas sphérique, ce n'est pas une approximation mais la vraisemblance gaussienne exacte. Puisque la fonction  $b \rightarrow a/b + \log b$  est minimum pour  $b = a$ , l'expression (3) interprète la vraisemblance comme une mesure de l'écart entre le spectre harmonique empirique  $\hat{C}_{\ell}$  et un modèle paramétrique  $C_{\ell}(\eta)$  d'icelui.

La figure 3 montre le spectre harmonique empirique  $\hat{C}_{\ell}$  (points gris), moyenné sur des bandes de fréquence (points noirs, avec barres d'erreurs) et le meilleur modèle théorique ajusté sur ces données, tels qu'ils ont été déterminés par l'équipe de traitement de données de la mission WMAP [1].

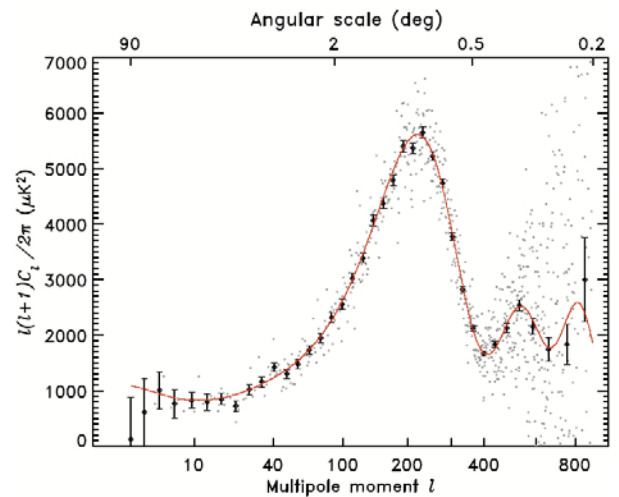


FIG. 3 – Spectre empiriques et meilleur fit du modèle cosmologique obtenus par WMAP (*c.f.* texte).

**Sphère multi-variée** Si le CMB est observé dans  $M$  bandes de fréquence centrées autour de  $\nu_1, \dots, \nu_M$ , on disposera pour l'inférence d'un ensemble de  $M$  champs  $x_1(\theta, \phi), \dots, x_M(\theta, \phi)$  que l'on collecte dans un  $M \times 1$  vecteur  $X(\theta, \phi)$ . On note alors  $a_{\ell m}$  le  $M \times 1$  vecteur qui collecte leurs coefficients harmoniques. Les considérations



précédentes s'adaptent à ce cas multi-varié en définissant la matrice spectrale empirique au multipôle  $\ell$  :

$$\hat{R}_\ell = \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{m=+\ell} a_{\ell m} a_{\ell m}^\dagger$$

de taille  $M \times M$  pour chaque  $\ell$ . Un modèle cosmologique statistique prédit la valeur moyenne  $R_\ell(\eta) = E(\hat{R}_\ell)$  de ces matrices qui contiennent les auto- et inter-spectres des composantes du champ. A nouveau, pour un modèle gaussien stationnaire, la probabilité d'un ciel multi-spectral est proportionnelle à  $\exp -L(\eta)$ ,

$$L(\eta) = \sum_{\ell \geq 0} (2\ell+1) K[\hat{R}_\ell, R_\ell(\eta)], \quad (5)$$

où  $K[\cdot, \cdot]$  est une mesure de l'écart entre deux matrices positives de taille  $M \times M$  défini par :

$$K[R_1, R_2] = \frac{1}{2} [\text{trace}(R_1 R_2^{-1}) - \log \det(R_1 R_2^{-1}) - M]$$

Ainsi, maximiser la vraisemblance d'un modèle paramétré par  $\eta$  revient à minimiser le désajustement spectral moyen entre matrices empiriques  $\hat{R}_\ell$  et matrices théoriques  $R_\ell(\eta)$  tel qu'il est mesuré par  $L(\eta)$ .

**Estimation spectrale de composantes** Cette section indique notre approche pour estimer le spectre harmonique du CMB quand d'autres émissions s'y superposent et que les données sont bruitées. Un modèle très simple des observations est alors

$$x_i(\theta, \phi) = \sum_{j=1}^N a_{ij} s_j(\theta, \phi) + n_i(\theta, \phi)$$

où  $N_i(\theta, \phi)$  représente la contribution du bruit dans la  $i$ -ème bande de fréquence. Les coefficients  $a_{ij}$  expriment la variation d'émissivité d'une composante  $j$  en fonction de la fréquence d'observation  $\nu_i$ . Il s'agit donc ici du modèle classique de séparation de sources dans le cas d'un mélange 'instantané' bruité que l'on écrira vectoriellement  $X(\theta, \phi) = AS(\theta, \phi) + N(\theta, \phi)$  avec une matrice de mélange  $A$  de taille  $M \times N$ . Les matrices spectrales prennent la forme

$$R_\ell(\eta) = A \text{diag}(C_\ell^i) A^\dagger + \text{diag}(\tilde{C}_\ell^j) \quad (6)$$

où  $C_\ell^i$  est le spectre harmonique de la  $i$ -ème composante et  $\tilde{C}_\ell^j$  est le spectre harmonique du bruit dans le  $j$ -ème canal. La diagonalité est une conséquence de l'hypothèse d'indépendance entre composantes et entre bruits.

Notre estimateur du spectre harmonique des différentes composantes s'obtient en minimisant la fonctionnelle (5) par rapport à tout ou partie des paramètres du modèle (6). Cet estimateur est celui du maximum de vraisemblance pour un modèle gaussien stationnaire plein-ciel (*i.e.* les observations sont disponibles sur toute la voûte céleste). Après estimation des paramètres ( $\hat{\eta} = \arg \min L(\eta)$ ), on estime éventuellement les composantes par application du filtre de Wiener construit avec ces paramètres.

**Compression** Dans la pratique, il est intéressant de compresser les statistiques en moyennant les matrices spectrales empiriques sur des bandes de fréquence  $B_j = \{\ell_{\min}^{(j)} \leq \ell \leq \ell_{\max}^{(j)}\}$ . On définit pour chaque bande  $j$

$$\hat{R}^{(j)} = \frac{1}{n_j} \sum_{\ell \in B_j} (2\ell+1) \hat{R}_\ell, \quad R^{(j)}(\eta) = \frac{1}{n_j} \sum_{\ell \in B_j} (2\ell+1) R_\ell(\eta), \quad (7)$$

où  $n_j = \sum_{\ell \in B_j} (2\ell+1)$  est le nombre de modes de Fourier dans la bande  $j$ . Si  $R_\ell(\eta)$  est constant sur chaque bande, alors le mismatch (5) s'écrit aussi

$$L(\eta) = \sum_j n_j K[\hat{R}^{(j)}, R^{(j)}(\eta)] \quad (8)$$

montrant que le moyennage par bandes se fait sans perte d'information. Si  $R_\ell(\eta)$  varie peu, la perte d'information de Fisher reste faible. Même dans le cas contraire, la méthode reste 'consistante' car le moyennage par bandes ne détruit pas la structure (6). La forme (8) est celle adoptée dans nos premières études [3].

### 3 Statistiques spectrales localisées

Des statistiques spectrales localisées permettent de faire face à deux des difficultés mentionnées plus haut qui sont toutes deux liées à la perte de stationnarité.

Tout d'abord, l'émission galactique est extrêmement forte par rapport à celle du CMB : dans la pratique, l'approche la plus prudente est de censurer le voisinage de la zone équatoriale où elle est concentrée. Il en est de même de l'émission de certaines sources quasi-ponctuelles connues, situées en dehors du plan galactique. On a donc à faire en pratique à une sphère incomplète. Les masques utilisés pour censurer les zones contaminées (fig. 2) empêchent cependant d'exploiter simplement la stationnarité du champ telle qu'elle s'exprime dans la transformée en harmoniques sphériques et par l'équation (2).

En second lieu, l'émission galactique reste significative même en dehors d'un masque équatorial. On doit alors prendre en compte le fait que son émissivité varie (lentement) en fonction de la latitude. Une autre source de non stationnarité est celle du bruit : les cartes du ciel sont construites à partir d'un balayage du ciel selon une stratégie savante mais qui ne peut garantir l'uniformité de la couverture du ciel. Les zones les mieux couvertes sont affectées d'un bruit plus faible.

Ces difficultés peuvent être contournées en définissant un outil d'analyse direction-multipôle, équivalent sphérique du temps-fréquence ou temps-échelle utilisé pour les séries chronologiques. Nous avons déjà considéré une telle approche en utilisant des ondelettes cartésiennes dans une approximation de la sphère par des plans tangents [6] et par des ondelettes sphériques dyadiques [5]. Nous présentons ici une approche très simple permettant un découpage arbitraire du domaine des fréquences. Ce dernier point est très important pour adapter les statistiques aux spectres sous-jacents.

Nous définissons une famille  $\{w_j(\ell)\}_{j \geq 0}$  de fenêtres spectrales, avec  $w_j(\ell) \geq 0$  pour  $\ell \in [\ell_{\min}^{(j)}, \ell_{\max}^{(j)}]$  et nulle ailleurs. Ces intervalles couvrent l'espace des fréquences sans être nécessairement disjoints. On requiert

$$\sum_j w_j(\ell) = 1 \quad (9)$$

et l'on définit, pour un champ sphérique  $X(\xi)$  se décomposant selon (1), un champ lissé  $X^{(j)}$  à l'échelle  $j$  par

$$X^{(j)}(\xi) = \sum_{\ell \geq 0} \sum_{|m| \leq \ell} w_j(\ell) a_{\ell m} Y_{\ell m}(\xi) \quad (10)$$

La propriété de reconstruction  $X(\xi) = \sum_j X^{(j)}(\xi)$  est garantie par la condition (9). La localisation spectrale des sphères lissées est obtenue en localisant les fenêtres  $w_j(\ell)$  dans l'espace harmonique. La sphère lissée  $X^{(j)}$  est aussi la convolution de  $X(\xi)$  avec une fonction zonale (axi-symétrique) dont la décomposition harmonique est  $\sum_{\ell \geq 0} w_j(\ell) Y_{\ell 0}(\xi)$ . Le support (ou l'ouverture angulaire) de cette fonction est contrôlée par la largeur et la douceur des fenêtres spectrales.

Nos statistiques de corrélation direction-multipôle s'obtiennent en définissant — en sus des fenêtres spectrales  $w_j(\ell)$  — des fenêtres spatiales  $v_k(\xi)$  centrées autour de directions  $\xi_k$ . On forme alors des matrices de corrélation par

$$\hat{R}_{j,k} = \frac{1}{m_k} \int_{\xi \in S^2} v_k(\xi) X^{(j)}(\xi) X^{(j)}(\xi)^\dagger d\Omega(\xi) \quad (11)$$

où  $m_k = \int v_k(\xi) d\Omega(\xi)$ . Le modèle est moyenné de la même façon :  $R_{j,k}(\eta) = \frac{1}{m_k} \int v_k(\xi) R^{(j)}(\eta) d\Omega(\xi)$ . Cette dernière opération donne  $R_{j,k}(\eta) = R^{(j)}(\eta)$  (soit une opération vide) pour des modèles stationnaires, comme nous l'avons supposé jusqu'ici. Mais une des possibilités offertes par les matrices spectrales direction-multi-pôles est précisément de permettre d'intégrer une part de non-stationnarité : on peut, par exemple, imaginer un modèle dans lequel une colonne de  $A$  change avec la latitude pour représenter la variation d'émissivité d'une composante particulière en fonction de son écart au plan galactique.

Les paramètres du modèle (c'est-à-dire, l'ensemble des quantités  $\eta$  qui déterminent les matrices de covariance spectrales localisées à la fois en direction et en fréquence seront estimés par la minimisation du désajustement spectral moyen défini par

$$L(\eta) = \sum_k \sum_j m_k n_j K[\hat{R}_{j,k}, R_{j,k}(\eta)]. \quad (12)$$

Bien entendu, les différentes matrices spectrales empiriques localisées ne sont, en général pas statistiquement indépendantes à la différence du cas stationnaire plein ciel. Par conséquent, l'expression (12) ne peut être celle de la log-vraisemblance. Elle fournit cependant une approximation plausible. La "consistance" de l'estimateur associé repose à nouveau sur le fait que les opérations de localisation en fréquence comme en direction ne détruisent pas la structure algébrique (6).

## 4 Conclusion

Nous avons introduit des matrices de corrélation direction-multi-pôle fournissant un critère de vraisemblance approchée pour la séparation de composantes dans des observations sphériques multi-variées. Ces statistiques permettent de travailler avec une grande souplesse dans un contexte non-stationnaire.

Nous n'avons pas abordé la question de l'implantation de notre estimateur. Elle se décompose en deux parties : le calcul des matrices spectrales localisées (11) et la minimisation du critère (12). Cette dernière n'est pas spécifique ; on pourra consulter [2]. Concernant le calcul des statistiques, seule la partie sphérique est non triviale et rend nécessaire l'emploi d'un logiciel de pixelisation de la sphère et de calcul de la transformée en harmoniques sphériques, tel que HEALPix<sup>1</sup> ou GLESP<sup>2</sup>.

## Références

- [1] C. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw, N. Jarosik, A. Kogut, M. Limon, S. Meyer, L. Page, D. Spergel, G. Tucker, E. Wollack, E. Wright, C. Barnes, M. Greason, R. Hill, E. Komatsu, M. Nolte, N. Odegard, H. Peiris, L. Verde, and J. Weiland. First-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations : Preliminary maps and basic results. *Astro-phys. J. Suppl. Ser.*, 148 :1–27, 2003.
- [2] J.-F. Cardoso and D.-T. Pham. Optimization issues in noisy gaussian ica. In *Proc. ICA 2004, Granada, Spain*, 2004.
- [3] J. Delabrouille, J.-F. Cardoso, and G. Patanchon. Multi-detector multi-component spectral matching and applications for CMB data analysis. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 346(4) :1089–1102, Dec. 2003. also available as <http://arXiv.org/abs/astro-ph/0211504>.
- [4] D. J. Fixsen and J. C. Mather. The spectral results of the far-infrared absolute spectrophotometer instrument on coBE. *Astrophys. J.*, 581 :817–822, Dec. 2002.
- [5] Y. Moudden, P. Abrial, P. Vielva, J.-B. Melin, J.-L. Starck, J.-F. Cardoso, J. Delabrouille, and M. K. Nguyen. Independent component separation from incomplete spherical data using wavelets. Application to CMB data analysis. In *Physics in Signal and Image Processing*, Toulouse, France, jan 2005.
- [6] Y. Moudden, J.-F. Cardoso, J.-L. Starck, and J. Delabrouille. Blind component separation in wavelet space. Application to CMB analysis. *Eurasip Journal on Applied Signal Processing*, 2005. To appear.

<sup>1</sup><http://www.eso.org/science/healpix>

<sup>2</sup><http://www.glesp.nbi.dk/>

# Deux méthodes de déconvolution de mélanges de composantes; application à la reconstruction des amas de galaxies

S. ANTHOINE<sup>1</sup>, E. PIERPAOLI<sup>2</sup>, I. DAUBECHIES<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Program in Applied and Computational Mathematics  
Princeton University, Princeton, NJ, 08544, USA

<sup>2</sup>California Institute of Technology  
Mail Code 130-33, Pasadena, CA, 91125, USA  
anthoine@princeton.edu, pierpa@caltech.edu  
ingrid@math.princeton.edu

**Résumé** – Nous présentons deux approches pour résoudre le problème de séparation et de déconvolution simultané de mélanges de composantes. La première est basée sur une description statistique des coefficients d'ondelettes des signaux. La seconde est nouvelle et consiste à minimiser une fonctionnelle variationnelle. Nous appliquons ces deux méthodes à la reconstruction des amas de galaxies par l'effet Sunyaev-Zeldovich dans le cadre de la mission d'observation du fond diffus cosmique ACT. Nous trouvons que pour des paramètres appropriés, les deux méthodes donnent des résultats comparables et que prendre en compte le caractère non-gaussien des amas très intenses améliore nettement leur reconstruction.

**Abstract** – Two approaches are presented to solve the problem of simultaneously deconvolving and separating mixtures of components. The first one uses a statistical description of the wavelet coefficients of the signals. The second one is new and consists in minimizing a variational functional. Both methods are applied to the reconstruction of Sunyaev-Zeldovich galaxy clusters from Cosmic Microwave background experiments such as ACT. We find that both methods, when tuned, yield similar results and that the reconstruction of intense clusters is substantially improved when their non-gaussianity is taken into account.

## 1 Introduction

Le problème que nous nous proposons de résoudre est le suivant : nous souhaitons estimer plusieurs composantes, notées  $x^1, x^2, \dots, x^M$ , à partir de plusieurs observations, notées  $y^1, y^2, \dots, y^L$ . Chaque observation est une version floue et bruitée d'un mélange (combinaison linéaire) des composantes originales. Autrement dit,  $y^l$ , l'observation numéro  $l$ , s'écrit :

$$y^l = \sum_{m=1}^M f^{m,l} x^m * b^l + n^l \quad (1)$$

où  $*$  désigne l'opérateur de convolution, les scalaires  $f^{m,l}$  ainsi que les noyaux de convolution  $b^l$  sont supposés connus, et  $n^l$  est un bruit de variance connue :  $\sigma_l^2$ . Les observations du fond diffus cosmique (rayonnement fossile) en astrophysique sont un exemple de données correspondant à ce modèle. Typiquement, on acquiert plusieurs observations de la même portion de ciel à des longueurs d'onde différentes ( $y^l$ ). Dans chaque observation coexistent différentes composantes : le fond diffus cosmique ( $x^1$ ), des amas de galaxies ( $x^2$ ), des points sources ( $x^3$ )... La contribution de chaque composante dépend de la longueur d'onde d'observation ( $f^{m,l}$ ). Le processus d'acquisition de l'image sur le télescope se traduit par une convolution ( $*b^l$ ). Enfin les observations sont imparfaites ( $n^l$ ).

Le filtre de Wiener, habituellement utilisé pour estimer une composante à partir d'une observation, peut facilement être adapté à ce cas. Optimal si les composantes peuvent être décrites comme des processus gaussiens, il donne de bons résultats lorsque cette hypothèse est une bonne approximation. Si le

modèle gaussien est approprié pour le fond diffus cosmique, ce n'est pas le cas pour les amas de galaxies, qui sont des structures spatialement localisées avec un pic d'intensité au centre et des structures filamenteuses vers l'extérieur. En conséquence, utiliser une méthode de type filtre de Wiener donne des estimations peu précises des amas de galaxies. De plus, ce manque de précision pollue l'estimation du fond diffus cosmique. Il semble donc utile de développer des méthodes qui prennent en compte les caractéristiques non gaussiennes des signaux.

Dans la section 2, nous décrivons deux méthodes de ce type. La méthode présentée au paragraphe 2.1, inspirée de [5] et déjà présentée dans [3], exploite le fait que les coefficients d'ondelettes varient de manière cohérente à travers les échelles et à des positions proches les unes des autres. Chaque composante est caractérisée par les statistiques de voisinages de coefficients en ondelettes et une estimation bayésienne aux moindres carrés est calculée.

Nous décrivons au paragraphe 2.2 une nouvelle méthode qui consiste à trouver les minimiseurs d'une fonctionnelle variationnelle composée d'un terme d'erreur par observation et d'un terme de pénalisation par composante. Chaque terme de pénalisation est adapté à la composante correspondante : c'est la norme dans un espace fonctionnel approprié. Par exemple, pour le fond diffus cosmique, qui est un signal régulier à variations lentes, nous utilisons la norme dans un espace de type Sobolev. Un algorithme itératif permet de minimiser cette fonctionnelle.

Enfin dans la section 3, nous présentons des résultats pour chacune des méthodes sur des données simulées avec les paramètres du projet ACT.

## 2 Deux méthodes de déconvolution de mélanges de composantes :

### 2.1 Estimation bayésienne de voisinages de coefficients d'ondelettes

#### 2.1.1 Modèle statistique

Considérons une décomposition de type ondelettes pour le signal  $x : x = \sum_{q \in \mathbb{Z}} \langle x, \phi_q \rangle \phi_q + \sum_{j=0}^J \sum_{q \in 2^{-j}\mathbb{Z}^2} \langle x, \psi_{j,q} \rangle \psi_{j,q}$  où  $\phi$  est la fonction d'échelle,  $\phi_q(\cdot) = \phi(\cdot - q)$ , les  $\psi_{j,q} = \psi(2^j \cdot - q)$  sont les ondelettes et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire. Notons  $x_{j,q} = \langle x, \psi_{j,q} \rangle$ . Si le signal  $x$  a une structure particulière au point  $q_0$  et à l'échelle  $j_0$ , alors les coefficients d'ondelettes à des échelles ou des positions proches sont en général aussi affectés. Par exemple, si  $x$  a une discontinuité au point  $q_0$ , tous les coefficients d'ondelettes  $\{x_{j,q_0}\}_j$  sont grands. On peut donc espérer faire une meilleure estimation du coefficient  $x_{j,q}$  en considérant un ensemble de coefficients à des échelles proches de  $j$  et des points proches de  $q$ , autrement dit un « voisinage ». Un exemple de « voisinage » de  $x_{j,q}$  est :  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_{j,q} = (x_{j,q}, x_{j,q-1}, x_{j,q+1}, x_{j-1,q})$ . Comme dans [5], nous modélisons le voisinage  $\mathbf{x}_{j,q}$  par une mixture de gaussiennes dépendant uniquement de l'échelle  $j$  :

$$\forall q, \mathbf{x}_{j,q} \equiv \sqrt{z} \mathbf{u} \text{ en distribution} \quad (2)$$

où  $z$  est une variable aléatoire scalaire, indépendante de  $\mathbf{u}$ , de moyenne 1 et de distribution  $p_z$  et  $\mathbf{u}$  est un vecteur gaussien centré, de covariance  $\mathbf{C}_u$ .  $p_z$  et  $\mathbf{C}_u$  dépendent tous deux du signal  $x$  et de l'échelle  $j$ . Ce modèle étant donné pour chaque composante  $x^m$ , l'estimation du coefficient  $x_{j,q}^m$  est le premier coefficient de l'estimateur bayésien du voisinage  $\mathbf{x}_{j,q}^m$  ; le bruit étant supposé gaussien. (Il peut être blanc ou coloré).

#### 2.1.2 Débruitage d'une composante

Ici, on estime une composante  $x$  à partir d'une observation bruitée  $y = x + n$ . Si de plus, on suppose  $p_z = \delta_{\{z=z_0\}}$ , alors les voisinages sont supposés gaussiens et l'estimation bayésienne de  $\mathbf{x}$  n'est autre que le filtre de Wiener appliqué aux voisinages d'ondelettes :

$$E\{\mathbf{x}_{j,q} | \mathbf{y}_{j,q}, z = z_0\} = z_0 \mathbf{C}_{x,j} (z_0 \mathbf{C}_{x,j} + \mathbf{C}_{n,j})^{-1} \mathbf{y}_{j,q}. \quad (3)$$

où  $\mathbf{C}_{x,j}$  désigne la matrice de covariance des voisinages d'ondelettes du signal  $x$  à l'échelle  $j$ . Pour  $p_z$  quelconque, on obtient donc une combinaison linéaire de filtres de Wiener, les poids étant donnés par la règle de Bayes :

$$E\{\mathbf{x}_{j,q} | \mathbf{y}_{j,q}\} = \int_0^\infty p(z = z_0 | \mathbf{y}_{j,q}) E\{\mathbf{x}_{j,q} | \mathbf{y}_{j,q}, z = z_0\} dz_0 \quad (4)$$

$$\text{où } p(z = z_0 | \mathbf{y}_{j,q}) = \frac{p(\mathbf{y}_{j,q} | z = z_0) p_z(z_0)}{\int p(\mathbf{y}_{j,q} | z = z') p_z(z') dz'} \quad (5)$$

et  $p(\mathbf{y}_{j,q} | z = z')$  est une gaussienne centrée de covariance  $z' \mathbf{C}_{x,j} + \mathbf{C}_{n,j}$ . Ce cas a été présenté dans [5].

#### 2.1.3 Déconvolution de mélanges de composantes

Nous avons étendu le résultat précédent au cas des mélanges de composantes décrits par l'éq. (1) (cf. [3], [4]). A échelle  $j$

et position  $q$  fixées, les  $M$  voisinages  $\mathbf{x}_{j,q}^m$  sont estimés simultanément pour toutes les composantes  $x^m$  à partir des  $L$  voisinages observés  $\{\mathbf{y}_{j,q}^l\}_{l=1,\dots,L}$ . Pour chaque  $m$ , le voisinage  $\mathbf{x}_{j,q}^m$  est modélisé par une mixture de gaussiennes :  $\mathbf{x}_{j,q}^m \stackrel{\text{dist.}}{\equiv} \sqrt{z^m} \mathbf{u}^m$ , qui est déterminée par la probabilité  $p_{z^m}$  et la matrice de covariance  $\mathbf{C}_u^m$ . Comme précédemment, si les  $p_{z^m}$  sont des fonctions  $\delta$  pour toutes les composantes, on retrouve l'hypothèse gaussienne. Dans ce cas, l'estimation des  $\mathbf{x}_{j,q}^m$  est donnée par le filtre de Wiener multi-objets/multi-observations sur les voisinages de coefficients d'ondelettes. Notons que ces filtres tiennent en compte le mélange par les coefficients  $f_{m,l}$  et les convolutions par les  $b_l$ . L'estimation du modèle complet est une combinaison linéaire de tels filtres, les poids étant donnés par les probabilités à postériori :

$$p(\{z^m\}_{m=1,\dots,M} | \{\mathbf{y}_{j,q}^l\}_{l=1,\dots,L}). \quad (6)$$

Comme pour le cas monodimensionnel, les probabilités à postériori sont calculées en utilisant la règle de Bayes, et en conséquence sont des combinaisons de gaussiennes multidimensionnelles  $p(\{\mathbf{y}_{j,q}^l\}_{l=1,\dots,L} | \{z^m\}_{m=1,\dots,M})$  avec les probabilités a priori  $p_{z^m}$ ,  $m = 1, \dots, M$ . Nous notons ici encore, que les coefficients de mélange  $f_{m,l}$  et les convolutions par les  $b_l$  interviennent dans les probabilités  $p(\{\mathbf{y}_{j,q}^l\}_{l=1,\dots,L} | \{z^m\}_{m=1,\dots,M})$ . Une description détaillée des formules obtenues se trouve dans [3].

La taille des voisinages considérés doit dépendre de l'échelle  $j$  (car la transformée a un pas de translation dépendant de  $j$ ), ainsi que des noyaux de convolution  $b_l$  (puisque la convolution corréle les coefficients). D'autre part, le calcul de l'estimateur bayésien requiert les matrices de covariances des voisinages à chaque échelle pour chaque composante et pour le bruit ainsi que des probabilités  $p_{z^m}$ . Nous expliquons dans le paragraphe 3.2 comment déterminer ces paramètres pour l'application à l'extraction des amas de galaxies.

### 2.2 Minimisation d'une fonctionnelle variationnelle par un algorithme itératif

#### 2.3 Modèle

Posons  $X = (x^1, x^2, \dots, x^M)$ ,  $Y = (y^1, y^2, \dots, y^L)$  et  $N = (n^1, n^2, \dots, n^L)$ , alors l'équation (1) s'écrit :  $Y = KX + N$  et  $K$  est un opérateur linéaire continu de  $(L^2)^M$  dans  $(L^2)^L$ . Nous cherchons donc à « inverser »  $K$  tout en contrôlant la taille du terme dû au bruit après inversion ( $K^{-1}N$ ). Comme  $K$  n'a pas nécessairement un inverse borné, le mieux que l'on puisse espérer est un schéma régularisant i.e.

$$\forall X, \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{\|N\| < \epsilon} \|K^{-1}(KX + N) - X\| \rightarrow 0. \quad (7)$$

La minimisation d'une fonctionnelle variationnelle permet de définir un tel schéma. Par exemple, la minimisation de

$$J_{L^2}(X) = \|KX - Y\|_{(L^2)^L}^2 + \gamma \|X\|_{(L^2)^M}^2 \quad (8)$$

$$J_{L^2}(X) = \sum_{l=1}^L \|(KX)^l - y^l\|_{L^2}^2 + \gamma \sum_{m=1}^M \|X^m\|_{L^2}^2 \quad (9)$$

avec  $\gamma$  strictement positif est une méthode régularisante pour notre problème. Minimiser cette fonctionnelle revient à chercher des composantes  $X^m$  dont l'image par l'opérateur  $K$  est aussi près que possible des observations  $Y^l$  (premier terme)



et de norme aussi petite que possible dans  $L^2$  (second terme). Toutefois, elle traite chacune des composantes de la même façon. Qui plus est, le choix de la norme  $L^2$  n'est pas nécessairement adéquat pour toutes les composantes  $X^m$ . Par exemple, ajouter des oscillations change peu la norme quadratique d'un objet. Si  $K$  est un filtre basse fréquence, alors ajouter des oscillations hautes fréquences à une composante  $X^m$  change peu la fonctionnelle. Il est donc très possible d'obtenir une estimation  $X^m$  oscillant à haute fréquence. Ceci n'est pas acceptable par exemple pour la composante représentant les amas de galaxies puisqu'on sait qu'ils sont localisés spatialement.

Nous proposons donc de minimiser une fonctionnelle variationnelle du type suivant :

$$J_S(X) = \|KX - Y\|_{(L^2)^L}^2 + \sum_{m=1}^M \gamma_m \|X^m\|_{\mathcal{G}^m}^{p_m} \quad (10)$$

$$J_S(X) = \sum_{l=1}^L \|(KX)^l - y^l\|_{L^2}^2 + \sum_{m=1}^M \gamma_m \|X^m\|_{\mathcal{G}^m}^{p_m} \quad (11)$$

où les  $\gamma_m$  sont strictement positifs pour tout  $m$  et  $\mathcal{G}^m$  est un espace fonctionnel choisi de telle manière que les éléments ayant les mêmes propriétés que  $x^m$  ont une petite norme dans cet espace. Par exemple, on choisira un espace de Sobolev pour un signal régulier à variations lentes comme le fond diffus cosmique et un espace de Besov pour un signal localisé avec des transitions rapides comme les amas de galaxies.

## 2.4 Estimation

En toute généralité, nous ne savons pas minimiser une telle fonctionnelle. Mais s'il existe une base orthonormée  $\{\phi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  telle que pour chaque espace fonctionnel  $\mathcal{G}^m$ , il existe des poids strictement positifs  $w_\lambda^m = \{w_\lambda^m\}_{\lambda \in \Lambda}$  et  $p^m$  tels que :

$$\|\cdot\|_{\mathcal{G}^m} = \left( \sum_{\lambda \in \Lambda} w_\lambda^m |\langle \cdot, \phi_\lambda \rangle|^{p^m} \right)^{\frac{1}{p^m}}, \quad 1 \leq p^m \leq 2 \quad (12)$$

alors il existe un algorithme itératif permettant de trouver des minimiseurs. Cet algorithme a été introduit par exemple dans [1] dans le cas d'une composante et d'une observation. Nous l'avons généralisé au cas de plusieurs composantes et observations. La généralisation étant assez directe, les propriétés de convergence et de régularisation prouvées dans [1] s'en suivent. L'algorithme itératif suivant converge fortement vers un minimiseur de l'équation (11) :

- $X_o$  quelconque
- $\forall n > 0$  :

$$X_{n+1} = \sum_{\lambda \in \Lambda} S_{\theta_\lambda^m, p_m} \left( \langle [cX_n + K^*g - K^*KX_n]^m, \phi_\lambda \rangle \right) \phi_\lambda, \quad (13)$$

où  $K^*$  est l'adjoint de  $K$ ,  $c$  vérifie  $c > \|K^*K\|$  et  $\theta_\lambda^m = \gamma_m w_\lambda^m$ . Les fonctions  $S_{\theta, p}$  sont définies par :

$$S_{\theta, p} \left( x + \frac{\theta}{2} \operatorname{sign}(x) |x|^{p-1} \right) = x \quad (14)$$

Nous utilisons en particulier  $p_m = 1$  ou  $p_m = 2$ . Pour  $p = 1$ ,  $S_{\theta, 1}$  est le seuillage doux de paramètre  $\frac{\theta}{2}$  :

$$S_{\theta, 1}(x) = \begin{cases} x + \operatorname{sign}(x) \frac{\theta}{2} & \text{si } x \geq \frac{\theta}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (15)$$

Et pour  $p = 2$  :

$$S_{\theta, 2}(x) = \frac{x}{1 + \frac{\theta}{2}} \quad (16)$$

## 3 Application : reconstruction des amas de galaxies

### 3.1 Données

Les deux méthodes précédentes ont été appliquées à des données simulées avec les paramètres du projet d'observation du fond diffus cosmique ACT (voir [3] pour plus de précisions sur les simulations). Nous considérons le cas de deux composantes :  $x^1$  est le fond diffus cosmique et  $x^2$  les amas de galaxies. Nous disposons de trois observations : à 145, 217 et 265 GHz. Les noyaux de convolution sont gaussiens, d'écart-type 1.7, 1.1 et 0.93 *arcminute*. Le bruit est blanc, d'écart type 3.4, 3.63 et 4.37  $\mu K$  par arcminute pixel. Les simulations couvrent une portion de ciel de 1.19x1.19 degrés et comptent 512 pixel par côté.

Une exemple d'observation à 265 GHz est donné dans la Figure 1 (haut), ainsi que la contribution du fond diffus cosmique (au bas à gauche) et des amas de galaxies (en bas à droite).

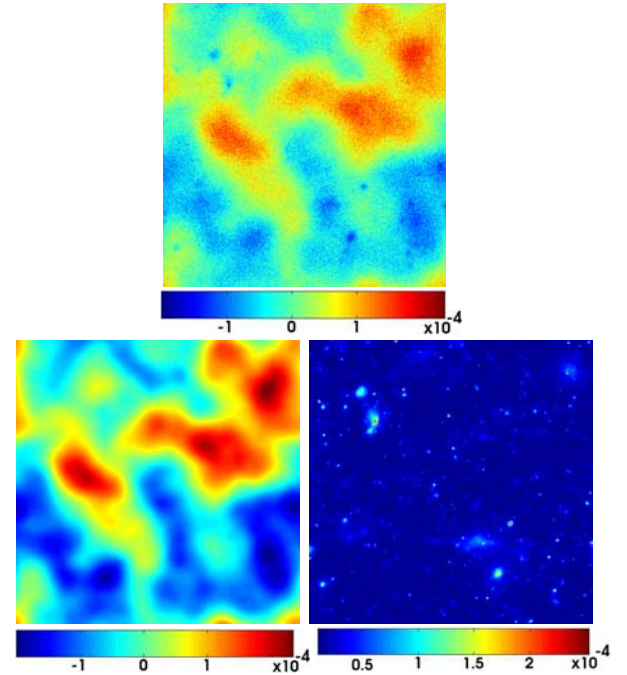


FIG. 1 – Données : en haut, une observation  $g_l$ , en bas, la contribution de deux composantes à cette observation : à gauche celle du fond diffus cosmique, à droite, celle des amas de galaxies. Échelle de couleur en Kelvin.

### 3.2 Paramètres de la méthode statistique

Les matrices de covariance du bruit sur les voisinages sont calculées théoriquement puisque la covariance du bruit est supposée connue. Le signal venant des amas de galaxies est en revanche trop peu puissant par rapport au fond diffus cosmique ou au bruit pour que les matrices de covariance soient estimées précisément à partir des observations. Elles sont calculées à partir de simulations de chaque composante.

La probabilité  $p_z$  est fixée à  $\delta_{\{z=1\}}$  pour le fond diffus cosmique car il est modélisé par un signal gaussien. Pour les amas de galaxies, nous avons comparé quatre possibilités pour  $p_z$

dans [3] et en présentons ici deux : celle dérivée des simulations et  $\delta_{\{z=1\}}$ . Dans le cas où l'on utilise  $p_z = \delta_{\{z=1\}}$ , les voisinages pour les amas de galaxies sont supposés gaussiens. Au contraire, la probabilité  $p_z$  dérivée des simulations induit un modèle non-gaussien.

### 3.3 Paramètres de la méthode variationnelle

Le fond diffus cosmique est pénalisé par une norme de type Sobolev avec des poids ajustés à sa puissance spectrale. Plus précisément, nous utilisons une norme  $l^2$  sur les coefficients d'ondelettes, avec des poids  $w_{j,q}$  ne dépendant que de l'échelle  $j$ , inversement proportionnels à la puissance spectrale à cette échelle. Cela permet de pénaliser les variations rapides et de prendre en compte la puissance spectrale du fond diffus cosmique. Pour les amas de galaxies, nous utilisons une norme  $l^1$  sur les coefficients d'ondelettes (ce qui est équivalent à une norme dans un espace de Besov  $B_1^1$ ), favorisant la sparsité du signal et les transitions rapides.

Enfin les coefficients  $\gamma_n$  sont choisis de manière à ce que chacun des termes dans la fonctionnelle (11) aient le même ordre de grandeur.

### 3.4 Résultats

Dans cette section, nous comparons les résultats obtenus sur une série de 24 simulations avec les paramètres de ACT. Les trois types de reconstructions considérés sont celles de la méthode variationnelle, celles de la méthode statistique gaussienne avec  $p_z = \delta_{\{z=1\}}$  pour les amas de galaxies, et celles de la méthode statistique non-gaussienne avec  $p_z$  dérivée des simulations pour les amas de galaxies.

Nous avons implémenté chacune des deux méthodes, avec deux transformées en ondelettes différentes : la *steerable pyramid* décrite dans [5] et la transformée en ondelettes complexes de [2]. Toutes deux sont des transformées redondantes, qui permettent de décomposer les images en sous-bandes orientées. L'avantage sur une base d'ondelette ordinaire est que l'on obtient une meilleure selectivité directionnelle (le nombre d'orientations peut être choisi), et que l'on se rapproche de l'invariance par translation. Les deux transformées donnent des résultats de qualité égale. Nous donnons ici les résultats avec la *steerable pyramid* et 4 orientations.

Nous trouvons que les différentes reconstructions du fond diffus cosmique sont de qualité égale. En revanche, pour les amas de galaxies, les différences sont notables. La figure 2 montre que la méthode variationnelle et la méthode statistique non-gaussienne donnent des résultats comparables et que ceux-ci sont nettement meilleurs que les résultats de la méthode statistique gaussienne en terme de reconstruction de la valeur nominale d'amas très intenses. Dans [3], nous avons établi que les reconstructions par la méthode statistique non-gaussienne sont en moyenne 20% meilleurs que ceux de la méthode statistique gaussienne pour les amas très brillants. Le résultat est similaire pour la méthode variationnelle. Les différences entre la méthode variationnelle et la méthode statistique non-gaussienne sont plus fines. Nous trouvons que la méthode variationnelle résout les amas plus compacts et permet de reconstruire les amas plus intenses plus précisément que la méthode statistique non-gaussienne. En revanche, les structures filamen-

teuses sont mieux préservées par cette dernière.

Ainsi chaque approche, fonctionnelle ou statistique, présente ses propres avantages dans le cadre de ACT. Il convient d'étudier plus en détails l'influence des paramètres de la mission considérée (longeurs d'onde d'observation, niveau de bruit...) pour choisir l'approche à utiliser. Par ailleurs une étude plus poussée incorporant les points sources, une composante non modélisée ici, est en cours.

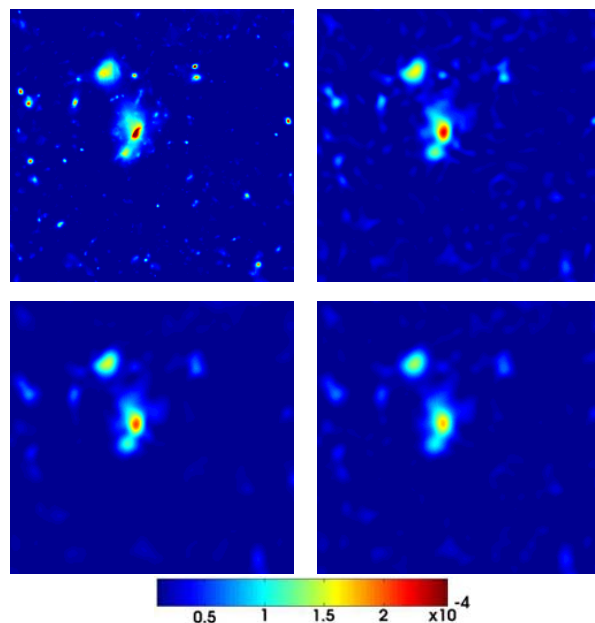


FIG. 2 – Zoom sur un amas étendu. En haut à gauche l'original, puis 3 reconstructions : en haut à droite par la méthode variationnelle ; en bas à gauche par la méthode statistique avec  $p_z$  dérivée des simulations ; en bas à droite par la méthode statistique avec  $p_z = \delta_{\{z=1\}}$ . Les cartes ont la même échelle de couleur (en Kelvin).

## Références

- [1] I. Daubechies, M. Defrise, C. De Mol. *An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint*. Comm. Pure Appl. Math., 2004, vol. 57, issue 11, p. 1413–1457.
- [2] N. G. Kingsbury, *Complex wavelets for shift invariant analysis and filtering of signals*, Journal of Applied and Computational Harmonic Analysis, vol 10, no 3, May 2001, pp. 234–253.
- [3] E. Pierpaoli, S. Anthoine, K. Hufferberger, I. Daubechies, *Reconstructing Sunyaev-Zeldovich clusters in future CMB experiments*. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 2005, vol. 359, issue 1, p. 261–271.
- [4] E. Pierpaoli, S. Anthoine, *Finding SZ clusters in the ACBAR maps*. JASR, COSPAR 2004, à paraître.
- [5] J. Portilla, V. Strela, M. Wainwright, E. Simoncelli. *Image denoising using a scale mixture of Gaussians in the wavelet domain*. IEEE Trans. Image Proc., 2003, vol. 12, issue 11, p. 1338–1351.

# Déconvolution avec contraintes de positivité et de support

## Sources ponctuelles sur source étendue

Jean-François GIOVANNELLI<sup>1</sup> et Alain COULAIS<sup>2</sup>

<sup>1</sup>LSS, (CNRS-Supélec-UPS) Supélec, Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France

<sup>2</sup>LERMA, Observatoire de Paris, 61 Avenue de l'Observatoire, 75014 Paris, France  
giova@lss.supelec.fr, alain.coulais@obspm.fr

**Résumé** – Le travail proposé concerne la synthèse de Fourier, la déconvolution et l'interpolation/extrapolation spectrale pour une application en interférométrie. Il est spécifique au cas où l'objet recherché est la superposition d'un ensemble de points brillants à un fond spatialement étendu. Il est également spécifique au cas où les objets recherchés sont positifs et confinés dans un support connu. L'originalité repose sur l'estimation conjointe de deux cartes, de manière cohérente avec les données, les contraintes et les propriétés de chaque carte. La question est abordée dans le cadre de l'inversion bayésienne par maximum *a posteriori* : la solution est construite comme minimisant un critère régularisé contraint. Nous avons envisagé plusieurs optimiseurs et nous avons retenu un algorithme de lagrangien augmenté. Une première évaluation est proposée sur des données simulées et réelles (du radio-héliographe de Nançay) : elle montre une capacité effective à déconvoluer et à séparer les deux composantes simultanément tout en respectant les contraintes de positivité et de support. Le caractère haute résolution est également mis en évidence.

**Abstract** – The paper deals with Fourier synthesis, deconvolution, and spectral interpolation/extrapolation, in the field of interferometry. It is specifically devoted to imaging a set of point sources superimposed to an extended component and to positive maps with prescribed support. Its originality lies within joint estimation of the two components, coherently with data, properties of each component, positivity and support. The subject is addressed as an inverse problem within a Bayesian framework: the estimated maps are defined as the constrained minimizer of a regularized least-squares criterion. We have investigated several options for the minimization and we have selected an augmented Lagrangian algorithm. Evaluation is carried out using simulated and real data demonstrating the capability to accurately separate the two components.

## 1 Introduction et modèle instrument

Le point de départ de ce travail est un problème d'interférométrie radio pour l'observation du soleil. L'étude du soleil et notamment de son atmosphère (couronne solaire) répond à des préoccupations de la physique fondamentale et des préoccupations pratiques concernant son influence sur l'environnement terrestre. Ces observations, dans le domaine des ondes métriques, sont réalisées par des interféromètres tels que celui de Nançay. Ce type d'instrument permet en effet d'obtenir un pouvoir séparateur élevé c-à-d de construire des images de résolution angulaire adéquate, grâce à un réseau d'antennes. Les signaux collectés par deux antennes pointant dans la même direction sont intercorrélés afin de construire une visibilité, *i.e.*, un échantillon de la transformée de Fourier de l'image du ciel. En exploitant plusieurs couples d'antennes, on mesure un ensemble de valeurs de cette transformée de Fourier [1]. En pratique, le remplissage du domaine de Fourier (la couverture fréquentielle) est très lacunaire ce qui constitue la difficulté majeure de la reconstruction d'image. De ce point de vue, le problème posé est celui de la synthèse de Fourier et la littérature sur le sujet est vaste notamment en astronomie [2].

Le système d'observation se modélise (en 1D) par une transformée de Fourier (discrète et régulière) tronquée et bruitée :

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad (1)$$

où  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  est la carte inconnue,  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^M$  sont les vecteurs des visibilités et du bruit.  $\mathbf{F}$  est la matrice de Fourier discrète ( $N \times N$ ) et  $\mathbf{T}$  une matrice de troncature ( $M \times N$ ), binaire

caractérisant la couverture. La reconstruction de  $\mathbf{x}$  à partir de  $\mathbf{y}$ , *i.e.*, l'inversion de (1) est un problème de synthèse de Fourier.

Dans (1), les données  $\mathbf{y}$  sont fréquentielles et la carte  $\mathbf{x}$  est spatiale. On peut donner deux autres écritures : l'une entièrement fréquentielle et l'autre entièrement spatiale.

1. Par le changement de variable  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x}$ , (1) devient une simple troncature dans le domaine de Fourier et son inversion devient un problème d'extrapolation des visibilités « absentes », généralement dans les hautes fréquences.
2. Par ailleurs, en notant  $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{F}^\dagger \mathbf{T}^\dagger \mathbf{y}$  la transformée de Fourier des données complétées par des zéros (la *dirty map*), (1) devient une convolution circulaire et la réponse instrumentale est appelé le *dirty beam*. Son inversion pose un problème de déconvolution.

Dans les trois cas, il s'agit de modèles linéaires à bruit additif de rang déficient puisque le nombre de visibilités est très inférieur au nombre de pixels. En conséquence, pour tout jeu de données  $\mathbf{y}$ , il existe une infinité de cartes  $\mathbf{x}$  vérifiant  $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{F}\mathbf{x}$ . La *dirty map* est une de ces cartes et on obtient les autres en y ajoutant des cartes ne possédant que des composantes fréquentielles hors de la couverture. La sélection d'une solution passe donc par la prise en compte d'information *a priori* sur la carte recherchée. Nous utilisons pour cela les techniques d'inversion bayésienne [3] permettant d'interdire ou de défavoriser les solutions indésirables. La méthode proposée repose sur la construction d'une loi *a posteriori* et sa maximisation. Elle est en cours de publication, sous forme plus détaillée dans [4].

## 2 Inversion spécifique

Le travail proposé est spécifique au cas où la carte inconnue se présente comme la superposition de deux composantes :

- *Source Ponctuelle* (SP) : une composante  $\mathbf{x}_p$  essentiellement nulle avec quelques valeurs importantes
- *Sources Étendue* (SE) : une composante  $\mathbf{x}_e$  spatialement étendue, plutôt régulière,

et le vrai ciel s'écrit alors comme la somme des deux :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_e + \mathbf{x}_p.$$

Cette idée clé a déjà été exploitée en astronomie par [5, 6] (sous forme paramétrique) et dans d'autres domaines [7, 8]. Elle fait apparaître de nouvelles indéterminations puisqu'il s'agit d'estimer maintenant  $2N$  variables, toujours à partir d'un seul jeu de  $M$  visibilité. Cependant, elle permet d'introduire de manière explicite des informations caractéristiques de chacune des cartes par l'intermédiaire de deux lois *a priori* adaptées.

Le travail proposé est également spécifique au cas où les cartes inconnues sont positives et respectent un support connu. Ces informations se traduisent naturellement par des contraintes d'appartenance pour les pixels. On note  $\mathcal{M}$  l'ensemble des pixels de la carte,  $\mathcal{S}$  l'ensemble des pixels d'un support et  $\bar{\mathcal{S}}$  son complémentaire dans  $\mathcal{M}$ .

- ( $C_p$ ) : positivité

$$\forall p \in \mathcal{M}, \quad x_p(p) \geq 0 \quad \text{et} \quad x_e(p) \geq 0.$$

- ( $C_s$ ) : support

$$\forall p \in \bar{\mathcal{S}}, \quad x_p(p) = 0 \quad \text{et} \quad \forall p \in \bar{\mathcal{S}}, \quad x_e(p) = 0.$$

La méthode proposée prend en compte la connaissance d'un support pour chacune des deux cartes.

Dans tous les cas, le couple de carte solution est défini comme minimiseur d'un critère régularisé noté  $J$ , sous les contraintes  $C_p$  et  $C_s$ , c-à-d comme solution du problème ( $\mathcal{P}$ ) :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \min J(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_e) \\ \text{s.c. } C_p, C_s \end{cases} \quad (2)$$

Dans ce schéma, une propriété est alors cruciale pour  $J$  :

- ( $P_1$ ) :  $J$  est strictement convexe et différentiable.

En effet, sous cette hypothèse,

1. le problème possède une solution unique, ce qui permet de définir proprement le couple de cartes estimé ;
2. une large classe d'algorithmes classiques est disponible pour le résoudre.

Dans ce cadre, nous avons envisagé plusieurs schémas d'optimisation. Il s'agit de divers algorithmes de résolution de ( $\mathcal{P}$ ) tous convergeant et garantissant l'obtention de l'unique solution, et ce, indépendamment de l'initialisation. La seule question en jeu est celle du temps de calcul. Une autre propriété de  $J$  est alors intéressante :

- ( $P_2$ ) :  $J$  est quadratique et à symétrie circulaire.

Cette propriété permet de mettre en œuvre des algorithmes d'optimisation rapides exploitant la FFT, notamment pour le calcul explicite de certaines solutions intermédiaires. Nous nous limitons donc à des termes de régularisation circulants et des fonctions potentiels quadratiques (ou linéaires).

### 2.1 Carte large bande

La carte des sources ponctuelles est une composante large bande, occupant l'ensemble du domaine de Fourier, et non une composante haute fréquence, contrairement à une idée fausse qui semble pourtant répandue et tenace. Elle est naturellement décrite par une loi séparable, c-à-d un bruit blanc. Dans cette famille, notre choix s'est porté vers la loi exponentielle qui réalise un compromis intéressant. Elle permet d'assurer les propriétés ( $P_1$ ) et ( $P_2$ ). Elle favorise les pixels nuls, grâce à un potentiel possédant un minimum et une dérivée strictement positive à l'origine. Il s'agit de plus d'une loi à plus lourde queue que la gaussienne, favorisant ainsi l'apparition de d'événements plus rares. Le potentiel s'écrit :

$$R_s(\mathbf{x}_p) = \sum x_p(p).$$

Tel qu'il est écrit ici, nous assurons la convexité de  $J$  mais pas au sens strict. [4] donne plus de détail sur cette question.

### 2.2 Carte basse fréquence

La carte étendue est au contraire une composante évoluant lentement, et occupant essentiellement les basses fréquences. Le champ choisi pour la décrire est naturellement corrélé et pour respecter les propriétés ( $P_1$ ) et ( $P_2$ ) il est choisi gaussien. Le terme d'interaction entre pixels voisins de la carte  $\mathbf{x}_e$  s'écrit

$$R_c(\mathbf{x}_e) = \sum [x_e(p+1) - x_e(p)]^2,$$

avec  $x_e(0) = x_e(N)$  afin d'assurer la circularité [9].

### 2.3 Capacité de séparation

**Remarque 1** — Les deux cartes possèdent des composantes aux basses fréquences : la carte des sources ponctuelles s'étend sur l'ensemble de l'espace de Fourier et la carte étendue occupe les basses fréquences.

Du point de vue bayésien, la capacité à séparer les deux composantes repose sur le choix des lois *a priori* pour chacune des deux. Ces choix se distinguent par deux caractères : la dépendance et la forme de la loi.

- Le modèle est séparable et possède une lourde queue pour la carte impulsienne.
- Le modèle est corrélé et gaussien pour la carte étendue.

### 2.4 Optimisation

En pratique, le couple de carte solution  $(\widehat{\mathbf{x}}_e, \widehat{\mathbf{x}}_p)$  s'obtient numériquement par l'optimisation sous contrainte d'un critère régularisé quadratique. Nous avons envisagé plusieurs options algorithmiques [10, 11] qui garantissent l'obtention de l'unique minimiseur du critère. Nous avons finalement retenu un algorithme de lagrangien augmenté particulièrement adapté à notre situation. Il n'est pas décrit ici et on pourra consulter [4] pour avoir plus de détails.

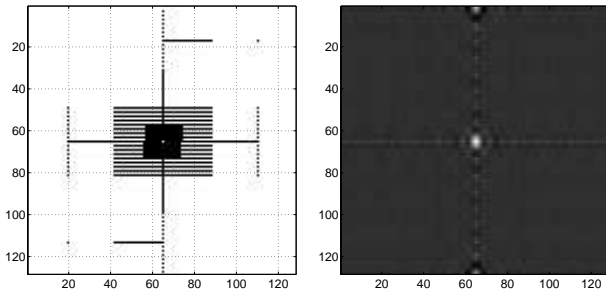


FIG. 1 – La figure de gauche présente la couverture fréquentielle (contenant 569 coefficients de Fourier, le double par symétrie hermitienne). Les points noirs repèrent le lieu des coefficients de Fourier observés. Le réseau d'antenne Est-Ouest (resp. Nord-Sud) est représenté verticalement (resp. horizontalement). La figure de droite présente le *dirty beam*.

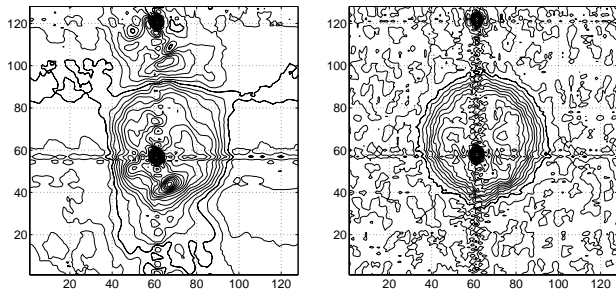


FIG. 2 – *Dirty map*. À gauche, données réelles (NRH, 6 juin 2004 vers 13h, 236 MHz). À droite, simulation imitant la situation réelle. Les lignes de niveau vont de  $-10^{-2}$  à  $5 \cdot 10^{-2}$  avec un pas de  $2.5 \cdot 10^{-4}$  (communes à toutes les cartes présentées).

### 3 Résultats de traitement

#### 3.1 L'instrument et l'objet

Le radio-héliographe de Nançay (NRH) est un interféromètre dédié à la couronne solaire en ondes métriques, entre 150 et 450 MHz environ. L'instrument réalise quotidiennement jusqu'à 10 observations par seconde simultanément dans plusieurs bandes afin de suivre les phénomènes rapides dans la couronne. En simplifiant à l'extrême, le champ de vue de l'instrument est de l'ordre de  $1^\circ$  et sa résolution de l'ordre de  $4'$ .

La couronne ainsi observée présente des caractéristiques désormais bien connues. La composante de plus grande dimension spatiale est de l'ordre de  $1/3$  à  $2/3$  du champ de vue ; elle est de forme relativement stable à l'échelle de la journée. Ses bords ne sont pas abrupts et peuvent évoluer dans le temps, à l'équateur à cause des sources variables et vers les pôles à cause de la contrepartie radio des trous coronaux [12]. Il existe un certain nombre de structures d'échelle intermédiaire, en surbrillance ou en dépression sur la structure à grande échelle. S'ajoutent enfin, quelques sources quasi-ponctuelles, en général non résolues et très variables en position, en forme et en flux à l'échelle de la seconde. Depuis la jouvence du NRH en 1997, il est désormais assez aisé de suivre des échanges de flux entre ce type de sources à des échelles allant de la seconde à l'heure.

Sur un plan scientifique, ces structures témoignent de phéno-

mènes physiques dans la couronne, notamment l'émission liée aux électrons piégés dans les arches de champ magnétiques.

#### 3.2 Traitements proposés

Nous sommes partis d'un jeu de données réelles extrait d'observations standards réalisées par le NRH ; nous avons ensuite construit un jeu de données simulées imitant au mieux ces données réelles. Les « cartes vraies » du cas simulé sont présentées sur la Fig. 3 et les deux *dirty map* sont présentées sur la Fig. 2. Dans les deux cas, le mélange de structures issues de la convolution du *dirty beam* riche en secondaires et des deux types de sources (ponctuelle et étendue) forment un cas très complexe à démêler. Nous montrons dans la suite que dans les deux cas les effets de l'instrument sont pourtant largement inversés.

Nous avons choisi les supports pour chacune des deux cartes (impulsionnelle et étendue) et il est aisé à déterminer à partir de la *dirty map* et des dimensions du soleil calme (suffisamment bien connues à chaque fréquence). Enfin, une étude empirique, par essais et erreurs, nous a permis de calibrer les hyperparamètres (au nombre de deux) de manière à assurer la séparation des deux composantes. Ces paramètres et supports ont été utilisés pour traiter les deux jeux de données (réels et simulés).

##### 3.2.1 Données simulées

Les reconstructions à partir des données simulées sont présentées sur la Fig. 3. La reconstruction de la carte des sources étendues est très satisfaisante, car les erreurs sont désormais en deçà de 5%, alors qu'avec des techniques alternatives, on les estimait entre 10 à 7% (et à partir de données sans sources ponctuelles). Cette évolution est notable dans la perspective de bien contraindre certains modèles physiques de la couronne.

Les sources ponctuelles sont elles aussi bien reconstruites : positions, amplitudes, largeurs et rapports de flux sont restitués de manière fidèle. Dans le cas simulé présenté ici les sources sont de plus correctement séparées alors qu'elles ne le sont pas dans la *dirty map*.

##### 3.2.2 Données réelles

Les reconstructions à partir des données réelles (cf. Fig. 2-a) sont présentées sur la Fig. 4. Le comportement de la méthode est semblable sur les données réelles et sur les données simulées. La séparation entre les deux composantes est assurée et chacune des deux est clairement déconvoluée. La positivité et les supports sont également respectés.

Nous obtenons ce type de résultats de manière routinière sur de nombreuses cartes à 164 et 236 MHz. En revanche, la situation est moins claire en ce qui concerne les observations à 327 et 410 MHz et nous travaillons à clarifier la situation.

**Remarque 2** — Une habitude bien ancrée dans une partie de la communauté astro consiste à reconvoluer la carte obtenue par le lobe propre (lobe gaussien ajusté à la *dirty beam*). Tel n'est pas le cas ici.

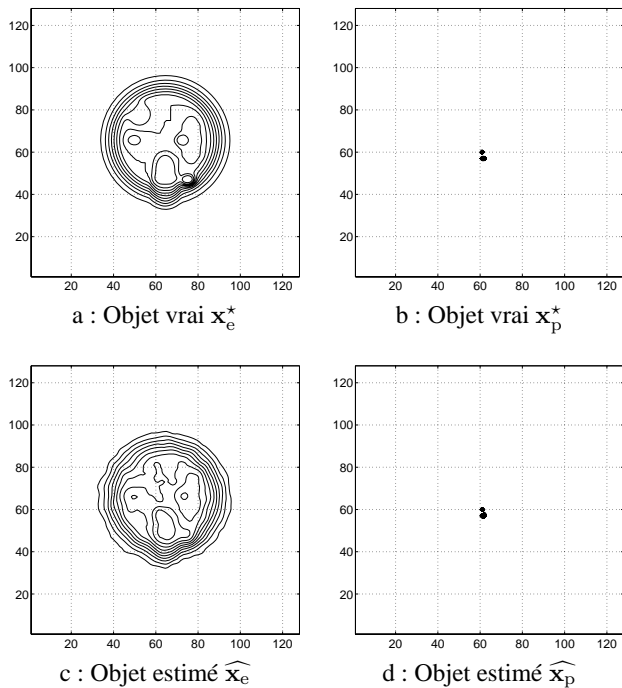


FIG. 3 – Traitement de données simulées (cf. Sect. 3.2.1). Sur les deux figures supérieures, sont représentés les objets vrais  $x_e^*$  (a) et  $x_p^*$  (b). Sur les deux figures inférieures, sont représentés l'estimation  $\hat{x}_e$  (c) et l'estimation  $\hat{x}_p$  (d). La *dirty map* est en Fig. 2-b. Les niveaux sont les mêmes que pour les Fig. 2 et 4.

## 4 Conclusion et perspectives

Nous avons proposé un outil possédant une capacité effective à déconvoluer et à séparer deux composantes simultanément tout en respectant les contraintes de positivité et de support. Nous avons proposé une première évaluation de la méthode à la fois sur des données simulées et sur des données réelles. Nous montrons également une capacité haute résolution qui reste à qualifier plus complètement. Ces résultats sont très clairement meilleurs que ceux obtenus par des outils plus standards [2] (Clean, Clean multi-résolution ou MaxEnt) et une évaluation comparative plus étoffée est dans nos projets.

Actuellement, nous finalisons l'intégration de la méthode dans le logiciel préparant à l'exploitation scientifique des observations du NRH. Les cas à basses fréquences (<300 MHz) sont assez bien maîtrisés aujourd'hui, mais les cas à plus hautes fréquences (>300 MHz) sont plus délicats. Par ailleurs, nous tenons à la disposition de la communauté les codes (IDL/GDL et Matlab/Octave) ainsi que les signaux test, en vue d'échanges et de comparaisons, d'autant que l'imagerie par radio-interférométrie demeure un domaine riche en défis.

Concernant les évolutions de la méthode, plusieurs pistes sont possibles. L'une concerne d'autres potentiels utilisés en reconstruction d'images [3] : des potentiels convexes [13] (resp. non convexes) permettent de *préserver* (resp. *détecter*) des contours ou des impulsions et nous paraissent susceptibles d'apporter un gain notable à la qualité des cartes.

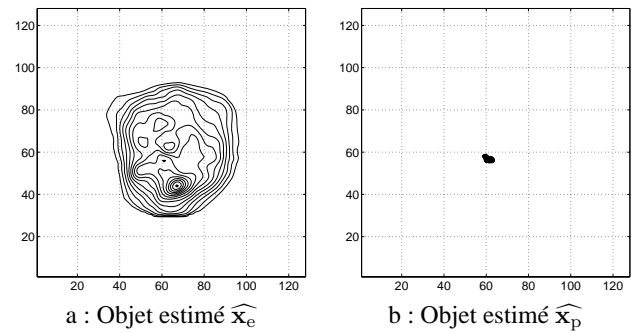


FIG. 4 – Traitement de données réelles (cf. Sect. 3.2.2). Les deux composantes restaurées sont représentées  $\hat{x}_e$  (a) et  $\hat{x}_p$  (b). La *dirty map*, est en Fig. 2-a. Les niveaux sont les mêmes que pour les Fig. 2 et 3.

## Références

- [1] A. R. Thompson, J. M. Moran et G. W. J. Swenson, *Interferometry and Synthesis in Radio-astronomy*, Wiley (Interscience), New York, NY, 2001.
- [2] J.-L. Starck, E. Pantin et F. Murtagh, « Deconvolution in astronomy : a review », *Publication of the Astronomical Society of the Pacific*, vol. 114, pp. 1051–1069, October 2002.
- [3] J. Idier, Ed., *Approche bayésienne pour les problèmes inverses*, Traité IC2, Série traitement du signal et de l'image, Hermès, Paris, 2001.
- [4] J.-F. Giovannelli et A. Coulais, « Positive deconvolution for superimposed extended source and point sources. », *Astron. Astrophys.*, à paraître, 2005.
- [5] P. Magain, F. Courbin et S. Sohy, « Deconvolution with correct sampling », *The Astrophysical Journal*, vol. 494, pp. 472–477, February 1998.
- [6] N. Pirzkal, R. N. Hook et L. B. Lucy, « GIRA – Two channel photometric restoration », in *ASP Conference Series, Astronomical Data Analysis, Software, and Systems IX*, N. Manset, C. Veillet et D. Crabtree, Eds., 2000, vol. 216, pp. 657–660.
- [7] P. Ciuciu, J. Idier et J.-F. Giovannelli, « Regularized estimation of mixed spectra using a circular Gibbs-Markov model », *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 49, N°10, pp. 2201–2213, October 2001.
- [8] V. Samson, F. Champagnat et J.-F. Giovannelli, « Detection of point objects with random subpixel location and unknown amplitude », *Applied Optics Special Issue on Image processing for EO sensors*, May 2003.
- [9] B. R. Hunt, « Bayesian methods in nonlinear digital image restoration », *IEEE Trans. Communications*, vol. C-26, pp. 219–229, March 1977.
- [10] J. Nocedal et S. J. Wright, *Numerical Optimization*, Series in Operations Research. Springer Verlag, New York, 2000.
- [11] J. C. Gilbert, *Optimisation Différentiable : Théorie et Algorithmes*, Notes de cours. INRIA, Rocquencourt, 1999.
- [12] P. Lantos et C. E. Alissandrakis, « Coronal sources at meter and optical wavelengths during the declining phase of the solar cycle », *Solar Physics*, vol. 165, pp. 83–98, April 1996.
- [13] L. Mugnier, T. Fusco et J.-M. Conan, « MISTRAL : a myopic edge-preserving image restoration method, with application to astronomical adaptive-optics-corrected long-exposure images », *J. Opt. Soc. Amer.*, vol. 21, N°10, pp. 1841–1854, October 2004.

# Revisiting the multiscaling hypothesis at medium timescales

C. NARDUZZI<sup>1</sup>, P.A. PEGORARO<sup>1</sup>, S. UHLIG<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Department of Information Engineering, Università di Padova  
via Gradenigo 6/b, 35131 Padova, Italy

<sup>2</sup>Department of Computing Sciences and Engineering, Université Catholique de Louvain  
2, Place Sainte-Barbe, B-1348 Louvain-la-neuve, Belgium

claudio.narduzzi@unipd.it, paoloattilio.pegoraro@unipd.it, suh@info.ucl.ac.be

**Résumé** – Les lois d’invariance d’échelle décrivent l’absence d’une échelle de temps caractéristique particulière contrôlant un processus stochastique. Un consensus existe dans la littérature concernant un modèle du trafic qui serait monofractal Gaussien auto-similaire aux échelles de temps plus grandes qu’un délai aller-retour des segments du protocole de transport TCP. Dans cet article, nous donnons des indices qui laissent penser qu’un comportement multifractal pourrait être présent à ces échelles de temps. Nous présentons des résultats qui diffèrent de la littérature, et prétendons qu’un modèle multifractal stationnaire doit être envisagé pour modéliser le trafic aux échelles de temps typiquement plus grandes que quelques centaines de millisecondes.

**Abstract** – Scaling refers to the absence of a particular characteristic time scale controlling a stochastic process. The literature on network traffic widely agrees on a monoscaling Gaussian self-similar traffic model at timescales larger than the round-trip time (RTT) of TCP segments. In this paper we show evidence that multiscaling may be present at these timescales. We discuss some scaling results that differ from traditional work and, as a consequence, claim that stationary multiscaling needs to be taken into account when modelling network traffic at timescales typically larger than a few hundred milliseconds.

## 1 Introduction

In the past decade much research has been carried out on the analysis and modelling of network traffic. Following the discovery of the self-similar structure of network traffic [1], statistical analysis was applied to traffic measurements to obtain meaningful, parsimonious models and identify robust invariants even in a complex, variegated and rapidly changing environment such as the Internet.

Scaling refers to the absence of a particular characteristic time scale controlling a stochastic process. At timescales larger than the round-trip time (RTT) of TCP segments, the literature widely agrees on a Gaussian self-similar traffic model, which has monoscaling behaviour. In this paper we show evidence that multiscaling can be present at these timescales. We shall first review multiscaling analysis of network traffic, then discuss some scaling results that differ from traditional work. To support our claims, we rely on the analysis of well-known traces used in the literature. We first show that all studied traces are compatible with multiscaling behaviour at timescales of a few RTTs. Second, we show that the wavelet coefficients at these timescales are not Gaussian. Third, we show that neither the violation of Gaussianity of the wavelet coefficients, nor the multiscaling features come from biases due to non-stationarity. As a consequence, we claim that stationary multiscaling needs to be taken into account when modelling network traffic at timescales larger than a few RTTs, i.e. typically larger than a few hundred milliseconds.

## 2 Wavelet-based scaling analysis

Multiscaling analysis of network traffic was performed by the application of the classic Abry-Veitch Multiscale Diagram wavelet tool (A-V tool, in short) to the time series of traffic counts  $Y_T(n)$ . This series contains raw measurement information, obtained by observing packets through a link and aggregating them with time step  $T$ .

The A-V tool relies on properties of the wavelet detail coefficients of  $Y_T(n)$  to reveal the presence of scaling characteristics. Denoting detail coefficients by  $d_Y(j, k)$ , where  $j$  is the scale index and  $k$  the time translation index, the behaviour of their moments is expressed by the following general scaling form:

$$E[|d_Y(j, k)|^q] = C(q)2^{j\alpha(q)} \text{ for } j = j_1 \dots j_2. \quad (1)$$

The indices  $j_1$  and  $j_2$  identify the boundaries of the region considered for scaling analysis.

Through equation (1), the two functions  $\alpha(q)$  and  $C(q)$  are defined. In this study, the interest is centered on  $\alpha(q)$ : for a simple mono-scaling process  $\alpha(q) = q(H - \frac{1}{2})$  holds over all scales,  $H$  being the so-called Hurst parameter<sup>1</sup>; for multiscaling processes the behaviour is more complex as  $\alpha(q)$  is no longer linear in the moment order  $q$ .

The A-V tool evaluates  $\alpha(q)$  by weighted linear regression of the logarithm of moment estimates against log-scale, for each moment order  $q$ . For the results presented in this paper, the required confidence intervals of log-moment estimates were always computed from data, as described in [2] and in the code

\*S. Uhlig is funded by the Belgian National Fund for Scientific Research (FNRS).

<sup>1</sup>In this context variations may arise from different definitions of  $\alpha$ , different normalization of wavelets and different starting processes, that is, cumulative or increment traffic processes.



[3], so that no a priori assumptions are required on the probability distribution of wavelet coefficients. Along with  $\alpha(q)$ , the tool also computes the associated confidence intervals.

The regression quality factor  $Q$ , calculated using the confidence intervals of the Logscale Diagrams [4], provides information on the quality of alignment for the chosen time scale range  $(j_1, j_2)$ . Quality of regression seems to be a rather neglected issue, but it should be emphasized [5] that analysis and evaluation of scaling behaviour are meaningless without the evidence for "good" alignment.

Finally, it is important to remind that moment estimation becomes critical when the order  $q$  is large, because of the higher sensitivity to outliers and of theoretical limits [6], [7]. In the following analysis, we always consider  $q < 10$ .

From  $\alpha(q)$ , the so-called Linear Multiscale Diagram (LMD)  $h(q)$  is computed as:

$$h(q) = \frac{\alpha(q)}{q} - \frac{1}{2} \quad (2)$$

LMD presentation of scaling parameters is better suited for a decision between the monoscaling and multiscaling regimes.

### 3 Multiscaling: a brief assessment

This section is dedicated to a brief discussion of relevant issues in multiscaling analysis of WAN traffic traces. In the literature, traces of varying lengths and from different types of link (in terms of bandwidth and traffic load) have been considered, although these peculiar features have not always been made clear. Tools have also differed, as both time-domain and wavelet-based moment analysis have been used. Perhaps not surprisingly, this resulted in partially heterogeneous or apparently contradictory results. For these reasons, we wish first to comment on basic assumptions and on different choices of timescale ranges, with the aim of avoiding the difficulties mentioned above. A very good summary with similar purposes can be found in [5].

In the first place, multiscaling, which is related to the approach chosen for traffic analysis, needs to be separated from the concept of multifractality. The latter specifically refers to the local behaviour of fractal processes showing a number of different scaling exponents with respect to time. Multiscaling, on the other hand, concerns a range of timescales, not only to the regularity behaviour as scale tends to zero. Furthermore, it is correctly defined also for discrete processes like traffic counts, without approximation. This paper is concerned with multiscaling.

The notion of time scale size should be considered with some care. It is generally accepted that the order of magnitude of TCP round-trip times defines the boundary between small (or fine) scales and large (or coarse) scales, with the former usually referring to durations up to hundreds of *ms* and time scales of seconds or more being termed large. At large scales self-similarity (or, in this context, monoscaling) is usually taken for granted and seems well rooted into the physical behaviour of the traffic [8, 9]. Multiscaling is more controversial and has been found in WAN network traffic analysis at timescales both larger and smaller than a few hundred milliseconds [10, 11, 12, 13]. However, it may be difficult to see a straightforward relationship to traffic behaviour, because of different packet cap-

turing resolutions and different aggregation levels used when results are reported.

Aggregated traffic counts  $Y_T(n)$  are actually the result of two different kinds of aggregation, as noted in [14]: a vertical aggregation originated by the superposition of flows and a horizontal aggregation due to the finite length of the time step. To some extent, the two effects could be considered interchangeable: while flows over high-capacity backbones can easily reach a high degree of vertical aggregation over small timescales, the same can happen for slower flows with longer aggregation time steps. However, some of the mechanisms governing a network (e.g., the retransmission timeout in the TCP protocol) are dependent on time rather than on link bandwidth. This implies that, at least for certain timescales, the suitability of a traffic model may depend on the link features.

From the viewpoint of experimental analysis, as well, the impact of bandwidth and link loading on the estimation of multiscale diagrams needs to be carefully considered. Assuming a generic average packet size of 250 bytes, a fully loaded 100 Mbps link can generate a potential flow of 50,000 pkts/s, which drops to 10,000 pkts/s for a 20% load. However, this yields an average of just 10 packets per time step if  $T=1$  ms. At this aggregation level, wild fluctuations of experimental data are likely to limit the usefulness of a stochastic process model, particularly where small-timescale behaviour is concerned. On the other hand, traffic analysis on a 10 Gb/s backbone, under the same conditions, would yield 1000 packets per time step. This not only means that a continuous flow model is applicable, but also that vertical aggregation is already large. Statistical properties of the underlying process may then be quite different and approach large-scale behaviour even at small timescales [15].

One final problem refers to the issue of non-stationarity. For timescales above RTT a more accurate assessment should further distinguish between medium values, ranging from hundreds milliseconds to minutes, and large values, from minutes to hours and more. In fact, it is well-known that Internet traffic exhibits daily and seasonal non-stationarity, that can affect scaling behavior at very large scales. In recent works attention has shifted to possible effects of non-stationarity at smaller timescales; it has been shown in [16, 17] that even at medium timescales there is a need to check for stationarity in data.

### 4 Experimental analysis of WAN traffic traces

The approach we adopted for this work is based on the considerations presented in the previous section. We carried out a very careful assessment of all factors that might affect our judgement on experimental results, trying to avoid any preconstructed belief on our data. In this paper we concentrate on the scaling behaviour at medium timescales of links with traffic speeds of the order of a few *Mb/s* (i.e., not large backbone traffic) and look at durations of about one hour. This allows us to focus on the controversial aspects of multiscaling, under conditions where all the factors discussed above may influence the analysis of traffic processes.

We have considered several publicly available traces from the Internet Traffic Archive [18] and the Auckland IV archive [19]:



- pAug89, containing a million packet arrivals seen on an Ethernet link at the Bellcore Morristown Research and Engineering facility. This trace is LAN traffic (with a small portion of transit WAN traffic).
- dec-pkt (1995): traces containing an hour's worth of wide-area traffic between Digital Equipment Corporation and the rest of the world.
- lbl-tcp-3 (1994), a trace containing two hours' worth of wide-area TCP traffic between the Lawrence Berkeley Laboratory and the rest of the world.
- Auck (2001), a set of GPRS-synchronized long IP-traces captured by the WAND group using the DAG system (only a less than one-hour portion).

Reported timing accuracies are  $10 \mu s$  for pAug89,  $1 ms$  for dec-pkt,  $1 \mu s$  for lbl-tcp-3 and better than  $\mu s$  for the Auck trace.

To assess multiscaling we compute a linear regression on the LMD, keeping into account the variances resulting from application of the A-V tool; this yields intercept and slope parameters along with their uncertainties. If the confidence interval of the slope parameter is compatible with a horizontal line (zero slope), we decide for mono-scaling, otherwise for multiscaling.

This analysis revealed the presence of multiscaling in the region that spans timescales from hundreds of milliseconds to minutes for all of the traces listed above, with the exception of the LAN pAug trace used for comparison. For reasons of space limitations, only the Auck trace will be discussed, with traffic data aggregated over a time step  $T = 1ms$ . In doing so, we shall briefly comment on our criteria to ensure a satisfactory degree of confidence in multiscaling results. Further details can be found in [20].

Although the basic heuristic is reasonable and simple enough, it is by no means definitive. Therefore we investigated several other aspects related to multiscaling to ensure, as far as possible, a coherent picture with no contradictory results.

The first test involved the probability distribution of wavelet detail coefficients at the analysed timescales. Fig. 1 shows the cumulative distribution function (CDF) of wavelet coefficients at scale index  $j = 10$  (a timescale of about  $1 s$ ), overlayed on a Gaussian CDF with equal mean and variance<sup>2</sup>. Logarithmic scale is used for the vertical axis, so that the Gaussian CDF appears as a straight line. It is apparent that wavelet coefficients are not normally distributed, thus ruling out monoscaling. Distribution tails are heavier than in the Gaussian case because nearly 20% of data, on the two sides, depart from the reference straight line. Then, it can be safely considered that deviation from Gaussianity is not the result of a small number of outliers but an intrinsic characteristic of the distribution.

Doubts might still remain concerning the possibility that correct scaling estimation is affected by non-stationary behaviour in the traffic trace (though observed mean and variance appear to be stationary). We addressed this point by repeating the analysis of the trace using mother wavelets with an increasingly large number of vanishing moments. The rationale is that the order of the polynomial trend the wavelet transform is blind to, increases accordingly. If scaling estimation is affected by polynomial trends, we expect that, progressively, the point will be reached where non-stationarities are mostly filtered out. Then,

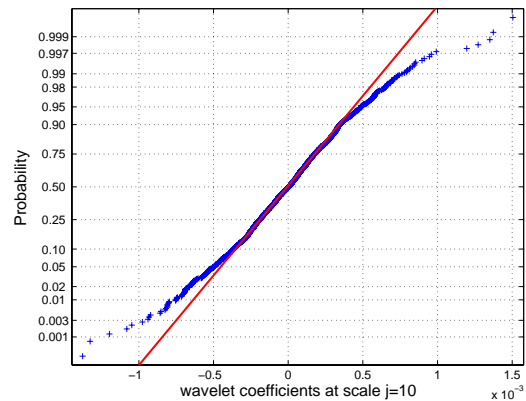


FIG. 1: CDF plot of the Auckland trace wavelet coefficients at scale  $j = 10$  compared to a Gaussian CDF (straight line).

any further change of the mother wavelet will have no effect on the results. The outcome of this approach is presented in Fig. 2, which shows that no significant changes occur, in this case, when the mother wavelet has at least 5 vanishing moments. Multiscaling results obtained with this mother wavelet are, arguably, immune from non-stationary trends.

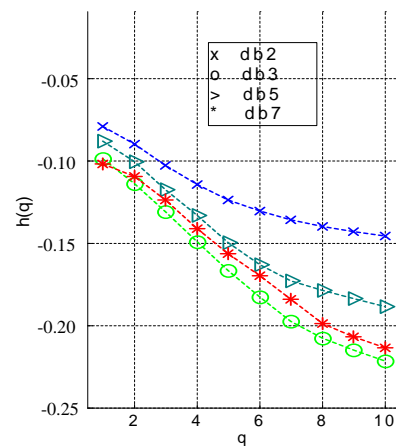


FIG. 2: LMD of Auck trace calculated with different numbers of vanishing moments for the mother wavelet. Confidence intervals are not shown to avoid confusion.

Non-Gaussianity of detail coefficients at medium timescales over the whole observation interval is confirmed by comparisons among distributions of detail coefficients belonging to different sub-intervals. We divided the wavelet coefficient time series into a number of non-overlapping blocks and applied the Kolmogorov-Smirnov (K-S) test to pairs of blocks<sup>3</sup>. This is a statistical test which assumes constant probability distribution as the null-hypothesis and in no case this was rejected on the basis of available data. Finally, we applied statistical tests for normality to each block of wavelet coefficients and obtained the rejection of the Gaussian hypothesis; therefore, we concluded for a non-Gaussian distribution.

<sup>2</sup>Comparison of the two CDFs is akin to the analysis of a quantile-quantile plot.

<sup>3</sup>A significance level  $\alpha = 5\%$  was used to be conservative.

We initially devised these tests as yet another way to check for stationarity: in fact, if non-stationarity was at the origin of non-Gaussianity, the K-S test would fail somewhere along the trace. However, this also allowed to address another kind of problem. Although the A-V tool is blind to polynomial trends, some different non-stationarities can affect the results of the estimation [4, 21]. As the estimation of detail coefficient moments involves averaging along time, it might be possible that some localised phenomena are difficult to highlight at small moment orders, but become important at larger  $q$ , affecting scaling analysis. The fact that non-Gaussian behaviour is uniformly found all over the observation interval suggests that no such situation occurred. To further analyse this possibility, we plotted detail coefficient behaviour over time for each scale and found out that, for the Auck trace, no such outliers were present.

Putting together the analysis by CDF-plot, statistical test and time diagrams, it follows that non-Gaussianity and multiscaling seem intrinsically linked to the behaviour at medium timescales of traffic traces related to medium capacity network links.

## 5 Conclusions

Several studies concerned with the traffic count process have argued in favour or against the presence of multiscaling; studies of the process of TCP flow arrivals have also uncovered complex scaling behaviours [17]. While multiscaling at small timescales in the byte count process has been associated with the behaviour of TCP, neither the process of TCP flow arrivals nor the process of byte counts at medium timescales present a reasonable connection to it. The rationale for this statement is that TCP adapts its behaviour at timescales of a few RTTs, typically a few hundreds of milliseconds. This makes unlikely that TCP alone be responsible for the presence of multiscaling at timescales of seconds or more, as we showed in this paper. Multiscaling at medium timescales must then reveal stochastic properties of the signal, not network-protocol related ones. If this is actually the case, then it is on the side of signal processing tools that an answer must be found to discover the cause of this behavior.

## References

- [1] W. Leland, M. Taqqu, W. Willinger, and D. Wilson, "On the self-similar nature of ethernet traffic (extended version)," *IEEE/ACM Trans. on Networking*, vol. 2, no. 1, pp. 1–15, 1994.
- [2] P. Abry, P. Flandrin, M. Taqqu, and D. Veitch, "Wavelets for the analysis, estimation and synthesis of scaling data," in *Self-Similar Network Traffic and Performance Evaluation* (K. Park and W. Willinger, eds.), pp. 39–87, Wiley, New York, 2000.
- [3] <http://www.cubinlab.ee.mu.oz.au/darryl/>.
- [4] P. Abry and D. Veitch, "Wavelet analysis of long-range-dependent traffic," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44, no. 1, pp. 2–15, 1998.
- [5] N. Hohn, D. Veitch, and P. Abry, "Multifractality in tcp/ip traffic: the case against," *Computer Networks*, vol. 48, no. 3, pp. 293–313, 2005.
- [6] B. Lashermes, P. Abry, and P. Chainais, "New insights of the estimation of scaling exponents," *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, vol. 2, no. 4, pp. 497–523, 2004.
- [7] P. C. B. Lashermes, P. Abry, "Scaling exponents estimation for multiscaling processes," in *Proc. ICASSP*, vol. 2, pp. 509–512, May 2004.
- [8] M. Taqqu, W. Willinger, and R. Sherman, "Proof of a fundamental result in self-similar traffic modeling," *Computer Communication Review*, vol. 27, no. 2, 1997.
- [9] M. Crovella and A. Bestavros, "Self-similarity in world wide web traffic:evidence and possible causes,," in *Proceedings of ACM SIGMETRICS International Conference on Measuring and Modeling of Computer Systems*, May 1996.
- [10] R. H. Riedi and J. L. Vehel, "Multifractal properties of tcp traffic: a numerical study," Tech. Rep. 3129, INRIA Roquencourt, March 1997.
- [11] P. Mannersalo and I. Norros, "Multifractal analysis of real atm traffic: A first look," Tech. Rep. COST257TD(97)19, VTT Information Technology, Jan. 1997.
- [12] A. Feldmann, A. Gilbert, W. Willinger, and T. Kurtz, "The changing nature of network traffic: Scaling phenomena," *Computer Communications Review*, vol. 28, no. 2, pp. 5–29, 1998.
- [13] A. Feldmann, A. C. Gilbert, and W. Willinger, "Data network as cascades: Investigating the multifractal nature of internet wan traffic," in *Proceedings of ACM SIGCOMM'98*, pp. 42–55, 1998.
- [14] J. Kilpi and I. Norros, "Testing the gaussian approximation of aggregate traffic," in *Proceedings of 2nd Internet Measurement Workshop*, pp. 49–61, ACM SIGCOMM, Nov. 2002.
- [15] Z. Zhang, V. Ribeiro, S. Moon, and C. Diot, "Small-time scaling behaviors of internet backbone traffic: An empirical study," in *Proc. IEEE INFOCOM 2003*, vol. 3, pp. 1826–1836, Apr. 2003.
- [16] S. Uhlig, O. Bonaventure, and C. Ravier, "3d-ld: a graphical wavelet-based method for analyzing scaling processes," *Proceedings of 15th ITC Specialist Seminar*, Jul. 2002.
- [17] S. Uhlig, "Non-stationarity and high-order scaling in tcp flow arrivals: a methodological analysis," *ACM Computer Communication Review*, vol. 34, no. 2, pp. 9–24, 2004.
- [18] Internet Traffic Archive. <http://ita.ee.lbl.gov/>.
- [19] NLNR. <http://pma.nlanr.net/Traces/long/auck4.html>.
- [20] L. Benetazzo, C. Narduzzi, and P. A. Pegoraro, "Internet traffic measurement: a critical study of wavelet analysis," in *Proc. IEEE Instrum. Meas. Technol. Conf., IMTC/2005*, vol. 3, pp. 2294–2299, May 2005.
- [21] S. Stoev, M. Taqqu, C. Park, and J. Marron, "Strengths and limitations of the wavelet spectrum method in the analysis of internet traffic," Tech. Rep. 2004-8, SAMSI, Mar. 2004. Research Triangle Park, NC, USA.

# Caractérisation et analyse du trafic Internet en fonction du type d'application

Nicolas LARRIEU, Yu ZHANG, Philippe OWEZARSKI

LAAS – CNRS  
7, avenue du Colonel ROCHE  
31077 TOULOUSE Cedex 4  
FRANCE

{nlarrieu, yzhang, owe}@laas.fr

**Résumé** – Les projets de métrologie actuels et passés ont montré que les caractéristiques et les modèles du trafic Internet étaient très éloignés des connaissances traditionnelles étant donné qu'ils mettent en évidence des propriétés de plus en plus complexes comme l'auto-similarité et la dépendance longue mémoire (LRD pour Long Range Dependence). Ces propriétés sont très dangereuses pour la régularité du profil du trafic Internet ainsi que pour la QoS (Qualité de Service) du réseau. Ces projets ont aussi prouvés que la LRD est causée par la transmission de flux longs (appelés "éléphants") qui utilisent le protocole TCP. En conséquence, de nombreuses propositions ont été faites pour différencier la méthode de transmission des flux courts (appelés "souris") et des flux éléphants. Cependant, cette décomposition du trafic en souris et éléphants ne fournit pas des résultats explicites étant donné que de nombreux comportements sont mélangés au travers de ces deux classes. Ce papier propose donc une évolution de la décomposition souris / éléphants en se basant sur les différentes applications (P2P, "streaming", Web, etc.) qui génèrent la majorité des flux éléphants mais qui ne suivent probablement pas toutes le même modèle de trafic. De plus, une décomposition basée sur le volume d'information généré par ces applications est aussi proposée pour caractériser plus précisément les propriétés du trafic des flux éléphants. Cette analyse apporte des informations permettant d'isoler les classes applicatives qui ont un impact négatif sur la LRD et la QoS. En conséquence, les résultats fournis par cette méthode de décomposition du trafic fourniront des indications pour permettre une meilleure gestion de ces flux applicatifs et leur meilleur transfert dans le réseau.

**Abstract** – Past and recent monitoring projects showed that Internet traffic model and characteristics are very far from common beliefs and that it more and more exhibits complex properties as self-similarity and long range dependence (LRD), which are very damageable for traffic profile and network QoS. These projects also proved that LRD is due to the transmission of elephant flows using TCP. As a consequence, it has been proposed many times to differentiate the way elephants and mice are managed in the network. However, this decomposition of traffic into elephants and mice do not provide "clear" results as many different behaviors are still mixed in each of these classes. This paper then deals with extending the traffic decomposition approach in order to refine the mice / elephants classification as the many different applications as P2P, streaming, Web, etc. that generate elephants, probably do not match the same traffic model. A volume-based decomposition method is also proposed to further characterize the elephants flow traffic. We expect this analysis to provide information allowing us to isolate classes of applicative flows having a bad negative impact on LRD and thus QoS and helping us understanding how they behave. The application of this traffic decomposition into classes deals with getting indications on how such applicative flows should be managed while transmitted in the network.

## 1 Introduction

Les usages de l'Internet ont connu plusieurs révolutions ces dernières années : d'un réseau pour le simple transfert de données binaires et textuelles sans contraintes de temps ou de débit, l'Internet a connu une première révolution avec l'apparition et la démocratisation du web avec une demande de plus en plus importante en terme de bande passante. De nos jours, les usages imposent des contraintes encore plus fortes, avec l'apparition des applications de "streaming", comme la transmission vidéo en temps réel, de téléphonie sur IP ou de télévision sur Internet. Mais la principale source de trafic dans l'Internet est due aux échanges de fichiers par des applications pair à pair (P2P), notamment pour l'échange de musique ou de films. L'Internet doit donc être capable de fournir aux utilisateurs et leurs applications les qualités de Service (QoS) dont ils ont besoin, et donc d'optimiser l'utilisation des ressources de communication pour y parvenir. L'Internet doit évoluer d'une offre de service "best effort" unique vers une offre multi-services.

Au cours des dix dernières années, la QoS est apparue comme un enjeu majeur dans l'Internet. De nombreuses propositions ont été faites, comme IntServ ou DiffServ, mais jusqu'à présent elles n'ont pas été déployées (ou alors de façon limitée). En effet, les solutions avancées par la communauté Internet pour la mise en place de services différenciés et/ou garantis ne sont pas celles attendues par les utilisateurs ou les opérateurs. L'analyse

de ce constat d'échec fait apparaître un certain nombre de difficultés toujours d'actualité : la complexité de l'Internet et ses nombreuses interconnexions, l'hétérogénéité de ses ressources en terme de technologies mais aussi de dimensionnement ou encore les caractéristiques de son trafic. En effet, l'augmentation de la complexité de l'Internet ainsi que les nouvelles applications aux besoins divers et évolutifs introduisent dans le trafic Internet de nombreuses caractéristiques qui sont très loins des croyances traditionnelles. En particulier, il a été montré que les applications P2P, utilisées pour l'échange de musique ou de films – et donc des données volumineuses – changeaient la distribution des tailles de fichiers, ce qui avait la particularité de créer des propriétés de dépendance longue (LRD) et d'auto-similarité dans le trafic [7] [5]. Cette auto-similarité / LRD se traduit par une variabilité importante du trafic qui nuit à la stabilité et à la qualité des services offerts, et diminue globalement la performance des réseaux [6]. [4] a en particulier montré que cette LRD était due à l'inadéquation de TCP (le protocole de transport principal dans l'Internet) pour le transfert de fichiers volumineux sur des liens à hauts débits, mais également que la LRD peut être un bon paramètre pour qualifier et quantifier la grande variabilité du trafic et par la même la dégradation de QoS / performance.

L'amélioration des architectures et protocoles de l'Internet est ainsi étroitement liée à la connaissance et la compréhension des caractéristiques de son trafic car elles indiquent les types

de mécanismes à déployer pour être en adéquation avec les besoins utilisateurs et les contraintes réseaux. En conséquence, le développement d'outils basés sur la métrologie, de technologies permettant la collecte d'informations dans le trafic Internet ou de méthodes permettant l'analyse de ses caractéristiques est un sujet très important pour les domaines de l'ingénierie et de la recherche en réseau. Par exemple, comme il a été montré que la LRD étaient due à l'inadéquation de TCP pour le transfert de fichiers volumineux, [4] a proposé de différencier les techniques de transmission pour les gros flux (éléphants) et les petits (souris). Cette approche présente néanmoins des limites de mise en œuvre, car avec les interfaces de programmation réseau actuelles, on ne peut pas savoir a priori si le fichier à transmettre va être long ou court.

Il faut donc revenir à une analyse du trafic par application (information disponible au début de chaque session) pour en déduire les applications les plus pénalisantes pour la qualité de service du réseau, et en déduire des mécanismes adaptés pour transmettre les données associées à ces applications... En ciblant plus particulièrement celles qui induisent la transmission d'éléphants sur le réseau. Ce papier présente donc les principaux résultats d'analyse et de caractérisation du trafic obtenus dans le cadre du projet METROPOLIS. Les traces analysées dans ce papier ont été obtenues en utilisant des outils de mesure passive qui collectent les en-têtes TCP/IP de chaque paquet avec une estampille temporelle GPS. Le système de capture est basé sur des cartes DAG [3] développées par la société ENDACE.

La suite de ce papier débute en confirmant les résultats connus sur la contribution respective des éléphants et souris à la LRD globale observée dans le trafic (section 2). Cette analyse sera effectuée en utilisant l'outil MDestimate [1] qui s'appuie sur une décomposition en ondelettes pour une analyse multi-échelles du trafic. Puis, une nouvelle décomposition du trafic éléphant sera proposée. Elle s'appuie sur le type d'application génératrice et analyse le niveau de LRD induit par les éléphants générés par chaque application (sections 3 et 4). Nous espérons que cette analyse apporte des informations nous permettant d'isoler les classes de flux applicatifs qui sont responsables de la LRD et par là même de la dégradation de la QoS du réseau. Ce travail devrait aussi nous donner des indications pour comprendre comment les flux applicatifs doivent être gérés lors de leur transfert dans l'Internet.

## 2 Les limites de la décomposition du trafic en souris / éléphants

L'analyse du trafic Renater que nous avons réalisée depuis 4 années confirme qu'il y a une évolution très forte du trafic en ce qui concerne la taille des flux échangés avec de plus en plus de flux très longs. Dans cette section, nous avons considéré des traces de trafic collectées sur le réseau RENATER (au niveau du point de présence en Midi-Pyrénées au cours du mois de novembre 2003 à partir de 14 H et pendant une heure) que nous avons décomposées en flux souris et éléphants<sup>1</sup>. Nous avons appliqué la méthode de décomposition en ondelettes implémentée dans MDestimate<sup>2</sup> [1] sur ces deux classes de trafic<sup>3</sup>. Les diagrammes de LRD de la figure 1 montrent que le trafic éléphant introduit la plus grande part de LRD dans le trafic global ( $H(\text{éléphant}) > H(\text{trafic global})$ ). D'autre part, le trafic souris

présente plus de LRD que ce qui était attendu : ( $H(\text{trafic souris}) >> 0,5^4$ ). Ces résultats préliminaires montrent qu'une méthode de caractérisation reposant uniquement sur une décomposition souris et éléphants ne fournit pas des résultats clairs. Le trafic souris n'est pas aussi régulier qu'attendu et la variabilité des éléphants ne peut pas être observée à toute les échelles.

Ainsi, dans la suite nous allons répondre à la question suivante : quel est le type d'application qui génère le plus de LRD dans le trafic Internet actuel ? Pour cela, nous avons besoin de décomposer le trafic Internet des éléphants en différentes classes de trafic de façon à trouver des propriétés plus simples que celles analysées jusqu'à présent. Nous introduisons ainsi dans la prochaine section notre méthode de décomposition du trafic éléphant par type d'application (qui sera exploitable avec les principes architecturaux actuels de l'Internet).

## 3 Analyse de l'impact des principales applications sur la LRD

### 3.1 Méthodologie

Notre méthode de classification applicative du trafic utilise une méthode de détection qui reconnaît la famille applicative de chaque flux en se basant sur les premiers paquets échangés par l'application considérée. À l'aide de cette méthode (et contrairement aux méthodes "classiques" d'analyse des numéros de port) nous sommes capables de reconnaître un trafic échangé sur un numéro de port qui n'est pas traditionnellement dédié à cette application. D'autre part, il est ainsi possible de détecter tout le trafic généré par une application dont les numéros de port changent de façon dynamique. Par exemple, si une application P2P utilise le port 80 (port utilisé en standard par les applications Web) nous pouvons la détecter et classer ce trafic comme P2P et non du trafic Web. Nous réalisons cette opération en "rejouant" les traces DAG dans le boîtier Traffic Designer de la société QoSmos<sup>5</sup> grâce au logiciel TD Player associé. Traffic Designer est un boîtier permettant l'analyse du trafic, s'appuyant sur une architecture PC et équipé avec une carte Ethernet "bypass". Il permet l'analyse en temps réel du trafic entrant et sortant sur un lien donné et fournit des statistiques macroscopiques sur ce trafic.

Ainsi, nous sommes capables de quantifier précisément la contribution de chaque application à la variabilité globale du trafic et ainsi infirmer ou confirmer les a priori à ce sujet. Par exemple, nous analyserons si un trafic Web "pur" (c'est à dire excluant toutes les applications qui utilisent le protocole HTTP et le port 80 uniquement pour passer les pare-feux) qui génère en majorité des petits flux, génère par la même un trafic avec peu de LRD. D'autre part, les applications P2P qui sont bien connues pour générer des flux très volumineux dans le réseau, seront analysées et nous étudieront dans quelle mesure elles contribuent à dégrader les performances du réseau. Ainsi, nous avons choisi cinq familles d'applications différentes pour caractériser nos traces de trafic. Elles ont été choisies en fonction de leur popularité actuelle dans l'Internet et bien sûr, leur capacité à générer un nombre important de flux éléphants :

- Web : trafic généré par tous les navigateurs (IE Explorer, Netscape, Mozilla, Firefox, etc.) ;
- Streaming : trafic temps réel échangé par les applications orientées flux (MediaPlayer, RealPlayer, NetMeeting, etc.) ;
- P2P : trafic échangé par toutes les applications P2P (Emule, Bittorrent, etc.) ;
- Terminal : trafic généré par les terminaux clients comme Telnet ou SSH ;

4. La valeur 0,5 est caractéristique d'un processus sans dépendance.

5. QoSmos est une jeune pousse issue du laboratoire LIP6 à Paris : <http://www.qosmos.fr/EN/home.htm>.

1. Un éléphant est défini comme un flux de plus de 100 paquets et un flux souris comme un flux de moins de 10 paquets.

2. Cet outil permet de calculer le niveau de variabilité présent dans la série analysée pour une gamme d'échelles donnée (appelées plage d'octaves par les auteurs). L'échelle de l'analyse est fonction de la granularité initiale avec laquelle la série a été extraite.

3. Dans notre étude, les échantillons de signal sont des séries de débit et les granularités reposent sur la fenêtre temporelle nécessaire pour calculer les valeurs de débit.

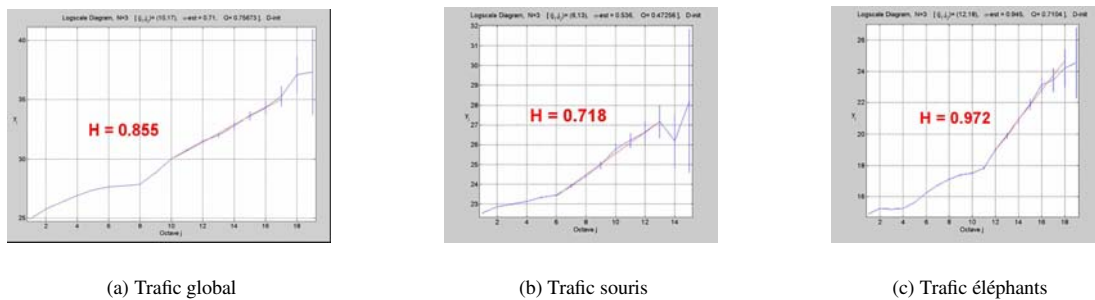


FIG. 1: Niveau de LRD (mesurée sur les octaves > 10) pour le trafic global, souris et éléphant (calcul effectué sur les séries de débit avec une granularité de 1 ms)

- FTP : trafic de données échangé en utilisant le protocole FTP.

### 3.2 Résultats préliminaires

Pour pouvoir obtenir un maximum de classes applicatives différentes dans les données analysées, nous avons considéré dans le cadre de cette étude des traces de trafic collectées en bordure du réseau universitaire du campus de Jussieu. Ces traces sont collectées sur un lien à très haut débit (1 Gbps)<sup>6</sup>. Les premiers résultats (cf. valeurs de LRD<sup>7</sup> de la table 1) calculés pour chaque famille applicative montrent que les tendances intuitives sont confirmées. En effet, les trafics P2P et FTP mettent en évidence un très fort niveau de LRD ainsi qu'une queue de distribution très lourde (cf. figure 2). Cependant, d'autres résultats sont plus surprenants ! En effet, si nous considérons l'exemple du trafic Web collecté sur le réseau Renater nous observons que même si la distribution de la taille des flux du trafic Web n'est pas aussi lourde que la distribution du trafic global, le niveau de LRD est beaucoup plus important. D'autre part, quand nous analysons ce trafic Web nous pouvons observer que 0,00058 % du nombre total de flux Web génère plus de 37,3 % de la quantité totale de données du trafic Web (cf. table 2 pour détails). Ainsi, il apparaît clairement que les clients Web utilisés dans cette trace n'ont pas uniquement servi à charger des pages Web. De plus, nous pouvons affirmer que dans ce cas de figure les clients Web ont été utilisés pour télécharger des grands volumes de données (il s'agit d'une utilisation du protocole HTTP comme un protocole FTP parallèle). Ainsi, en ne considérant qu'une décomposition au niveau applicatif nous ne pouvons pas prendre en compte tous les paramètres qui sont responsables de la LRD du trafic Internet actuel. Cette limitation dans la méthode de classification nous a amené à proposer son évolution que nous présentons dans la section suivante.

## 4 Extension de la méthode d'analyse : caractérisation du niveau de LRD basée sur une décomposition en volume

Aux vues des résultats précédents, nous ne devons pas considérer seulement le type d'application qui génère chaque flux

6. La trace analysée dans cette article a été collectée le 20 janvier 2004 à partir de 14 H et pendant 40 minutes.

7. Certaines valeurs du facteur de Hurst présentées dans ce papier sont supérieures à 1. Il est en théorie impossible d'obtenir de telles valeurs. Néanmoins, cet écart dans l'estimation est dû à l'impossibilité d'obtenir, pour certains types d'applications, des séries de données assez grandes pour réduire suffisamment l'intervalle de confiance et ainsi ne pas dépasser la valeur 1. Néanmoins, notre objectif est de réaliser une comparaison entre les différents niveaux de LRD des différentes applications considérées. Cette comparaison reste en effet possible car une valeur de H très grande (i.e. même supérieure à 1) traduit toujours la présence d'un fort comportement dépendant à long terme.

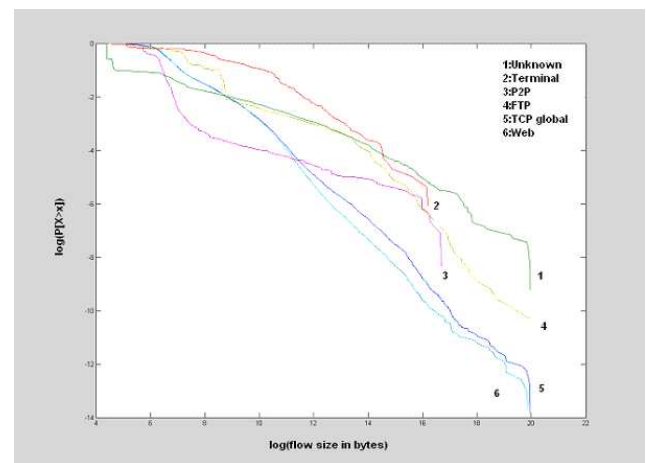


FIG. 2: Distribution de la taille des flux pour chaque famille applicative – diagramme Log-Log

Famille applicative	Niveau de LRD (valeur de Hurst)
Trafic Web	0.905
Trafic P2P	1.010
Trafic Terminal	1.15
Trafic FTP	1.245

TAB. 1: LRD des flux éléphants en fonction de leur famille d'application (calcul effectué sur les séries de débit avec une granularité de 1 ms et pour la gamme d'échelles représentée par les octaves > 10)

éléphant mais nous allons plutôt prendre en compte les comportements que les applications mettent en œuvre quand elles envoient ce type de flux dans le réseau. Pour cela, nous considérons deux nouvelles métriques : la durée et la quantité de données échangées pour chaque flux analysé. De plus, nous avons analysé la contribution en LRD pour l'ensemble des familles applicatives définies dans la section 3 et ainsi, nous sommes capables de conclure sur l'impact des très longs flux en terme de durée (cf. table 3) ou de quantité de données échangées (cf. table 4). Il apparaît que seule la taille des flux a un impact important sur l'augmentation de la LRD du trafic. En effet, le seul paramètre durée des flux ne fait pas varier de façon significative la LRD du trafic associé. Dès lors, une décomposition en volume basée sur la taille des flux a été appliquée en particulier, sur la famille de trafic P2P : les résultats obtenus sont très intéressants. Si nous considérons la famille de trafic P2P et deux sous-classes différentes de ce trafic (les très longs flux en termes de quantité (i.e. leur taille en octets) de données échangées – ceux générés par une version ancienne d'un client P2P : Kazaa – et les autres – générés par un client P2P plus



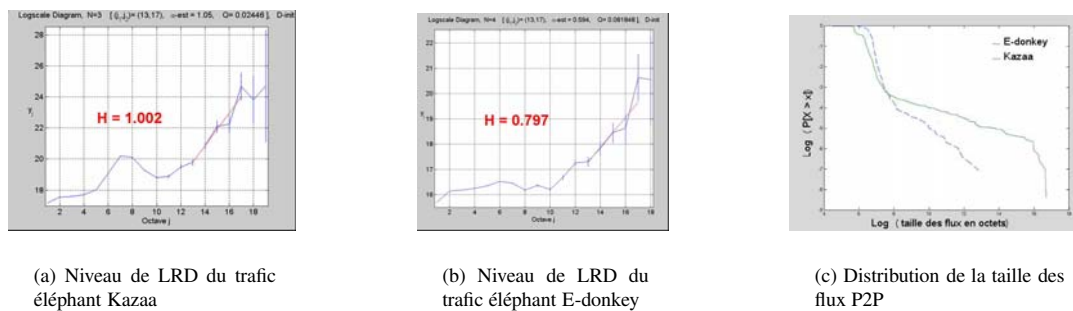


FIG. 3: Résultats concernant les éléphants de la famille P2P (analyse de la série de débit avec une granularité de 1 ms et pour la gamme d'échelles représentée par les octaves > 10)

	Volume (%)	Nombre de flux (%)	Niveau de LRD (valeur de Hurst)
Trafic Web total	14,4 Goctets (100 %)	1.167.579 (100 %)	H = 0,905
Trafic généré par les flux Web les plus volumineux (taille > 1 Moctets)	5,31 Goctets (37,3 %)	679 (0,00058 %)	H = 1,011
Trafic généré par les 100 flux les plus volumineux	3,99 Goctets (27,7 %)	100 (0,000086 %)	H = 1,201

TAB. 2: Détails de la contribution de la taille des flux sur la LRD des flux éléphants de la famille Web (calcul effectué sur les séries de débit avec une granularité de 1 ms et pour la gamme d'échelles représentée par les octaves > 10)

Durée du flux	Volume total (GOctets)	Pourcentage du Volume total (%)	Niveau de LRD (H)
> à 0 seconde	43,4	100 %	0.855
> à 60 secondes	29,6	68,2 %	0.826
> à 600 secondes	24,5	56,5 %	0.803
> à 3000 secondes	13,3	30,6 %	0.812

TAB. 3: Contribution de la durée des flux sur la LRD du trafic éléphant pour l'ensemble des familles applicatives (calcul effectué sur les séries de débit avec une granularité de 1 ms et pour la gamme d'échelles représentée par les octaves > 10)

récent : E-donkey) nous pouvons noter deux niveaux différents de LRD pour chaque sous-classe considérée dans le trafic de la famille P2P (cf. les figures 3(a) et 3(b) où  $LRD(Kazaa) > LRD(E-donkey)$ ). Ces valeurs de LRD sont fonctions du degré de queue-lourde de la distribution de leur taille de flux. En effet, la figure 3(c) met en évidence le principe de E-donkey et son impact sur le trafic : cette application découpe les très longs flux en plus petits flux (appelés “mini-éléphants” par [2]) et ainsi la distribution de la taille de flux est réellement moins lourde que celle de Kazaa.

Taille du flux (MOctets)	Volume total (GOctets)	Pourcentage du Volume total (%)	Niveau de LRD (H)
> 0	43,4	100 %	0.855
Entre 1 et 10	6,56	15,1 %	0.814
Entre 10 et 50	5,34	12,3 %	0.834
Entre 50 et 100	1,91	4,4 %	0.873
Entre 100 et 300	5,39	12,4 %	1.03
> 300	14,1	32,5 %	1.07

TAB. 4: Contribution de la taille des flux sur la LRD du trafic éléphant pour l'ensemble des familles applicatives (calcul effectué sur les séries de débit avec une granularité de 1 ms et pour la gamme d'échelles représentée par les octaves > 10)

## 5 Conclusion

Dans nos travaux futurs, nous allons étendre ces résultats de caractérisation pour tous les types de famille d'application. Ainsi, nous allons appliquer cette méthode basée sur une décomposition en fonction du volume sur chaque type de famille de trafic présentées dans la section 3. D'autre part, nous aurons à analyser en détail les résultats basés sur la décomposition de niveau applicatif, pour ainsi caractériser en détail les autres familles de trafic. Nous attendons de ce travail de caractérisation et d'analyse qu'il nous fournisse des informations intéressantes pour permettre le développement d'architectures et de protocoles permettant de mieux gérer ces flux, pour réduire la LRD et la variabilité du trafic et ainsi optimiser l'utilisation des ressources réseaux et la QoS. Par exemple, nous avons déjà pu confirmer que segmenter les très longs flux applicatifs (comme le fait E-donkey) est une approche appropriée pour réduire la LRD dans l'Internet.

## Références

- [1] P. Abry and D. Veitch, *Wavelet Analysis of Long Range Dependent Traffic*, Transaction on Information Theory, Vol.44, No.1, January 1998.
- [2] N. Ben Azzouna and F. Guillemin, *Analysis of ADSL traffic on an IP backbone link*, In Proc. Globecom 2003, San Francisco, December 2003.
- [3] J. Cleary, S. Donnelly, I. Graham, A. McGregor and M. Pearson, *Design principles for accurate passive measurement*, PAM (Passive and Active Measurements) Workshop, Hamilton, New Zealand, April 2000.
- [4] P. Owezarski, N. Larrieu, *Internet traffic characterization – An analysis of traffic oscillations*, 7th IEEE International Conference on High Speed Networks and Multimedia Communications (HSNMC'2004), Toulouse, France, July 2004.
- [5] K. Park, G. Kim, M. Crovella, *On the relationship between file sizes, transport protocols, and self-similar network traffic*, IEEE ICNP, 1996.
- [6] K. Park, G. Kim and M. Crovella, *On the Effect of Traffic Self-similarity on Network Performance*, SPIE International Conference on Performance and Control of Network Systems, November, 1997.
- [7] W. Willinger, M. Taqqu, R. Sherman and D. Wilson, *Self-similarity through highvariability: statistical analysis of Ethernet LAN traffic at the source level*, In ACM Sigcomm'95, pages 100–113, 1995.

# Détection d'attaques de « Dénis de Services » : ruptures dans les statistiques du trafic

Pierre BORGNAT<sup>1</sup>, Nicolas LARRIEU<sup>2</sup>, Patrice ABRY<sup>1</sup>, Philippe OWEZARSKI<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Physique (UMR CNRS 5672) de l'École normale supérieure de Lyon  
46, allée d'Italie 69364 Lyon Cedex 07, France

<sup>2</sup> Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS-CNRS)  
7, avenue du Colonel Roche 31077 Toulouse Cedex 4, France

Pierre.Borngnat@ens-lyon.fr, nlarrieu@laas.fr, Patrice.Abry@ens-lyon.fr, owe@laas.fr

**Résumé** – Nous étudions les anomalies de trafic sur l'internet induites par le déclenchement d'une attaque de déni de service distribué, à partir d'une expérience où nous collectons le trafic à l'entrée du réseau local ciblé. L'étude concerne la caractérisation conjointe des statistiques d'ordre 1 (marginale) et 2 (covariance) du trafic agrégé. Les propriétés de mémoire longue du trafic ne sont pas sensiblement modifiées par l'occurrence de l'attaque, alors que les marginales des séries agrégées, correctement décrites par des lois gamma dont les paramètres évoluent continûment avec le niveau d'agrégation, portent la signature de l'attaque qui est une modification significative induite sur leur évolution à travers les échelles.

**Abstract** – We are studying anomalies of the Internet traffic caused by a Distributed Denial of Services (DDoS) attack, through an experiment we have done where we collect the traffic incoming on the target. The study proposes a joint characterisation of the 1<sup>st</sup> (marginal) and 2<sup>nd</sup> (covariance) order statistics of the aggregated process. The long memory, characterised by a wavelet approach, is not affected by the DoS whereas the parameters of a gamma model that fits well the marginals are: their evolution with the scale of aggregation is significantly modified by the attack and this is interpreted as a relevant statistical signature of the DoS.

## 1 Expérience d'analyse de trafic internet en présence d'anomalies illégitimes

### 1.1 Motivations

L'internet est un réseau de communication qui sert à véhiculer un grand nombre d'applications et est employé par un grand nombre d'utilisateurs. Il est soumis par conséquent à de fortes variations de trafic, certaines légitimes (variations journalières, affluence massive soudaine sur un site, de type *flash crowd* ou par effet *slashdot*, etc.) et d'autres illégitimes telles que les attaques contre un serveur. Dans le cadre du projet METRO-SEC nous étudions les anomalies de trafic et leurs signatures statistiques avec comme objectif de les caractériser, de savoir les détecter, de les prévenir et de défendre le réseau, contre les anomalies illégitimes en particulier. Le présent travail est consacré au premier aspect : caractériser une de ces anomalies illégitimes de trafic parmi les plus fréquentes, l'attaque de type « déni de service distribué », ou DDoS (pour *Distributed Deny of Service*) [6]. La détection d'anomalies à travers les statistiques du trafic a été abordée par le biais des caractéristiques spectrales [3, 6], de la covariance [7], ou de décompositions en ondelettes [2, 8]. Nous développons dans ce travail une description des données par une analyse multirésolution des statistiques d'ordre 1 et 2 du trafic. Nous décrivons d'abord les conditions expérimentales de réalisation de cette attaque et l'acquisition de traces de trafic à cette occasion, puis le modèle statistique employé et les paramètres multi-échelles qui apparaissent significatifs pour caractériser cette anomalie de trafic.

### 1.2 Attaque DDoS et collecte du trafic

Nous avons initié et contrôlé une attaque DDoS par TCP, consistant à inonder, de façon concertée à partir de plusieurs machines sources, une machine cible de paquets SYN-TCP (demande d'ouverture de connexion) — c'est le mécanisme du SYN *flooding*. Dans notre cas, 4 sites distants (université de Mont de Marsan, LIP6 de Paris, université de Coimbra au Portugal et un client situé sur une plaque ADSL parisienne) ont fourni des attaquants contre une machine située dans le réseau local de recherche du LAAS-CNRS, Toulouse. Le trafic complet (trafic de l'attaque ajouté au trafic usuel) est capturé paquet par paquet par l'intermédiaire de sondes DAG de métrologie passive [4]. Dans ce travail, nous nous concentrons en particulier sur l'analyse d'une trace enregistrée le 10 décembre 2004, mais d'autres expériences ont été réalisées.

**Série temporelle étudiée.** La trace s'étend sur  $59 \cdot 10^3$ s (soit 16h20) et se découpe en trois zones. L'attaque commence  $8,5 \cdot 10^3$ s (2h20) après le début de la mesure et dure  $22,5 \cdot 10^3$ s (6h15). La capture continue ensuite pendant  $28 \cdot 10^3$ s, mesurant alors le trafic de nuit, moins intense. La série temporelle analysée est le trafic agrégé pendant des intervalles de temps successifs de durée  $\Delta$ . On étudie donc le nombre de paquets comptés durant  $\Delta$  au temps  $k \in \mathbb{Z}$ , noté  $X_\Delta(k)$ . La figure 1 (en haut) présente cette trace agrégée avec  $\Delta = 30$ s. Elle se décompose visuellement clairement en 3 zones (avant, pendant et après l'attaque) et met en évidence l'augmentation du nombre de paquets circulant pendant l'attaque. Il est remarquable cependant de comparer sur la figure 1 la même série

agrégée à deux échelles très différentes  $\Delta = 30\text{s}$  et  $\Delta = 1\text{ms}$ . Alors que la première met clairement en évidence la non-stationnarité de la trace, du fait de l'occurrence de l'attaque ou d'augmentations spontanées du trafic, dans la seconde, agrégée à la résolution de 1ms qui correspond davantage à l'échelle de temps pertinente d'analyse et modélisation du trafic, ces non-stationnarités sont nettement moins faciles à déceler visuellement. Nous avons vérifié dans la suite que, pour chaque zone sur des périodes plus courtes (entre 1 et 30 minutes), les séries des  $X_\Delta$  sont empiriquement, et raisonnablement, stationnaires, au sens où les paramètres statistiques étudiés dans la suite ne changent pas significativement.

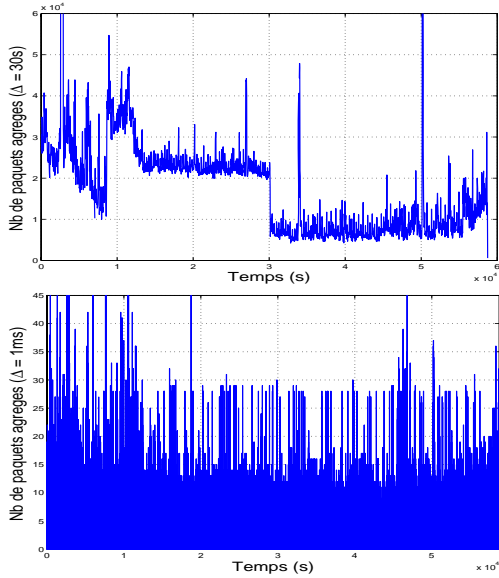


FIG. 1 – **Séries temporelles** obtenues en agrégeant le nombre de paquets dans des boîtes temporelles successives de taille  $\Delta = 30\text{s}$  (haut) ou  $\Delta = 1\text{ms}$  (bas).

Nous cherchons une signature de l'attaque dans une modification des statistiques du flux de trafic et il est naturel de s'intéresser d'abord aux propriétés statistiques aux deux premiers ordres : la distribution marginale et la covariance. Il est de plus maintenant bien établi que les traces Internet sont caractérisées par une propriété de mémoire longue, ou plus généralement par des caractéristiques multi-échelles [10]. Nous nous attachons donc à étudier les propriétés statistiques jusqu'à l'ordre 2 sur une large gamme de temps de mesure, par exemple en variant  $\Delta$ .

## 2 Caractérisation des statistiques d'ordre 1 et 2 du trafic en présence de DDoS

### 2.1 Covariance et mémoire longue.

La propriété de mémoire longue des traces Internet se retrouve dans la covariance de  $X_\Delta$ . Elle est particulièrement bien mise en évidence et analysée à travers une décomposition en ondelettes qui réalise une représentation sur des temps d'agrégation croissants. Notons

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi_0(2^{-j}t - k) \quad \text{et} \quad \phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \phi_0(2^{-j}t - k),$$

les dilatées et translatées sur la grille dyadique de, respectivement, une ondelette mère de référence  $\psi_0$  et la fonction d'échelle qui lui est associée  $\phi_0$  [9]. On note alors  $d_X(j, k) = \langle \psi_{j,k}, X_\Delta \rangle$  et  $a_X(j, k) = \langle \phi_{j,k}, X_\Delta \rangle$  les coefficients d'ondelettes et d'approximations. Remarquons que la série des coefficients d'approximation  $a_X(j, k)$  se lit moralement comme la série agrégée  $X_{\Delta_j}(k)$  avec  $\Delta_j = 2^j \Delta$ . Si la paire  $\psi_0, \phi_0$  choisie définit l'ondelette de Haar, cette équivalence qualitative devient exacte :  $X_{2^j \Delta}(k) = a_X(j, k)$ . Varier le niveau d'agrégation  $\Delta$  dans l'analyse revient donc essentiellement à faire une analyse multirésolution des données.

Le spectre  $S_X$ , ou la covariance de  $X_\Delta$ , sont reliés aux coefficients d'ondelettes par [1] :

$$\mathbb{E}\{d_X(j, k)^2\} = \int S_X(\nu) 2^j |\Psi_0(2^j \nu)|^2 d\nu,$$

où  $\Psi_0$  désigne la transformée de Fourier de  $\psi_0$  et  $\mathbb{E}$  l'espérance mathématique. La moyenne temporelle  $1/n_j \sum_{k=1}^{n_j} |d_X(j, k)|^2$ , notée  $S_j$ , estime la moyenne d'ensemble  $\mathbb{E}\{d_X(j, k)^2\}$ . On trace ensuite le diagramme log-échelle :  $\log_2 S_j$  en fonction de  $\log_2 2^j = j$ . Dans ce diagramme, la longue mémoire se matérialise par l'apparition d'un segment de droite dans la limite des grandes échelles ( $j$  grand). Les performances attendues pour l'estimation par cette méthode ont déjà été discutées ailleurs [1].

La figure 2 (en haut) compare les diagrammes log-échelles obtenus, pour  $\Delta = 1\text{ms}$ , sur des portions de trace (choisies parce que stationnaires) d'une heure environ, avant, pendant et après l'attaque. Ces diagrammes se superposent quasiment, indiquant ainsi que la structure de dépendance statistique n'est pas notablement modifiée par l'occurrence de l'attaque. La longue mémoire notamment, patente par l'alignement des diagrammes des droites pour les grands  $j$ , ne disparaît pas et n'est pas non plus modifiée sensiblement ni dans le sens d'une augmentation ni dans celui d'une diminution de son paramètre.

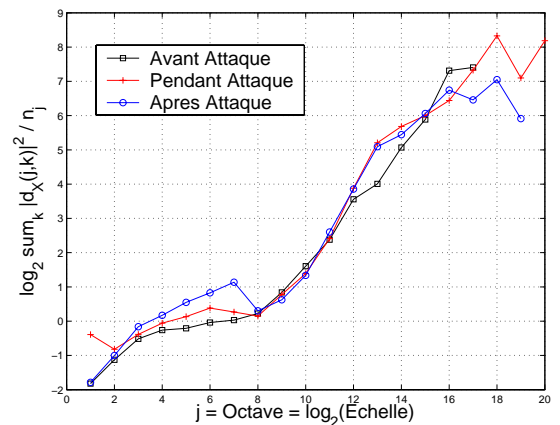


FIG. 2 – **Diagramme log-échelles**. L'occurrence de l'attaque ne modifie pas sensiblement les diagrammes donc la structure de covariance des données. La longue mémoire notamment n'est pas affectée.

### 2.2 Lois marginales.

Du fait de l'arrivée ponctuelle (paquet par paquet) du trafic, on s'attend à ce que la loi marginale passe d'un comportement exponentiel ou Poisson à petit temps d'agrégation  $\Delta$ , à



un comportement proche du gaussien à grand  $\Delta$ . Les lois marginales des coefficients d'approximations  $a_X(j, k)$  en fonction de l'échelle  $j$ , donc, comme déjà dit, en fonction du niveau d'agrégation  $\Delta_j$ , révèlent cet aspect. Une étude parallèle nous indique que les lois des coefficients d'ondelettes  $d_X(j, k)$  sont moins pertinentes pour cette étude. Empiriquement, la famille des lois gamma fournit un modèle raisonnable des marginales des  $a_X(j, k)$ , pour les différents niveaux d'agrégation  $j$ . Rappelons qu'une loi  $\Gamma_{\alpha, \beta}$  est définie par [5]

$$\Gamma_{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{\beta \Gamma(\alpha)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right),$$

où  $\Gamma(u)$  est la fonction gamma. Elle dépend d'un paramètre de forme  $\alpha$  et d'un paramètre d'échelle  $\beta$ . Sa moyenne est  $\mu = \alpha\beta$  et sa variance  $\sigma^2 = \alpha\beta^2$ . L'inverse du paramètre de forme,  $1/\alpha$ , indique la distance entre cette loi et la gaussienne. Par exemple, l'asymétrie et la kurtosis (moments relatifs d'ordre 3 et 4) se comportent respectivement en  $2/\sqrt{\alpha}$  et  $3 + 6/\alpha$ .

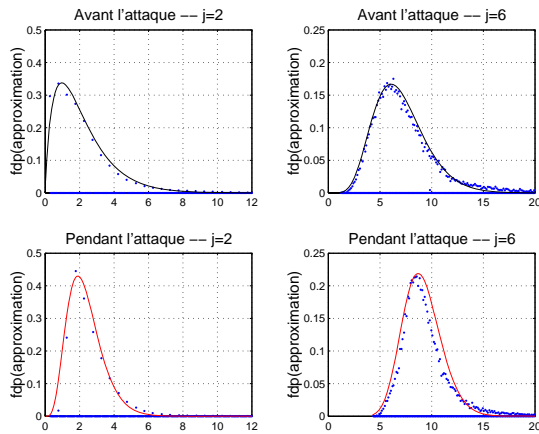


FIG. 3 – **Estimation et modèles des lois des  $a_X(j, k)$ .** Les lois marginales de  $a_X(j, k)$ , estimées sur une tranche de 30 minutes, sont tracées avant et pendant l'attaque, à  $j = 2$  et  $j = 6$ . L'histogramme expérimental est superposé au modèle en loi gamma utilisé ici.

**Estimation des paramètres à travers les échelles.** Sur des périodes de temps assez courte pour que la série reste stationnaire (pour des critères empiriques), nous estimons les paramètres  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\beta}$  qui permettent de modéliser la loi de  $X_\Delta$  par une loi gamma. L'analyse a été conduite sur des périodes de temps allant de 1 à 30 minutes ; ici on montre les résultats pour des tranches de 15 minutes. La méthode classique du maximum de vraisemblance est utilisée pour chaque niveau d'agrégation  $j$ , soit un temps  $\Delta_j$ . L'accord du modèle avec les lois marginales expérimentales des traces est illustré sur la figure 3. Ce modèle est valable avec et sans anomalie de trafic : pendant l'attaque ou avant et après. Les mesures livrent donc une évolution à travers les échelles  $\hat{\alpha}(j)$  et  $\hat{\beta}(j)$  et c'est l'évolution qui est intéressante. La zone pertinente se développe sur les échelles  $1 \leq j \leq 8$ , c'est-à-dire pour des  $\Delta_j$  de 1 ms à 0,3 s. Ce sont des temps plus courts que la zone dans laquelle la longue mémoire existe (au-delà de  $j = 9$ , soit à partir de 0,5 s environ).

La fiabilité de l'estimation de  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\beta}$  a été testée à l'aide de tests statistiques usuels. En fait, comme on dispose de générateurs de séries temporelles ayant des lois gamma comme marginales

et une covariance avec de la longue mémoire [11], il a été possible de vérifier que la méthode classique d'estimation reste valable avec de telles corrélations à temps long.

**Constations empiriques.** Pour caractériser l'occurrence de l'anomalie, nous ne cherchons pas un changement dans les valeurs prises par ces paramètres à un niveau d'agrégation  $j$  fixé *a priori*, mais dans leur évolution en fonction de l'échelle  $j$  (ou le temps d'agrégation  $\Delta_j$ ). Notons que les lois gamma sont stables par addition : soient  $X_i$  and  $i = 1, 2$  deux variables aléatoires indépendantes de loi  $\Gamma_{\alpha_i, \beta}$ , leur somme  $X = X_1 + X_2$  suit une loi  $\Gamma_{\alpha_1 + \alpha_2, \beta}$ . L'agrégation réalise

$$X_{2\Delta}(k) = X_\Delta(2k) + X_\Delta(2k + 1).$$

Ainsi, si il n'y avait pas de dépendance d'un temps à l'autre, on s'attendrait à ce que  $\alpha$  augmente linéairement avec  $\Delta$  et que  $\beta$  reste constant. Nous montrons sur la figure 4 que  $\hat{\alpha}(j)$  et  $\hat{\beta}(j)$  ne suivent pas ces comportements : cela caractérise les dépendances temporelles fortes dans le trafic.

La figure 4 met en évidence que les estimées des moyennes  $\hat{\mu}(j)$  et variances  $\hat{\sigma}^2(j)$  des traces en fonction de l'échelle ne sont pas des caractéristiques significatives de l'attaque. La variabilité intrinsèque du trafic suffit à provoquer de fortes variations des paramètres et l'augmentation suit des lois similaires qu'il y ait une anomalie ou non ; le trafic de jour avant l'attaque et celui pendant l'attaque suivent des comportements analogues pour ces paramètres qui ne décrivent qu'un trafic chargé (alors qu'il est plus faible la nuit, après la DDoS). Au contraire, nous observons que les évolutions selon  $j$  des  $\hat{\alpha}(j)$  et  $\hat{\beta}(j)$  diffèrent notablement entre les portions avec et sans attaque. En condition de trafic normal, le paramètre de forme  $\hat{\alpha}$  n'augmente pas à petite échelle mais reste constant jusqu'à  $\Delta \simeq 20$  ms ; puis il croît comme  $\log_2 \Delta$ . Le paramètre d'échelle  $\hat{\beta}$  évolue comme une loi de puissance sur toute la gamme d'échelle. Lors de l'anomalie,  $\hat{\alpha}(j)$  subit une forte augmentation dès les petites échelles sans rester jamais constant. Parallèlement,  $\hat{\beta}(j)$  suit un changement inverse : il diminue entre  $\Delta \simeq 1$  ms et  $\Delta \simeq 30$  ms, là où il devrait être croissant en trafic normal.

## 3 Discussion

### 3.1 Interprétation

La rupture de trafic causée par la DDoS trouve ici sa signature dans le changement des lois marginales mais pas dans la longue mémoire de la corrélation. Les noms de *forme* et d'*échelle* pour les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  conviennent en fait à la description de ces changements quand l'attaque survient. Une première interprétation s'appuie sur  $1/\alpha$  qui, on le rappelle, donne la distance entre la loi  $\Gamma_{\alpha, \beta}$  et la loi gaussienne. Par agrégation,  $\alpha$  augmente en cas de trafic normal. Ici l'attaque accélère la convergence vers une distribution gaussienne des traces et réduit l'*échelle* des fluctuations autour du trafic moyen.

Pour une interprétation plus poussée, on remarque que les cas où l'histogramme des  $a_X$  n'est pas nul en zéro (ou tend vers 0 en 0) sont typiques du trafic sans attaque et conduit à un facteur de forme  $\alpha$  peu élevé mais une variance grande, et donc un  $\beta$  qui peut être grand (selon les fluctuations naturelles du trafic). D'un autre côté, les cas où l'histogramme s'annule

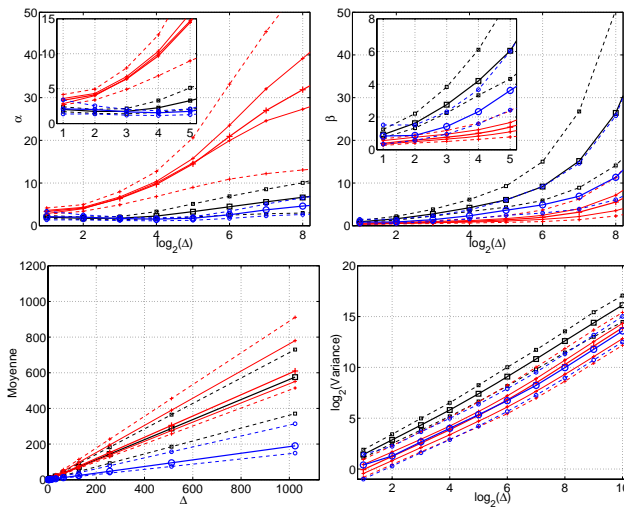


FIG. 4 – **Paramètres des lois marginales.** En haut : évolution en fonction de l'échelle de  $\hat{\alpha}(j)$  et  $\hat{\beta}(j)$  sur des tranches de 15 min, avant (carrés noirs), pendant (croix rouges) et après (cercles bleus) l'attaque. On montre l'évolution moyenne (traits épais) sur ces tranches et les valeurs extrêmes de l'évolution (pointillés) ainsi que deux exemples typiques d'évolution pendant la DDoS (traits fins) estimée sur 15 min. En bas : évolution de la moyenne (axes linéaires,  $\Delta$  en s) et de la variance (axes log-log), représentées avec les mêmes conventions.

pour des valeurs inférieures à un seuil non nul est typique de l'attaque car le temps maximal d'inter-arrivée entre paquets est alors imposé par le SYN *flooding*. Cela conduit à une croissance constante et rapide de  $\alpha(j)$  en fonction de  $j$  mais aussi à une dispersion (et donc un  $\beta(j)$ ) faible et bloquée à court temps d'agrégation. L'attaque impose donc son rythme et supprime les fluctuations statistiques du trafic normal qui admettait des longs temps d'inter-connections, c'est-à-dire la possibilité de durées éventuellement longues durant lesquelles le nombre moyen de paquets reste très bas.

### 3.2 Perspectives

Nous avons analysé une signature de l'attaque par DDoS dans les statistiques du trafic. Plusieurs questions sont ouvertes par ce travail. La première est de savoir si cette signature, qui discrimine le trafic avec anomalie du trafic normal, existe aussi quand la rupture est légitime du fait d'un afflux important de trafic. Des premiers tests sur des expériences de *flash crowd*, où une centaine d'utilisateurs se sont connectés en même temps sur un serveur *www*, montrent que ce n'est pas le cas. Pour une telle anomalie légitime, c'est le diagramme log-échelle qui est modifié (pour des temps caractéristiques de l'utilisateur, autour de 1s) alors que l'évolution des paramètres de la loi marginale ne sont pas sensiblement affectés. Nous prévoyons de valider la pertinence de nos observations sur d'autres scénarios d'attaque, en classifiant différentes conditions de trafic normaux puis plusieurs types d'anomalies par cette démarche d'analyse des statistiques d'ordre 1 et 2.

Une deuxième perspective est de développer une stratégie de détection d'attaque, susceptible de déclencher une alerte dans un délai aussi réduit que possible. Pour cela nous étudions comment formuler un test statistique de changement des paramètres

de la loi marginale à partir des constatations reportées ici. Un premier élément en faveur de cette extension est que les caractéristiques restent similaires si on estime les paramètres sur des tranches d'une minute seulement. Dans ces conditions, on peut envisager de mettre en œuvre une détection sur un horizon de quelques minutes, ce qui est un temps raisonnable pour des protocoles de défense du réseau.

Enfin nous travaillons à intégrer la non-stationnarité normale du trafic, due aux variations légitimes et attendues, dans la caractérisation statistique en allant au-delà d'une vérification empirique de la stationnarité sur des périodes courtes.

**Remerciements.** Ce travail a été mené dans le cadre du projet METROSEC de l'ACI Sécurité & Informatique. Nous remercions L. Gallon (LIUPPA, Université de Mont de Marsan) et L. Bernaille (LIP6, Paris) pour l'aide apportée dans la mise en place de l'attaque.

### Références

- [1] P. Abry, P. Flandrin, M.S. Taqqu, and D. Veitch. Wavelets for the analysis, estimation and synthesis of scaling data. In K. Park and W. Willinger, editors, *Self-Similar Network Traffic and Performance Evaluation*. Wiley, 2000.
- [2] P. Barford, J. Kline, D. Plonka, and A. Ron. A signal analysis of network traffic anomalies. In *ACM/SIGCOMM Internet Measurement Workshop*, Marseille, France, 2002.
- [3] C-M. Cheng, H.T. Kung, and K-S. Tan. Use of spectral analysis in defense against DoS attacks. In *IEEE Globecom*, Taipei, Taiwan, 2002.
- [4] J. Cleary, S. Donnelly, I. Graham, A. McGregor, and M. Pearson. Design principles for accurate passive measurement. In *PAM (Passive and Active Measurements) Workshop*, Hamilton, New Zealand, April 2000.
- [5] M. Evans, N. Hastings, and B. Peacock. *Statistical Distributions*. Wiley (Interscience Division), June 2000.
- [6] A. Hussain, J. Heideman, and C. Papadopoulos. A framework for classifying Denial of Service attacks. In *Proc. of SIGCOMM'03*, Karlsruhe, Germany, 2003.
- [7] S. Jin and D. Yeung. A covariance analysis model for DDoS attack detection. In *IEEE International Conference on Communications*, Paris, France, June 2004.
- [8] L. Li and G. Lee. DDoS attack detection and wavelets. In *International Conference on computer communications and networks*, August 2003.
- [9] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, Boston, 1998.
- [10] K. Park and W. Willinger. Self-similar network traffic : An overview. In K. Park and W. Willinger, editors, *Self-Similar Network Traffic and Performance Evaluation*, pages 1–38. Wiley (Interscience Division), 2000.
- [11] A. Scherrer and P. Abry. Marginales non gaussiennes et longue mémoire : analyse et synthèse de trafic internet. In *Colloque GRETSI-05*, Louvain-la-Neuve, Belgique, 2005.

# Suivi des mouvements faciaux et de la pose 2D d'un visage

Soumya HAMLAOUI, Franck DAVOINE,

Laboratoire HEUDIASYC, UMR - CNRS 6599 / Université de Technologie de Compiègne  
BP 20529, 60205 Compiègne Cedex, France

Soumya.Hamlaoui@hds.utc.fr, Franck.Davoine@hds.utc.fr

**Résumé** — Nous considérons dans cet article le problème du suivi de la pose et des mouvements faciaux d'un visage faisant face à une caméra. Pour cela, nous proposons une approche stochastique reposant sur le filtrage particulaire où la distribution des observations est dérivée soit d'un modèle d'apparence actif, soit d'un modèle d'apparence calculé en ligne. L'évolution du système d'état est décrite par une dynamique guidée par une recherche déterministe. Le nombre de particules est ajusté aux besoins effectifs du suivi à chaque pas temporel; cet ajustement permet l'optimisation du temps de calcul du filtre. La prise en compte d'une mesure robuste permet d'augmenter la robustesse du suivi lorsque le visage est partiellement occulté. L'article se termine par la présentation de résultats expérimentaux validant l'intérêt des méthodes de suivi reposant sur les deux modèles d'observation proposés.

**Abstract** — In this paper, we consider the problem of tracking the global motion of a face as well as the local motion of its inner features. In this view, we propose a stochastic approach based on a particle filtering scheme. The observations distribution is derived from an active appearance model, or from an "on-line" estimated appearance model. The dynamics describing the state system evolution are guided by a deterministic research. The particles number is adjusted to the effective needs of the tracking at each time step; this adjustment allows an optimization of the computing time. We also use a robust distance measure which increases the tracking robustness when the face is partially occulted. Experimental results are presented to validate the tracking methods based on the two suggested observation models.

## 1 Introduction

Cet article traite de la problématique du suivi de la pose 2D ainsi que des mouvements faciaux d'un visage faisant face à une caméra, dans une séquence vidéo. La pose 2D est définie par : la position, le facteur d'échelle et l'angle de rotation du visage dans le support image. Les mouvements faciaux correspondent aux variations d'apparence (texture et forme) du visage. Nous proposons pour cela une approche basée sur l'algorithme de Condensation [4]. La distribution des observations considérée est dérivée soit d'un modèle d'apparence actif [1], soit d'un modèle d'apparence calculé en ligne. La dynamique des particules est adaptative dans le sens où elle est guidée par une recherche déterministe autour de l'hypothèse optimale prédite. Cette recherche correspond à une adaptation automatique du modèle d'apparence actif par une méthode itérative de type *descente de gradient*. Contrairement à l'algorithme de Condensation classique, à chaque pas temporel, le nombre de particules considéré est adapté aux besoins effectifs du suivi proportionnellement à une distance estimée entre l'hypothèse d'état optimale à l'instant précédent et sa prédiction à l'instant courant. Cet ajustement permet de réduire les coûts de calcul. Dans le but d'assurer la robustesse du suivi au cours d'une occultation partielle du visage, le modèle d'observation considère une mesure robuste [3]. Celle-ci permet de minimiser la contribution des pixels aberrants n'appartenant pas au visage, dans l'estimation de la vraisemblance et par conséquent dans l'approximation de la densité de probabilité a posteriori. La première section est dédiée à introduire le

modèle d'apparence ainsi que l'algorithme de Condensation. Une description plus explicite de l'approche proposée est présentée dans la deuxième section, où nous détaillons le modèle dynamique ainsi que les deux modèles d'observations proposés. Nous présentons en troisième section les résultats expérimentaux obtenus.

## 2 Outils

### 2.1 Modèle d'apparence actif

Le modèle d'apparence actif [1] est une représentation statistique linéaire des variations d'apparence de la classe des visages. Cette représentation est obtenue par une Analyse en Composantes Principales (ACP) d'un ensemble de formes  $\mathbf{s}$  et de textures  $\mathbf{g}$  :

$$\mathbf{s}^i = \mathbf{s}_m + \phi_s \mathbf{b}_s^i \quad \mathbf{g}^i = \mathbf{g}_m + \phi_g \mathbf{b}_g^i \quad (1)$$

$\mathbf{s}_m$ ,  $\mathbf{g}_m$  représentent la forme et la texture moyennes,  $\phi_s$ ,  $\phi_g$  sont les vecteurs propres des matrices de covariance de forme et texture, et  $\mathbf{s}^i$ ,  $\mathbf{g}^i$  représentent respectivement une forme et une texture reconstruites. Une troisième ACP est alors appliquée sur le vecteur  $\mathbf{b}^i$ , obtenu par concaténation des composantes principales de forme et de texture ( $\mathbf{b}_s^i, \mathbf{b}_g^i$ ) correctement pondérées, afin d'obtenir le vecteur  $\mathbf{c}$  du modèle d'apparence combiné :  $\mathbf{b}^i = \phi_c \mathbf{c}^i$ .

De nouvelles instances de forme  $\mathbf{s}_{modele}$  et de texture  $\mathbf{g}_{modele}$  peuvent alors être générées à partir d'un vecteur  $\mathbf{c}$  :

$$\mathbf{s}_{modele}(\mathbf{c}) = \mathbf{s}_m + \mathbf{Q}_s \mathbf{c} \quad \mathbf{g}_{modele}(\mathbf{c}) = \mathbf{g}_m + \mathbf{Q}_g \mathbf{c} \quad (2)$$

La procédure d'adaptation de type *descente de gradient* (permettant d'adapter automatiquement le modèle d'appa-

rence à un visage cible) se base sur une recherche itérative du pas optimal à appliquer sur les paramètres d'une certaine configuration de pose et de vecteur  $\mathbf{c}$  afin de minimiser le résidu  $\mathbf{r}(\mathbf{q})$  entre la texture extraite à cette configuration dans l'image et celle du modèle :

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}) = \delta\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{g}_{image}(\mathbf{q}) - \mathbf{g}_{modele}(\mathbf{q}) \quad (3)$$

$\mathbf{q}$  est le vecteur de paramètres du modèle combiné et/ou des paramètres de pose. L'adaptation automatique du modèle à un visage cible est assurée par un algorithme de type descente de gradient [1]. Le but est de rechercher le  $\delta\mathbf{q}$  à appliquer afin de minimiser la norme  $L_2$  du résidu de texture  $\|\mathbf{r}(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q})\|^2$ . Le développement limité de Taylor au premier ordre nous permet d'écrire :

$$\mathbf{r}(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}) = \mathbf{r}(\mathbf{q}) + \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{q}}\right)\delta\mathbf{q} \quad (4)$$

En mettant l'équation (4) à zéro, on obtient la solution suivante :

$$\delta\mathbf{q} = -\mathbf{R}\mathbf{r}(\mathbf{q}) \quad (5)$$

où la matrice  $\mathbf{R}$  est considérée fixe et prédéfinie lors de la construction du modèle d'apparence actif :

$$\mathbf{R} = \left( \left( \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{q}} \right)^T \left( \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{q}} \right) \right)^{-1} \left( \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{q}} \right)^T \mathbf{r}(\mathbf{q}) \quad (6)$$

## 2.2 Algorithme de Condensation

L'algorithme de Condensation [4] est basé sur les méthodes séquentielles de Monte Carlo connues aussi sous le nom de filtrage particulaire [2]. Il permet d'approcher, à chaque pas temporel  $t$ , la distribution de probabilité a posteriori  $P(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t})$  de l'état caché du visage  $\mathbf{x}_t$  par une distribution empirique d'un système de particules, où chaque particule est une hypothèse d'état pondérée [5]. Il consiste à propager l'ensemble des particules selon un modèle dynamique  $P(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})$  et à pondérer chaque particule proportionnellement à sa vraisemblance  $P(\mathbf{z}_t|\mathbf{x}_t)$  par rapport aux observations  $\mathbf{z}_{1:t}$ . Une étape de rééchantillonnage permet de privilégier les particules de poids forts susceptibles de représenter significativement la densité de probabilité a posteriori [4]. Une description plus détaillée de l'algorithme de Condensation est donnée dans ce qui suit :

- A  $t = 0$ , générer  $N$  échantillons  $\mathbf{e}_0^{(1)}, \dots, \mathbf{e}_0^{(N)}$  à partir d'une loi de probabilité initiale  $P(\mathbf{x}_0)$  et leur assigner des poids identiques  $\pi_0^{(1)} = \dots = \pi_0^{(N)} = \frac{1}{N}$ . C'est l'étape d'*initialisation* du filtre à particules.

- A chaque pas temporel  $t$ , on dispose de  $N$  particules pondérées  $(\mathbf{e}_{t-1}^{(n)}, \pi_{t-1}^{(n)})$ ,  $n = 1, \dots, N$ . Il s'agit alors de :

1. **Rééchantillonner** les particules : tirer  $N$  fois les particules avec des probabilités proportionnelles à leurs poids, ceci permet de garder uniquement les particules de poids forts.
2. **Prédire** les  $N$  nouvelles particules en échantillonnant à partir du modèle dynamique  $P(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1} = \mathbf{e}_{t-1}^{(n)})$ . C'est l'étape de *prédiction* du filtre.

3. **Pondérer** les particules proportionnellement à leur vraisemblance :

$$\pi_t^{(n)} = \frac{P(\mathbf{z}_t|\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_t^{(n)})}{\sum_{n=1}^N P(\mathbf{z}_t|\mathbf{x}_t = \mathbf{e}_t^{(n)})}$$

l'ensemble des particules pondérées représente une approximation de la densité de probabilité a posteriori. C'est l'étape de *mise à jour* du filtre.

4. **Estimer** l'état optimal  $\hat{\mathbf{x}}_t$  par maximisation de la vraisemblance (MAP) :

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \operatorname{argmax}_{(\mathbf{x}_t)} [P(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t})] \approx \operatorname{argmax}_{(\mathbf{e}_t^{(n)})} [\pi_t^{(n)}]$$

## 3 Approche proposée

Comme notre but consiste à suivre les variations de pose et d'apparence d'un visage, nous considérons un vecteur d'état contenant les quatre paramètres de pose 2D  $\mathbf{p}_t$  ainsi que les paramètres d'apparence  $\mathbf{c}_t$ . Selon notre expérimentation, les quatre premières composantes du vecteur  $\mathbf{c}_t$  sont capables de représenter la majeure-partie des variations d'apparence (95% de la variance). Le vecteur d'état à l'instant  $t$ , noté  $\mathbf{x}_t = [\mathbf{p}_t, \mathbf{c}_t]^T$  est alors de dimension 8.

### 3.1 Modèle dynamique

Nous adoptons un modèle dynamique adaptatif  $P(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})$  en s'inspirant des idées proposées par Zhou et al [6]. Le modèle a la forme suivante:

$$\mathbf{x}_t = \hat{\mathbf{x}}_{t-1} + \mathbf{v}_t + \mathbf{S}_t \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{x}}_t + \mathbf{S}_t \mathbf{u} \quad (7)$$

- $\hat{\mathbf{x}}_{t-1}$  est l'estimation du vecteur d'état à l'instant précédent,
- le vecteur  $\mathbf{v}_t = (\partial\mathbf{p}, \partial\mathbf{c})^T$  correspond à la correction prédite par rapport à la pose et à l'apparence,
- $\mathbf{u}$  est un bruit gaussien de moyenne nulle et de variance unitaire,
- la matrice diagonale  $\mathbf{S}_t = \operatorname{diag}(\sigma_t^{(t_x)}, \dots, \sigma_t^{(c_4)})$  contient les écarts-types des paramètres de pose et d'apparence.

La correction prédite  $\mathbf{v}_t$  est obtenue par adaptation automatique du modèle d'apparence selon une méthode itérative de descente de gradient minimisant un critère résiduel entre la texture modèle et la texture image (§ 2.1) [1].

Nous considérons des écarts-types calculés comme suit :

$$[\sigma_t^{(t_x)}, \dots, \sigma_t^{(c_4)}]^T = R_t[\sigma_0^{(t_x)}, \dots, \sigma_0^{(c_4)}]^T \quad (8)$$

avec

$$R_t = \operatorname{diag}(R_t^{(t_x)}, \dots, R_t^{(c_4)})$$

$\sigma_0^{(t_x)}, \dots, \sigma_0^{(c_4)}$  sont des écarts-types fixes préalablement appris. Les facteurs  $R_t^{(i)}$  associés à chacune des 8 composantes du vecteur d'état sont proportionnels à la valeur  $\sqrt{\varepsilon_t}$  et appartiennent chacun à un intervalle  $[R_{min}^{(i)}, R_{max}^{(i)}]$ :

$$R_t^{(i)} = \max(\min(\sqrt{\varepsilon_t}, R_{max}^{(i)}), R_{min}^{(i)}) \quad (9)$$

où  $\varepsilon_t$  est une mesure de variance correspondant à une erreur de texture moyennée à travers les  $L$  pixels des textures :

$$\varepsilon_t = \frac{2}{L} \sum_{l=1}^L \rho \left( \frac{g_{modele}^l(\tilde{\mathbf{c}}_t) - g_{image}^l(\tilde{\mathbf{p}}_t, \tilde{\mathbf{c}}_t)}{\sigma_l} \right) \quad (10)$$

Lorsque les facteurs  $R_t^{(i)}$  sont importants, les variances de la distribution prédite et par conséquent l'espace d'état à explorer le sont également, et dans ce cas un nombre important de particules est nécessaire. Nous utilisons donc un nombre de particules adaptatif  $N_t$ , obtenu selon l'équation suivante :

$$N_t = N_0 \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 R_t^{(i)} \quad (11)$$

où  $N_0$  est un nombre de particules fixe prédéfini.

### 3.2 Modèle d'observation basé sur le modèle d'apparence actif

Le modèle d'observation permet d'évaluer la vraisemblance en chaque particule. Cette vraisemblance est estimée en comparant :

- la texture image échantillonnée à la pose et forme données par l'hypothèse d'état,  $\mathbf{g}_{image}(\mathbf{p}_t, \mathbf{c}_t)$  (L'espace d'état caché code les paramètres de pose  $\mathbf{p}_t$  et d'apparence  $\mathbf{c}_t$ ),
- et la texture modèle  $\mathbf{g}_{modele}(\mathbf{c}_t)$  donnée par le modèle d'apparence et décrite par l'équation (2).

La fonction de vraisemblance que nous avons adoptée a la forme suivante :

$$P(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t) = C e^{-d[\mathbf{g}_{modele}; \mathbf{g}_{image}]} \quad (12)$$

$C$  est une constante de normalisation de cette distribution. La distance de texture  $d[\cdot]$  est proportionnelle à une fonction d'erreur  $\rho(\cdot)$  sommée sur les  $L$  pixels de texture et pondérée par la déviation standard  $\sigma_l$  en chaque pixel :

$$d[\mathbf{g}; \mathbf{g}'] = \sum_{l=1}^L \rho\left(\frac{\mathbf{g}_l - \mathbf{g}'_l}{\sigma_l}\right) \quad (13)$$

Nous avons choisi une fonction d'erreur  $\rho(\cdot)$  robuste ayant la forme suivante [3] :

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \lambda^2 & \text{si } |\lambda| \leq h \\ h|\lambda| - \frac{1}{2}h^2 & \text{si } |\lambda| > h \end{cases} \quad (14)$$

où  $h$  est un seuil prédéfini à partir duquel l'erreur  $|\lambda|$  est considérée comme aberrante.

### 3.3 Modèle d'observation calculé et mis à jour à la volée

L'efficacité du modèle d'apparence largement prouvée en littérature reste conditionnée par le fait que l'apparence à suivre doit être préalablement apprise et modélisée. Cette modélisation est donc sensible aux conditions d'enregistrement des images d'apprentissage. Afin de remédier à ce problème, nous remplaçons le modèle d'apparence actif (noté  $\mathbf{g}_{modele}$  dans la section précédente) par une apparence de texture adaptative calculée à la volée,  $\mathbf{g}_{volee}$ . Ce nouveau modèle présente une robustesse face aux variations d'illumination, et le suivi est adapté à chaque visage sans être conditionné par un apprentissage préalable de son apparence. Ce modèle  $\mathbf{g}_{volee}$ , initialisé manuellement à l'aide de la texture du visage dans la première image de

la séquence vidéo, est actualisé à chaque instant  $t$  à l'aide de l'équation suivante :

$$\mathbf{g}_{volee}(t) = \alpha \mathbf{g}_{volee}(t-1) + (1-\alpha) \mathbf{g}_{image}(t, \hat{x}_{t-1}) \quad (15)$$

où  $\alpha$  est un facteur d'oubli déterminant l'importance de la mise à jour de la texture modèle.  $\mathbf{g}_{image}(t, \hat{x}_{t-1})$  est la texture image courante estimée d'après l'hypothèse d'état  $\hat{x}_{t-1}$  retenue à  $t-1$ . L'espace d'état caché code les paramètres de pose  $\mathbf{p}_t$  et de forme  $\mathbf{s}_t$  du modèle de visage. La forme  $\mathbf{s}_t$  est ici toujours apprise sur une base de visages expressifs (§ 2.1).

## 4 Résultats expérimentaux

La méthode proposée a été implémentée en C++ et testée sur un PC opérant sous WinXP à 2.4 GHz avec 512 Mb de RAM. Les résultats présentés sont obtenus sur des séquences vidéo contenant un visage vu de face, présentant de larges variations de pose et de mouvements faciaux. Nous avons obtenu des résultats encourageants sur de longues séquences en utilisant le modèle d'observation basé sur le modèle d'apparence actif (FIG. 1).



FIG. 1: Suivi de la pose et des mouvements faciaux, images 085, 366, 615 et 651. Sur chaque image, la forme dessinée correspond à l'état estimé du visage; les textures modèle et image  $\mathbf{g}_{modele}(\mathbf{c}_t)$  et  $\mathbf{g}_{image}(\mathbf{p}_t, \mathbf{c}_t)$  sont présentées dans le coin en bas à droite.  $h = 0.006$

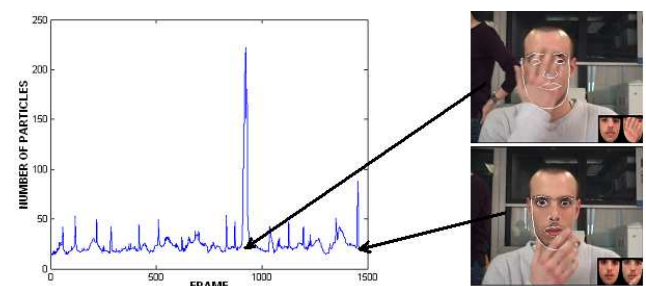


FIG. 2: Evolution du nombre de particules  $N_t$  à travers le temps dans une séquence vidéo présentant des occultations du visage. Une occultation importante du visage à l'image 921 provoque un pic. Le pic provoqué par une occultation partielle à l'image 1400 est cependant moins important.



Pour  $N_0 = 500$ , le nombre de particules  $N_t$  évolue entre 20 et 80, et augmente jusqu'à 220 en cas d'occultation du visage (FIG. 2); le temps de traitement est de 2 images par seconde. La figure 3 illustre le résultat du suivi de l'apparence d'un visage, à partir du modèle calculé *à la volée*. Le facteur d'oubli  $\alpha$  détermine l'importance de la mise à jour de la texture modèle  $\mathbf{g}_{volée}$  par la texture image courante estimée d'après l'hypothèse d'état retenue à l'instant précédent. Afin d'éviter la divergence du suivi dans le cas d'occultation du visage, la valeur du facteur  $\alpha$  doit être bornée. Selon notre expérimentation,  $\alpha \in [0, 0.25]$ .



FIG. 3: Suivi de la pose et des mouvements faciaux utilisant une apparence faciale calculée *à la volée*; images 75, 215, 470 et 1310 extraites d'une séquence vidéo.  $\alpha = 0.2$ ,  $h = 0.006$

Le suivi de la pose et de l'apparence du visage utilisant le modèle calculé *à la volée* a été testé dans une séquence vidéo présentant des occultations du visage. Les résultats obtenus sont encourageants (FIG. 4) dans le sens où le suivi converge vers la bonne configuration du visage lorsque ce dernier est à nouveau visible dans le support image.

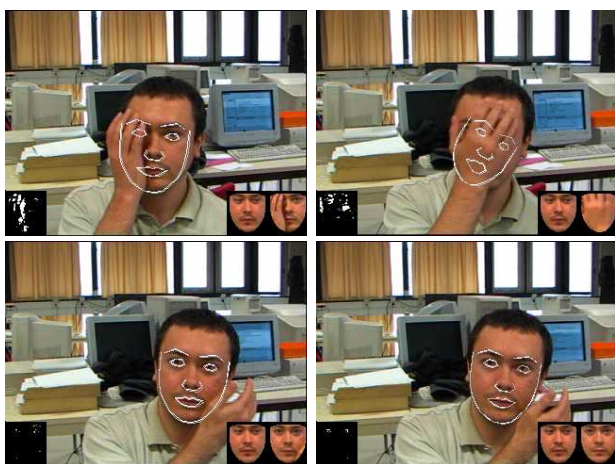


FIG. 4: Suivi de la pose et des mouvements faciaux utilisant le modèle calculé *à la volée* dans une séquence vidéo présentant des occultations du visage; images 52, 54, 56 et 57;  $\alpha = 0.01$ ,  $h = 0.006$ .

Le tableau suivant illustre les valeurs numériques de certains paramètres utilisés pour les deux approches proposées :

	$\sigma_0$	$R_{min}$	$R_{max}$
$t_x$	10	1	50
$t_y$	10	1	50
$s$	0.1	0.01	2
$\theta$	1	-2	2

FIG. 5: valeurs des écarts types initiaux  $\sigma_0$  ainsi que des facteurs  $R_{min}$  et  $R_{max}$ , relatifs à la position en x ( $t_x$ ) et y ( $t_y$ ), au facteur d'échelle  $s$  et à l'angle de rotation  $\theta$  (radian).

## 5 Conclusion et perspectives

Nous proposons dans cet article une approche stochastique permettant de suivre les variations de pose et d'apparence d'un visage quasi frontal dans les séquences vidéo. Cette approche repose sur le principe de filtrage particulaire connu sous le nom d'algorithme de Condensation dans le domaine de vision par ordinateur. La dynamique des particules est adaptative, guidée par une optimisation déterministe. La distribution des observations est dérivée d'un modèle d'apparence actif et estimée en intégrant des mesures robustes. Des résultats sont présentés, notamment en prenant en compte des phases d'occultation du visage. En second lieu nous introduisons une deuxième approche qui consiste à remplacer le modèle d'apparence actif par une apparence de texture mise à jour à la volée (en ligne) afin de remédier à la contrainte de l'apprentissage préalable de l'apparence à suivre et au problème de sensibilité du modèle d'apparence aux conditions d'enregistrement des images d'apprentissage. Les résultats expérimentaux sont également encourageants. Une extension intéressante à ces travaux concerne la reconnaissance de l'évolution des expressions faciales une fois le visage et ses mouvements faciaux déterminés.

## References

- [1] T. F. Cootes, G. J. Edwards et C. J. Taylor. *Active Appearance Models*. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 23(6) pp. 681-685, juin 2001.
- [2] A. Doucet, J. F. G. De Freitas et N. Gordon. *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. Springer-Verlag, 2001.
- [3] P. J. Huber. *Robust Statistics*. Wiley, 1981.
- [4] M. Isard et A. Blake. *Condensation Conditional Density Propagation for Visual Tracking*. Int. Journal of Computer Vision, pp. 5-28, 1998.
- [5] J. McCormick. *Stochastic Algorithms for Visual Tracking*. Springer-Verlag, 2002.
- [6] S. Zhou, R. Chellappa, et B. Moghaddam. *Visual tracking and recognition using appearance-adaptive models in particle filters*. IEEE Trans. on Image Processing, 13(11), pp. 1491-1506, 2004.

# Modélisation, Analyse et Fusion Markovienne Cachée de Multiples Séquences d'Événements : Application en Cartographie IRM Fonctionnelle Cérébrale

Laurent THORAVAL<sup>1</sup>, Sylvain FAISAN<sup>1,2</sup>, Jean-Paul ARMSPACH<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire des Sciences de l'Image, de l'Informatique et de la Télédétection - UMR CNRS 7005  
ENSIS, Bd. Sébastien Brant, 67400 Illkirch, France

<sup>2</sup> Institut de Physique Biologique, Faculté de Médecine - UMR CNRS 7004  
4, Rue Kirschleger, 67085 Strasbourg, France

{thoraval,faisan}@ensis.u-strasbg.fr, armspach@ipb.u-strasbg.fr

**Résumé** – Cet article présente une nouvelle approche de modélisation et d'analyse statistique de processus aléatoires événementiels structurés multiséquences : le modèle markovien caché de multiples séquences d'événements (MMCMSE). Ce modèle répond à différents aspects caractéristiques de ces processus, notamment (i) l'aspect dual caché-observable des séquences d'événements à analyser, (ii) la multiplicité importante des séquences d'événements observées, (iii) le caractère non stationnaire, localisé temporellement de ces événements, (iv) la redondance, la complémentarité et les asynchronismes importants pouvant exister entre événements sur les différents canaux d'observation. Les résultats d'application du MMCMSE en cartographie IRM fonctionnelle du cerveau soulignent clairement les capacités de ce modèle à analyser et à fusionner de multiples séquences corrélées d'événements (neuraux et hémodynamiques) dans l'espace et dans le temps.

**Abstract** – This paper presents a novel statistical approach for the modeling and analysis of structured multiple sequence event-based random processes: the hidden Markov multiple event sequence model (HMMESM). This model accounts for several features of these processes: (i) the hidden-observable aspect of the event sequences to be analyzed, (ii) the high multiplicity of the observed event sequences, (iii) the non stationary, time-localized character of their events, (iv) the redundancy, complementarity, and strong asynchrony that exist between events across sequences. The HMMESM results obtained in functional MRI brain mapping highlight clearly the abilities of these models to analyze and fuse multiple (neural and hemodynamic) correlated event sequences across space and time.

## 1 Introduction

Nombre de processus aléatoires, rencontrés notamment en génie biomédical, se présentent sous la forme d'un processus événementiel structuré caché, observé au travers de multiples séquences corrélées d'événements non stationnaires et localisés dans le temps. Le processus électrophysiologique cardiaque associé aux séquences d'événements P, QRS, T [1], ou celui d'activation neuronale observé au travers de séquences de ruptures de dynamique IRM fonctionnelle [2] en sont deux exemples. Pour de tels processus, une modélisation markovienne cachée (MMC) de la distribution temporelle des événements d'intérêt reste toujours pertinente. Malheureusement, la stationnarité par morceaux que requiert le processus observable d'un MMC s'avère incompatible avec la nature transitoire, non stationnaire des événements observés. D'autre part, le formalisme MMC se prête difficilement à l'analyse simultanée d'un nombre élevé de séquences d'événements. Enfin, il prend difficilement en compte les relations d'occurrence et les asynchronismes importants entre événements sur les différents canaux d'observation. Pour résoudre ces problèmes, nous proposons d'adapter le formalisme MMC en conséquence, en le plaçant dans un cadre de détection-caractérisation d'événements et de fusion-association multicanaux d'événements. Dans ce cadre, une étape de prétraitement détecte, indépendamment sur les différents canaux, les événements d'intérêt. Chaque événement détecté

est caractérisé par une seule et unique observation, relaxant de facto l'hypothèse de stationnarité par morceaux sur le support de ces événements [3]. Les événements détectés sont ensuite associés entre canaux d'observation, sur la base de connaissances acquises sur le processus caché à analyser et de contraintes de causalité entre associations d'événements. La redéfinition du contenu de la séquence d'observations conduit à développer un nouveau type de MMC pour l'analyser : le modèle markovien caché de multiples séquences d'événements (MMCMSE) [4]. En exploitant la redondance et la complémentarité d'événements sur un nombre important de canaux d'observation, le MMCMSE se révèle particulièrement adapté à l'analyse de processus événementiels multiséquences. Pour illustration, les résultats obtenus par ce modèle en cartographie IRM fonctionnelle (IRMf) cérébrale sont particulièrement convaincants. Ils surpassent nettement ceux obtenus par la méthode de cartographie faisant référence dans le domaine [5].

## 2 Le MMCMSE

Un MMCMSE [4] est un double processus stochastique,  $\{X_u, O_u\}$ , adapté à la modélisation et à l'analyse d'un processus événementiel caché observé au travers de multiples séquences d'événements (canaux d'observation).  $\{X_u\}$  modélise la distribution statistique des événements cachés sur l'axe  $u$ . Sa partie observable,  $\{O_u\}$ , modélise les relations entre événements

cachés et observés le long de l'axe temporel  $t$ , ainsi que les caractéristiques court-terme de ces derniers.

## 2.1 Séquences d'événements, Scénario, Séquence d'observations

Dans une approche par MMCMSE, une étape de prétraitement détecte et caractérise les événements observables d'intérêt signant le processus caché à analyser. A tout événement détecté correspond un vecteur daté de mesures caractéristiques. Soit  $E = \{E^{(k)}\}$ ,  $1 \leq k \leq N$ , les  $N$  séquences d'événements détectées sur l'intervalle  $[0, T]$ , et  $\{\tau^{(k)}\}$  le champ d'instant de détection (fig. 1(a)). Alors, par définition, une séquence d'observations  $\mathbf{o}_1 \mathbf{o}_2 \dots \mathbf{o}_U$  d'un MMCMSE résulte de la combinaison du champ  $E$  et d'un scénario valide  $\mathcal{S}$  explicatif de  $E$ . Un scénario est défini comme une suite de  $N + 1$ -tuplets d'instant,  $\{(\tau_u, \tau_u^{(1)}, \dots, \tau_u^{(N)})\}_{1 \leq u \leq U}$ , opérant un découpage temporel du champ  $E$  et du processus caché à son origine (fig. 1(b)).  $\tau_u$  désigne l'instant d'occurrence du  $u$ -ième événement caché, et  $\mathbf{s}_u = \{\tau_u^{(1)}, \dots, \tau_u^{(N)}\}$  sa signature. Cette dernière résulte de la fusion-association d'événements observables détectés ( $\tau_u^{(k)} \in \tau^{(k)}$ ) et de "trous" d'observation ( $\tau_u^{(k)} \notin \tau^{(k)}$ ). Les règles de fusion-association d'événements peuvent être établies à partir des connaissances acquises sur le processus caché à analyser, dans le respect des contraintes de causalité définies par l'ordre temporel des événements cachés. En pratique, plusieurs scénarios valides et explicatifs de  $E$  sont possibles, chacun conduisant à une séquence d'observation particulière. De manière générale, la  $u$ -ième observation de cette séquence,  $\mathbf{o}_u$ , se compose de l'instant caché  $\tau_u$ , de la signature  $\mathbf{s}_u$ , et de tous les événements non significatifs détectés entre  $\mathbf{s}_{u-1}$  et  $\mathbf{s}_u$ , dénotés  $\mathbf{o}_{u-1,u}^*$ , de sorte que  $\mathbf{o}_u = \{\tau_u, \mathbf{s}_u, \mathbf{o}_{u-1,u}^*\}$ .

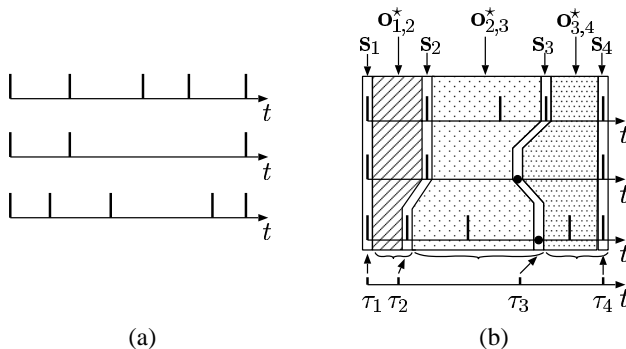


FIG. 1: (a) Représentation schématique d'un champ  $E$  d'événements, composé ici de  $N=3$  séquences d'événements détectés. (b) En superposition du champ  $E$  d'événements apparaît un scénario valide  $\mathcal{S}$ , explicatif de  $E$ , construit sur une suite de  $U=4$  instants cachés  $\tau_u$ .

## 2.2 Eléments d'un MMCMSE, Graphe de dépendance

Un MMCMSE  $\{X_u, \mathbf{O}_u\}$  est entièrement défini par le quadruplet  $\lambda = \{C, A, B, \mathbf{w}\}$ .  $C$  dénote le cardinal de l'espace d'états  $S = \{S_i; 1 \leq i \leq C\}$  du modèle.  $S_1$  et  $S_C$  désignent

les états initial et final du processus caché, auxquels sont associées les signatures fictives  $\mathbf{s}_1$  et  $\mathbf{s}_U$ , respectivement.  $\{X_u\}$  est une chaîne de Markov d'ordre 1, de matrice de transition  $A = \{a_{ij}\}$ , avec  $a_{ij} = P(X_u | X_{u-1})$ .  $B = \{b_{ij\mathbf{w}}(\cdot|\cdot)\}$  représente l'ensemble des lois d'observations associées aux états du modèle. Par définition :

$$\begin{aligned} P(\mathbf{O}_u | \mathbf{O}_1^{u-1}, \mathbf{X}_1^u, \mathbf{W} = \mathbf{w}) \\ = P(\mathbf{O}_u | \mathbf{O}_{u-1}, X_{u-1} = S_i, X_u = S_j, \mathbf{W} = \mathbf{w}) \quad (1) \\ = b_{ij\mathbf{w}}(\mathbf{o}_u | \mathbf{o}_{u-1}) \quad (2) \end{aligned}$$

$\mathbf{W}$  désigne un vecteur de variables aléatoires, de réalisation  $\mathbf{w} = (w_1 \dots w_N)^T$ ,  $\sum_{k=1}^N w_k = 1$ , représentatif de la confiance accordée à chacun des  $N$  canaux d'observation. Conformément à l'équation (1), le graphe de dépendance d'un MMCMSE est représenté figure 2. On note la non indépendance des observations conditionnellement aux états.

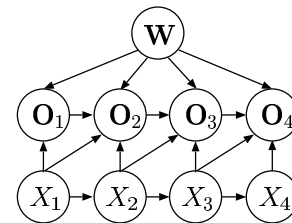


FIG. 2: Graphe de dépendance d'un MMCMSE pour  $U=4$  instants cachés.

## 2.3 Aspects algorithmiques

Les trois problèmes fondamentaux que sont l'Evaluation, le Décodage et l'Apprentissage se présentent également dans le cas d'un MMCMSE, mais sous une formulation quelque peu différente du cas MMC standard. Pour n'en citer qu'un, le Décodage, il vise à estimer conjointement, à partir d'un champ  $E$  et d'un MMCMSE  $\lambda$  donnés, la séquence d'observations (donc le scénario) et la séquence d'états cachés qui expliquent au mieux  $E$ :  $\{\hat{\mathbf{o}}, \hat{x}\} = \arg\max_{\mathbf{o} \in \mathcal{S}(E), x} P(\mathbf{o}, x | \lambda)$ <sup>1</sup>. Les trois problèmes cités peuvent être résolus à l'aide de versions adaptées des algorithmes MMC standards [4].

## 3 Application en cartographie IRM fonctionnelle cérébrale

La cartographie IRMf cérébrale vise à détecter les aires cérébrales activées chez un patient en réponse à un protocole de stimulation externe prédéfini. La détection d'activité s'appuie sur l'analyse des signaux IRMf enregistrés en cours de stimulation. Les principales méthodes de cartographie hypothèquent sur la forme et la chronologie du signal IRMf actif [5], réduisant de facto l'espace des signaux actifs à détecter. La méthode proposée, à base de MMCMSE, limite l'analyse aux événements IRMf transitoires que sont les débuts de réponse hémodynamique (DRHs). Elle permet également de prendre en compte le

<sup>1</sup>  $\mathbf{o} \in \mathcal{S}(E)$  signifie "la séquence d'observations qui résulte de la combinaison du champ  $E$  et d'un scénario  $\mathcal{S}$  pris dans l'ensemble  $\mathcal{S}(E)$  des scénarios valides explicatifs de  $E$ ".



contexte spatial d'activation cérébrale, par fusion–association multicanaux des DRHs. Son principe est simple : en présence d'activité au voxel  $v$ , la séquence cachée de débuts d'activation neuronale (DANs) et les séquences de DRHs induites dans le signal IRMF local et ses voisins s'alignent, au retard d'activation près, sur la séquence de transitions repos-activation du protocole de stimulation. Par hypothèse, un événement caché (un DAN) au voxel  $v$  est supposé déclencher l'observation d'au moins un, d'au plus  $N$  DRHs (la signature), un DRH par canal.

Les DRHs sont détectés à partir de la transformée en ondelettes continue des signaux IRMF [4],[2]. En chaque voxel, 3 séquences de DRHs sont obtenues pour 3 niveaux de décomposition. Considérant un voisinage spatial de type  $V$ -connexité ( $V = 26$  dans notre application), le champ  $E^v$  d'événements observés utilisé pour évaluer l'activité cérébrale au voxel  $v$  est composé de  $N = 3(V + 1)$  séquences d'événements, soit 81 canaux d'observation en simultané.

Un MMCMSE d'activation neuronale générique,  $\lambda^v$ , est construit sur l'information temporelle du protocole de stimulation, lequel est supposé composé de  $C$  blocs repos-activation dont 2 fictifs, en début et fin de stimulation (fig. 3). Un état  $S_i$  est utilisé pour modéliser le  $i$ -ème DAN induit par stimulation. La topologie du modèle est choisie de type gauche-droit, avec  $a_{ii} = 0, \forall i$ , et  $a_{ij} = 0$  si  $j > i + \Delta$  ( $\Delta \sim \frac{C}{2}$ ). Son graphe d'états est illustré figure 3 pour  $\Delta = 3$  et  $C = 5$ .

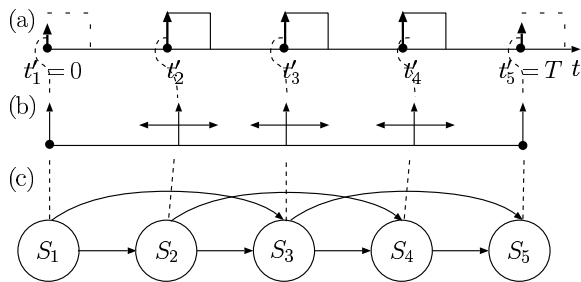


FIG. 3: (a) Instants de transition repos-activation du protocole de stimulation, (b) Instants des DANs, (c) Graphe d'états du MMCMSE  $\lambda^v$  d'activation neuronale.

Pour prendre en compte un éventuel retard d'activation local  $l$ , la variable aléatoire  $L$  est introduite dans l'expression (1). Sous l'hypothèse d'indépendance conditionnelle des composantes  $\tau_u, \mathbf{s}_u$ , et  $\mathbf{o}_{u-1,u}^*$ , de l'observation  $\mathbf{o}_u$ , l'expression de la loi d'observation peut être factorisée<sup>2</sup>, chaque facteur étant modélisé par une Gaussienne :

$$\begin{aligned}
 b_{ijl}(\mathbf{o}_u | \mathbf{o}_{u-1}) &= P(\mathbf{O}_u | \mathbf{O}_{u-1}, X_{u-1} = S_i, X_u = S_j, \\
 &\quad \mathbf{W} = \mathbf{w}, L = l) \quad (3) \\
 &= P(\tau_u | X_u = S_j, l) \cdot P(\mathbf{s}_u | X_u = S_j, \tau_u, \mathbf{w}). \\
 &\quad P(\mathbf{o}_{u-1,u}^* | X_{u-1} = S_i, X_u = S_j, \mathbf{s}_u, \mathbf{s}_{u-1}, \mathbf{w}) \quad (4)
 \end{aligned}$$

L'apprentissage du modèle générique  $\lambda^v$  et la cartographie sont effectués conjointement pour chaque voxel  $v$ , avec pour corpus d'apprentissage le champ local  $E^v$  d'événements (fig. 4). A partir d'un jeu initial de paramètres pour  $\lambda^v$ , une première estimée selon le maximum de vraisemblance,  $\{\hat{\mathbf{o}}^v, \hat{x}^v, \hat{l}^v\}$ , est

obtenue par décodage<sup>3</sup>. A partir de cette estimée, un nouveau modèle  $\hat{\lambda}^v$  est obtenu par comptages statistiques. La procédure est répétée jusqu'à convergence pour fournir  $\{\hat{\mathbf{o}}^v, \hat{x}^v, \hat{l}^v, \hat{\lambda}^v\}$ . Finalement, la cartographie des aires cérébrales activées est obtenue par seuillage de la carte des vraisemblances  $\{P(\hat{\mathbf{o}}^v, \hat{x}^v | \hat{l}^v, \hat{\lambda}^v)\}$  préalablement transformée en carte de  $p$ -valeurs [4].

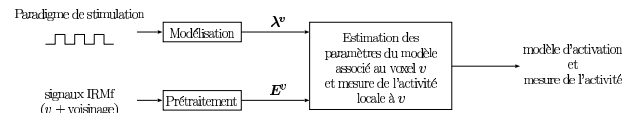


FIG. 4: Synoptique d'apprentissage-cartographie d'activation au voxel  $v$ .

## 4 Expérimentations

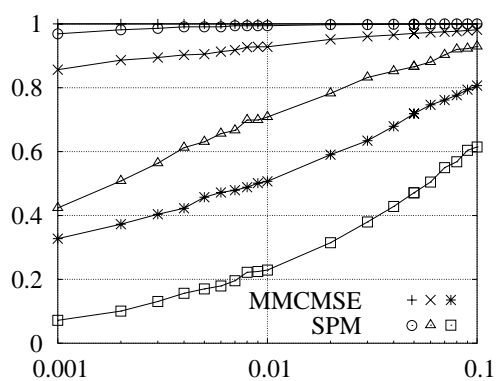
La méthode de cartographie par MMCMSE a été évaluée sur données IRMF synthétiques et réelles. Les résultats de détection d'activation ont été comparés à ceux obtenus par l'application standard de la méthode faisant référence dans le domaine, SPM (Statistical Parametric Mapping) [5]. Les données synthétiques correspondent à 5 séquences IRMF 3-D construites en additionnant dans des zones définies comme actives, un signal d'activation synthétique à du bruit IRMF réel [2]. Trois séquences sont représentatives d'un RSB variable, les deux autres de variations de forme (non maintien de la réponse hémodynamique à la stimulation) et de timing (retard d'activation variable) du signal d'activation non bruité. Les données réelles correspondent à 42 séquences IRMF 3-D acquises pour des protocoles de stimulation des zones fonctionnelles cérébrales du langage [2].

Les performances de détection des méthodes MMCMSE et SPM sur données synthétiques ont été comparées à l'aide de courbes COR (fig. 5(a-b)). Ces dernières montrent, dans tous les cas de figure considérés, la supériorité de la méthode MMCMSE par rapport à SPM. La figure 5(a) montre en particulier que pour un RSB de moyen à faible, et une Pfa inférieure à 0.01, la méthode MMCMSE offre un gain de performances de 20% à 40% supérieur à la méthode SPM. La figure 5(b) souligne l'extrême robustesse de la méthode MMCMSE face à des variations importantes du retard d'activation (courbe '+'), et sa grande robustesse, comparativement à SPM, face à des variations spatiales de forme de la réponse hémodynamique cérébrale aux blocs de stimulation (courbe 'x').

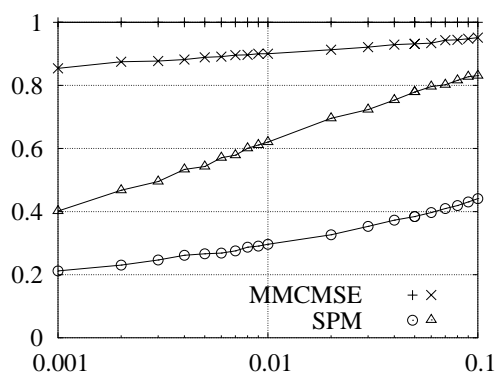
Les résultats de détection des méthodes MMCMSE et SPM sur données réelles ont été comparés à partir des cartes d'activité produites. Les cartes MMCMSE montrent, pour les 42 séquences IRMF considérées, la présence d'activité cérébrale dans toutes les zones corticales du langage attendues comme actives. Ces résultats sont conformes avec ceux d'SPM. Les cartes MMCMSE font de plus apparaître des zones d'activations retardées sur le protocole de stimulation, suggérant la mise en jeu de zones corticales additionnelles dans le traitement du langage [2]. Un échantillon de cartes d'activation obtenues par les deux méthodes est donné figure 5(c).

2. Afin de réduire la dimensionnalité de l'observation  $\mathbf{o}_u$ , des techniques de réduction des données sont utilisées.

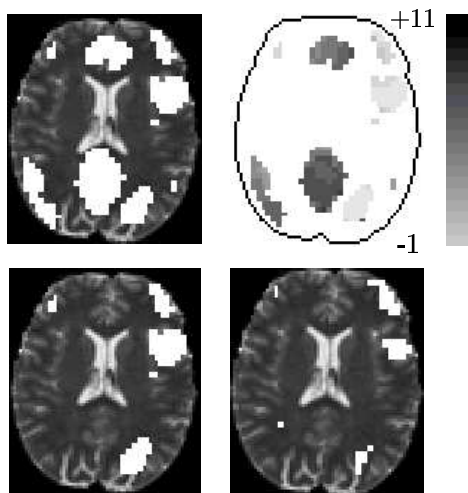
3. Utiliser la procédure d'apprentissage du MMCMSE est ici plus coûteuse en temps de calcul.



(a)



(b)



(c)

FIG. 5: (a-b) Performances de détection sur signaux synthétiques d'activation pour (a) un RSB fort (+, o), moyen ( $\times$ ,  $\Delta$ ) et faible (\*,  $\square$ ), et pour (b) des variations de forme ( $\times$ ,  $\Delta$ ) et de timing (+, o) d'activation, (c) de haut en bas, de gauche à droite : carte MCMCSE des zones détectées actives, synchrones et en retard sur le protocole de stimulation, carte MCMCSE des retards d'activation par rapport au protocole de stimulation (mesuré en nombre de scans), carte MCMCSE des zones d'activité synchrone au protocole, carte SPM des zones d'activité synchrone au protocole. Voir texte.

## 5 Conclusion

Nous avons présenté une nouvelle approche de modélisation, d'analyse et de fusion markovienne cachée de multiples séquences d'événements. Elle se distingue des approches fusion markovienne existantes par les points suivants : (i) la stratégie de fusion–association utilisée permet l'analyse simultanée d'un nombre élevé de canaux d'observation (81 canaux dans notre application), (ii) l'approche autorise, sous contraintes de causalité, des asynchronismes importants entre événements fusionnés, (iii) la partie cachée de notre modèle reste simple, contrairement aux approches existantes basées sur plusieurs chaînes de Markov aux multiples liens de dépendance, (iv) sous certaines hypothèses d'indépendance conditionnelle, l'expression de la loi d'observation d'un état caché reste simple et générale à la fois, offrant ainsi un large éventail d'applications possibles du MCMCSE en fusion d'observations et de séquences. Sur le plan applicatif, les résultats obtenus par le MCMCSE en cartographie IRMf cérébrale sont particulièrement convaincants. Ils démontrent l'intérêt d'une stratégie de fusion spatiale, markovienne cachée, de multiples séquences de DRHs en cartographie IRM fonctionnelle cérébrale.

## Références

- [1] Thoraval L., Carrault G., Bellanger J.-J.: Heart signal recognition by Hidden Markov Models: the ECG case. *Meth. Inform. and Med.*, Vol. 33, No. 1, pp. 10-14, 1994.
- [2] Faisan S., Thoraval L., Armspach J.-P., Metz-Lutz M.-N. and Heitz F.: Unsupervised learning and mapping of active brain functional MRI signals based on hidden semi-Markov event sequence models. *IEEE Trans. Medical Imaging*, Vol. 24, No. 2, pp. 263-276, Feb. 2005.
- [3] Faisan S., Thoraval L., Armspach J.-P.: Modèles semi-Markoviens de séquences d'événements. 19ème Colloque GRETSI, Paris, 2003.
- [4] Faisan S.: Analyse et fusion markovienne de séquences en imagerie 3D+t. Application à l'analyse d'images IRM fonctionnelles cérébrales. Thèse de l'Université Louis Pasteur - Strasbourg I, Décembre 2004.
- [5] Frackowiak, R.S.J., Friston, K.J., Frith, C.D., Dolan, R.J., Mazziota, J.C (editors): *Human Brain Function*. Academic Press USA, 1997.

# Partitionnement optimal de l'image par minimisation d'un critère d'uniformité globale\*

Luc KLAINE<sup>1</sup>, Kacem CHEHDI<sup>2</sup>, Benoit VOZEL<sup>3</sup>

<sup>1, 2, 3</sup>Équipe TSI2M de l'IETR de l'Université de Rennes I  
6 rue de Kerampont, BP 80518, 22305 Lannion Cedex

luc.klaine@enssat.fr, kacem.chehdi@enssat.fr, benoit.vozel@enssat.fr

**Résumé** – Dans cet article, nous décrivons une méthode de réduction de l'information et d'homogénéisation des régions de l'image par transformation d'histogramme. Le traitement s'appuie sur une procédure de multi-seuillage et une procédure d'optimisation d'un critère d'uniformité globale. Le nombre de modes est supposé connu tandis la position des seuils significatifs est déterminée automatiquement. L'étude des minima est effectuée sur le modèle continu avant d'être naturellement transposé au modèle discret. L'algorithme converge vers des seuils optimaux pour un coût d'implémentation très faible qui peuvent être utilisés pour superviser des méthodes de classification d'images bruitées utilisant *a priori* d'homogénéité.

**Abstract** – In this paper, we describe a method of reduction of information and homogenisation the regions of the image by histogram transformation. The method is based on a procedure of multi-thresholding and a procedure of optimization of a criterion of global uniformity. The number of modes is supposed to be known and the position of the significant thresholds is automatically founded. The study of the minima is carried out on the continuous model before being naturally transposed to the discrete model. The algorithm converges towards optimal thresholds at a very weak cost of implementation which can be used to supervise methods of classification of disturbed images using *a priori* homogeneity.

## 1 Introduction

Le *multi-seuillage* est une technique de classification consistant à regrouper les valeurs comprises entre deux seuils consécutifs. Lorsqu'il est appliqué aux intensités lumineuses d'une image, il s'apparente à la fois à une méthode de quantification non-linéaire et à une méthode de segmentation des zones homogènes. Le résultat obtenu est une image simplifiée (appelée *image multi-seuillée*) constituée de régions non-connexes (identifiées aux *classes*).

Le procédé est largement utilisé préalablement à certains traitements ou au sein d'un chaîne de traitements. En segmentation par analyse de texture, il peut faciliter le calcul des attributs de texture et en limiter le coût d'implémentation [6, 8, 11, 7]. En filtrage myope, il peut représenter une étape importante du processus d'identification et d'estimation du bruit sur les zones homogènes [4, 3].

Les performances se mesurent en terme de limitation de la perte d'information, de préservation de l'uniformité. Une région est *uniforme* si la dispersion des niveaux de gris ou *variance intra-région* est faible. Une image multi-seuillée est dite *globalement uniforme* si les régions qui la composent le sont. L'*uniformité globale* correspond à la moyenne des variances intra-région pondérées par la taille des régions (déf. 1.1).

**Définition 1.1** Soient  $u \in I^\Omega$  l'image initiale et  $u_h \in L^\Omega$  l'image multi-seuillée alors on définit la moyenne intra-région, la variance intra-région et l'uniformité globale par :

$$\text{moy}(u|u_h = m) \triangleq \frac{1}{|\Omega_m|} \sum_{(i,j) \in \Omega_m} u_{i,j}$$

$$\text{var}(u|u_h = m) \triangleq \frac{1}{|\Omega_m|} \sum_{(i,j) \in \Omega_m} |u_{i,j} - \text{moy}(u|u_h = m)|^2$$

$$\text{var}(u|u_h) \triangleq \frac{1}{|\Omega|} \sum_{m \in L} |\Omega_m| \text{var}(u|u_h = m)$$

où  $\Omega_m = \{u_h = m\}$  est la région de label  $m \in L$ .

L'objectif de l'article est de présenter une nouvelle méthode pour déterminer les meilleurs seuils au sens de l'uniformité globale. Les seuils optimaux peuvent être utilisés dans le cadre d'un multi-seuillage direct. Ils peuvent également être couplés avec des méthodes de classification d'images bruitées introduisant *a priori* d'homogénéité [9, 2, 1].

Dans la **section 2**, l'énergie de partitionnement est définie comme une généralisation de l'uniformité globale. Les résultats théoriques se rapportant à l'existence et à la caractérisation d'un minimum y sont exposés.

Dans la **section 3**, nous présentons la suite de partitionnement qui correspond à l'algorithme de minimisation alternée et qui converge vers un minimum de l'énergie de partitionnement. Une attention toute particulière est portée sur la quantification linéaire.

Enfin, les résultats expérimentaux sont donnés dans la **section 4** afin d'illustrer l'efficacité de la méthode.

## 2 Approche variationnelle

L'originalité de l'approche proposée consiste à se donner un nouveau degré de liberté pour optimiser l'uniformité globale. L'idée est de remplacer la moyenne intra-région par une nouvelle donnée : le mode. Le critère ainsi obtenu est appelé *énergie de partitionnement*.

\* Ces travaux sont financés par le Conseil Régional de Bretagne et le FEDER au travers du projet Interreg 3B PIMHAI.

## 2.1 Optimisation de l'énergie de partitionnement

Les classes sont formées des intervalles compris entre deux seuils consécutifs. Les modes sont associés bijectivement aux classes. Ils fournissent chacun une valeur unique et caractéristique de la classe. Les seuils et les modes doivent être ordonnés de sorte que chaque mode soit compris entre deux seuils consécutifs. Les bornes de l'enveloppe convexe des intensités lumineuses  $C(I)$  sont notées  $s_0$  et  $s_N$ . Les vecteurs :

$$\vec{s} \triangleq (s_1, \dots, s_{N-1}) \in C(I)^{N-1} \text{ et } \vec{m} \triangleq (m_1, \dots, m_N) \in C(I)^N$$

sont respectivement appelés *vecteur des seuils* et *vecteur des modes*. L'espace affini  $(s_0, s_N) \times C(I)^{2N-1}$  s'identifie aisément par projection sur les  $2N - 1$  dernières coordonnées à l'espace vectoriel  $C(I)^{2N-1}$ . Par conséquent, on écrit indifféremment  $(\vec{s}, \vec{m})$  pour :

$$(s_1, \dots, s_{N-1}, m_1, \dots, m_N) \in C(I)^{2N-1}$$

ou bien pour :

$$(s_0, s_N, s_1, \dots, s_{N-1}, m_1, \dots, m_N) \in (s_0, s_N) \times C(I)^{2N-1}.$$

Supposons dès lors que les vecteurs des seuils et des modes vérifient  $s_0 < m_1 < s_1 < \dots < s_N$ . On peut alors définir l'énergie de partitionnement (déf. 2.1)

**Définition 2.1** Soit  $h(\cdot) \in L^1(C(I), \mathbb{R}_*^+)$  une densité strictement positive alors on définit l'énergie de partitionnement associée par :

$$Q(h; \vec{s}, \vec{m}) \triangleq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \int_{s_{k-1}}^{s_k} h(t) |t - m_k|^2 dt \quad (1)$$

qui mesure la qualité de l'histogramme discret :

$$\sum_{k=1}^N \left[ \int_{s_{k-1}}^{s_k} h(s) ds \right] \delta(t - m_k)$$

comme approximation de la densité  $h(t)$ .

### 2.1.1 Formule d'extraction des seuils

les modes sont supposés connus. L'énergie de partitionnement admet un unique minimum caractérisé par annulation de la dérivée par rapport aux seuils. Il est donné par les milieux des intervalles compris entre deux modes consécutifs (prop. 2.1).

**Proposition 2.1** Soit  $h(\cdot) \in L^1(C(I), \mathbb{R}_*^+)$  alors le meilleur vecteur des seuils  $\vec{s}$  connaissant le vecteur des modes  $\vec{m}$  est obtenu par :

$$s_k = S_k(\vec{m}) \triangleq (m_k + m_{k+1})/2. \quad (2)$$

On note  $\vec{S}(\vec{m})$  la fonction d'optimisation des seuils qui retourne le vecteur dont les composantes sont les  $S_k(\vec{m})$ .

PREUVE : On dérive par rapport à  $s_k$  pour rechercher les éventuels minima et on obtient formellement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial s_k}(h; \vec{s}, \vec{m}) &= \frac{1}{2} h(s_k) [(s_k - m_k)^2 - (s_k - m_{k+1})^2] \\ &= h(s_k) (m_{k+1} - m_k) [s_k - (m_k + m_{k+1})/2] \\ &= h(s_k) (m_{k+1} - m_k) [s_k - S_k(\vec{m})]. \end{aligned}$$

La dérivée est du signe de  $s_k - S_k(\vec{m})$  et ne dépend que de  $s_k$ . En particulier, elle s'annule pour  $s_k = S_k(\vec{m})$ . Le vecteur des seuils minimisant l'énergie de multi-seuillage vaut  $\vec{S}(\vec{m})$ . Comme  $h(\cdot) > 0$ , la dérivée ne s'annule que pour  $\vec{s} = \vec{S}(\vec{m})$  d'où le minimum est unique et strict. ■

**Proposition 2.2** Soit  $h(\cdot) \in L^1(C(I), \mathbb{R}_*^+)$  alors la fonction d'optimisation des seuils minimise l'énergie de partitionnement au sens strict :

$$\vec{s} \neq \vec{S}(\vec{m}) \Rightarrow Q(h; \vec{S}(\vec{m}), \vec{m}) < Q(h; \vec{s}, \vec{m}).$$

### 2.1.2 Formule d'extraction des modes

les seuils sont supposés connus. L'énergie de partitionnement admet un unique minimum caractérisé par annulation de la dérivée par rapport aux modes. Il correspond aux moyennes pondérées entre deux seuils consécutifs (prop. 2.3).

**Proposition 2.3** Soit  $h(\cdot) \in L^1(C(I), \mathbb{R}_*^+)$  alors le meilleur vecteur des modes  $\vec{m}$  connaissant le vecteur des seuils  $\vec{s}$  est obtenu par :

$$m_k = M_k(h; \vec{s}) \triangleq \left[ \int_{s_{k-1}}^{s_k} h(t) dt \right]^{-1} \left[ \int_{s_{k-1}}^{s_k} h(t) t dt \right]. \quad (3)$$

On note  $\vec{M}(h; \vec{s})$  la fonction d'optimisation des modes qui retourne le vecteur dont les composantes sont les  $M_k(h; \vec{s})$ .

PREUVE : On dérive par rapport à  $m_k$  pour rechercher les éventuels minima et il vient formellement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial m_k}(h; \vec{s}, \vec{m}) &= \int_{s_{k-1}}^{s_k} h(t) (m_k - t) dt \\ &= \left[ \int_{s_{k-1}}^{s_k} h(t) dt \right] [m_k - M_k(h; \vec{s})]. \end{aligned}$$

La dérivée est du signe de  $m_k - M_k(h; \vec{s})$  et ne dépend que de  $m_k$ . Elle s'annule simplement pour  $m_k = M_k(h; \vec{s})$ . Le vecteur des modes minimisant l'énergie de multi-seuillage vaut  $\vec{M}(h; \vec{s})$ . Comme  $h(\cdot) > 0$ , la dérivée ne s'annule que pour  $\vec{m} = \vec{M}(h; \vec{s})$  d'où le minimum est unique et strict. ■

**Proposition 2.4** Soit  $h(\cdot) \in L^1(C(I), \mathbb{R}_*^+)$  alors la fonction d'optimisation des modes minimise l'énergie de partitionnement au sens strict :

$$\vec{m} \neq \vec{M}(h; \vec{s}) \Rightarrow Q(h; \vec{s}, \vec{M}(h; \vec{s})) < Q(h; \vec{s}, \vec{m}).$$

### 2.1.3 Formule d'extraction conjointe

ni les seuils ni les modes ne sont supposés connus. L'énergie de partitionnement admet au moins un minimum en vertu du théorème de point fixe de Schauder. De plus, si  $(\vec{s}, \vec{m})$  est un minimum local de l'énergie de partitionnement alors il annule les dérivées par rapport aux seuils et aux modes. En d'autres termes,  $\vec{s}$  stabilise  $\vec{S}(\vec{m})$  et  $\vec{m}$  stabilise  $\vec{M}(h; \vec{s})$ .

**Définition 2.2** Soit  $h(\cdot) \in L^1(C(I), \mathbb{R}_*^+)$  alors on définit la fonction d'optimisation conjointe par :

$$\vec{SM}(h; \vec{s}, \vec{m}) \triangleq (\vec{S} \circ \vec{M}(h; \vec{s}), \vec{M}(h; \vec{s})). \quad (4)$$

Si le minimum existe, il est impossible de conclure quant à son unicité. Même lorsque l'histogramme est donné par une fonction continûment dérivable strictement positive. L'énergie de partitionnement est convexe par rapport aux seuils et aux modes séparément, elle ne l'est pas forcément simultanément. La fonction d'optimisation conjointe laisse cependant augurer de bons résultats (prop. 2.5).

**Proposition 2.5** Soit  $h(\cdot) \in L^1(C(I), \mathbb{R}_*^+)$  alors la fonction d'optimisation conjointe minimise l'énergie de partitionnement au sens strict :

$$(\vec{s}, \vec{m}) \neq \overrightarrow{SM}(h; \vec{s}, \vec{m}) \Rightarrow Q(h; \overrightarrow{SM}(h; \vec{s}, \vec{m})) < Q(h; \vec{s}, \vec{m}).$$

## 2.2 Approximation et relaxation de l'énergie de partitionnement

Nous avons toujours supposé que  $h(\cdot) \in L^1(C(I), \mathbb{R}_*^+)$  était une densité strictement positive. Que se passe-t-il si la densité  $h(\cdot) \in L^1(C(I), \mathbb{R}^+)$  passe par zéro ? Que se passe-t-il si  $h(\cdot) \in \mathcal{H}_I^+(C(I))$  est un histogramme discret ? Or justement dans la pratique,  $h(\cdot)$  sera toujours un histogramme discret.

### 2.2.1 Pour une densité positive

la définition de l'énergie de partitionnement reste valable. Les passages par zéro de la densité ne garantissent plus l'unicité des seuils optimaux lorsque les modes sont fixés. Toutefois, non seulement ils existent et réciproquement mais les minima donnés par les fonctions d'optimisation des seuils et des modes restent valables. Le cas des densités positives peut être vu comme un cas limite (limite uniforme) du cas des densités strictement positives (prop. 2.6).

**Proposition 2.6** Soit  $h(\cdot) \in L^1(C(I), \mathbb{R}^+)$  alors il existe des densités strictement positives  $h_\varepsilon(\cdot)$  telles que la famille  $Q(h_\varepsilon; \cdot, \cdot)$  converge uniformément vers  $Q(h; \cdot, \cdot)$ .

Par conséquent, la théorie de la  $\Gamma$ -convergence [5] assure que toute suite convergente de minima des  $Q(h_\varepsilon; \cdot, \cdot)$  converge vers un minimum de  $Q(h; \cdot, \cdot)$ .

### 2.2.2 Pour un histogramme discret

la définition et les propriétés de l'énergie de partitionnement doivent être étendues. Or la mesure ponctuelle des échantillons n'est pas nulle puisque la mesure associée n'est plus absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Concrètement, dans quelle classe faut-il mettre un échantillon  $x_j$  lorsqu'il coïncide avec un seuil  $s_k$  ? L'échantillon  $x_j$  doit logiquement être placé dans la classe pour laquelle sa contribution  $|x_j - m_k|^2$  est minimale. L'énergie de partitionnement des histogrammes discrets est obtenue par cumul des contributions de chacun des échantillons (déf. 2.3).

**Définition 2.3** Soit  $h(\cdot) = \sum_{j \in I} h_j \delta(\cdot - x_j) \in \mathcal{H}_I^+(C(I))$  alors

on définit l'énergie de partitionnement associée par :

$$Q(h; \vec{s}, \vec{m}) \triangleq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \sum_{\substack{x_j < s_{k+1} \\ x_j > s_k}} h_j |x_j - m_k|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{x_j = s_k} h_j \min(|x_j - m_k|^2, |x_j - m_{k+1}|^2) \quad (5)$$

Les propriétés de l'énergie associée aux densités strictement positives se reportent sur celle associée aux histogrammes discrets. Le cas des histogrammes discrets est vu comme un cas limite du cas des densités strictement positives (th. 2.1).

**Théorème 2.1** Soit  $h(\cdot) \in \mathcal{H}_I^+(C(I))$  alors il existe des densités strictement positives  $h_\varepsilon(\cdot)$  telles que la famille  $Q(h_\varepsilon; \cdot, \cdot)$   $\Gamma$ -converge vers  $Q(h; \cdot, \cdot)$  pour la topologie usuelle de  $\mathbb{R}^{2N-1}$ .

De même, d'après la théorie de la  $\Gamma$ -convergence, un minimum de  $Q(h; \cdot, \cdot)$  peut être obtenu à l'aide d'une suite convergente de minima des  $Q(h_\varepsilon; \cdot, \cdot)$ .

## 3 Mise en œuvre et convergence

Il semble difficile d'envisager la minimisation directe de l'énergie de partitionnement. En effet, une méthode de descente risque de converger lentement vers un minimum. À l'inverse, la formulation explicite des seuils optimaux d'une part et des modes optimaux d'autre part, plaident en faveur de la minimisation alternée.

### 3.1 Convergence de la suite de partitionnement

La minimisation alternée de l'énergie de partitionnement est par conséquent l'algorithme le plus naturel. Elle permet de construire le minimum via la suite de partitionnement (déf. 3.1).

**Définition 3.1** Soient  $h(\cdot) \in L^1(C(I), \mathbb{R}_*^+)$  et  $\vec{m}^0$  le vecteur des modes initial alors on définit la suite de partitionnement par :

$$s^0 = \vec{S}(\vec{m}^0) \text{ et } (\vec{s}^{n+1}, \vec{m}^{n+1}) = \overrightarrow{SM}(h; \vec{s}^n, \vec{m}^n). \quad (6)$$

La suite converge vers un point fixe de la fonction d'optimisation conjointe (th. 3.1). En ce sens, la suite minimise l'énergie de partitionnement.

**Théorème 3.1** La suite de partitionnement converge vers un minimum de  $Q(h; \cdot, \cdot)$ .

### 3.2 Etude d'un exemple fondamental

Considérons le cas le plus simple d'une densité constante et normalisée. Elle correspond notamment à l'histogramme d'une image dont les niveaux de gris sont équi-distribués.

**Théorème 3.2** Si  $h(\cdot) \equiv N/|I|$  alors l'énergie de partitionnement admet un unique minimum donné par :

$$s_k = k|I|/N \text{ et } m_k = \frac{1}{2}(2k-1)|I|/N. \quad (7)$$

Le meilleur partitionnement consiste donc à répartir régulièrement les seuils. Il s'agit de la quantification linéaire, méthode la plus couramment utilisée pour simplifier une image. Elle n'a pourtant de sens que dans le cas très particulier d'une densité uniforme.

TAB. 1 – Tableau comparatif du multi-seuillage par (b) quantification linéaire, (c) la méthode de Kermad et al, (d) partitionnement optimal

	[gu]	[mae]	[mse]	[me]	[psnr]
(b)	49.659	5.976	7.056	16	31.656
(c)	36.558	5.358	6.420	25	31.980
(d)	<b>34.732</b>	<b>4.909</b>	<b>5.905</b>	28	<b>32.706</b>

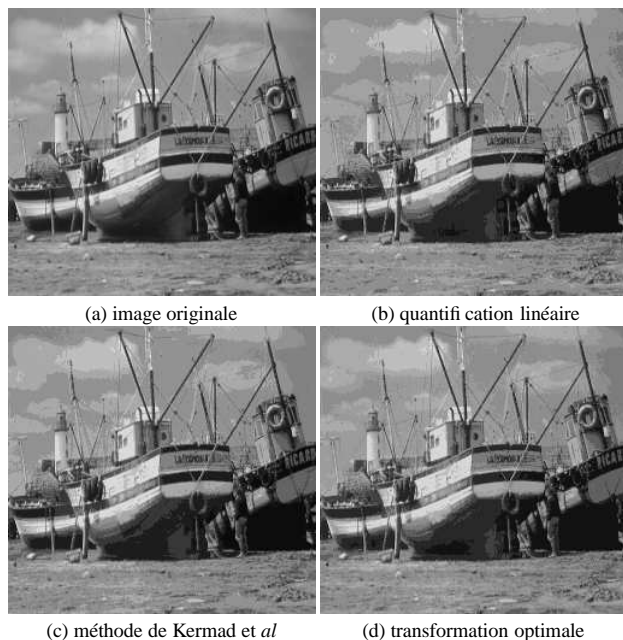


FIG. 1 – Comparaison des images multi-seuillées

## 4 Étude expérimentale

Les tests ont été menés sur l'image réelle [bateau] contenant des détails très fins. Trois méthodes ont été mises en oeuvre : la quantification linéaire, la méthode de Kermad et al [7, 6] et la transformation optimale. Les images multi-seuillées ont été obtenues de sorte à contenir 10 classes. Chaque région a été labellisée par la moyenne intra-région. Ainsi, l'observation visuelle est révélatrice de la qualité du partitionnement. Dans ce cas, le carré de l'erreur moyenne quadratique et l'uniformité globale coïncident.

L'observation des images multi-seuillées (fig. 1) montre que les détails sont mieux préservés avec la transformation optimale. Les histogrammes multi-seuillés (fig. 2) obtenus par le multi-seuillage de Kermad et al et la transformation optimale ne sont pas uniformément répartis. Par conséquent, ils s'adaptent effectivement à la distribution des niveaux de gris dans l'image. Le tableau comparatif (tab. 1) fait apparaître l'uniformité globale gu, l'erreur moyenne absolue mae et quadratique mse, l'erreur maximale me et le rapport signal à bruit psnr. L'objectif est atteint puisque la transformation optimale minimise le critère d'uniformité globale.

## 5 Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté une méthode optimale de partitionnement au sens de l'uniformité globale. Elle prend la forme d'une suite qui minimise alternativement l'énergie de partitionnement par rapport aux modes et aux seuils. La so-

lution obtenue à la convergence correspond alors au meilleur partitionnement. En effet, l'énergie de partitionnement limite au maximum l'erreur avec la distribution des niveaux de gris initiale.

La méthode a été couplée avec succès à la méthode de classification supervisée robuste de Samson [10, 9]. En effet, la méthode de classification s'apparente à un multi-seuillage robuste au bruit par introduction un *a priori* d'homogénéité. Le paramètre de la classification est la fonction potentiel qu'il est possible de déterminer automatiquement à l'aide des seuils et des modes. L'idée est de construire une fonction à  $N$  puits centrés sur les modes et séparés par les seuils.

## Références

- [1] G. Aubert, L. Blanc-Féraud, and R. March.  $\Gamma$ -convergence of discrete functionals with non-convex perturbation for image classification. Technical Report 4560, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, September 2002.
- [2] G. Aubert and P. Kornprobst. *Mathematical problems in image processing (Partial differential equations and the calculus of variations)*. Springer, 2002.
- [3] K. Chehdi. An approach to the automatic filtering of images. In *Proceedings of EUSIPCO'92*, pages 1409–1412, August 1992.
- [4] K. Chehdi and M. Sabri. A new approach to identify the nature of the noise affecting an image. In *Proceedings of ICASSP'92*, pages 285–288, March 1992.
- [5] E. De Giorgi. *Convergence problems for functionals or operators*. Proc. of the International Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis, Pitagoria, Ed. Bologna, 1978.
- [6] C. Kermad. *Segmentation d'images : recherche d'une mise en œuvre automatique par coopération de méthodes*. PhD thesis, Université de Rennes I, 1997.
- [7] C. Kermad, K. Chehdi, and C. Cariou. Segmentation d'images par multi-seuillage et fusion des régions labellisées minimisant un critère de similarité. In *Proceedings of GRETSI'95*, pages 641–644, September 1995.
- [8] C. Rosenberger. *Mise en œuvre d'un système adaptatif de segmentation d'images*. PhD thesis, Université de Rennes I, 1999.
- [9] C. Samson. *Contribution à la classification d'images satellitaires par approche variationnelle et équations aux dérivées partielles*. PhD thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis, 2000.
- [10] C. Samson, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, and J. Zerubia. A variational model for image classification and restoration. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(5):460–472, May 2000.
- [11] N. Voisine. *Approche adaptative de coopération hiérarchique de méthodes de segmentation : application aux images multi-composante*. PhD thesis, Université de Rennes I, 2002.

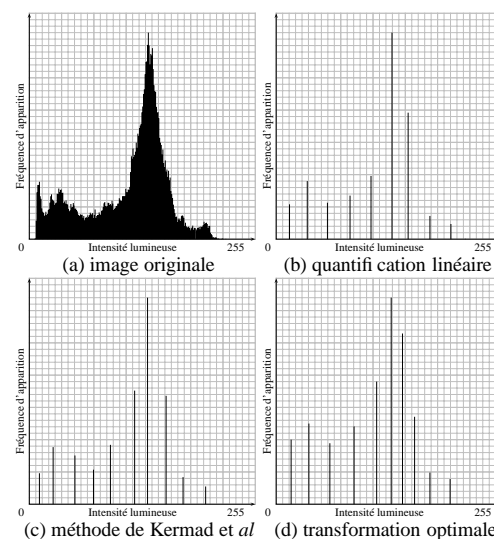


FIG. 2 – Comparaison des histogrammes multi-seuillés

# Segmentation pyramidale et groupements perceptuels

Jérémy HUART, Pascal BERTOLINO

Laboratoire des Images et des Signaux  
BP 46, 38402 Saint Martin d'Hères, France  
Jeremy.Huart@lis.inpg.fr  
Pascal.Bertolino@lis.inpg.fr

**Résumé** – Cet article présente une méthode de segmentation qui génère une partition perceptuellement pertinente sans connaissance *a priori* du contenu sémantique de l'image. Tout d'abord, une analyse locale de l'homogénéité de l'image permet de détecter les zones à segmenter. Ensuite, une segmentation locale est effectuée sur ces zones, sur un critère de similarité. Enfin, les régions obtenues sont regroupées en utilisant les critères issus de la théorie de groupement du Gestalt. Cette méthode est présentée en tant que traitement hiérarchique.

**Abstract** – In this paper, we present a segmentation method that provides perceptually relevant partitions without any *a priori* knowledge of the image semantic content: first a local homogeneity analysis detects the image areas that have to be segmented. Then segmentation using a similarity criterion is locally performed. At last, segmented regions are grouped using Gestalt criteria. The whole method is presented in a hierarchical framework.

## 1 Introduction

Nous traitons ici les problèmes relatifs à une méthode générique et automatique d'extraction d'objets dans les images. On distingue trois approches principales dans les méthodes de segmentation. Premièrement, les méthodes orientées sur les contours qui regroupent principalement les algorithmes de contours actifs (*e.g.* snake, balloon [1]). Deuxièmement, les méthodes orientées sur les régions telles que les algorithmes de croissance de régions ou du *split-n-merge*. Cette catégorie regroupe également les approches probabilistes optimisant une fonction d'énergie globale calculée sur les régions [2]. [1] propose une méthode originale qui mélange fonctions d'énergie et morphologie mathématique. Et enfin, les techniques hybrides qui fusionnent les deux types d'information tel que l'algorithme de compétition de régions [3]. [4, 5] proposent de combiner les techniques précédentes avec le *scale-space* afin d'ajouter l'aspect multirésolution qui est bien adapté au système de vision humain.

Afin de proposer une nouvelle méthode non fondée sur la connaissance *a priori* du contenu sémantique de l'image ou sur un modèle quelconque d'objet, plusieurs méthodes efficaces sont intégrées et interviennent successivement dans la pyramide de graphe irrégulière [6] : (1) Une **analyse locale de l'homogénéité** de l'image est effectuée pour initialiser une segmentation locale et ainsi éviter une sur-segmentation. (2) La pyramide de graphe réalise une **segmentation locale** des zones hétérogènes de l'image. En utilisant un critère de similarité, elle génère un empilement de partitions précises par croissance de régions en parallèle. (3) La pyramide est de nouveau utilisée sur les régions issues de la segmentation pour un traitement de **groupement perceptuel** selon des critères issus de la théorie du Gestalt. Ces critères sont bien adaptés à une méthode n'utilisant pas de modèle puisqu'ils prennent en compte uniquement la pertinence visuelle des régions.

## 2 La pyramide locale

La pyramide de graphe [6] est un outil puissant qui fournit une segmentation en multirésolution en un seul traitement. Son principe est d'initialiser un graphe d'adjacence, où chaque sommet correspond à un pixel de l'image. Utilisant un algorithme local effectué sur toute l'image, les voisins similaires peuvent fusionner, entraînant une décroissance du nombre de sommets qui représentent alors des régions. Les régions  $R_i$  et  $R_j$  sont similaires si la distance entre leur couleur moyenne, dans l'espace YUV, est plus faible qu'un certain seuil (cf. équation 1).

$$d(YUV[R_i], YUV[R_j]) < T \quad (1)$$

Ce traitement est effectué de manière itérative sur des graphes successifs jusqu'à convergence du nombre de régions.

Habituellement, le graphe d'adjacence est initialisé avec autant de sommets que de pixels contenus dans l'image pour effectuer une segmentation de l'image entière (fig. 1). Dans une pyramide locale, seul un sous-ensemble de pixels constituant une zone indéfinie de l'image est associé à des sommets. Tandis que le reste des pixels est associé arbitrairement à  $n$  sommets *racines* (régions qui appartiendront au résultat final) telles que le fond par exemple (fig. 2). Pendant le traitement de segmentation, les pixels des zones indéfinies fusionnent ensemble et forment des régions qui se rattachent à une des racines, afin d'affiner leur forme.

## 3 Segmentation orientée similarité

Pour initialiser automatiquement la pyramide locale, nous utilisons une méthode présentée dans [7] qui réalise une analyse de l'homogénéité dans les images couleur. Contrairement à [7] qui calcule l'image d'homogénéité (ou «H-image») selon les composantes RGB, nous utilisons l'espace couleur CIE  $L^*a^*b$



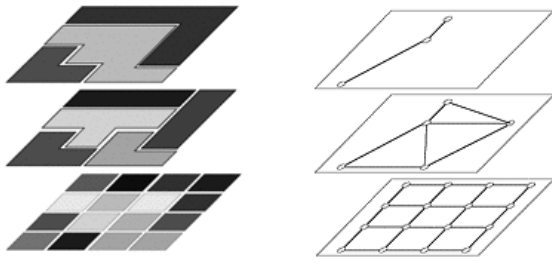


Figure 1: Pyramide de graphe construite sur une image 4×4 pixels : les partitions et leur graphe



Figure 2: Exemple d'initialisation de pyramide locale

puisqu'il permet de fournir plus d'homogénéités en texture (voir fig. 3.b et 4.b). La H-image est une image en niveaux de gris dont les valeurs des pixels représentent les discontinuités de l'image selon un certain critère d'homogénéité. Les fortes valeurs correspondent à d'éventuelles discontinuités tandis que les faibles valeurs correspondent à des régions homogènes. Trois H-images sont donc calculées correspondant aux trois composantes de l'espace couleur :  $H_L$ ,  $H_a$ ,  $H_b$ , et la H-image finale est obtenue en utilisant la formule suivante :

$$H = \sqrt{H_L^2 + H_a^2 + H_b^2} \quad (2)$$

Ensuite, une classification des pixels de la H-image produit une partition binaire comprenant des composantes connexes homogènes et hétérogènes. Les auteurs de [7] effectuent une croissance de régions à partir de germes sélectionnés dans les zones homogènes. En ce qui nous concerne, ce masque binaire initialise les racines et les zones indéfinies nécessaires à la segmentation locale (fig. 3.b).

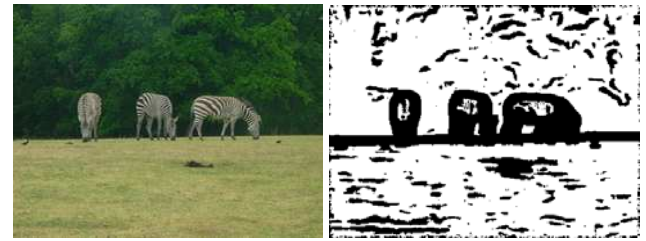
Les composantes connexes en blanc sont les racines. Elles représentent d'éventuels objets d'intérêts. Les composantes noires quant à elles représentent des hétérogénéités qui peuvent être d'éventuels contours d'objets. Les pixels de ces composantes noires sont amenés à fusionner ensemble et/ou avec une racine voisine selon le critère de similarité [8].

En comparaison du résultat généré par une pyramide classique (fig. 3.c), celui obtenu avec une segmentation locale initialisée par un masque d'homogénéité (fig. 3.d et 4.c) est plus approprié, puisqu'il comporte moins de régions mais conserve la même précision. Notons que dans les deux cas (local et global), un seuil identique a été utilisé.

## 4 Groupement orienté perception

### 4.1 Groupement de régions pyramidal

Un traitement de groupement de régions est maintenant utilisé pour simplifier d'avantage la partition issue de la segmentation. Deux contraintes doivent être respectées pour l'efficacité de ce traitement. Premièrement, seuls les meilleurs groupements locaux doivent être retenus. Ce qui signifie qu'un maximum de combinaisons de régions doit être étudié (parmi deux,



(a) Image originale

(b) Masque d'homogénéité RGB



(c) Segmentation par pyramide classique

(d) Segmentation par pyramide locale

Figure 3: Comparaison entre segmentation globale et segmentation locale

trois, quatre, ...,  $n$  voisins). Deuxièmement, le résultat ne doit pas être influencé par l'ordre des groupements.

La pyramide irrégulière a été choisie afin de réaliser l'étape de groupement pour trois raisons principales. Premièrement, sa structure de graphe est bien adaptée à la manipulation en parallèle (i.e. indépendante) de régions. Deuxièmement, les critères de groupement de régions sont facilement interchangeables. Enfin, les itérations du traitement sont simplement obtenues par génération de niveaux supplémentaires résultant des fusions entre régions.

Le graphe final de la pyramide de similarité constitue le graphe initial de la pyramide de groupement. En effet, la pyramide locale est étendue avec des niveaux supplémentaires induits par le groupement de régions.

Dans [2] les auteurs groupent seulement des paires de régions. Contrairement à leur travail, avec notre méthode, un nombre quelconque de régions peut fusionner simultanément en un seul groupement. Cela fournit plus de choix dans la stratégie de groupement et donc, plus d'adaptativité au contenu de l'image.

### 4.2 Critères de groupement

Les critères choisis pour effectuer le groupement sont dérivés de la théorie du Gestalt [9] qui n'utilise aucun modèle d'objet. La vision humaine effectue des groupements indépendants (appelés Gestalt) fondés sur cinq propriétés principales : la proximité, la similarité, la fermeture, la continuité et la symétrie [10].

Des énergies sont extraites de ces propriétés et sont calculées pour des régions ou des groupements de régions. Le but étant de sélectionner les groupements de plus faibles énergies représentant une forte pertinence visuelle. Le coût d'un



groupement est composé de plusieurs fonctions d'énergie proposées par [2].

$E_{fusion}$  est le coût de l'opération de fusion fondé sur la différence des moyennes des composantes Lab, et sur l'étude des jonctions (continuité des contours) des différentes régions du groupement.

$E_{region}$  est le coût de la région résultant d'une fusion. il peut être considéré comme le degré de pertinence du groupement potentiel (plus l'énergie est faible, plus le degré de pertinence est important). Ce coût est fondé sur la compacité, la convexité et l'aire du groupement.

La fonction d'énergie d'une région résultant d'un groupement est donnée par  $E = E_{fusion} + E_{region}$ . Une énergie faible indique un fort intérêt visuel. Au contraire, une forte valeur indique une région ou un groupement indésirable. Le but étant de réaliser le groupement qui assure la plus faible énergie localement.

### 4.3 Sélection du groupement

#### 4.3.1 Sélection du meilleur groupement local

Soit  $v_c$  un sommet,  $c \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et  $n_c$  le nombre de ses voisins. Tous les groupements incluant  $v_c$  et les différentes combinaisons de ses voisins sont considérés. Le nombre de combinaisons est donné par la formule suivante :

$$C = \sum_{j=1}^{n_c} C_{n_c}^j \quad (3)$$

$C_{n_c}^j$  étant le nombre de combinaisons de  $j$  voisins parmi  $n_c$ .

$E_{fusion}$  et  $E_{region}$  sont calculées pour chacun de ces groupements.

Soit  $g_c$  le groupement incluant  $v_c$  ayant la plus faible énergie  $E(g_c)$ .  $g_c$  est un groupement potentiel si : (1)  $g_c$  améliore localement l'énergie de la partition, (2)  $E(g_c)$  indique une forte pertinence visuelle. Si ce n'est pas le cas,  $g_c$  n'est pas retenu.

Notons que pour les calculs expérimentaux du coût de la partition, le nombre maximum de voisins par combinaisons est limité à 5 ou 6, ce qui donne  $C \leq 31$  ou  $C \leq 63$ .

#### 4.3.2 Sélection du meilleur groupement global

Un ensemble  $G$  de groupements potentiels est à présent défini. Les groupements effectivement réalisés sont sélectionnés dans  $G$  par ordre croissant des énergies. Lorsqu'un groupement  $g_s$  est sélectionné, tout groupement de  $G$  qui intersecte avec  $g_s$  est exclu. Ainsi, la fusion de chaque groupement sélectionné peut être correctement réalisée. Ces fusions engendrent, dans la pyramide, un niveau supplémentaire correspondant à la nouvelle partition.

Cette sélection assure les meilleurs groupements dans l'image complète. Le traitement de groupement est réitéré jusqu'à ce que le nombre de sommets reste stable. Ces différents niveaux de la pyramide constituent un aspect multirésolution de la méthode.

## 5 Résultats

Les différents résultats obtenus avec notre méthode sont présentés dans les figures 4, 5 et 6. Pour des images complexes

dont la dimension est d'environ  $300 \times 300$  pixels, la segmentation locale génère habituellement une partition de 100 à 200 régions. De cette partition, l'étape de groupement donne une partition de moins de 20 régions. En général, l'étape orientée similarité converge en moins de 100 niveaux et l'étape orientée perception s'étend seulement sur 10-15 étages supplémentaires.

La figure 4.d représente une partition comportant 13 régions qui définit avec une bonne précision les animaux.

Dans la figure 5.d la méthode donne seulement 2 régions dont 1 définit l'animal.

La figure 6 illustre le fait qu'augmenter le nombre de voisins par groupement peut aider à faire de meilleurs choix dans les groupements. Mais cela augmente considérablement le temps de calcul et la partition finale contient approximativement le même nombre de régions.

L'aspect multirésolution de la pyramide constitue un grand avantage dans le cas où dans les derniers niveaux de la pyramide, des objets d'intérêts sont malheureusement perdus, puisque l'utilisateur peut alors facilement parcourir les différents étages afin de les récupérer.

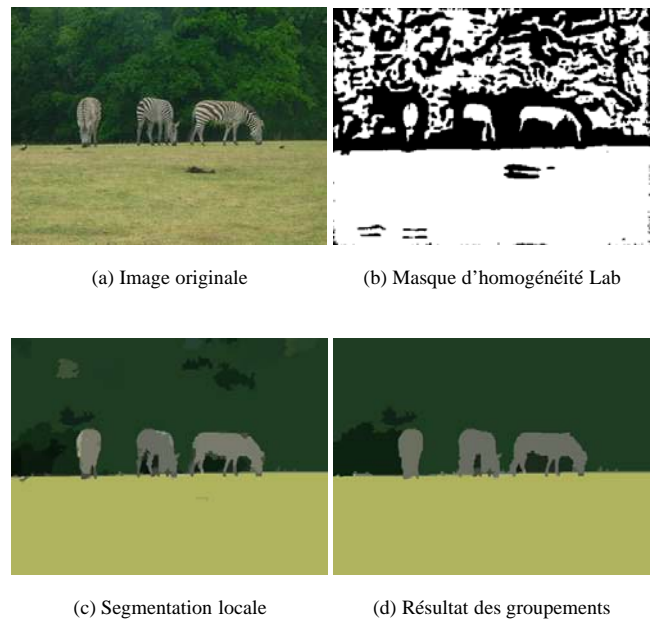


Figure 4: Différents niveaux de segmentation avec plusieurs objets d'intérêt

## 6 Conclusion

Nous avons présenté une méthode générique combinant une segmentation locale efficace qui prend en compte les informations couleurs de l'image, avec un traitement de groupement qui fusionne les régions pour engendrer des objets perceptuellement pertinents. Le résultat final est un empilement de partitions composées de quelques objets. Cette méthode est particulièrement appropriée pour décrire la structure d'un objet et/ou pour superviser la segmentation.

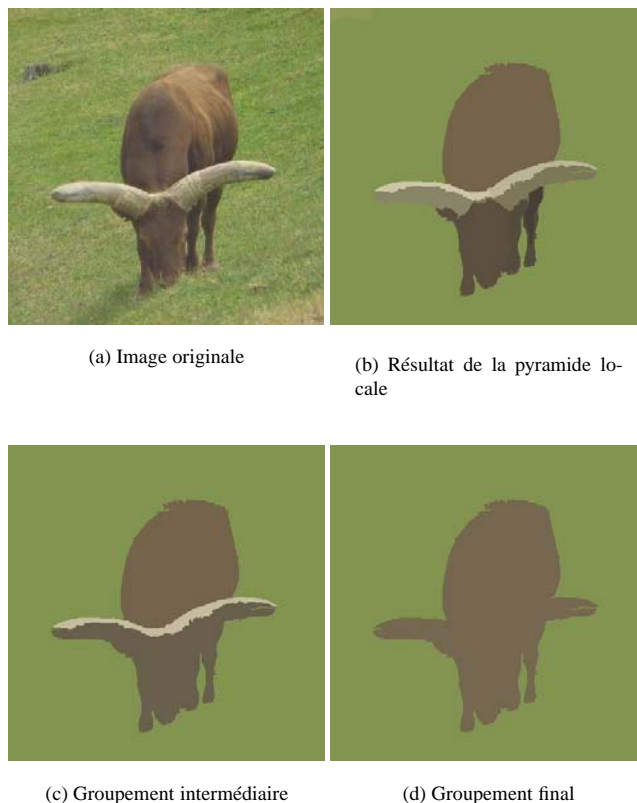


Figure 5: Différents niveaux de la segmentation d'une image comportant un objet d'intérêt

Nous travaillons actuellement sur la qualification des interactions des différentes énergies pour comprendre plus en détails la pertinence de chacune d'elles dans le voisinage local. Nous voulons aussi étendre ces travaux à la vidéo afin d'inclure les informations temporelles dans ce traitement.

## References

- [1] Hieu Tat Nguyen, Marcel Worring, and Rein Van Den Boomgaard, "Watersnakes: Energy-driven watershed segmentation," in *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, March 2003, vol. 25 (3).
- [2] Jiebo Luo and Cheng en Guo, "Perceptual grouping of segmented regions in color images," in *Pattern Recognition*, April 16 2003, pp. 2781–2792.
- [3] S.C. Zhu and A.L. Yuille, "Region competition: Unifying snakes, region growing and bayes/mdl for multiband image segmentation," in *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, September 1996, vol. 18 (9), pp. 884–900.
- [4] Ana Petrovic, Oscar Divorra Escoda, and Pierre Vandergheynst, "Multiresolution segmentation of natural images: from linear to nonlinear scale-space representations," in *IEEE Transactions on Image Processing*, august 2004, vol. 13 (8).



Figure 6: Résultats obtenus avec des groupements locaux comportant un nombre de régions maximum différent

- [5] Ming Tang and Songde Ma, "General scheme of region competition based on scale space," in *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, December 2001, vol. 23 (12).
- [6] A. Montanvert, P. Meer, and A. Rosenfeld, "Hierarchical image analysis using irregular tessellations," in *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, April 1991, vol. 13(4), pp. 307–316.
- [7] F. Jing, M. Li, H. Zhang, and B. Zhang, "Unsupervised image segmentation using local homogeneity analysis," in *Proc. IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, 2003.
- [8] J. Huart, G. Foret, and P. Bertolino, "Moving object extraction with a localized pyramid," in *7th International Conference on Pattern Recognition*, Cambridge, UK, august 2004.
- [9] M. Wertheimer, "Principles of perceptual organization," in *Readings in Perception*, 1958, pp. 115–135.
- [10] N. Zlatoff, B. Tellez, and A. Bazkurt, "Image understanding and scene models: a generic framework integrating domain knowledge and gestalt theory," in *ICIP*, Singapore, October 24-27, 2004.

# Une méthode pour le prétraitement et le calcul de matrices de crosstalk pour des images couleur issues d'une caméra tri-CCD

A. LATHUILIERE<sup>1</sup>, Y. VOISIN<sup>1</sup>, F.S. MARZANI<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire LE2I, UMR 5158, Université de Bourgogne, 12, rue de la fonderie, 71200 Le Creusot

{a.lathuiliere, y.voisin}@iutlecreusot.u-bourgogne.fr

<sup>2</sup>Laboratoire LE2I, UMR 5158, Université de Bourgogne, UFR Sc. & Tech. – Aile Sciences de l'Ingénieur, B.P. 47870, 21078 Dijon Cedex

franck.marzani@u-bourgogne.fr

**Résumé** – Ce travail s'inscrit comme outil dans le cadre de la reconstruction 3D à l'aide d'une projection de lumière structurée couplée à une caméra 3CCD. Le principe est simple : il faut disposer une caméra 3CCD et un vidéo-projecteur comme un système de stéréovision classique, devant la scène à étudier. L'utilisation d'une lumière structurée lève beaucoup d'ambiguïtés par rapport à un système de stéréovision à deux caméras. Par contre, l'utilisation de la couleur pour coder la projection réduit le champ d'action du système aux objets blancs ou pâles. Pour pouvoir déterminer la couleur en même temps que la reconstruction 3D de l'objet, il faut avoir des images couleurs parfaitement nettoyées. Nous allons donc décrire une méthode de prétraitements des images couleurs issues de la caméra 3CCD utilisée. Les images ainsi traitées peuvent être utilisées dans le modèle couleur que nous suivrons pour remonter aux informations de couleur de l'éclairage structuré pour lever les ambiguïtés de mise en correspondance, ainsi qu'à la couleur de la scène aux points considérés.

**Abstract** – This work is as a tool within the framework of the 3D reconstruction using a structured light projection associated with a 3CCD camera. The principle is easy: it is necessary to lay out a 3CCD camera and a LCD projector like a traditional stereovision system, in front of the studied scene. The use of a structured light raises a lot of ambiguities compared to a stereovision system with two cameras. However, the use of the color to code projection reduces the use of the system to white or pale objects. To determine the color and the 3D reconstruction of the object at the same time, it is necessary to have perfectly cleaned color images. We thus will describe a method of pre-processing of the color images from the 3CCD camera used. The images thus treated can be used in the color model which we will follow to give information of color of structured light to raise ambiguities of matching, and the color of the scene at the considered points.

## 1. Introduction

Dans le cadre de la reconstruction 3D, il existe plusieurs techniques répertoriées dans [1]. Nous utilisons un système à éclairage structuré codé en couleur. Dans notre cas, le codage est utilisé à deux fins :

- différencier les motifs projetés et ainsi permettre la reconstruction d'objets 3D par triangulation ;
- déterminer la couleur de chacun des points reconstruits.

Déterminer un code couleur nécessite l'utilisation d'une caméra couleur ou multispectrale. Plusieurs types de caméra couleur sont disponibles : mono-CCD à codage Bayer par exemple, Fovéon ou tri-CCD. Nous avons testé différents types de caméra. La caméra à codage Bayer nécessite un logiciel spécifique pour le décodage de la couleur. De plus, la résolution est divisée par trois à cause du codage. C'est pourquoi nous avons choisi d'utiliser une caméra tri-CCD. Le laboratoire possède une caméra multispectrale à filtres interférentiels. Cette dernière a permis une étude et une correction des différents signaux parasites et bruits qu'il peut y avoir lors d'une acquisition [3]. Sa manipulation étant relativement plus lourde que celle d'une caméra couleur, nous avons appliqué les corrections évoquées ci-dessus à une caméra tri-CCD. Toutes ces corrections sont faites pixel par

pixel. A la suite de quoi, nous pouvons calculer la matrice de crosstalk entre les trois canaux de la caméra tri-CCD, également pixel par pixel. Rappelons qu'une matrice de crosstalk est nécessaire pour le calibrage de la caméra afin de décrire la superposition parasite entre les trois composantes couleur en sortie du capteur. Une fois l'étape de calibrage effectuée, on peut corriger chaque image acquise pour remonter à la couleur de l'objet observé.

## 2. Prétraitement des images couleurs

Dans le cas d'une caméra multispectrale à filtres interférentiels, cette étape de pré-traitement est primordiale. En effet, l'acquisition des images à travers les différents filtres implique des paramètres d'acquisition différents entre chaque filtre (temps d'exposition, chemin optique, ...). La reconstruction du spectre de réflectance en chaque pixel nécessite un modèle d'acquisition et la connaissance parfaite des paramètres entrant en jeu. La qualité de la reconstruction est améliorée si on prend en compte les signaux parasites et les bruits systématiques de la caméra utilisée [3].

Bien que pour une caméra tri-CCD l'image obtenue puisse être utilisée directement, la prise en compte des signaux parasites et autres bruits débouche sur des images beaucoup

plus propres. En effet, les pixels ne réagissent pas de la même manière à un même illuminant : c'est une des caractéristiques intrinsèques des capteurs CCD. Nous avons utilisé une caméra Sony DXC-9100P. La scène utilisée pour calibrer est la carte couleur Macbeth ColorChecker® au format A4 avec 24 patches.



FIG. 1 : image de la mire de Macbeth

Décrivons brièvement la méthode utilisée pour définir les paramètres de pré-traitement, méthode basée sur [3].

Toutes les images décrites résultent d'une moyenne pixel à pixel appliquée sur un ensemble d'images, 6 dans notre cas. Cette étape est nécessaire afin d'éliminer les bruits aléatoires.

La première image est celle dite d'offset [O]. Les conditions d'acquisition sont les suivantes : la caméra est fermée et dans le noir, le temps d'exposition très court. Cette image sera ôtée de chaque acquisition réalisée par la suite.

L'image suivante est celle relative au bruit thermique [T]. Les conditions sont similaires mais cette fois le temps d'exposition est identique à celui utilisé pour l'acquisition. Elle sera également retranchée des acquisitions suivantes.

La dernière image est celle de Flat-Field [F] ou PLU (Plage de Lumière Uniforme). C'est l'image d'un support blanc, plat et uniforme, avec un temps d'exposition choisi si possible identique à celui de l'acquisition. Si le temps d'exposition choisi ne convient pas pour cette image, il faut acquérir également une nouvelle image de bruit thermique [T<sub>F</sub>] prenant en compte le nouveau temps d'exposition. K est la couleur moyenne de cette image, couleur qui aurait due être présente en chaque pixel.

Ainsi, les images de prétraitement étant calculées, toute image acquise [R] peut maintenant être corrigée suivant l'équation suivante afin d'obtenir le signal utile [U] :

$$[U] = \frac{[R] - [O] - [T]}{[F] - [O] - [T_F]} K \quad (1)$$

### 3. Couplage (crosstalk) entre les 3 canaux d'une caméra tri-CCD

#### 3.1 Mise en place du calcul de crosstalk (A)

Calibrer un ensemble vidéo-projecteur/caméra en vue de faire de la reconstruction 3D permet de savoir, à partir d'une image projetée par le vidéo-projecteur, ce qui est réellement projeté sur la scène et à partir de l'image issue de la caméra, le signal qui entre réellement dans la caméra.

Dans [5], un système de projection couplé à une caméra est mis en place pour avoir à l'écran toujours une image parfaite pour l'observateur même si l'écran a des défauts. Dans ce but, une méthode de calibrage radiométrique de la caméra a été créée [4]. Bien que cette méthode paraisse correspondre à notre demande, elle ne permet pas de remonter à la couleur de l'objet observé. De plus, la méthode de calibrage du système complet nécessite de savoir exactement à quel pixel de la caméra correspond un pixel de l'image projetée. Cette étape étant notre but : la reconstruction 3D, la méthode décrite ne convient pas pour notre application.

[2] choisit de mesurer une seule matrice de crosstalk, nommée A, pour toute l'image. Le modèle couleur utilisé est le suivant :

$$C = A Q P(I) + C_0 \quad (2)$$

Où C est la couleur relevée dans l'image caméra, C<sub>0</sub> est la couleur relevée dans l'image caméra sous lumière ambiante et I est la couleur consigne à projeter par le vidéo-projecteur. Ce sont des vecteurs de taille 3. A est la matrice de crosstalk, c'est une matrice de taille 3x3. Q est la couleur de la scène. C'est une matrice 3x3, dont seule la diagonale est non nulle et représente les composantes R, V et B de la couleur de l'objet. P est considéré comme trois transformations non linéaires et indépendantes selon les trois canaux. Dans l'article, P est traduit par trois LUT (Look Up Table ou table de conversion). Il faut remarquer que le calcul de la LUT inverse est nécessaire et est possible car les trois transformations sont non linéaires mais monotones donc inversibles.

Par contre, la détermination de A se fait par un processus de calibrage colorimétrique à l'aide d'un spectrophotomètre. La méthode décrite est intéressante mais si l'on souhaite s'affranchir du spectrophotomètre, il faut trouver une autre solution pour déterminer la matrice de crosstalk A.

[6] utilise exactement le même formalisme que [2]. Par contre, ils considèrent que cette matrice A est composée de trois colonnes dans lesquelles ils placent les couleurs obtenues dans l'image caméra correspondante en projetant successivement une image plane rouge, puis verte, puis bleue. Cette méthode est très simple mais ne permet pas un calibrage suffisamment précis pour déterminer, par la suite, la couleur de l'objet observé.

Tous ces travaux ainsi que ceux présentés ici portent sur le calcul de la matrice de crosstalk d'une caméra tri-CCD.

Dans un premier temps, nous avons calculé une seule matrice A pour toute l'image selon le modèle couleur décrit dans [2]. Sa détermination se fait par minimisation aux valeurs propres en prenant une image de la mire de Macbeth. Les valeurs des couleurs des patches et les couleurs relevées dans l'image issue de la caméra sont connues sous la forme RVB. Nous nous sommes affranchi de l'éclairage ambiant en faisant la soustraction de C<sub>0</sub> et le vidéo-projecteur n'est pas en fonctionnement.

L'étape suivante est la détermination de A pour chaque pixel de la caméra. La méthode de détermination est très similaire à celle pour un A unique. La seule contrainte est que

pour utiliser une minimisation en chaque pixel de la caméra, il faut que chaque pixel 'voit' tous les patches de Macbeth. L'acquisition des images correspondantes est décrite à la fin du paragraphe suivant.

### 3.2 Résultats

Le tableau 1 présente les résultats obtenus en faisant l'acquisition d'une image de la mire de Macbeth avec une caméra tri-CCD. Pour pouvoir effectuer la correction des images décrites dans le paragraphe 2, il faut acquérir les images d'offset, de bruit thermique, de PLU comme décrit dans le paragraphe 2. Toutes ces images sont prises 6 fois. La moyenne des 6 images est effectuée pour chaque signal parasite. Le signal utile peut maintenant être calculé.

Tout d'abord, les résultats sont donnés pour un calcul de A unique pour toute l'image. C'est pourquoi, une seule image de la mire de Macbeth suffit pour cette première partie

d'expérience. Chaque patch est considéré et sa couleur moyenne est calculée. A partir de ces couleurs moyennes et de A unique pour toute l'image, les couleurs de la scène sont recalculées. On obtient donc une couleur recalculée moyenne par patch. Si le modèle couleur utilisé était parfait, on obtiendrait à nouveau les couleurs théoriques des patches de Macbeth.

La première colonne montre la couleur RVB théorique de chacun des patches de Macbeth. La deuxième colonne montre les couleurs moyennes recalculées en utilisant la matrice de crosstalk à partir de l'image non corrigée. La troisième colonne montre les couleurs moyennes recalculées en utilisant la matrice de crosstalk à partir de l'image corrigée. Dans les deux cas, la colonne err donne l'erreur quadratique entre les couleurs théoriques de Macbeth et celles qui viennent d'être calculées. La valeur de err permet une estimation de l'utilité de la correction des images.

TAB. 1 : première colonne : couleurs des patches de Macbeth. Deuxième colonne : l'image issue de la caméra est non corrigée, la matrice A est calculée sur toute l'image et inversée pour recalculer les couleurs réellement vues par la caméra. Troisième colonne : même chose mais en corrigeant l'image. Quatrième colonne : les calculs ont été fait sur les pixels de (340 225) à (394 287), une matrice A est calculée en chaque pixel à partir des images corrigées

Macbeth				Image non corrigée (1A)				Image corrigée (1A)				Images corrigées (A/pixel)			
R	V	B	couleur	mR	mV	mB	err	mR	mV	mB	err	mR	mV	mB	err
94	28	13		82	39	32	25.02	75	20	15	20.71	75	20	12	20.64
241	149	108		255	134	119	23.28	251	129	111	22.56	245	129	110	20.49
97	119	171		79	103	187	28.91	86	108	190	24.56	86	108	182	19.05
90	103	39		61	108	41	29.50	61	101	39	29.07	61	102	38	29.03
164	131	196		137	130	242	53.35	133	123	237	52.02	131	122	221	42.37
140	253	153		113	252	230	81.60	109	255	225	78.42	108	254	201	57.70
255	116	21		239	43	0	77.63	242	51	0	69.53	240	53	0	68.08
7	47	122		49	54	179	71.15	35	42	170	55.79	31	40	140	30.81
222	29	42		237	23	59	23.45	234	20	59	22.67	231	19	57	20.15
69	0	68		24	7	69	45.55	51	35	86	43.28	49	22	85	34.25
187	255	19		146	255	27	41.77	157	255	33	33.11	156	255	29	32.57
255	142	0		255	154	15	19.21	255	149	11	13.04	255	148	9	10.82
0	0	142		28	28	126	42.71	16	8	110	36.66	12	5	109	35.47
64	173	38		45	153	36	27.66	44	155	33	27.37	42	155	34	28.71
203	0	0		145	0	6	58.31	165	5	16	41.53	162	1	5	41.32
255	217	0		255	255	0	38.00	255	254	0	37.00	255	253	0	36.00
207	3	124		200	33	143	36.19	201	32	142	34.66	200	28	135	28.20
0	148	189		36	126	198	43.14	20	113	189	40.31	17	112	188	39.82
255	255	255		253	255	222	33.06	254	252	223	32.16	253	251	223	32.31
249	249	249		254	249	226	23.54	250	247	226	23.11	249	246	227	22.20
180	180	180		149	149	144	56.73	152	150	145	53.94	151	153	144	53.54
117	117	117		69	71	71	80.85	88	91	84	51.05	87	90	83	52.77
53	53	53		46	48	45	11.75	48	47	45	11.18	47	47	44	12.37
0	0	0		23	23	19	37.67	0	0	0	0.00	0	0	0	0.00

On s'aperçoit que les résultats, présentés dans le tableau 1, sont entachés d'une erreur importante. La matrice A trouvée supporte mal l'inversion à cause du mauvais conditionnement du système.

L'idée de cet article est de corriger les images puis de calculer A pour chaque pixel de la caméra. Par contre, pour

utiliser à nouveau une minimisation, il faut que chacun des pixels de la caméra 'voient' les 24 patches de Macbeth. Les résultats de la reconstruction des couleurs sont meilleurs.

Pour que chaque pixel physique de la caméra 'voit' tous les patches de Macbeth, nous avons pris 24 images de la mire de Macbeth. Les calculs de A pour chacun des pixels d'une



image nécessitent un temps de calcul important. Nous nous sommes donc limités à une étude sur les pixels de (340 225) à (394 287). Ce choix a été fait pour la position centrale : les 24 images ont été prises en déplaçant successivement la mire devant la caméra. Dans chacune des 24 images, les pixels considérés 'voient' respectivement un patch. Chaque pixel possède une couleur et une matrice A. La couleur peut donc être recalculée. La quatrième colonne du tableau 1 montre la moyenne des couleurs recalculées par patch.

En utilisant simplement une carte Macbeth, cette méthode permet de déterminer la couleur de la scène en chaque point de mesure.

#### 4. Conclusion

La méthode utilisée pour corriger les images multispectrales peut parfaitement s'appliquer à des images couleur RVB. Le but de cette manipulation a été de démontrer que si les images issues d'une caméra tri-CCD sont prétraitées, le calcul du crosstalk est plus fiable. De plus, si les corrections sont faites au niveau de chacun des pixels, le crosstalk devient plus représentatif et permet de faire une mesure de la couleur de la scène vue par la caméra en chacun des pixels de la caméra.

L'étape suivante du système dans lequel s'inscrit ce travail, est la mise en correspondance de l'éclairage structuré et des points colorés retrouvés dans l'image caméra correspondante. Ces prétraitements permettent de déterminer avec plus de précision de quelle couleur projetée était un point lumineux dans l'image caméra. La mise en correspondance est donc plus aisée.

Notre système doit être capable de déterminer en une seule fois la mise en correspondance et la couleur de la surface observée. Nous utilisons un codage de De Bruijn pour lever l'ambiguïté de la mise en correspondance. Par contre, avec une seule projection, la détermination de la mise en correspondance n'est pas possible. Il faut donc projeter au minimum trois couleurs différentes en un point de la scène.

Par l'intermédiaire d'une optimisation selon les différentes projections, il est possible de déterminer en même temps la mise en correspondance et la couleur de l'objet. Par contre, il faut que le calibrage couleur de la caméra tri-CCD utilisée soit optimal, pour avoir l'information couleur, contenue dans les images caméra, la plus précise possible.

#### Références

- [1] J. Battle, E. Mouaddib and J. Salvi. *A Survey: Recent Progress in Coded Structured Light as a Technique to Solve the Correspondence Problem*. Pattern Recognition 31(7), pp 963-982, July 1998.
- [2] D. Caspi, N. Kiryati and J. Shamir. *Range imaging with adaptive color structured light*. IEEE PAMI, vol. 20, no. 5, may 1998.
- [3] A. Mansouri, F.S. Marzani, P. Gouton. *Systematic noise characterization of a CCD camera: application to a multispectral imaging system*. Complex Systems Intelligence and Modern Technological Applications (CSIMTA), Special Session on Color Image Processing and Analysis for Machine Vision, Cherbourg, France, pp. 640-644, September 2004.
- [4] T. Mitsunaga, S.K. Nayar. *Radiometric Self Calibration*. Proc. Of Computer Vision and Pattern Recognition '99, vol. 1, pp. 374-380, June 1999.
- [5] K. Nayar, H. Peri, M. Grossberg. P.N. Belhumeur. *A Projection System with Radiometric Compensation for Screen Imperfections*. International Workshop on Projector Camera Systems, ICCV2003.
- [6] L. Zhang, B. Curless, and S. M. Seitz. *Rapid Shape Acquisition Using Color Structured Light and Multi-pass Dynamic Programming*. In Proceedings of the 1st International Symposium on 3D Data Processing, Visualization, and Transmission (3DPVT), Padova, Italy, June 19-21, 2002, pp. 24-36.

# Traitement non linéaire uniforme pour la reconstruction d'une mosaïque chromatique répartie aléatoirement

Brice CHAIX DE LAVARENÈ<sup>1</sup>, David ALLEYSSON<sup>2</sup>, Jeanny HÉRAULT<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire des Images et des Signaux  
46 Avenue Félix Viallet, 38031 Grenoble Cedex, France

<sup>2</sup>Laboratoire de Psychologie et NeuroCognition  
Université Pierre Mendès France, BP 47, 38040 Grenoble Cedex 9, France  
brice.chaix@lis.inpg.fr,  
david.alleysson@upmf-grenoble.fr,  
jeanny.herault@lis.inpg.fr

**Résumé** – Dans la mosaïque des cônes de la rétine, les informations spatiale et chromatique sont mélangées, c'est-à-dire que la carte achromatique (définie comme l'information spatiale sans contenu chromatique) est confondue avec la carte chromatique (définie comme la distribution de l'information chromatique à luminance constante). Nous avons précédemment montré [1] que dans le cas d'un arrangement régulier des photorécepteurs dans la mosaïque - tel est le cas des appareils photographiques numériques -, un algorithme linéaire est capable d'extraire l'information spatiale achromatique et d'interpoler l'information chromatique. En effet, la régularité de la disposition des photorécepteurs permet la localisation dans le plan de Fourier de la luminance et des signaux d'opposition de couleur, ce qui en retour permet leur séparation par un filtrage linéaire spatialement invariant. Cependant dans le cas d'un arrangement irrégulier, tel qu'on le trouve dans la rétine, la luminance et la chrominance sont également mélangées dans le plan de Fourier, et un algorithme non linéaire est alors nécessaire. Quel algorithme est le meilleur? Nous montrons qu'un filtrage linéaire uniforme suivi d'une normalisation non linéaire de chacun des canaux est capable d'estimer précisément l'information achromatique de la mosaïque des cônes.

**Abstract** – In the cone mosaic, spatial and chromatic information is mixed, i.e. the achromatic map (defined as the spatial information without chromatic content) is confounded with the chromatic map (distribution of chromatic information at constant luminance). We have previously shown [1] that in case of a regular arrangement of chromatic samples in the mosaic, a linear algorithm is able to extract achromatic spatial information and to interpolate chromatic information. Indeed, the regularity of chromatic samples permits the localization of luminance and chromatic-opponent signals in the Fourier spectrum which in turn permits their separation using uniform linear filtering. However, in the case of an irregular arrangement, luminance and chrominance are no longer localized and a non linear algorithm is needed. Which non linear algorithm is best? We show that a uniform linear filtering followed by a non linear normalisation of each channel is able to estimate accurately the achromatic information in the cone mosaic.

## 1 Introduction

L'acquisition des images dans la rétine humaine et dans la plupart des caméras numériques fait intervenir une représentation spatio-chromatique réduite pour laquelle une seule composante chromatique est définie à chaque position spatiale (Figure 1). Dans la rétine humaine trois types de cônes sensibles à trois gammes de longueurs d'onde, tapissent la rétine et il ne peut y avoir plusieurs cônes au même endroit. Dans les caméras numériques avec un seul capteur on applique généralement une matrice de filtres couleurs devant la caméra, permettant d'allouer une sensibilité chromatique particulière à chacune des cellules photosensible. On dit que cette image est une mosaïque (on parle aussi de la mosaïque des cônes dans la rétine) puisque toute la variété chromatique n'est pas accessible à chaque position spatiale.

Cette représentation implique un mélange de l'information spatiale et chromatique de l'image échantillonnée. En effet, si l'on constate une variation de la réponse d'un photorécepteur, on ne peut pas dire si elle résulte d'une variation de l'intensité lumineuse de la source de lumière ou d'une variation de ses

composantes chromatiques. Dans une image couleur normale définie avec trois composantes chromatiques par position spatiale on peut déterminer l'origine de la variation. Si la moyenne (ou moyenne pondérée) des trois composantes chromatiques varie on dit que c'est l'intensité lumineuse qui a changé et dans les autres cas on dit que c'est la variété chromatique. Dans une image avec une seule composante chromatique par position spatiale, il n'est pas possible de calculer la moyenne des variations chromatique en un seul point, on utilise les échantillons voisins pour réaliser cette estimation. On peut alors penser que cette estimation sera effectuée avec une résolution réduite car sur une portion plus grande de l'espace. De plus, si l'on considère chacun des canaux chromatiques séparément, la limite théorique de fréquence spatiale qui permet cette estimation sans erreur (i.e. sans repliement spectral) est celle fixée par le théorème d'échantillonnage et correspond à la moitié de la fréquence d'échantillonnage de chacun des canaux chromatiques.

En fait, on peut montrer que cette limite est franchissable du fait de la corrélation qui existe entre les trois canaux de couleur. La représentation des images en mosaïque peut se décomposer

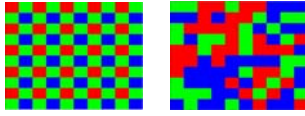


FIG. 1 – Mosaïques régulière (de Bayer) et irrégulière.

en une somme de l'information spatiale achromatique - la luminance - et de l'information spatiale chromatique - la chrominance [2]. De plus, dans le cas d'une répartition régulière (périodique) des composantes chromatiques, l'information de chrominance est localisée dans le spectre de Fourier permettant une estimation de la luminance et de la chrominance par filtrage linéaire uniforme (Figure 2) [1]. Grâce à la corrélation entre les canaux, la largeur de bande de la chrominance est inférieure à la largeur de bande de la luminance, permettant une représentation de l'information spatiale plus grande que celle imposée par le théorème d'échantillonnage définie sur chacun des canaux. On peut également trouver les conditions de fréquences spatiales de l'information achromatique et de la corrélation entre les canaux qui optimise la représentation.

En revanche, dans le cas où la répartition n'est pas périodique, la chrominance n'est pas localisée mais diluée dans le spectre de Fourier (Figure 2). Dans ce cas l'information spatiale et chromatique ne sont pas à supports disjoints dans le spectre de Fourier mais se recouvrent mutuellement. Un filtrage linéaire uniforme ne peut s'appliquer dans ce cas, puisque ce dernier est seulement capable de sélectionner des bandes de fréquences spatiales, mais pas de séparer des informations qui occupent les mêmes composantes de fréquences. Un filtrage non linéaire et/ou non uniforme est nécessaire. Dans cet article nous montrons que l'utilisation d'une non linéarité après un filtrage uniforme permet d'estimer de manière efficace l'information spatiale.

## 2 Informations spatiale et chromatique

### 2.1 Modèle d'échantillonnage

Une image couleur  $\vec{T}(x, y)$  est une matrice de vecteurs à trois dimensions dans l'espace couleur correspondant. On peut donc écrire :

$$\vec{T}(x, y) = \{C_i(x, y)\}, \text{ avec } i \in \{R, G, B\} \quad (1)$$

$C_i(x, y)$  représente chacun des canaux couleurs. Dans tout ce qui suit, l'indice  $i$  représentera un canal chromatique (R, G ou B). Cette forme de représentation ne permet pas d'isoler directement les propriétés spatiales et chromatiques de la scène originale. En effet, une variation de  $C_i(x, y)$  peut-être due à une variation d'intensité lumineuse ou une variation de la diversité chromatique de la scène. D'une manière générale, la reconstruction de l'information lumineuse est déterminée par l'estimation de la moyenne entre les canaux couleurs, supposant que la variation en phase des informations chromatiques est due à une augmentation de l'intensité lumineuse, alors qu'une variation en contre phase correspond à une variation de teinte. Parfois l'estimation de la moyenne est pondérée, permettant de donner une importance proportionnellement plus grande à une des gammes de longueurs d'onde comparée aux autres. Nous

écrivons donc la luminance comme :

$$\phi(x, y) = \sum_i \alpha_i C_i(x, y) \quad (2)$$

avec  $\alpha_i \in [0, 1]$  la pondération de chacun des canaux de couleur à la contribution de la luminance et tels que leur somme soit égale à 1. Nous remarquons que si la moyenne pondérée  $\phi$  ne change pas, alors que les valeurs individuelles des canaux sont modifiées, c'est une modification de teinte qui a eu lieu. De manière complémentaire, on définit la chrominance  $\vec{\psi}(x, y)$  comme la différence entre l'image originale et la luminance. Il suit par définition que :

$$\vec{\psi}(x, y) = \underbrace{\{C_i(x, y) - \phi(x, y)\}}_{\psi_i(x, y)} \quad (3)$$

soit

$$\begin{aligned} \psi_i(x, y) &= C_i(x, y) - \sum_i \alpha_i C_i(x, y) \\ &= (1 - \alpha_i) C_i(x, y) - \sum_{(j \neq i)} \alpha_j C_j(x, y) \end{aligned} \quad (4)$$

Puisque l'image couleur est un vecteur à trois dimensions et que la luminance est un scalaire à une seule dimension, la chrominance est définie comme un vecteur à trois dimensions<sup>1</sup>. Chacune des composantes  $\psi_i(x, y)$  de ce vecteur s'exprime par une différence entre les canaux chromatiques, donc une variation conjointe des canaux de chromatique ne modifiera pas le signal de chrominance. La chrominance porte donc l'information de variation chromatique indépendamment de l'intensité lumineuse de la lumière incidente. Dans le cas d'une image avec une seule composante chromatique par position spatiale, cette décomposition ne peut pas avoir lieu car elle fait intervenir trois composantes pour l'estimation de la luminance et de la chrominance à chacune des positions. L'utilisation des valeurs voisines est donc indispensable. Mais, la représentation en luminance et chrominance a-t-elle un sens lorsque la répartition des valeurs chromatiques est aléatoire ? En fait, on peut écrire une image avec une seule composante chromatique par position spatiale comme une image couleur dans laquelle les informations chromatiques sont sous échantillonnées [1] :

$$\vec{T}_{mo}(x, y) = C_i(x, y) m_i(x, y) \quad (5)$$

Avec  $m_i(x, y)$  les fonctions de sous échantillonnage aléatoire de chacun des canaux chromatiques. Ces fonctions sont mutuellement exclusives et prennent les valeurs 1 ou 0 suivant que la position  $(x, y)$  contient le photorécepteur  $i$  ou non. On peut également écrire cette image comme un scalaire :

$$I_{Mo}(x, y) = \sum_i C_i(x, y) m_i(x, y) \quad (6)$$

Les fonctions de modulation peuvent se décomposer en une partie constante qui correspond à la proportion de photorécepteur de type  $i$  présente dans la mosaïque et une partie variable à moyenne nulle de la manière suivante :

$$m_i(x, y) = p_i + \tilde{m}_i(x, y) \quad (7)$$

<sup>1</sup> en fait deux dimensions d'un point de vue algébrique, puisque (2) et (3) impliquent que  $\sum_i \alpha_i \psi_i(x, y) = 0$  pour toute position spatiale  $(x, y)$ .



Cette décomposition des fonctions d'échantillonnage se retrouve au niveau de l'image en mosaïque :

$$I_{Mo}(x, y) = \underbrace{\sum_i p_i C_i(x, y)}_{\phi(x, y)} + \underbrace{\sum_i C_i \tilde{m}_i(x, y)}_{\psi_{mod}(x, y)} \quad (8)$$

Apparaît alors un terme de luminance cohérent avec la définition donnée en (2) pour une image couleur pleinement échantillonnée, avec  $\alpha_i = p_i$  la proportion de chacun des photorécepteurs dans la mosaïque. Cela signifie que la luminance n'est pas affectée par le sous-échantillonnage induit par la mosaïque. En revanche le terme correspondant à la chrominance se voit modulé par les fonctions de modulation  $\tilde{m}_i$ . Même s'il existe de nombreuses façons de décomposer les fonctions de modulation  $m_i(x, y)$  en somme de deux éléments, celle qui est proposée ici (équations (7),(8)) garantie que l'information de luminance est achromatique et que l'information de chrominance est à luminance constante, soit sans composante d'intensité lumineuse.

## 2.2 Point de vue spectral

De plus cette décomposition a une conséquence sur la représentation en fréquences spatiales des informations de luminance et de chrominance. Puisque la composante de luminance résulte de l'estimateur  $p_i$ , elle ne dépend pas de la modulation. Par conséquent, sa représentation en fréquence n'est pas modifiée. Par contre, la chrominance a une valeur moyenne nulle car  $\sum_{x,y} \tilde{m}_i(x, y) = 0$  et se retrouve modulée par les fonctions  $m_i$ .

Dans le cas où la mosaïque est régulière, les transformées de Fourier des fonctions de modulation peuvent être explicitement calculées [1] et correspondent à des impulsions de Dirac situées sur les milieux des bords et dans les coins du plan de Fourier. La chrominance est par conséquent modulée en haute fréquence (Fig.2). Ainsi la fréquence limite imposée par le théorème d'échantillonnage pour la luminance n'est pas  $f_e - f_e/2$  mais  $(f_e - B_{chr})/2$ , avec  $f_e$  la fréquence d'échantillonnage d'un canal chromatique isolé et  $B_{chr}$  la largeur de bande de la chrominance. Comme la chrominance possède la propriété d'être à bande étroite dans les images naturelles, une plus grande bande passante est allouée à la luminance. Ainsi l'algorithme d'interpolation est très efficace tant du point de vue de la qualité de l'interpolation (acuité spatiale sous-réserve de non repliement spectral luminance/chrominance) que du point de vue de la complexité algorithmique (linéarité).

En revanche dans le cas où la mosaïque est irrégulière, l'information de chrominance se retrouve modulée non pas par des porteuses hautes fréquences, mais par des porteuses aléatoires. On peut montrer, en passant par le calcul de l'autocorrélation, que ces porteuses possèdent une Densité Spectrale de Puissance moyenne (DSPm) répartie sur l'ensemble du spectre, et dont l'allure globale dépend du type d'aléatoire utilisé dans la construction de la mosaïque. Par exemple dans le cas où les échantillons sont répartis en suivant une loi de probabilité uniforme sur la surface de l'image, la DSPm possède un spectre plat, celui d'un bruit blanc. Cela signifie que la chrominance modulée va se répartir sur l'ensemble du plan de Fourier. On peut en fait maîtriser l'allure spectrale des fonctions de modulation en apportant des contraintes sur la position des photorécepteurs. Par exemple, insérer une contrainte de distance minimale

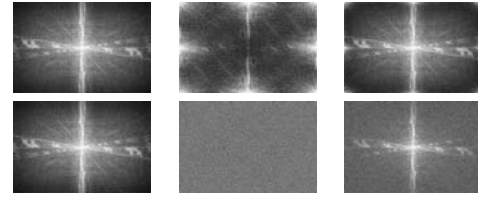


FIG. 2 – Spectres d'amplitude de la luminance, de la chrominance modulée et de l'image en mosaïque. La 1<sup>re</sup> ligne correspond au cas de la mosaïque régulière, la 2<sup>de</sup> à celui de la mosaïque irrégulière. Dans les deux cas on constate que la mosaïque correspond à la somme de la luminance et de la chrominance modulée.

entre deux récepteurs permet de creuser le spectre au niveau des basses fréquences. Yellott a montré que c'est ce type d'échantillonnage qui est présent dans la rétine [3]. On peut légitimement se demander pour quelle(s) raison(s) il serait intéressant d'utiliser une mosaïque irrégulière plutôt qu'une mosaïque régulière, étant donné que d'un point de vue computationnel les algorithmes linéaires sont plus efficaces. En fait la différence réside au niveau des artefacts que produisent ces deux types d'échantillonnage. Dans le cas d'une mosaïque régulière, les artefacts sont causés par le repliement spectral entre la chrominance et la luminance. Leur énergie est donc localisée en un point précis du spectre, se manifestant par des structures très régulières auxquelles le système visuel humain est sensible. Au contraire dans le cas d'une mosaïque irrégulière les artefacts de chrominance auront une énergie étalée et se retrouveront sous forme de «bruit», c'est-à-dire une information non cohérente et moins perceptible. La luminance n'est ainsi plus affectée par le problème de repliement spectral avec la chrominance, mais est affectée par un bruit de chrominance.

## 3 Reconstruction de l'image couleur

### 3.1 Principe

Dès lors que la luminance et la chrominance occupent la même région dans le plan de Fourier, on ne peut plus sélectionner la luminance par filtrage passe-bas uniforme. Remarquons que la première approximation de l'équation (7) n'est valable que si l'on considère l'image dans sa globalité. En effet si on calcule les densités  $p_i$  localement (c'est-à-dire sur un voisinage autour de chaque pixel), alors les  $p_i$  ne sont pas constants sur l'ensemble de l'image mais ils fluctuent autour de  $p_i$ , du fait du caractère aléatoire. Si bien que la luminance estimée par filtrage passe-bas uniforme est :

$$\tilde{\phi}(x, y) = \sum_i p_i^{loc}(x, y) C_i(x, y) \quad (9)$$

avec  $p_i^{loc}$  dépendant de la position spatiale, de moyenne  $p_i$ . Mais dans notre modèle la définition de la luminance est basé sur une contribution constante des canaux chromatiques sur l'ensemble de l'image (équation (8)), cela signifie que  $\tilde{\phi}(x, y)$  contient de l'information de chrominance. Ainsi pour retrouver une luminance cohérente avec notre modèle, c'est-à-dire dont la contribution des canaux chromatiques est indépendante de la position, une normalisation locale de la contribution des diffé-



FIG. 3 – Exemple d’images reconstruites à partir de la grille régulière de Bayer (à gauche) et d’une grille irrégulière (à droite). On relève de types d’artefacts différents.

rents canaux est nécessaire :

$$\phi(x, y) = \sum_i \frac{p_i}{p_i^{loc}(x, y)} (p_i^{loc}(x, y) C_i(x, y)) \quad (10)$$

Cette normalisation correspond au rapport entre  $p_i$  la contribution du canal  $i$  à l’estimation de la luminance prévue par le modèle et  $p_i^{loc}(x, y)$  la contribution locale du canal  $i$  à la position  $(x, y)$ . La contribution locale est estimée par filtrage passe-bas de la grille d’échantillonnage comportant uniquement les récepteurs de type  $i$ . Il faut bien entendu veiller à choisir un filtre dont la fréquence de coupure est suffisamment basse pour que la contribution locale ne soit pas nulle.

Une fois la luminance estimée, celle-ci est soustraite à la mosaïque afin d’obtenir la chrominance sous-échantillonnée et spatialement multiplexée. La chrominance étant à bande étroite dans les images naturelles, elle est facilement interpolée en utilisant de nouveau une convolution normalisée, c’est-à-dire un filtrage passe-bas normalisé localement par la densité en échantillons. La figure 3 montre un exemple de reconstruction utilisant cette méthode.

Il est intéressant de noter qu’il existe une analogie dans l’estimation de la luminance entre le cas d’une répartition régulière et celui d’une répartition irrégulière des récepteurs. Dans le premier cas, l’algorithme par sélection de fréquence utilise un filtrage passe-bas, technique utilisée pour interpoler des signaux échantillonnés par un pas régulier. Dans le second cas, l’estimation de la luminance est une sorte de «convolution normalisée» [4], technique adaptée quant à elle à l’interpolation de signaux échantillonnés aléatoirement.

### 3.2 Comparaison

En pratique, nous limitons notre étude au cas où la mosaïque est une grille régulière, mais sur laquelle les photorécepteurs sont disposés aléatoirement, avec les probabilités  $p_i$  associées. Les tests ont été effectués pour deux types de grilles : une où les choix des récepteurs sont indépendants des voisins (bruit blanc), et une où une contrainte de distance minimale entre deux récepteurs de même type est imposée (pseudo bruit bleu).

Il existe dans la littérature à notre connaissance un seul article [5] faisant état d’un algorithme d’interpolation spécifiquement adapté à une mosaïque chromatique irrégulière. Cet algorithme est basé sur une détection de contour qui permet d’adapter l’interpolation suivant que l’on se trouve sur un contour ou non. Il existe par ailleurs de nombreux algorithmes d’interpolation de signaux échantillonnés aléatoirement. Nous avons

également choisi de comparer la présente méthode avec l’interpolation disjointe de chaque canal chromatique par convolution normalisée [4] ainsi que par l’algorithme de Papoulis-Gerchberg [6] adapté à la dimension deux. Ce dernier étant un algorithme itératif de reconstruction de signaux à bande limitée, de haute complexité en terme computationnel. Les résultats moyennés sur une base de 23 images sont consignés dans le tableau 1. Il est à noter que dans le cas de l’algorithme de Papoulis-Gerchberg, le choix des paramètres optimaux en terme de PSNR ne correspond pas à celui en terme de qualité visuelle. Nous avons retenu le meilleur PSNR obtenu.

TAB. 1 – Comparaison des méthodes

PSNR (dB)	[4]	[5]	[6]	Proposée
bruit blanc	27,9	28,2	27,84	30,7
(pseudo) bruit bleu	28,9	29,0	29,75	32,4

## 4 Conclusion

Ce travail fait apparaître que la reconstruction d’image définie par une mosaïque d’échantillons chromatiques arrangés aléatoirement peut se faire en utilisant une normalisation dépendant du nombre d’échantillon de chacune des composantes chromatiques dans un voisinage local après avoir fait un filtrage uniforme sur chaque canal chromatique. C’est-à-dire que cette reconstruction ne nécessite pas forcément un algorithme non linéaire et non uniforme complexe. Ce résultat est par ailleurs compatible en première approximation avec les fonctions de filtrage (connections latérales fixes entre neurones voisins dans la rétine) et de normalisation (loi non-linéaire adaptative dans la rétine).

## Références

- [1] D. Alleysson, S. Süsstrunk et J. Héroult. *Linear color demosaicing inspired by the human visual system*, IEEE Transactions on Image Processing, avril 2005.
- [2] D. Alleysson et J. Héroult. *Interpolation d’images couleurs sous échantillonnées par un modèle de perception*, GRETSI’2001, Toulouse, 2001.
- [3] J.I. Yellott Jr. *Spectral analysis of spatial sampling by photoreceptors : topological disorder prevents aliasing*, Vision Research, 22, pp.1205-1210, 1982.
- [4] F.A. Marvasti, C. Liu et G. Adams. *Analysis and recovery of multidimensional signals from irregular samples using nonlinear and iterative techniques*, Signal Processing, 36 :13–30, 1994.
- [5] W. Zhu, K. Parker et M.A. Kriss. *Color Filter Arrays Based on Mutually Exclusive Blue Noise Patterns*, Journal of Visual Communication and Image Representation, vol.10, pp.245-267, 1999.
- [6] P.J. Ferreira/ *Interpolation and the Discrete Papoulis-Gerchberg Algorithm* IEEE Transactions on Signal Processing, vol.42, n.10, octobre 1994

# Invariants intégraux pour l'indexation d'images omnidirectionnelles

Cyril CHARRON<sup>1</sup>, Ouidad LABBANI-IGBIDA<sup>1</sup>, El Mustapha MOUADDIB<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Centre de Robotique, d'Électrotechnique et d'Automatique  
7 rue du Moulin neuf, 80000 Amiens, France

Cyril.Charron@u-picardie.fr, Ouidad.Labbani@u-picardie.fr, Mouaddib@u-picardie.fr

**Résumé** – Dans cette étude, nous nous intéressons à la localisation d'un robot mobile par indexation d'images omnidirectionnelles. La localisation est qualitative et le robot doit déterminer la pièce dans laquelle il se trouve. L'indexation est réalisée à partir d'invariants intégraux calculés sur les images omnidirectionnelles. Notre méthode utilise l'intégrale de Haar dans laquelle nous intégrons un modèle du capteur omnidirectionnel. L'approche intégrale nous permet de prendre en compte simplement la géométrie du capteur ainsi que les déplacements du robot pour le calcul des invariants. La robustesse de cette nouvelle méthode à des déplacements dans une pièce est supérieure à une méthode basée sur l'histogramme.

**Abstract** – The present study proposes an innovative approach to mobile robot's localization using omnidirectional image indexation. The localization is qualitative and the robot has to determine the room it is situating in. Indexation is completed thanks to integral invariants computed on omnidirectional images. Our method starts from the Haar integral to which we include a model of the omnidirectional sensor. The integral approach allows us to cope simply with the sensor geometry and with the robot's movements to compute the invariant. The robustness of this invariant to the movements of the robot in a given room is improved when compared to an histogram based method.

## 1 Introduction

La localisation dans des environnements intérieurs ou extérieurs est une condition importante pour l'autonomie des robots mobiles. De nombreuses méthodes pour la localisation d'un robot mobile ont été développées. Elles peuvent être classées en trois catégories : les méthodes odométriques [1], les méthodes basées sur des amers [2] et les méthodes basées sur l'indexation d'images [3]. Notre travail s'intègre dans cette dernière catégorie où nous proposons une méthode de construction de caractéristiques invariantes sur des images omnidirectionnelles en vue de localiser qualitativement un robot mobile. La localisation qualitative permet une estimation du lieu où se trouve le robot sans référence à une pose précise. L'intérêt de notre approche est qu'elle ne nécessite pas d'extraction de caractéristiques géométriques des images, ni de modélisation *a priori* de l'environnement. Ceci la rend attractive pour une application temps réel sur le robot.

Une revue intéressante des différentes méthodes d'indexation peut être trouvée dans [4] et [9]. Les histogrammes sont très souvent utilisés dans les systèmes de recherche d'images. Ils ont été appliqués à la localisation de robots mobiles à partir d'images omnidirectionnelles [3] pour leur représentation compacte des images, leur invariance aux rotations (ce qui est très intéressant pour les images omnidirectionnelles) et leur faible sensibilité à de petites translations. Toutefois, lors de grandes translations, de nombreux histogrammes de référence doivent être appris pour que la localisation soit fiable. En effet, les histogrammes ne sont pas robustes à de grands déplacements. L'idée de base de notre approche est d'appliquer un for-

malisme mathématique de calcul d'invariant (l'intégrale de Haar) pour construire des distributions de caractéristiques invariantes adaptées au capteur omnidirectionnel. Cette construction est adaptée de façon à tenir compte du modèle géométrique du capteur omnidirectionnel et des mouvements potentiels du robot. Les distributions résultantes sont robustes à des positions différentes du robot dans la scène.

Après avoir introduit les bases théoriques de la construction d'invariants intégraux de caractéristiques locales, nous présentons notre approche intégrant simultanément un modèle du capteur omnidirectionnel et les effets des mouvements du robot sur les images. Les résultats expérimentaux présentés ici montrent une amélioration de l'invariance de ces distributions par rapport à l'histogramme classique, et donc de la localisation qualitative.

## 2 Construction de l'invariant

La signature invariante d'une image est calculée à partir de l'intégrale de Haar et prend la forme d'une distribution. Dans ce qui suit, nous décrirons la méthode de construction de cet invariant et son adaptation à notre problème, une caméra omnidirectionnelle embarquée sur un robot mobile.

Le point de départ pour la construction de l'invariant est l'intégrale de Haar. Elle consiste en un parcours de l'espace des paramètres du groupe de transformation. Elle est généralement exprimée sous la forme :

$$I_{Haar} = \frac{1}{|G|} \int_G f \circ g(\mathbf{x}) d\mathbf{g} \quad \text{avec} \quad |G| = \int_G d\mathbf{g}$$

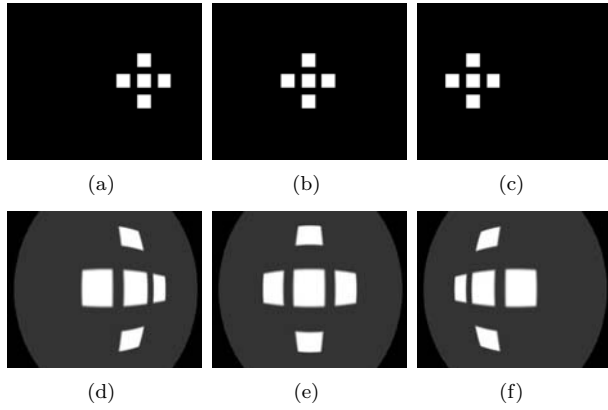


FIG. 1 – Translation dans le plan perpendiculaire à l'axe d'une caméra affine (a, b et c). Translation dans le plan perpendiculaire à l'axe d'une caméra munie d'un capteur omnidirectionnel (d, e et f).

où  $G$  est le groupe de transformation et  $g(\mathbf{x})$  l'action d'un élément  $g$  de ce groupe sur le vecteur  $\mathbf{x}$ . Cet invariant a été utilisé en recherche d'image par Siggelkow [8] et pour la localisation de robot mobile par Wolf [5], bien que l'intégrale de Haar n'était pas explicitement utilisée.

## 2.1 Le groupe de transformation

Notre intérêt porte sur les transformations de l'image obtenue par une caméra. La nature des transformations est due aux mouvements du robot et au processus de projection (Fig. 1). Dans ce travail, l'étude des mouvements du robot a été limitée aux translations sur le sol. Les translations transforment le point 3-D (exprimé dans le référentiel du robot) en le point  $\mathbf{x} + \mathbf{t}$  avec  $\mathbf{t}$  une translation dans le plan  $(Ox, Oy)$ .

La caméra est munie d'un capteur omnidirectionnel, produisant des transformations qui peuvent être séparées en une projection centrale sur le miroir parabolique suivie d'une projection orthographique sur le plan image. La projection du point  $\mathbf{x}$  sur le miroir est modélisée par l'équation (1) où  $\mathbf{x}_m$  définit le point correspondant à  $\mathbf{x}$  sur la surface du miroir (2). Le point  $\mathbf{u} = (u, v)$  de l'image est obtenu par une projection orthographique de  $\mathbf{x}_m$  le long de l'axe optique de la caméra (3) (alignée suivant  $Oz$ ).  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_u, \alpha_v)$  et  $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0)$  sont les paramètres intrinsèques de la caméra, et  $h$  est le *latus rectum* du miroir parabolique.

$$\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$z_m = \frac{h^2 - (x_m^2 + y_m^2)}{2h} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_u & 0 & 0 & u_0 \\ 0 & \alpha_v & 0 & v_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - z}} \quad (4)$$

$$g(\mathbf{M})[\mathbf{u}] = \mathbf{M}[\mathbf{u}'] \quad \text{and} \quad \mathbf{M}'[\mathbf{u}] = \mathbf{M}[\mathbf{u}'] \quad (5)$$

Après un mouvement, l'image  $\mathbf{M}[\mathbf{u}]$  est transformée en l'image  $\mathbf{M}'[\mathbf{u}] = \mathbf{M}[\mathbf{u}']$ . Le point  $\mathbf{u}'$  défini par l'équation (5) est l'image du point  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{t}$  résultant de la translation du robot dans l'environnement.

L'intégrale de Haar peut être formulée pour l'image  $\mathbf{M}$  en considérant les translations  $\mathbf{t}$  du robot. L'intégrale de Haar s'écrit alors :

$$I_{Haar} = \frac{1}{|G|} \int_G f \circ g(\mathbf{M}[\mathbf{u}]) d\mathbf{t}$$

Notre objectif est d'évaluer cette intégrale à partir d'une seule image, en simulant un parcours virtuel de la pièce dans laquelle se situe le robot. La fonction  $f$  est une fonction noyau à support compact choisie arbitrairement<sup>1</sup>. Supposons, sans perte de généralité que  $f(\mathbf{M}) = \mathbf{M}[\mathbf{0}]$ . L'intégrale de Haar peut être écrite :

$$\begin{aligned} I_{Haar} &= \frac{1}{|G|} \int_G f(\mathbf{M}'[\mathbf{u}]) d\mathbf{t} \\ &= \frac{1}{|G|} \int_G \mathbf{M}'[\mathbf{0}] d\mathbf{t} \\ &= \frac{1}{|G|} \int_G \mathbf{M}[\mathbf{0}'] d\mathbf{t} \\ &= \frac{1}{|G|} \int_G \mathbf{M}[\mathbf{l}] d\mathbf{t} \end{aligned} \quad (6)$$

où  $\mathbf{l} = (l, m)$  est la translation depuis l'origine exprimée dans les coordonnées images telle que

$$\mathbf{l} = \boldsymbol{\alpha} \frac{h\mathbf{t}}{\sqrt{t^2 + z^2 - z}}. \quad (7)$$

L'intégrateur  $d\mathbf{t}$  est formulé dans le référentiel lié au monde. Nous utilisons la formule du changement de variable pour des intégrales multidimensionnelles (8) afin d'exprimer l'intégrale de Haar dans les coordonnées images, en utilisant la relation  $\mathbf{t} = r(\mathbf{l})$ .

$$\int_G \mathbf{M}[\mathbf{l}] d\mathbf{t} = \int_{r(G)} \mathbf{M}[\mathbf{l}] D_r(\mathbf{l}) d\mathbf{l} \quad (8)$$

$D_r(\mathbf{l})$  est le module de la matrice jacobienne. Après calcul et en substituant  $D_r(\mathbf{l})$  dans l'intégrale, on obtient :

$$I_{Haar} = \frac{1}{|G|} \int_{r(G)} \mathbf{M}[\mathbf{l}] \left| \frac{4h^2 \cdot z^2}{(h^2 - l^2)^3} (h^2 + l^2) \right| d\mathbf{l}.$$

Tous les termes de cette expression, sauf  $z$ , sont endogènes à l'image.  $z$  est choisi arbitrairement sur une sphère de rayon  $R$  centrée sur le capteur, et peut dès lors s'écrire en fonction de  $\mathbf{l}$  (9) en utilisant (1), (2) et (4). Ce choix revient à faire l'hypothèse d'un monde hémisphérique entourant le robot. Cette contrainte peut être levée en intégrant les mouvements réels (et non virtuels) du robot (ce travail est en cours de validation).

$$z = R \frac{l^2 - h^2}{l^2 + h^2} \quad (9)$$

## 2.2 La fonction noyau

Dans le paragraphe précédent, le noyau  $f(\mathbf{M}) = \mathbf{M}[\mathbf{0}]$  a été retenu. D'un point de vue photométrique, ce noyau prend uniquement la valeur du niveau de gris du pixel.

<sup>1</sup>Dans la pratique, le choix du noyau  $f$  peut conditionner la stabilité et la robustesse de l'intégrale

L'évaluation de l'intégrale de Haar peut ainsi être interprétée comme une moyenne de groupe de l'information lumineuse de l'image. Le pouvoir descriptif et discriminant de la valeur moyenne est cependant pauvre comparé à celui d'un histogramme, par exemple. Dans le même sens, on peut définir un nouveau noyau [8] :

$$f_i(\mathbf{M}) = \begin{cases} \text{créneau}(\mathbf{M}[\mathbf{0}] - ndg_i) \\ = \begin{cases} \frac{-|\mathbf{M}[\mathbf{0}] - ndg_i|}{\Delta ndg_i} + 1 & \text{si } |\mathbf{M}[\mathbf{0}] - ndg_i| < \Delta ndg_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

où  $ndg_i$  est un niveau de gris de référence et  $\Delta ndg_i$  est la distance séparant  $ndg_i$  et  $ndg_{i+1}$ . Une telle fonction noyau est préférée à un delta de Kronecker pour sa continuité et pour le recouvrement partiel des supports entre plusieurs de ces fonctions. Ceci permet d'éviter des effets de bord aux extrema du support (si un niveau de gris d'un pixel se trouve sur le bord du support d'une fonction  $f_i$ , une petite variation dans l'environnement ou dans le processus de formation de l'image peut le modifier et le faire tomber dans le support d'une des fonctions adjacentes à  $f_i$ ).

En évaluant l'intégrale avec ce noyau, on peut calculer la probabilité pour chaque point de l'image d'appartenir à une certaine gamme de niveaux de gris (définie par la largeur du support de la fonction noyau), la probabilité de chaque point étant pondérée par  $D_r(l)$ . Considérons  $F = \{f_i\}_{i=1,\dots,n}$ , une famille de fonctions qui partitionne l'espace des niveaux de gris. On obtient alors une distribution d'invariants  $I_i$ .

Cette distribution ressemble à un histogramme classique. On montre que ce dernier est identique aux distributions d'invariants dans le cas d'une caméra affine au lieu du capteur omnidirectionnel utilisé ici (si on considère des transformations euclidiennes dans un plan parallèle au plan image d'une caméra affine, alors  $D_r(l)=1$ , et l'histogramme classique est obtenu à partir de l'intégrale de Haar).

Chaque  $f_i$  définit un invariant  $I_i$  et l'ensemble des  $I_i$  est une distribution discrète de caractéristiques locales invariantes à des rotations, des changements d'échelle et de luminosité. La reconnaissance d'une image est alors réalisée en fonction d'une mesure de distance entre sa distribution associée et les distributions enregistrées.

### 3 Mesure de distance entre distributions

Le choix de la mesure de distance entre deux distributions discrètes est un problème qui a été abondamment discuté. Il est généralement admis que l'on peut le séparer en deux parties distinctes [7] : une mesure de distance dans l'espace des caractéristiques dont la distribution est étudiée, que l'on nomme la distance au sol (la distance entre deux couleurs dans l'espace colorimétrique par exemple), et une mesure de distance entre chaque distribution vue comme un tout.

Un premier type de mesure de distance entre une distribution  $H = \{h_i\}_{i=1,\dots,n}$  et une distribution  $K = \{k_i\}_{i=1,\dots,n}$  consiste en une comparaison des termes de  $H$  et  $K$  de même indice. Ce type de mesure est sensible à la largeur

de l'intervalle de partitionnement : si elle est trop étroite, des caractéristiques similaires ne seront pas appariées ; si elle est trop large, des caractéristiques différentes ne seront pas distinguées. L'intersection et la divergence de Jeffrey appartiennent à ce type de mesure. Ici, la distance entre les caractéristiques n'est pas prise en compte. Pour la prendre en compte plus finement et ainsi pouvoir tolérer de petites variations de la distribution, on peut autoriser la comparaison entre différents termes de  $H$  et de  $K$ , gardant à l'esprit la distance propre à l'espace des caractéristiques sous-jacent. La distance quadratique, la mesure de Kolmogorov-Smirnov et la distance des transporteurs de terre (10) (DTT, de l'anglais *EMD*) [7] appartiennent à cette catégorie. Dans (10),  $f_{ij}$  est le flux de matière entre le point  $i$  et le point  $j$  qui minimise un travail et les  $d_{ij}$  sont les coefficients d'une matrice représentant les distances entre ces points.

$$\text{EMD}(H, K) = \frac{\sum_i \sum_j d_{ij} f_{ij}}{\sum_i \sum_j f_{ij}} \quad (10)$$

Une étude comparative menée par [6] montre que la divergence de Jeffrey et la DTT donnent les meilleurs résultats. Dans nos expériences, la mesure DTT s'est avérée meilleure que la mesure de Jeffrey et nous l'avons retenue.

## 4 Application

Afin de valider notre méthode de localisation qualitative, nous la comparons à un histogramme classique. Nos expériences visent à étudier l'évolution de la mesure de distance entre deux distributions reliées par le mouvement du robot séparant deux prises d'images. De plus, notre but est aussi d'étudier la sensibilité de notre méthode aux rotations, qui n'ont pas été incluses au groupe de transformation.

L'implémentation a été réalisée sous Matlab et une *dll* a été compilée pour accélérer les calculs. Pour une image ( $576 \times 768$  pixels) et sur un P-IV à 2,4GHz, le calcul prend environ 0,5s.

Des prises de vue ont été effectuées dans quatre pièces de notre laboratoire dont les dimensions sont approximativement de 5m par 5m (excepté l'atelier environ deux fois plus grand). Le robot s'est déplacé sur le sol en suivant une grille de 3m par 3m centrée dans chaque pièce. 25 positions sont définies sur cette grille.

### 4.1 Invariance aux translations

De façon à clarifier la dépendance de la mesure de distance à l'amplitude du mouvement, la distance DTT est calculée pour chacun des couples de positions possibles de la grille (325 couples) et mise en relation avec la distance physique séparant les prises de vue. Ceci est effectué pour notre méthode et pour celle basée sur les histogrammes. Les résultats obtenus sont alors moyennés pour chacune des distances physiques (euclidiennes) possibles et ce calcul est répété pour l'ensemble des quatre pièces étudiées. Les résultats sont résumés dans le tableau 1. Notre méthode produit en moyenne des distances plus faibles de

16% par rapport à la méthode basée sur l'histogramme. En moyenne, notre méthode se comporte mieux, *i.e.* produit des variations plus faibles de distance au sein d'une pièce donnée.

Il faut maintenant vérifier le comportement de la mesure de distance lorsque des distributions de deux pièces différentes sont comparées. Pour ce faire, nous avons déterminé pour chaque pièce la distribution (resp. histogramme) dont les distances aux autres distributions (resp. histogrammes) de cette pièce sont minimales. Ceci nous permet de déterminer un bon prototype pour chaque pièce. Ce prototype est ensuite comparé à l'ensemble des distributions (resp. histogrammes) des autres pièces. La distance moyenne est présentée dans le tableau 1. Les deux méthodes offrent des résultats similaires. La distance moyenne est environ 4 fois supérieure à la plus grande distance que l'on a obtenue au sein d'une même pièce.

TAB. 1 – Variation de la mesure DTT (en unité arbitraire) pour des translations et des rotations. Notre méthode (*distri.*) et la méthode basée sur l'histogramme (*histog.*) sont comparées grâce à une différence relative (*différence rel.*).

	Translation (cm)					
	0	60	85	120	134	170
histog. ( $\times 10^{-2}$ DTT)	0,0	15,8	25,0	17,6	20,8	22,2
distri. ( $\times 10^{-2}$ DTT)	0	12,6	19,3	14,8	16,8	18,7
différence rel. (%)	0	-14	-16	-9	-14	-12
	Rotation (degré)					
	30	90	150	210	270	330
histog. ( $\times 10^{-2}$ DTT)	1,5	2,4	2,4	2,2	2,4	2,4
distri. ( $\times 10^{-2}$ DTT)	2,2	4,0	3,2	3,5	3,7	2,9
différence rel. (%)	33	69	34	63	54	24
Changement de pièce moyenne sur le labo.						
histog. ( $\times 10^{-2}$ DTT)	90					
distri. ( $\times 10^{-2}$ DTT)	88					
différence rel. (%)	2					

## 4.2 Invariance aux rotations

Pour tester les rotations, 35 prises de vues séparées par une rotation de  $10^\circ$  autour de l'axe du capteur ( $Oz$ ) ont été stockées. La première distribution (correspondant à l'image prise à  $0^\circ$ ) est choisie comme référence. Pour chaque distribution obtenue lors de la rotation du robot, la distance DTT à cette référence est calculée. Les deux méthodes produisent des distances restant dans une faible gamme de valeurs lorsqu'on les compare aux mesures obtenues lors des translations (tableau 1). Ainsi, les deux méthodes peuvent être considérées comme produisant des invariants aux rotations.

## 5 Conclusion

Nous avons présenté une méthode de construction d'invariants basée sur l'intégrale de Haar et nous l'avons adaptée au cas de la caméra omnidirectionnelle. L'avantage principal de cette méthode est qu'elle permet de tenir

compte des mouvements réels du robot pour construire l'invariant. Nous sommes partis des mouvements du robot dans le monde (translation dans le plan du sol) et nous avons considéré leur effet sur des images omnidirectionnelles. Nous avons montré que cette méthode améliore sensiblement les résultats en terme de réduction de distance entre des distributions d'une même pièce par rapport à ce qui est obtenu avec des histogrammes classiques. De plus, la distance entre des distributions de pièces différentes est aussi élevée que lorsque des histogrammes sont utilisés, ce qui est une bonne propriété en vue de l'intégration dans un système de classification. Enfin, l'invariant obtenu est aussi robuste aux rotations bien qu'elles n'aient pas été explicitement prises en compte dans le groupe de transformation retenu. En conclusion, cette méthode de construction et le choix d'un noyau géométrique adapté à la topologie spécifique du capteur omnidirectionnel pourrait d'avantage améliorer la reconnaissance de lieux (moyennant l'utilisation d'un système de classification pour traiter les distances fournies par notre méthode).

## Remerciements

Ce travail a été financé par la région Picardie (Pôle DIVA).

## Références

- [1] J. Borenstein, B. Everett, and L. Feng. *Navigating Mobile Robots : Systems and Techniques*. A. K. Peters, Ltd., Wellesley, MA, February 1996.
- [2] J. Castellanos and J. Tardos. *Mobile Robot Localization and Map Building - A Multisensor Fusion Approach*. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [3] J. Gozalez and S. Lacroix. Rover localization in natural environments by indexing panoramic images. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 1365–1370, 2002.
- [4] F. Idris and S. Panchanathan. Review of image and video indexing techniques. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 8(2) :146–166, June 1997.
- [5] J. Wolf W. Burgard and H. Burkhardt. Using an image retrieval system for vision-based mobile robot localization. In N. Sebe M. S. Lew and J. P. Eakins, editors, *Proc. of the Int. Conf. on Image and Video Retrieval (CIVR)*, pages 108–119, 2002.
- [6] Jan Puzicha, Yossi Rubner, Carlo Tomasi, and Joachim M. Buhmann. Empirical evaluation of dissimilarity measures for color and texture. In *Int. Conf on Computer Vision (ICCV)(2)*, pages 1165–1172, 1999.
- [7] Yossi Rubner, Carlo Tomasi, and Leonidas J. Guibas. The earth mover's distance as a metric for image retrieval. *Int. Journal of Computer Vision*, 40(2) :99–121, November 2000.
- [8] S. Sigglekow. *Feature histograms for content-based image retrieval*. PhD thesis, Universitat Freiburg im Breusgau, 2002.
- [9] M.J. Swain and D.H. Ballard. Color indexing. *Int. Journal of Computer Vision*, 7(1) :11–32, 1991.

# Simulation d'images échographiques à partir de données scanner X.

S. Laguitton<sup>1</sup>, J.-J. Patard<sup>2</sup>, J.-L. Dillenseger<sup>1</sup>

<sup>1</sup>LTSI, INSERM, Univ. Rennes, 35042 Rennes, France.

<sup>2</sup>Service d'Urologie, Hôpital de Pontchaillou, CHR Rennes, Rennes, France.

Soizic.Laguitton@univ-rennes1.fr, jean-jacques.patard@chu-rennes.fr, jean-louis.dillenseger@univ-rennes1.fr

**Résumé** – L'objectif de notre travail est de proposer une méthode rapide de simulation d'images échographiques à partir des informations contenues dans un volume abdominal acquis en scanner X. Précédemment, Bamber et Dickinson ont proposé un modèle de prédiction de l'apparence de l'image finale à partir de la seule contribution des diffuseurs. Ce modèle toutefois n'a été créé et n'a été appliqué que pour être utilisé sur des petites régions. Nous proposons de généraliser ce modèle pour la simulation d'échographie à l'échelle des images abdominales en prenant en compte les propriétés acoustiques des tissus, la géométrie et les paramètres de la sonde échographique (géométrie circulaire, nombre et taille des transducteurs, fréquence des pulses ultrasonores, ...).

**Abstract** – The goal of our work is to propose a fast ultrasound images simulation from an abdominal CT volume. This method is based on a model elaborate by Bamber and Dickinson that predict the appearance and properties of a B-Scan ultrasound image from the distribution of point scatterers. However the main assumption of this method is that the US pulse and beam shape are assumed invariant. So this model can only be applied on small regions of interest. We propose to extend this model for abdominal ultrasound image simulation by taking into account the acoustical tissues properties and the geometry and the characteristics of the ultrasound transducers (circular probe, transducers number and size, US pulse frequency, etc.).

## 1. Introduction

Pour de nombreux gestes chirurgicaux, les techniques d'imagerie utilisées pour l'établissement du planning préopératoire divergent de celles utilisées lors du geste lui-même. C'est le cas par exemple en urologie, et plus particulièrement de la ponction rénale où le planning préopératoire se base sur l'acquisition de volume en scanner X, volume à haut niveau d'information anatomique, et où la ponction elle-même est menée sous guidage échographique, technique d'imagerie plus délicate à interpréter. La connexion entre ces deux techniques d'imagerie pose des problèmes de corrélation entre information et d'interprétation ou plus encore d'apprentissage de l'interprétation des images échographiques par rapport au volume issu du scanner X. Une solution à ces problèmes peut être donnée par la simulation d'images échographique à partir du volume scanner X.

Dans le domaine de la simulation d'images échographiques, deux grandes approches ont été proposées :

- La simulation et le suivi de la propagation du champ ultrasonore sortant et revenant aux transducteurs. C'est le cas de l'étude de Jensen [1] où les organes sont modélisés par des ensembles de diffuseurs. L'image est formée par l'étude simulée de l'interférence entre les transducteurs, de la propagation physique et temporelle du champ et de son interaction avec les diffuseurs. La précision de cette

simulation se fait par contre au détriment de la vitesse d'exécution<sup>1</sup>.

- L'étude de la prédiction de l'apparence de l'image finale à partir de la seule contribution des diffuseurs. L'étude pionnière a été le travail de Bamber et Dickinson [3] sur l'étude de la relation entre l'interaction champ ultrasonore/diffuseurs et l'apparence produite sur l'image échographique. Si cette relation se résume à la seule réflexion directe diffuse, le principe de la formation de l'image échographique est alors d'établir une carte des diffuseurs et de la convoluer avec un modèle du champ ultrasonore. Cette technique a été validée sur la simulation d'échographie à haute résolution de petits morceaux de tissus.

Notre objectif est de proposer des images simulant l'échographie abdominale et plus particulièrement l'échographie rénale. Le modèle de Bamber et Dickinson, s'il présente l'avantage de la simplicité et de la rapidité, n'a été créé et appliqué que pour être utilisé sur des petites régions de grande résolution. Notre contribution a consisté à adapter ce modèle à des images abdominales acquises en scanner X.

## 2. Méthode

Les données de départ sont des images extraites du volume scanner X dont la taille des pixels (ou des voxels le cas échéant) est connue. La géométrie et les paramètres de la

<sup>1</sup> En 2000, Jensen rapporte les résultats d'une version rapide de son algorithme. Le calcul d'une image 64x64 avec 200.000 diffuseurs lui prenait plus de 3 heures [2].

sonde échographique sont également connus (sonde circulaire, nombre et taille des transducteurs, fréquence des pulses ultrasonores, facteur de qualité du spectre d'émission des pulse, etc.).

## 2.1 Modèle de Bamber et Dickinson.

Il est basé sur une modélisation linéaire<sup>2</sup> des caractéristiques d'un signal ultrasonore réfléchi de façon diffuse par un milieu non homogène. Ce modèle qui dérive de l'équation d'onde décrit le signal comme une intégration de réponses impulsionnelles :

$$I_{3D}(x, y, z) = \iiint H_{3D}(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \cdot T(\alpha, \beta, \gamma) \cdot d\alpha \cdot d\beta \cdot d\gamma \quad (1)$$

où :

- y est la direction de propagation (direction axiale) de l'onde, x sa direction latérale et z sa direction d'élévation.
- $I_{3D}$ , l'image radiofréquence résultante
- $H_{3D}$ , la réponse impulsionnelle 3D du système c'est-à-dire l'image radiofréquence 3D d'un point,
- T, la fonction qui décrit l'échogénéité du tissu. Elle dépend directement de l'impédance acoustique du tissu.

Pour une petite région, la réponse impulsionnelle  $H_{3D}$  peut être considérée comme invariante dans l'espace. La formule (1) peut alors s'écrire sous la forme d'une convolution :

$$I_{3D}(x, y, z) = H_{3D}(x, y, z) * T(x, y, z) \quad (2)$$

La réponse impulsionnelle  $H_{3D}$  est généralement modélisée comme une onde modulée par une enveloppe gaussienne :

$$H_{3D}(x, y, z) = e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{\sigma_{ax}^2} + \frac{y^2}{\sigma_{lat}^2} + \frac{z^2}{\sigma_{el}^2} \right)} \cos(2\pi f y) \quad (3)$$

où f est la fréquence spatiale du pulse et  $\sigma_{ax}$ ,  $\sigma_{lat}$  et  $\sigma_{el}$  sont représentatives respectivement de la longueur, la largeur et l'épaisseur du pulse.  $\sigma_{ax}$  est lié directement à la bande passante du spectre d'émission du pulse.  $\sigma_{lat}$  et  $\sigma_{el}$  découlent de la forme des transducteurs.

T, la fonction qui décrit l'échogénéité du tissu s'écrit :

$$T(x, y, z) = \frac{1}{2Z_0} \frac{\delta}{\delta y^2} Z_{3D}(x, y, z) \quad (4)$$

où  $Z_0$  est le niveau de référence de l'impédance acoustique et  $Z_{3D}$  l'impédance acoustique du tissu.

L'image radiofréquence d'une coupe, pour un  $z_0$  donné se détermine alors par :

$$I(x, y) = I_{3D}(x, y, z_0) = H_{3D}(x, y, z_0) * \frac{\delta}{\delta y^2} (Z_{3D}(x, y, z)) \quad (5)$$

L'image échographique en B-scan finale  $I_B$  est alors obtenue par une détection d'enveloppe de l'image radiofréquence. Celle-ci peut s'effectuer par :

<sup>2</sup> Le terme « linéaire » vient de l'utilisation de l'approximation de Born pour résoudre l'équation de la propagation d'ondes en milieu inhomogène.

$$I_B = |I(x, y) + j \cdot \text{Hilbert}[I(x, y)]| \quad (6)$$

où Hilbert[] est la transformée de Hilbert.

Le modèle de Bamber et Dickinson présente la particularité d'avoir une réponse impulsionnelle  $H_{3D}$  invariante dans l'espace. Il n'est donc valable que pour des petits morceaux de tissus. Nous l'avons donc adapté à notre problématique de simulation d'échographies de plus grandes tailles acquises avec des sondes particulières.

## 2.2 Adaptation du modèle de Bamber et Dickinson.

Cette adaptation se fait comme suit :

1) Prise en compte de la géométrie spatiale de la sonde circulaire.

Dans ce type de sonde, les ondes ultrasonores présentent une direction de propagation différente pour chaque transducteur. La solution est de se ramener aux conditions géométriques de propagation parallèle des ondes du modèle de Bamber et Dickinson en travaillant en géométrie polaire :

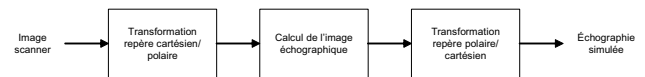


Fig. 1 : Prise en compte de la géométrie spatiale de la sonde circulaire

2) Rééchantillonnage dans l'axe de propagation afin de respecter le critère de Shannon.

La taille des pixels de départ (de l'ordre de 0,7 mm) est généralement plus grande que la longueur d'onde du signal ultrasonore (avec une vitesse de propagation des ultrasons dans les tissus de 1540 m/s et une fréquence de pulse de 3,5 MHz, la longueur d'onde est de  $\lambda = c/f = 0,44$  mm).  $H_{3D}$  est directement liée à la longueur d'onde du pulse (cf. éq. 3). Afin de respecter le théorème de Shannon, l'image scanner en coordonnées polaires est rééchantillonnée par interpolation linéaire le long de l'axe de propagation (voir Fig. 2-b)

3) Modélisation macroscopique des tissus.

Les tissus sont modélisés par leur impédance acoustique. Une segmentation simple de l'image scanner permet de différencier plusieurs classes de tissus (os, tissus mous, eau, graisse). L'impédance acoustique connue de ces tissus est alors attribuée aux pixels de l'image.

Par contre, d'un point de vue macroscopique, l'impédance acoustique n'est pas homogène (variations dues aux structures microscopiques –réseau capillaire, etc.). Cette inhomogénéité n'est pas accessible directement à partir des coupes scanner. Nous la modéliserons par une texture de bruit gaussien seuillé dont l'écart type varie en fonction de la classe du tissu (voir Fig. 2-c).

4) Prise en compte des propriétés de la sonde et modélisation adaptative de  $H_{3D}$  en fonction de sa localisation spatiale.

$\sigma_{ax}$  est déduite du facteur de qualité Q du spectre d'émission du pulse souhaité.



Par contre l'hypothèse d'un champ ultrasonore constant dans l'espace n'est plus vérifiée. La variation de sa forme sera modélisée par une variation de la forme de  $H_{3D}$  dans l'espace. Ainsi, l'élargissement du faisceau ultrasonore durant sa propagation sera simulée par une augmentation des valeurs de  $\sigma_{lat}$  et  $\sigma_{el}$  :

$$\sigma_{lat}(y) = \sigma_{lat}(0) + k_1 \cdot y \text{ et } \sigma_{el}(y) = \sigma_{el}(0) + k_2 \cdot y. \quad (7)$$

Les valeurs de  $\sigma_{lat}(0)$  et  $\sigma_{el}(0)$  sont déduits directement de la géométrie spatiale de la sonde (nous avons considéré que la largeur à mi hauteur maximale –FWHM– des gaussiennes était égale à respectivement la largeur et la hauteur d'un élément du transducteur) et  $k_1$  et  $k_2$  de la physique de propagation des ultrasons.  $H_{3D}$  est ensuite transformée en coordonnées polaires, cette transformation dépend elle aussi de sa localisation spatiale.

### 3. Résultats

La méthode décrite précédemment a été testée sur une coupe issue d'une acquisition scannerX d'un abdomen. L'objectif est de simuler l'image échographique du rein en se basant sur les propriétés des échographes et des sondes utilisés classiquement par les chirurgiens urologues.

#### 3.1 Implémentation de la méthode

Dans un premier temps nous avons choisi de simuler l'image produite par une sonde de type circulaire, d'un angle de  $60^\circ$ , d'un rayon de courbure de 40 mm et comportant 128 transducteurs. La fréquence  $f_0$  de l'échographe simulé est de 3,5 MHz avec un facteur de qualité  $Q$  de 10 ( $\sigma_{ax} \approx 3 \cdot \lambda$ ). La profondeur de l'image ultrasonore est fixée à 22 cm à partir de la sonde.

L'image de départ est issue d'une acquisition scanner X abdominale de taille 512x512, la taille isotrope du pixel étant de 0,68 mm.

Les impédances acoustiques des différents milieux ont été trouvées dans la littérature. Elles ont été fixées à 1,35, 1,65 et 5 kg/m<sup>2</sup>/s respectivement pour la graisse, les tissus mous et l'os.

La figure 2 représente les différentes étapes de la formation de l'image échographique :

a) Image scanner de départ (la position de la sonde et la géométrie finale de l'image échographique ont été rehaussées sur l'image).

b) Image en coordonnées polaires. L'image a été rééchantillonnée dans l'axe de propagation afin de respecter le critère de Shannon. Pour  $f_0=3,5$  MHz ( $\lambda=0,44$  mm) et une taille de pixel de 0,68 mm, un facteur d'interpolation de 4 selon l'axe des coordonnées radiales a été choisi.

c) Carte des impédances acoustiques. Cette carte a été établie après segmentation de l'image précédente en plusieurs classes de tissus (os, tissus mous, eau, graisse). L'impédance acoustique de ces tissus est ensuite modulée par une texture de bruit afin de modéliser les inhomogénéités

macroscopiques. Les impédances ont été codées en niveau de gris sur cette image.

d) Image radiofréquence résultat de l'application du champ d'ultrasons sur les tissus. Cette image est le résultat du produit de convolution de  $H_{3D}$  et de la dérivée seconde selon l'axe de propagation de l'image des impédances acoustiques. L'image présentée ici a été normalisée.

e) Détection de l'enveloppe de l'image radiofréquence. L'image radiofréquence est considérée comme partie réelle de l'enveloppe, sa partie imaginaire étant estimée à l'aide de la transformée de Hilbert.

f) Image échographique simulée après transformation du repère polaire vers le repère cartésien.

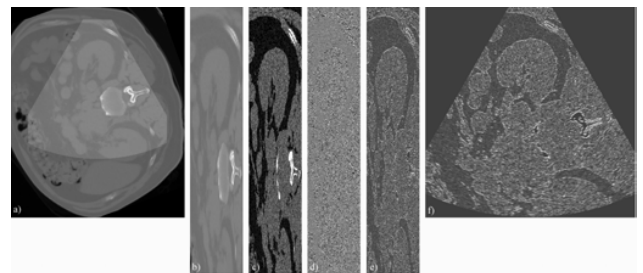


Fig2 : Formation de l'image échographique : a) Image scannerX de départ, b) Image en coordonnées polaires et rééchantillonnée selon la direction de propagation, c) carte des impédances acoustiques, d) image radiofréquence issues de la convolution avec la  $H_{3D}$ , e) détection de l'enveloppe et f) image échographique simulée

Pour les paramètres de simulation choisis, l'image échographique résultat a une taille de 1200x1200. Le temps de calcul de cette image est de moins de 5s sur un PC classique (AMD Athlon 2200+, 1Mo de RAM).

#### 3.2 Influence de la fréquence

Afin de comparer l'effet de la fréquence de l'échographe, deux images ont été simulées, l'une avec  $f_0=1$  MHz, l'autre avec  $f_0=5$  MHz (figure 3).

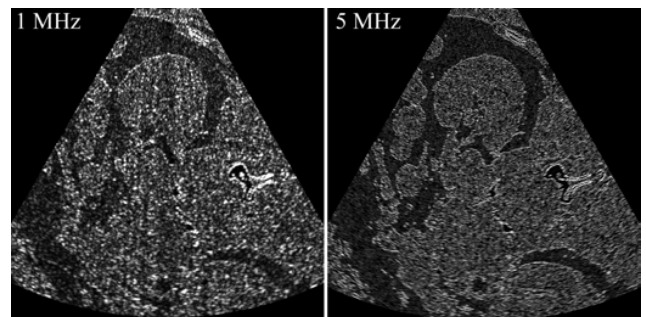


Fig3 : Simulation d'une image avec  $f_0=1$  MHz et  $f_0=5$  MHz

L'influence de la fréquence sur la résolution spatiale est nettement visible. Il est à noter que nous n'avons pas tenu compte de l'atténuation due à l'absorption du signal (cf. discussion).

### 3.3 Influence de la sonde

Deux images ont été produites par simulation de sondes de même taille, de même  $f_0=3,5$  MHz, mais l'une comportant 128 transducteurs et l'autre 64 transducteurs (figure 4).

Le nombre d'éléments et leur taille ont une répercussion directe sur la résolution latérale de l'image simulée.

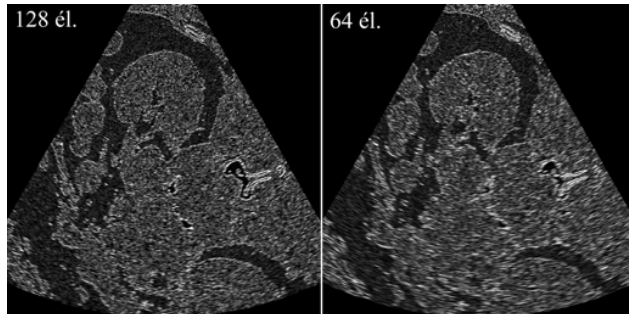


Fig4 : Simulations à 3,5 MHz, à gauche avec une sonde à 128 éléments ; à droite avec 64 éléments.

### 3.4 Comparaison échographie réelle et simulée

Nous avons voulu comparer de manière qualitative, une échographie réelle du rein trouvé dans la littérature et une échographie simulée, toutes deux présentant une fréquence  $f_0$  de 3,5 MHz (figure 5). Les sujets d'observations étant dissemblables, la seule ambition de cette comparaison est de présenter les caractéristiques communes mais également les disparités entre notre modèle et une échographie réelle.

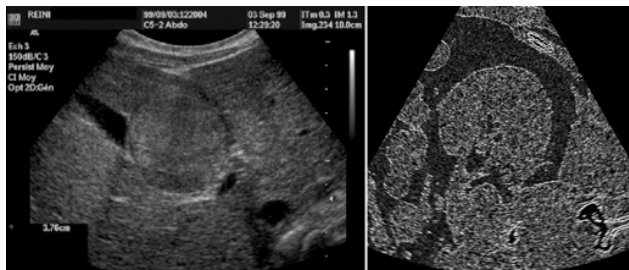


Fig5 : comparaison entre une échographie réelle (à gauche) et une simulation (à droite). Dans les deux cas, la sonde a une fréquence de 3,5 MHz

## 4. Discussion

D'un point de vue qualitatif, nous retrouvons dans l'image échographique simulée certaines des caractéristiques importantes d'une image échographique réelle :

- le speckle est disposé sur des cercles concentriques et s'élargit avec la distance à la sonde.
- la fréquence et le nombre d'éléments de la sonde semble présenter une influence attendue sur le résultat de la simulation. Une fréquence élevée donne un speckle fin sur la direction axiale et améliore ainsi la résolution spatiale de l'image. Un nombre d'éléments élevé donne un speckle fin suivant la direction latérale.
- l'interface entre tissus semble également bien marquée.

Toutefois certaines caractéristiques d'une échographie n'ont pas été prises en compte. C'est le cas par exemple de l'atténuation par absorption du signal par le milieu. Les appareils échographiques compensent cette atténuation à l'aide d'un gain étagé, c'est à dire qui augmente avec la profondeur. Ce gain a pour effet de rehausser le signal mais également le bruit. Sur notre simulation, le gain étagé pourrait être simplement modélisé par un bruit gaussien dont la variance croîtrait exponentiellement avec la profondeur.

D'autres caractéristiques d'une échographie tels les cônes d'ombre ou l'effet miroir sont totalement absentes des images simulées. Ceci est dû directement au modèle que nous utilisons. Cependant ces effets sont généralement considérés comme des artefacts dans les images échographiques réelles.

En dehors de ces faits, des différences d'aspects entre images simulées et images réelles demeurent. Une première cause, et cela concerne l'aspect des tissus près de la sonde, peut provenir de la pression exercée par l'opérateur. Une seconde cause provient, selon nous, de notre modélisation des inhomogénéités macroscopiques des tissus. L'aspect des échographies réelles est en grande partie dû aux speckles issus de ces inhomogénéités. L'utilisation d'une modélisation plus réaliste de ces inhomogénéités au sein des organes devrait permettre, par la suite, d'obtenir un meilleur aspect pour les images simulées.

Les temps de calculs de la simulation sont courts par rapport à d'autres modèles de simulation (de l'ordre de quelques secondes sur un PC classique). Cependant ils restent encore insuffisants pour faire des simulations temps réel.

## 5. Conclusion

Cette étude présente les premiers résultats de la simulation d'images ultrasonores de l'abdomen. Le modèle de simulation d'image échographique proposé par Bamber et Dickinson a été adapté pour pouvoir être utilisé dans notre simulation d'échographies. Les simulations, obtenues avec des temps de simulation relativement courts, montrent certaines caractéristiques proches des images échographiques réelles comme la forme et la disposition du "speckle" ou encore le rehaussement des interfaces lisses entre des tissus différents. L'utilisation d'un meilleur modèle pour les inhomogénéités devrait permettre d'obtenir des images de meilleure qualité. Une évaluation plus formelle se devra d'être engagée.

## Références

- [1] J. A. Jensen, *Field: a program for simulating ultrasound systems*. Medical and Biological Engineering and Computing 34, 1996, pp. 351-353.
- [2] J. A. Jensen, S. I. Nikolov, *Fast simulation of ultrasound images*. Proc. of IEEE Int. ultrasonic Symp., Puerto Rico, 2000, pp. 1721-1724.
- [3] J. C. Bamber, R. J. Dickinson, *Ultrasonic B-scanning: a computer simulation*. Phys. Med. Biol., **25**(3), 1980, pp. 463-479.

# Segmentation d'images échocardiographiques par contours actifs implicites : exploitation de descripteurs statistiques de régions

O. BERNARD<sup>1</sup>, J. D'HOOGHE<sup>2</sup>, D. FRIBOULET<sup>1</sup>

<sup>1</sup>CREATIS, UMR CNRS 5515, U 630 INSERM, INSA, Blaise Pascal, 69621 Villeurbanne Cedex, France

{bernard,friboulet}@creatis.insa-lyon.fr

<sup>2</sup>Cardiac Imaging Research (CIR) – Dept. Of Cardiology, Herestraat 49, B-3000 Leuven, Belgique

**Résumé** – Le problème traité concerne la segmentation d'images échocardiographiques par contour actifs implicites utilisant des descripteurs statistiques de région basés sur les K-distributions. La quasi totalité des auteurs traitant ce sujet exploite la statistique de Rayleigh, qui est un modèle limité pour la caractérisation de certains milieux tissulaires, tel que le myocarde. Ainsi, l'originalité de la méthode proposée réside en l'exploitation du formalisme récemment développé par Jehan-Besson et al. afin d'utiliser un paramètre statistique issu du modèle des K-distributions qui reflète plus fidèlement les propriétés des images ultrasonores du myocarde.

## 1. Introduction

L'image échographique est caractérisée par un bruit appelé speckle. Le speckle est dû à un phénomène d'interférences constructives d'ondes réfléchies par des diffuseurs aléatoirement espacés contenus dans les tissus traversés. L'étude des propriétés statistiques de l'image ultrasonore peut donc permettre d'extraire des informations (densité, répartition des diffuseurs) sur les milieux traversés [3,5] et en particulier de différencier des tissus en vue d'une segmentation.

Du fait de ces caractéristiques, les méthodes basées sur le gradient de l'image sont difficilement exploitables. Certains auteurs [8,10,11] ont ainsi proposé d'utiliser la méthode des contours actifs en exploitant la statistique de l'image ultrasonore afin de segmenter ce type d'image. La statistique est alors utilisée en tant qu'a priori de répartition de l'intensité des pixels de l'image. Dans la quasi-totalité de ces travaux, les auteurs utilisent l'hypothèse que la statistique de l'image ultrasonore suit une distribution de Rayleigh qui suppose un très grand nombre de diffuseurs ultrasonores répartis aléatoirement. Pour une application cardiaque, ce modèle reflète correctement les propriétés statistiques des régions correspondant au sang (densité de diffuseurs élevée et répartition aléatoire), mais en revanche il s'avère mal adapté pour les régions correspondant au muscle cardiaque (myocarde) où la densité des diffuseurs apparaît être plus faible (cf. fig. 3.). Il a été montré [2,5] que les propriétés statistiques de l'image ultrasonore (myocarde+sang) peuvent être mieux représentées par un modèle plus général, fourni par les K-distributions [1]. Cependant, la complexité de ce modèle, qui fait intervenir des fonctions de Bessel à l'ordre  $n$  ( $n$  étant un paramètre estimé à partir de l'image) entraîne des instabilités numériques lors de son estimation et il n'a de ce fait été que peu utilisé lors d'étapes de segmentation. Dans ce cadre, nous montrons qu'en utilisant le formalisme d'optimisation de forme proposé par Jehan-Besson [9], il est possible de faire évoluer des contours actifs implicites à

partir de descripteurs dérivés du modèle des K-distributions afin de segmenter des images échocardiographiques.

## 2. Méthode proposée

Jehan-Besson et al. ont proposé dans [9] un modèle générique de fonction d'énergie lié aux contours actifs par approche région. Dans cette formulation, l'évolution du contour actif  $C$  correspond à la minimisation de l'énergie suivante:

$$E[C(\tau), \Omega_{\text{int}}(\tau), \Omega_{\text{ext}}(\tau)] = \iint_{\Omega_{\text{int}}} k^{(\text{int})}(x, y, \Omega_{\text{int}}(\tau)) dx dy + \iint_{\Omega_{\text{ext}}} k^{(\text{int})}(x, y, \Omega_{\text{int}}(\tau)) dx dy + \int_{C(\tau)} k^{(b)}(x, y) dp \quad (1)$$

où  $\Omega_{\text{int}}$  et  $\Omega_{\text{ext}}$  représentent les régions intérieures et extérieures formées par la courbe  $C$ .  $k^{(\text{int})}$  et  $k^{(\text{ext})}$  représentent les descripteurs d'homogénéité des régions correspondantes.  $k^{(b)}$  est un descripteur de contour utilisé dans la plupart des cas pour lisser ce dernier. A partir de cette énergie, et en utilisant des outils d'optimisation de forme, il est possible de prendre en compte la variation des descripteurs d'homogénéité avec l'évolution des régions. L'intérêt de ce formalisme réside dans le fait qu'il permet d'utiliser uniquement des termes régions (par exemple la moyenne ou la variance) afin de faire évoluer des contours actifs vers la segmentation souhaitée.

Nous proposons dans cette étude d'utiliser le paramètre SNR (rapport de la moyenne sur l'écart type) dérivé de l'expression des K-distributions comme descripteur d'homogénéité de région. En effet de nombreux auteurs [3,4,5] ont montré que ce paramètre pour une image échographique est une fonction strictement croissante suivant la densité des diffuseurs. L'intérêt de ce paramètre est double. Tout d'abord il permet de caractériser une région selon sa densité de diffuseurs. Ainsi il a été démontré que pour des

milieux à forte densité de diffuseurs comme le sang, le SNR tend vers 1.91. Pour des milieux comme le tissu myocardique, sa valeur oscille autour de 1. Par ailleurs, à la différence de l'expression directe de la densité de probabilité des K-distributions, son expression permet une meilleure stabilité numérique. Il est en effet possible de montrer que ce paramètre peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$SNR_{kdist} = \psi(\alpha) = \frac{0.5\pi^{1/2} \cdot \Gamma(\alpha + 0.5)}{\left[ \alpha(\Gamma(\alpha))^2 - \{0.5\pi^{1/2} \cdot \Gamma(\alpha + 0.5)\}^2 \right]^{1/2}} \quad (2)$$

avec  $\Gamma$  : fonction gamma et  $\alpha = 2 / (E(I^4)/E^2(I^2) - 2)$ , où l'opérateur  $E(x)$  représente l'espérance de  $x$ .

Ainsi, nous proposons d'utiliser les descripteurs d'homogénéité de région suivants :

$$\begin{cases} k^{(i)} = \varphi_{(i)}(SNR) \\ \varphi_{(i)}(x) = 1 - \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - SNR_{(i)})^2}{2\sigma^2}\right) \right\} \end{cases} \quad (3)$$

La notation  $(.)$  symbolise le fait que ces expressions s'appliquent à la fois aux régions intérieures et aux régions extérieures à la courbe  $C$ . Le paramètre  $SNR(.)$  est un a priori que nous fixons à 1.9 dans le sang et à 1 dans le tissu myocardique. La fonction  $\varphi(x)$  a été choisie pour ses bonnes propriétés aux limites : pour des valeurs de  $x$  proches de la valeur de l'a priori, la fonction est minimum alors que pour des valeurs de  $x$  s'éloignant de la valeur de l'a priori la fonction tend vers 1. A partir de ce choix, il est possible de montrer que l'évolution de  $C$  peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} = [k^{(int)} - k^{(ext)} + k^{(b)} \cdot \kappa + a^{(int)} - a^{(ext)}] \vec{N} \quad (4)$$

Dans cette équation, l'expression  $k^{(int)} - k^{(ext)} + k^{(b)} \cdot \kappa$  correspond classiquement à l'évolution de  $C$  sous l'influence des termes de région et de lissage de la courbe [6]. Il est à noter que ces termes dépendent globalement des propriétés des régions. Le terme  $a^{(int)} - a^{(ext)}$  permet de contrôler l'évolution de  $C$  en exploitant les propriétés locales de l'image [9].

$$\begin{cases} a^{(i)} = A^{(i)} \cdot I^4 + B^{(i)} \cdot I^2 + C^{(i)} & \text{avec} & A^{(i)} = \frac{G_1^{(i,2)}}{G_2^{(i,2)}} \cdot \lambda_{(i)} \\ C^{(i)} = \frac{G_1^{(i)} \cdot G_4^{(i)}}{G_2^{(i)}} \cdot \lambda_{(i)} & \text{et} & B^{(i)} = \frac{-2 \cdot G_1^{(i,2)} \cdot G_4^{(i)}}{G_2^{(i,3)}} \cdot \lambda_{(i)} \\ \lambda_{(i)} = f\left(\frac{G_1^{(i)} \cdot G_4^{(i)}}{G_2^{(i)}}\right) \cdot \psi_{(i)}\left(f\left(\frac{G_1^{(i)} \cdot G_4^{(i)}}{G_2^{(i)}}\right)\right) \cdot \varphi_{(i)}\left(f\left(\frac{G_1^{(i)} \cdot G_4^{(i)}}{G_2^{(i)}}\right)\right) \\ G_1^{(i)} = \iint_{\Omega^{(i)}} dx \cdot dy & G_2^{(i)} = \iint_{\Omega^{(i)}} I^2 dx \cdot dy & G_4^{(i)} = \iint_{\Omega^{(i)}} I^4 dx \cdot dy \\ f(x) = \frac{2}{x-2} \end{cases} \quad (5)$$

L'évolution de  $C$  donnée par (4) a été implémentée sous forme implicite. Le principal intérêt d'un tel choix est qu'il permet de gérer de façon aisée les changements de topologie et donc d'être moins sensible vis à vis de la solution initiale. De plus, nous avons implémenté l'algorithme selon la technique du champs épars (sparse-field) proposée par Whitaker dans [7] qui permet de diminuer considérablement les temps de calcul.

### 3. Résultats

#### 3.1 Résultats de simulation

La méthode a été appliquée sur une image de synthèse composée d'un carré suivant une K-distribution de valeur de SNR égale à 0.96 et d'un fond suivant une K-distribution de valeur de SNR égale à 1.79. Les K-distributions ont été simulées suivant la méthode décrite dans [4].

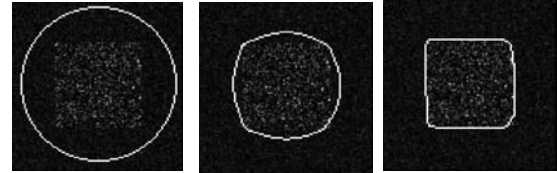


FIG. 1 : Evolution d'un contour actif sur une image de synthèse simulant deux régions K-distribuées.

Les résultats de la figure 1 montre que cette méthode permet de séparer correctement deux régions décrites par les K-distributions.

#### 3.2 Résultats expérimentaux

La méthode a été testée sur des images acquises in vivo en vue apicale 4 chambres sur un cas sain.

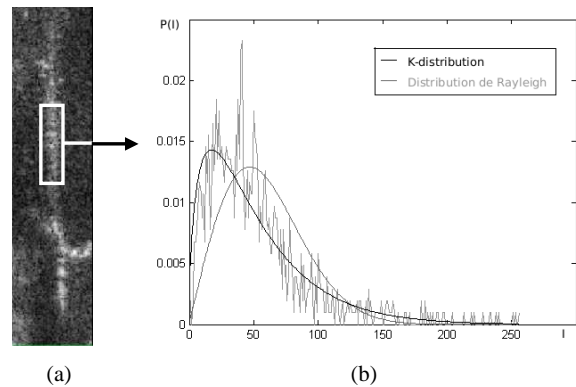


FIG. 2 : Caractéristiques de l'image in vivo utilisée : (a) représentation polaire d'une vue apicale 4 chambres, (b) Histogrammes réel, Rayleigh et K-distribution d'une région du septum

La figure 2 met en évidence la meilleure adéquation du modèle des K-distributions relativement au modèle de Rayleigh pour le tissu myocardique.

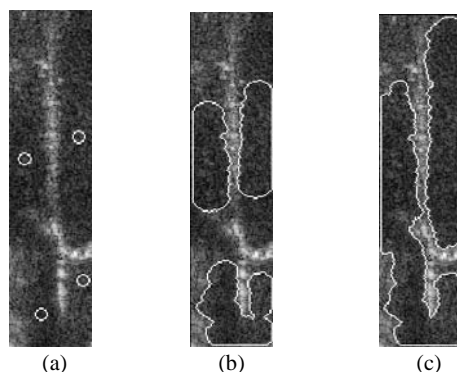


FIG. 3 : Evolution d'un contour actif sur une image réelle  
vue apicale 4 chambres : (a) contour initial, (b) évolution du  
contour, (c) contour final.

La figure 3 montre les résultats de segmentation obtenus grâce à l'approche proposée, qui permet d'obtenir une bonne séparation des régions de propriétés statistiques différentes, à savoir le sang et le myocarde.

#### 4. Conclusion

Nous avons proposé une nouvelle méthode de segmentation d'images échocardiographiques en exploitant le formalisme développé par Jehan-Besson. Nous avons montré qu'il était possible d'exploiter un a priori statistique dérivé du modèle des K-distributions afin de guider l'évolution de contours actifs. Les perspectives de ce travail résident dans une généralisation du modèle proposé basé sur les moments fractionnaires.

#### Références

- [1] Jakeman E. and Tough R.J.A. *Generalized K distribution: a statistical model for weak scattering* J. Opt. Soc. Am. A 4 1764-72, 1987.
- [2] Narayanan V.M., Shankar P.M. And Rein J.M. *Non-Rayleigh statistics of ultrasonics backscattered signals* IEEE Trans. Ultrason. Ferrites, Freq. Control UFFC-41 845-52, 1994.
- [3] Molthen R.C., Shankar P.M. And Rein J.M. *Tissue characterization in ultrasonic B scan using non-Rayleigh statistics* Ultrasound Med. Biol. 21 161-70, 1995.
- [4] Dutt V. *Statistical Analysis of Ultrasound Echo envelope* Ph.D. Dissertation, the Mayo Graduate School. 1995
- [5] Shankar P.M., Molthen R.C. And Rein J.M. *Studies on the use of Non-Rayleigh statistics for ultrasonic tissue characterization* Ultrasound Med. Biol. 22 873-82, 1996.
- [6] Zhu S. and Yuille A. *Region competition: Unifying snakes, region growing, and Bayes/MDL for multiband image segmentation* IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 18:884-900, 1996.
- [7] Whitaker R.T. *A level-Set Approach to 3D Reconstruction from Range Data* International Journal of Computer Vision 29(3), 203-231, 1998.
- [8] Haas C., Ermert H. And Barmeyer J. *Segmentation of 3D Intravascular Ultrasonic Images based on a Random Field Model* Ultrasound Med. Biol. 26 297-306, 2000.
- [9] Jehan-Besson S. and Barlaud M. *DREAM<sup>2</sup>S: Deformable Regions Driven by an Eulerian Accurate Minimization Method for Image and Video Segmentation* International Journal of Computer Vision 53(1), 45-70, 2003.
- [10] Paragios N. and Derich R. *Geodesic active regions for motion estimation and tracking*. Internatioanl Conference on Computer Vision, Corfu Greece, 1999
- [11] Paragios N. and Derich R. *Geodesic active regions and level set methods for supervised texture segmentation* The International Journal of Computer Vision, 46 (3) :223, 2002



# Estimation 3D du flux sanguin par Imagerie Ultrasonore Haute Fréquence : Application à l'étude de la microcirculation

W. Aoudi<sup>1</sup>, H. Liebgott<sup>1</sup>, A. Needles<sup>2</sup>, V. Yang<sup>2</sup>, S. Foster<sup>2</sup>, D. Vray<sup>1</sup>

1. CREATIS, CNRS UMR 5515, INSERM U630, INSA, Lyon, France

2. Sunnybrook and Women's College Health Sciences Center, Toronto, Canada

E-mail didier.vray@creatis.insa-lyon.fr

**Résumé** – De nombreuses études récentes ont montré que l'imagerie ultrasonore haute fréquence est une modalité d'imagerie bien adaptée pour la visualisation de la microcirculation. Toutefois, la quantification de la vitesse du flux et du débit volumétrique sanguin demeurent difficiles avec les systèmes d'imagerie haute fréquence. Dans ce papier nous proposons de combiner deux approches complémentaires dans le but d'estimer le champ de vitesses 3D dans une séquence d'images ultrasonores haute fréquence mode B. D'une part, une nouvelle méthode que nous avons appelé Speckle Flow Index (SFI) fournit un estimateur lié au module du vecteur vitesse 3D du flux. Cette technique repose sur une analyse des changements dans la morphologie du speckle au cours du temps. D'autre part, une méthode de mise en correspondance de blocs (Speckle Tracking) nous permet d'estimer les 2 composantes du vecteur vitesse dans le plan d'imagerie. Ces techniques ont été évaluées sur un fantôme en gélatine traversé par un fluide à vitesse calibrée entre 0.1 mm/s et 30 mm/s. Les résultats obtenus montrent que l'index SFI permet d'estimer les vitesses faibles (jusqu'à 2 mm/s) et est un détecteur de mouvement pour les vitesses plus grandes, qu'il permet d'évaluer des flux pulsés et qu'il est indépendant de l'orientation du vaisseau par rapport au plan d'imagerie. La méthode Speckle Tracking évaluée sur les mêmes séquences permet d'estimer les composantes de la vitesse dans le plan d'imagerie. La combinaison de ces résultats permet de remonter au champ de vecteur 3D, d'évaluer la composante de la vitesse orthogonale au plan d'imagerie et de quantifier le flux. Cette étude montre la faisabilité d'une implémentation temps réel non Doppler pour quantifier les faibles flux directement à partir de séquences d'imagerie ultrasonore haute fréquence de microcirculation.

**Abstract** – This article presents a new method for the quantification of slow blood flow from high frequency ultrasound B mode scans. This technique combines 2 methods: one statistical method, called SFI, and based on the analyze of changes in the speckle pattern along time, gives an index directly related to the total velocity vector and one block matching approach estimates the in-plane velocity components. Results on calibrated flow sequences of blood mimicking fluid have shown good agreement with the statistical model used. The quantification of flow is achieved with pulsed flow and is also angle independent. Speckle Tracking method has been evaluated on the same data and has shown good estimation of the in-plane velocity vector. The results of these two methods permit the evaluation of the total 3D velocity field and the orthogonal component velocity regarding to the imaging plane. This works shows the feasibility of a real time non Doppler method for the quantification of the blood flow in the microvasculature.

## 1. Introduction

Les images ultrasonores présentent généralement un niveau de bruit élevé qui rend difficile leur analyse. En particulier, l'estimation de mouvement doit prendre en compte les modèles de formation de l'image ultrasonore pour utiliser les propriétés statistiques du "speckle" (nom donné au bruit de texture de l'image) et extraire les informations sur le mouvement. Le présent travail s'intéresse à l'estimation de champ de vitesse de flux sanguin dans la microcirculation à partir de séquences d'images ultrasonores haute fréquence en mode B.

De récentes études biologiques ainsi que plusieurs travaux sur les modèles animaux comme la souris ont montré la nécessité de quantifier la dynamique des fluides vasculaires dans la microcirculation des tissus sains et pathologiques. En effet, en analysant la vascularisation des tissus, on parvient à suivre l'évolution de certaines pathologies comme le cancer. Parallèlement, il a été montré que l'imagerie ultrasonore haute fréquence (40MHz) était une modalité d'imagerie bien adaptée à l'évaluation des paramètres hémodynamiques de la microcirculation car c'est une modalité d'imagerie temps réel, non invasive et simple de mise en œuvre. Les avancées technologiques apportées par l'augmentation

notable de la fréquence d'émission, associées aux méthodes proposées dans ce travail devraient permettre d'évaluer des thérapeutiques nouvelles en oncologie [1].

Pour les applications cardiovasculaires, les méthodes Doppler font habituellement références. Toutefois, pour des vitesses de flux faibles dans des vaisseaux de diamètre inférieur à 1 mm, ces méthodes atteignent leurs limites. De plus, avec les méthodes Doppler il faut connaître l'angle entre l'orientation du flux et la sonde, la résolution spatiale est limitée et il faut choisir un mode d'acquisition spécifique, ce qui représente une sévère limitation qui rend l'imagerie Doppler inadaptée dans notre cas.

Ce travail propose une nouvelle méthode temps réel non Doppler basée sur l'analyse spatio-temporelle du changement de motif du speckle directement à partir des séquences d'images ultrasonores haute fréquence (2D+t) qui a pour objectif de quantifier le flux vasculaire en calculant les composantes 3D du champ de vitesse. La méthode répond aux limitations rencontrées par les méthodes Doppler et ne demande pas de réglages spécifiques du système d'imagerie.

## 2. Matériel et méthodes

Pour estimer les composantes 3D de la vitesse du flux sanguin, deux méthodes complémentaires sont développées : une nouvelle méthode (appelée Speckle Flow Index SFI) d'estimation du module de la vitesse 3D du fluide en tout point de l'image mode B d'une séquence d'images haute fréquence et une méthode de mise en correspondance de blocs (dite 2D Speckle Tracking ST) pour l'estimation des composantes 2D de la vitesse dans le plan d'imagerie (vitesse apparente).

### 2.1 Speckle Flow Index

Le principe de cette méthode repose sur l'analyse spatio-temporelle des changements dans le motif du speckle. De nombreux travaux ont étudié les propriétés statistiques du speckle [2]. Il a été également montré que les changements dans la morphologie du speckle au cours du temps sont reliées directement aux statistiques d'ordre 2 du motif de speckle.

Le modèle sur lequel se base notre estimation s'appuie sur les modèles statistiques du speckle de l'image de tissus biologiques en mouvement proposées par Wear et coll. [4] et repris par Rubin et coll. [5]. Ce modèle stipule que la loi de décorrélation du speckle dans un fluide au cours du temps est fonction de la vitesse du flux, de la réponse impulsionnelle du système d'imagerie (PSF) et de la fréquence d'acquisition des images.

L'auto covariance normalisée  $C$  d'un pixel le long du temps peut être modélisée par une gaussienne.

$$C \propto \exp \left[ \frac{-\Delta t^2}{2} \left| \frac{\vec{V}}{\vec{\sigma}(y)} \right|^2 \right]$$

où  $\Delta t$  est la période d'acquisition des images,  $\vec{V}$  est la vitesse du fluide,  $\vec{\sigma}(y)$  correspond à la largeur à mi-hauteur de la PSF dans la direction de la vitesse (pour une orientation donnée du flux, elle dépend de la profondeur  $y$ ).

Le principe de la méthode SFI repose alors sur l'estimation de la variance normalisée d'un pixel le long de  $z$  (Figure 1) à partir de la séquence d'images.

Nous proposons une formulation rapide récursive temps réel de cet estimateur sous la forme d'un filtrage linéaire spatio-temporel de la séquence d'images différences, cette formulation tient compte des spécificités de nos images (haute fréquence, haute résolution spatiale, faible flux, haute cadence d'échantillonnage temporelle):

$$SFI(x, y, n) = \sum_{s \in \Omega(x, y)} \beta_s \sum_{n=1}^K \alpha_k |I(x, y, n) - I(x, y, n+1)|$$

où  $n$  est le numéro de l'image dans la séquence,  $(x, y)$  les coordonnées du pixel,  $\alpha$  et  $\beta$  sont les coefficients du filtre spatiotemporel.  $\Omega(x, y)$  est un voisinage spatial centré sur  $(x, y)$ .

Le terme intensité de l'image différence est lié aux changements de morphologie du speckle et il contient l'information sur le mouvement d'après le modèle de Wear et Popp. Cette formulation aussi rappelle les techniques différentielles d'estimation de mouvement comme les approches par flot optique par exemple [6] [7].

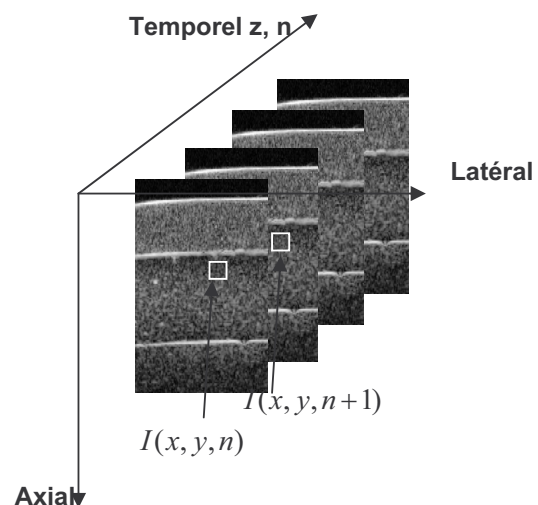


Figure 1 – Séquences d'images mode B. Le pixel de coordonnées  $(x, y)$  est analysé le long de l'axe temporel  $z$



## 2.2 Speckle Tracking

Parallèlement à SFI, une méthode de mise en correspondance de blocs (méthode dite "2D speckle tracking") permet d'estimer la composante de la vitesse dans le plan d'imagerie (plan  $(X, Y)$  Figure 1). Le principe de ST repose sur la recherche, pour un bloc de départ dans une image donnée, du meilleur représentant de ce bloc dans l'image suivante à partir de la maximisation d'un critère de vraisemblance. Cette méthode donne des résultats satisfaisants pour l'estimation du mouvement en imagerie ultrasonore à condition de prendre en compte les spécificités du speckle en terme de propriétés statistiques et de déformation du bloc durant le mouvement entre deux images de la séquence [3].

## 2.3 Estimation du flux

En prenant en compte la réponse impulsionnelle du système pour le choix d'une fenêtre d'étude spatiotemporelle adéquate, la combinaison de ces deux méthodes permet de remonter aux 3 composantes du vecteur vitesse en chaque pixel de la séquence. L'intégration du champ de vitesses sur la section de surface dans le plan d'imagerie permet également de quantifier le flux en unité de volume par unité de temps par utilisation du théorème de Gauss.

## 2.4 Matériels

La méthode est évaluée sur des séquences d'images acquises sur un fantôme en gélatine contenant des vaisseaux de diamètre 1mm. Un fluide avec des caractéristiques proches de celles du sang est injecté au moyen d'une seringue pilotée par un moteur linéaire. La vitesse des flux calibrés est entre 0.1mm/s et 30mm/s. Un système ultrasonore haute fréquence (Vevo 660, Visualsonics, Toronto) avec une fréquence d'émission à 40MHz est utilisé pour acquérir les séquences d'images expérimentales sur le fantôme de flux. La résolution axiale du système est de 40 $\mu$ m et la résolution latérale est de 80 $\mu$ m. La cadence d'acquisition est de 30 images par seconde et des séquences de 300 images sont acquises.

## 3. Résultats

Les résultats expérimentaux obtenus sur un ensemble de séquences de flux calibrés ont montré que :

- La calibration de l'estimateur en fonction de la vitesse réalisée sur une région d'intérêt placée au centre du vaisseau est en accord avec le modèle statistique. Moyenne et écart-type de SFI sont calculées puis tracées en fonction de la vitesse calibrée. L'index augmente de manière strictement monotone avec la vitesse jusqu'à 2 mm/s, on observe ensuite une saturation, l'estimateur agit comme un détecteur de mouvement. Il y a bonne adéquation au modèle de Wear et Popp (ligne continue par rapport aux points de mesures). Voir Figure 2.

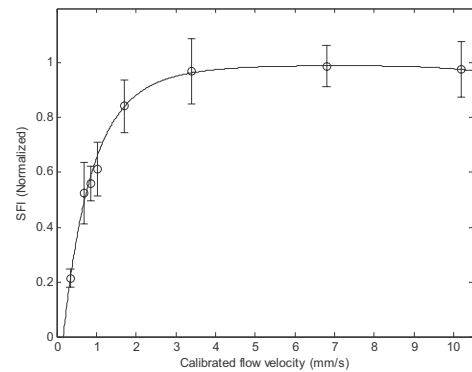


Figure 2 – SFI en fonction du module de la vitesse calibrée. Le modèle exponentiel (trait plein) suit l'évolution des données expérimentales

- l'estimateur SFI permet d'évaluer la dynamique d'un flux pulsé. L'estimateur suit les fluctuations du flux quand la vitesse n'est pas constante, elle augmente brusquement à intervalles de temps réguliers. (voir Figure 3).
- l'estimateur SFI ne dépend pas de l'orientation du vaisseau. Associé au Speckle Tracking, les composantes 3D du vecteur vitesse sont estimées.
- l'estimateur SFI possède une excellente résolution spatiale de manière à décrire précisément le profil des vitesses d'un flux laminaire même si le diamètre du vaisseau est inférieur à 1 mm. La Figure 4 montre un profil théorique correspondant à un flux laminaire ainsi que les estimations de vitesses réalisées avec SFI.

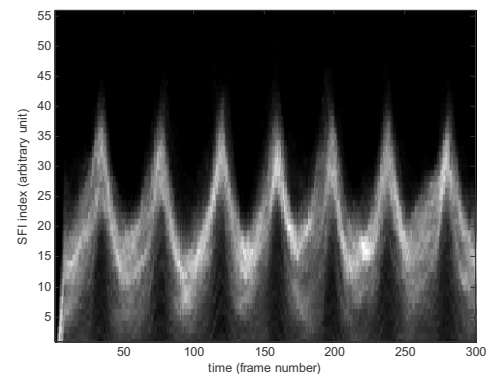


Figure 3 – Sonogramme d'un flux pulsé. La période et l'amplitude des variations de vitesses correspondent aux conditions expérimentales fixées pour le flux pulsé.

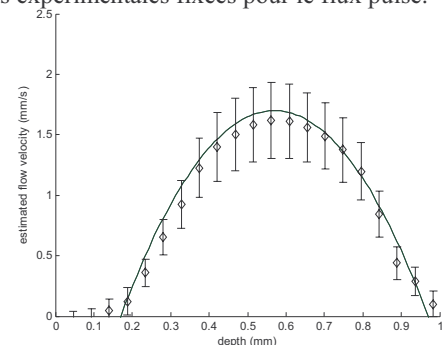


Figure 4 – Profil laminaire parabolique et les vitesses estimées avec SFI.

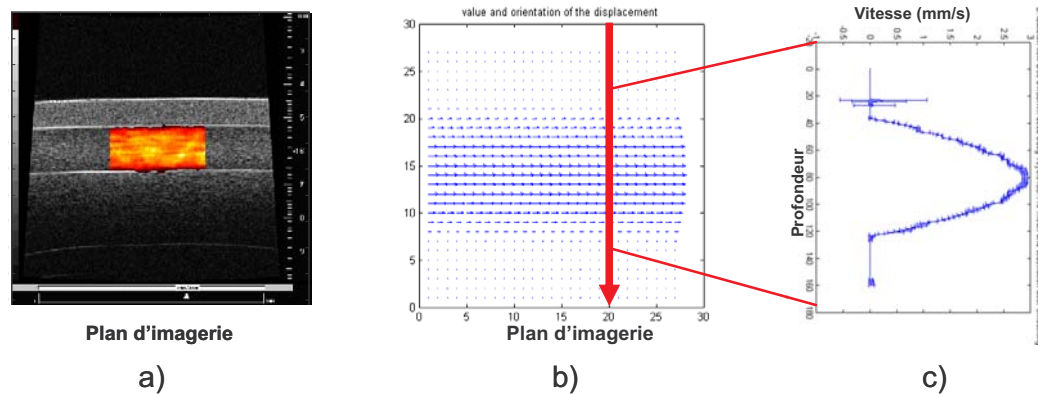


Figure 5 – a) Cartographie SFI. b) Estimation du champ de vitesse apparent dans le plan d'imagerie par Speckle Tracking. c) Profil de vitesse estimé par Speckle Tracking.

- Dans le fantôme, des flux de l'ordre de 0.05 ml/min ont été estimés par complémentarité des deux méthodes. Les valeurs étaient celles attendues compte tenu des flux calibrés injectés dans le fantôme.

Des résultats obtenus sur des modèles animaux sont également discutés. Dans le cadre d'études biologiques liées à la transgénèse, nous montrons qu'il est possible de quantifier la microcirculation dans certaines pathologies et de caractériser la vascularisation durant le développement embryonnaire (Figure 6).

En conclusion, la méthode SFI, associée au Speckle Tracking fournit un bon estimateur du flux dans une gamme de valeurs observées dans la microcirculation et permet d'estimer les vitesses du flux en temps réel sans recourir aux techniques Doppler.

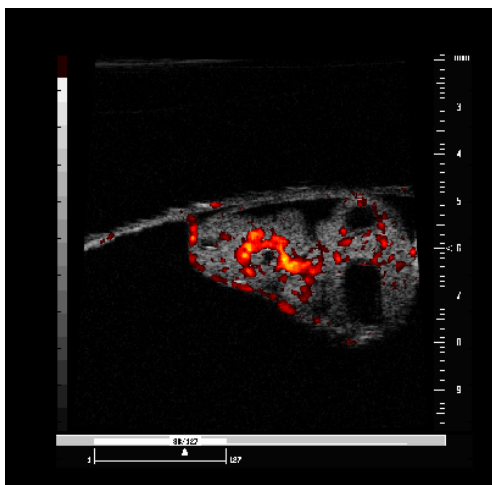


Figure 6 – Développement d'un embryon de poulet de 3 jours. Quantification de la microcirculation par SFI

## Références

- [1] R. K. Jain, K. Scelenger, M. Hockel, F. Yuan, "Quantitative angiogenesis assays : progress and problems", *Nature Medicine*, vol. 3, pp. 1203-1208, 1997.
- [2] J. M. Thijsen, "Ultrasonic speckle formation, analysis and processing applied to tissue characterization", *Pattern Recognition letters*, vol. 24, pp. 659-675, 2003.
- [3] D. Boukerroui, J.A. Noble, M. Brady, "Velocity estimation in ultrasound images", *Proceedings 18th Information Processing in Medical Imaging (IPMI)*, Ambleside, pp 586-598, UK 2003.
- [4] K. Wear, R. Popp, "Methods for estimation of statistical properties of envelopes of ultrasonic echoes from myocardium", *IEEE Trans. Med. Imag.*, vol. 4, pp. 281-291, 1987
- [5] J. Rubin, T. Tuthill, J. Fowles, "Volume flow measurement using Doppler and grey-scale decorrelation", *Ultrasound in Medicine and Biology*, vol. 27, pp. 101-109, 2001.
- [6] R. L. Maurice, and M. Bertrand, "Lagrangian speckle model and tissue-motion estimation-theory ", *IEEE Trans. Med. Imag.*, vol. 18, pp. 593-603, 1999.
- [7] K. P. Horn and B. G. Schunck, "Determining optical flow", *Artif. Intell.*, vol. 17, pp.185-203, 1981

# Evaluation de l'équilibre postural suite à la réalisation d'un pas selon trois méthodes d'estimation de l'exposant de Hurst

H. AMOUD, M. ABADI, V. MICHEL, D. J. HEWSON, M. DOUSSOT, J. DUCHÊNE<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Institut des Sciences et Technologies de l'Information de Troyes (ISTIT), Équipe M2S, FRE CNRS 2732, Université de Technologie de Troyes (UTT), 12 Rue Marie Curie, BP 2060, 10010 TROYES Cedex

hassan.amoud@utt.fr

**Résumé** – L'objectif de cet article est de comparer les méthodes d'estimation de l'exposant de Hurst (H), i.e. rescaled range analysis (R/S), detrended fluctuation analysis (DFA) et stabilogram diffusion analysis (SDA), dans le but de déterminer la méthode la plus robuste pour caractériser l'évolution de l'équilibre postural d'une personne. Des sujets témoins (90 sujets ; âge moyen =  $19.7 \pm 0.9$  ans) ont été analysés sur une période de maintien postural précédée d'un mouvement de montée sur une plate-forme de forces qui constitue une perturbation de l'équilibre. Les méthodes DFA et R/S apparaissent plus performantes pour suivre l'évolution de H en fonction du temps et permettent de mettre en évidence deux phases : une période d'instabilité posturale suivie d'une période de stabilité. La perspective de cette étude sera d'appliquer ces méthodes sur des sujets présentant un déficit de l'équilibre postural tel que les sujets âgés.

**Abstract** – The aim of this article is to compare different methods used to estimate the Hurst exponent (H), i.e. rescaled range analysis (R/S), detrended fluctuation analysis (DFA) and stabilogram diffusion analysis (SDA), to determine the most reliable method to characterize the evolution of postural equilibrium. Ninety healthy subjects (average age  $19.7 \pm 0.9$  years) were analyzed for a period of static posture immediately after the movement of stepping onto a force plate which disturbs the subjects' balance. DFA and R/S were better able to follow the evolution of H over time, with two distinct periods able to be identified : an initial period of postural instability followed by a period of postural stability. The methods used in this study will be applied to subjects with postural deficits, such as elderly subjects.

## 1. Introduction

L'étude de la posture statique présente un grand intérêt pour l'analyse du déficit du contrôle de l'équilibre qui peut être lié à la pathologie, au vieillissement, ou aux contraintes environnementales. Une méthode d'analyse de l'équilibre est d'utiliser une plate-forme de forces qui permet d'extraire le déplacement du centre des pressions du sujet selon les directions antéropostérieure (AP) et médiolatérale (ML). La représentation des coordonnées du centre des pressions en fonction de temps constitue le stabilogramme. A partir du stabilogramme, les paramètres qui caractérisent l'équilibre de la posture statique sont extraits. Parmi eux sont identifiés les paramètres temporels (moyenne, RMS), fréquentiels (fréquence médiane), spatio-temporels (surface de l'ellipse) [8], et récemment les paramètres liés aux systèmes physiologiques sous-jacents [1, 3]. Ces derniers mettent en évidence les corrélations à long terme et l'auto-similarité des systèmes de contrôle physiologiques et donc de la position du centre des pressions. L'exposant de Hurst (H) [5] fait partie de cette famille de paramètres. Il donne des indications sur la corrélation et l'auto-similarité. Une valeur plus élevée de H signifie une auto-similarité plus importante rendant compte d'un mouvement mieux contrôlé [4].

L'estimation de cet exposant est faite par plusieurs méthodes : rescaled range analysis (R/S) [3], detrended fluctuation analysis (DFA) [3, 7] et stabilogram diffusion

analysis (SDA) [1, 3]. L'ensemble de ces méthodes est fondé sur la relation d'Einstein modélisant un processus de mouvement Brownien, généralisé par Mandelbrot et Van Ness [6] (mouvement Brownien fractionnaire) et Hurst [5] :

$$\langle \Delta x^2 \rangle \propto \Delta t^{2H} \quad (1)$$

où  $\Delta x$  est la différence entre deux positions séparées par un temps  $\Delta t$  et H est l'exposant de Hurst.

Jusqu'à présent, SDA est la seule méthode utilisée pour l'étude de la posture [1, 3]. Cependant, pour SDA, Delignières et al. [3] ont constaté des erreurs dans la méthodologie de Collins et al. Le principal défaut est qu'ils ne prennent pas en compte le fait que les séries physiologiques sont bornées, ce qui aboutit à deux exposants de Hurst (exposants à court terme et à long terme).

L'objectif de cet article est de comparer ces trois méthodes d'estimation de l'exposant de Hurst dans le but de déterminer la méthode la plus robuste pour caractériser l'évolution de l'équilibre suite à une perturbation. Dans cette étude, les sujets sains sont analysés sur une période de maintien postural précédée d'un mouvement de montée sur une marche, induisant une perturbation de l'équilibre.

## 2. Méthodes

### 2.1 Protocoles et acquisition

Quatre-vingts dix sujets adultes dont 57 hommes et 33 femmes (âge moyen =  $19.7 \pm 0.9$  ans) ont participé à l'expérimentation réalisée de la manière suivante : le sujet adopte une position érigée et confortable, ses bras sont disposés le long de son corps et sa tête maintenue droite. Au signal de l'expérimentateur, il monte sur la plate-forme de forces (4060-80, Bertec Corporation, Etats Unis) sans chaussures et fixe une cible située à 2 mètres du centre de la plate-forme de forces pendant 45 secondes. Durant cette période, le sujet a pour consigne de rester le plus immobile possible tout en regardant la cible. L'acquisition des données est réalisée à l'aide d'une carte NiDaq 6036E (National Instruments, Natick, Etats-Unis), à la fréquence de 100Hz. Les signaux sont ensuite filtrés en utilisant un filtre passe bas de type Butterworth de fréquence de coupure 10Hz et d'ordre 8.

### 2.2 Rescaled range analysis (R/S)

Pour décrire la dépendance à long terme du niveau d'eau dans les fleuves (Nil), Hurst [5] définit une méthode sensible pour montrer les corrélations de longue durée pour des processus aléatoires. La série  $x(t)$  est divisée en intervalles contigus de longueur  $n$ . Chacun de ces intervalles est ensuite transformé en série intégrée  $X(t,n)$  définie par l'équation suivante :

$$X(t,n) = \sum_{k=1}^t \{x(k) - \langle x \rangle_n\} \quad (2)$$

où  $\langle x \rangle_n$  correspond à la moyenne des  $n$  données. L'étendue  $R$  est définie comme la différence entre les valeurs maximales et minimales de la série intégrée  $X(t,n)$ . Elle est calculée pour chaque intervalle :

$$R = \max_{1 \leq t \leq n} X(t,n) - \min_{1 \leq t \leq n} X(t,n) \quad (3)$$

L'étendue est ensuite normalisée pour chaque intervalle par l'écart type local ( $S$ ) de la série originale  $x(t)$ . Ce calcul est réitéré pour chacun des intervalles constituant la série. Ensuite, la moyenne des étendues normalisées  $R/S$  est calculée. Hurst [5] a montré que  $R/S$  est liée à la grandeur de l'intervalle de temps  $n$  par la relation suivante :

$$R/S \propto n^H \quad (4)$$

où  $H$  est l'exposant de Hurst.

### 2.3 Stabilogram Diffusion Analysis (SDA)

Collins et De Luca [1] proposent de modéliser la trajectoire du centre des pressions par un système de marche aléatoire couplé et corrélé. Le mouvement peut être alors considéré comme le résultat d'une combinaison de mécanismes déterministes et stochastiques. En utilisant la relation (1) de Mandelbrot et Van Ness [6], Collins et De Luca [1] ont remarqué que pour un stabilogramme  $x(t)$ ,  $y(t)$ , il était possible de trouver deux régimes : un pour lequel  $H > 0.5$ , correspondant aux faibles valeurs de  $\Delta t$  (court terme, persistance) et un pour lequel  $H < 0.5$ , correspondant aux grandes valeurs de  $\Delta t$  (long terme, anti-persistance).

La méthode de calcul de  $\langle \Delta x^2 \rangle$  pour Collins et De Luca [1] est :

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \frac{1}{N-m} \sum_{i=1}^{N-m} (x_{i+\Delta t} - x_i)^2 \quad (5)$$

où  $N$  est le nombre total de points du vecteur  $x$  et  $m$  l'intervalle entre deux valeurs exprimées en nombre de points. Collins et De Luca [1] ont calculé  $H$  pour les zones à court (HS) et à long terme (HL) à partir des pentes de la courbe ( $\Delta t$ ,  $\langle \Delta x^2 \rangle$ ) exprimée en échelle logarithmique.

### 2.4 Detrended Fluctuation Analysis (DFA)

Introduite par Peng et al. [7], cette méthode cherche à mettre en évidence les processus d'auto-similarité dans les séries temporelles. Dans une première étape, la série originale  $x(i)$   $i=1 \dots N$  est intégrée ; les données  $x(i)$  sont remplacées par la somme cumulée des écarts à la moyenne :

$$y(k) = \sum_{i=1}^k \{x(i) - \langle x \rangle\} \quad (6)$$

Ensuite,  $y(k)$  est divisé en fenêtres égales de longueur  $n$ . Si  $N$  n'est pas un multiple de  $n$ ,  $N$  sera ajusté, i.e.  $N$  sera la plus grande valeur multiple de  $n$  inférieure à la longueur de la série initiale. Dans chaque fenêtre de taille  $n$ , une tendance linéaire locale est estimée par la méthode des moindres carrés qui est notée  $y_n(k)$ . La fluctuation de l'intégrale indéfinie  $y(k)$  autour de sa tendance  $y_n(k)$  est calculée par :

$$F(n) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \{y(k) - y_n(k)\}^2} \quad (7)$$

La valeur  $\alpha$  de la pente de la régression sur l'échelle logarithmique de  $F(n)$  en fonction de  $n$  est calculée et correspond à une estimation de l'exposant  $H$ .

### 2.5 Analyse de données

A partir des données acquises depuis la plate-forme de forces, les coordonnées du centre des pressions dans les directions AP et ML, et la résultante (RD) sont calculées à partir de l'instant du poser du deuxième pied sur la plate-forme de forces (FC2). Des fenêtres glissantes de tailles de 20, 10 et 5 secondes, de FC2 jusqu'à ce que le milieu de la fenêtre soit situé en FC2+20 s, ont été analysées avec un pas de glissement de 1 s. L'exposant de Hurst ( $H$ ) a été calculé pour chaque fenêtre en utilisant les méthodes R/S, DFA et SDA (HS et HL). Des tests de normalité (asymétrie, aplatissement et Kolmogorov-Smirnov) ont été appliqués sur tous les exposants obtenus. Après avoir vérifié la normalité des données, les tests statistiques qui ont été réalisés utilisaient une analyse de la variance (ANOVA) à mesures répétées avec un ajustement de Bonferroni pour les contrastes. Les tests ont été considérés comme significatifs pour  $p < 0.05$ .

## 3. Résultats

En ce qui concerne la direction AP, les résultats montrent une évolution de  $H$  estimé par DFA et R/S pour les 3 tailles de fenêtre ( $p < 0.05$  ; cf figure 1a). Par contre, la méthode SDA ne permet pas de détecter une évolution sauf pour HS avec une fenêtre de 5s ( $p < 0.05$ ).

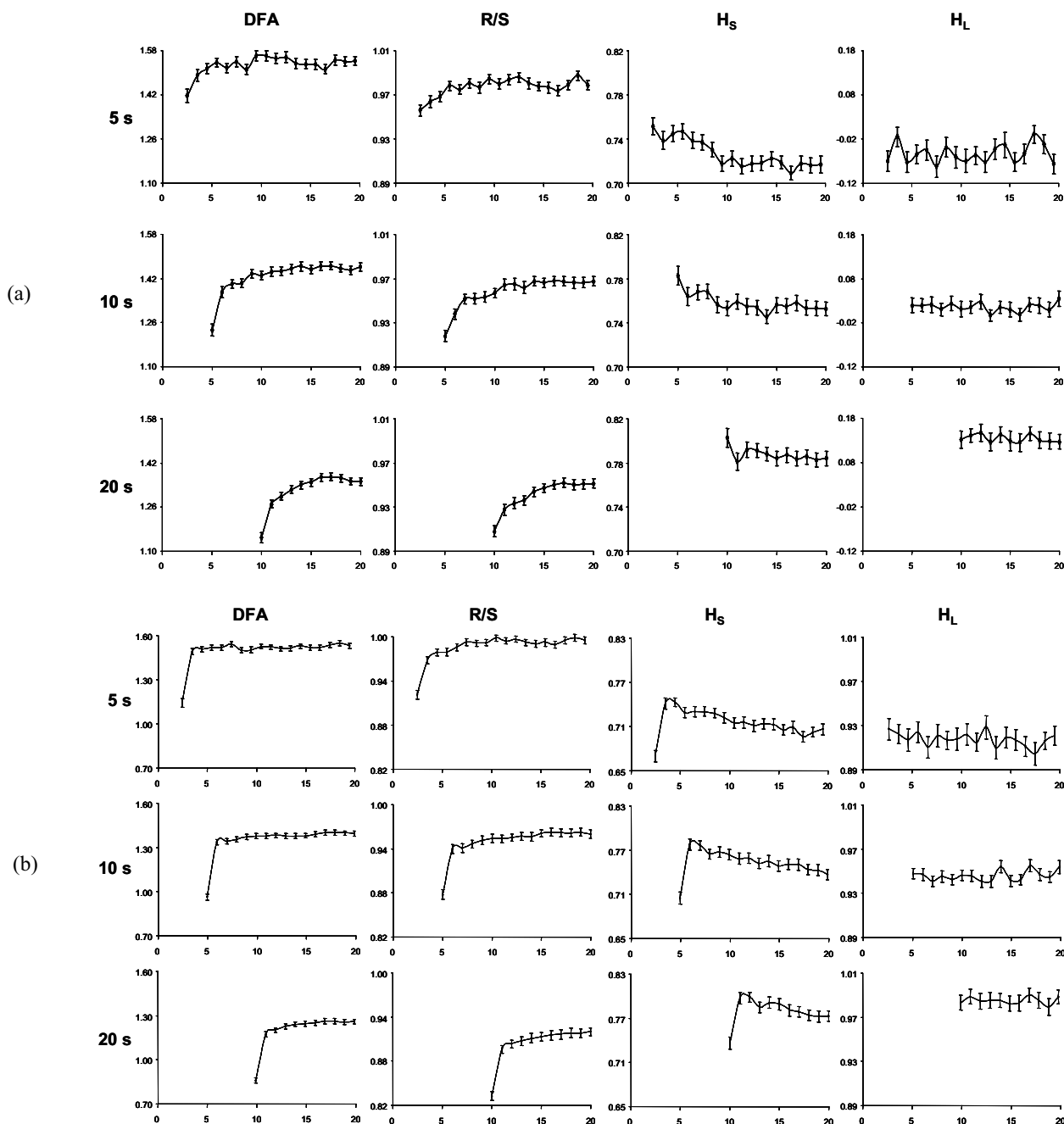


Figure 1 : évolution des exposants de Hurst estimés par les 3 méthodes pour les 3 tailles de fenêtres pour les directions antéroposterieures (a) et médiolatérales (b). Les données sont exprimées en moyenne et écart-type. L'axe des ordonnées représente les valeurs de l'exposant de Hurst et l'axe des abscisses représente le temps exprimé en seconde. L'abscisse 0 correspond à l'instant FC2 et l'abscisse de chaque point correspond au milieu de la fenêtre de calcul.

Alors que dans la direction ML, et en raison de grands déplacements durant le posé du deuxième pied (FC2), l'analyse débute à partir de l'instant FC2+1. Les résultats montrent une évolution, en fonction de temps, de H estimé par DFA et R/S pour les fenêtres de 20 s et par R/S pour les fenêtres de 5 s ( $p < 0.05$  ; cf figure 1b). Par contre, la méthode SDA, montre une évolution pour HS avec les 3 tailles de fenêtres.

#### 4. Discussion

Les méthodes DFA et R/S apparaissent les plus performantes pour suivre l'évolution de H en fonction du temps. La figure 1 montre deux phases d'évolution de H : dans un premier temps les valeurs de H progressent vers des valeurs plus élevées jusqu'à la quatrième fenêtre puis dans un deuxième temps elles se stabilisent. La première phase serait assimilée à une période d'instabilité posturale alors que la

deuxième phase correspondrait à une période où la posture est mieux contrôlée [4].

Concernant la méthode SDA, l'absence de résultat significatif permet de reconsidérer l'utilisation de cette méthode dans l'étude de la posture, renforçant ainsi les doutes postulés par Delignières et al. [3].

Une taille de fenêtres de 5 s est suffisante pour caractériser l'évolution de l'équilibre. En effet, l'analyse de la fenêtre de 5 s, qui correspond à une série de données de 500 points, montre une faible variabilité inter-sujets de 1% et 0.5% de la moyenne respectivement pour DFA et R/S. Ce résultat est en contradiction avec les résultats de la littérature qui proposent qu'une petite série de données entraîne une fluctuation importante [2].

## 5. Conclusion

Les méthodes DFA et R/S ont permis d'identifier une période d'instabilité posturale chez les sujets adultes qui doivent gérer une légère perturbation de l'équilibre. Une des perspectives de cette étude sera d'appliquer ces méthodes à une population présentant un déficit de l'équilibre postural tel que le sujet âgé. A ce jour, l'analyse d'un sujet âgé chuteur (75 ans) par les méthodes DFA et R/S donne des résultats encourageants pour l'étude du contrôle postural. En effet, chez ce sujet âgé la variabilité est dix fois plus importante que chez les adultes testés pour cette étude. De plus, il ne présente pas de phase de stabilisation de la posture suite à la réalisation du pas.

## Remerciements

Cette étude a été financée dans le cadre du projet PARACHUTE (Personnes Agées et Risque de Chute), soutenu par le Réseau National Technologies pour la Santé (RNTS), le Fonds Social Européen, le Fonds Européen de Développement Régional, le Conseil Régional Champagne-Ardenne, et l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique.

## Références

- [1] J.J. Collins et C.J. De Luca, Open-loop and closed-loop control of posture: a random-walk analysis of center-of-pressure trajectories. *Exp Brain Res*, 1993. 95: pp. 308-18.
- [2] I. De la Fuente, L. Martinez et al., R/S analysis in strange attractors. *Fractals*, 1998. 6: pp. 95-100.
- [3] D. Delignieres, T. Deschamps et al., A methodological note on nonlinear time series analysis: is the open- and closed-loop model of Collins and De Luca (1993) a statistical artifact? *J Mot Behav*, 2003. 35: pp. 86-97.
- [4] A.L. Goldberger, L.A. Amaral et al., Fractal dynamics in physiology: alterations with disease and aging. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2002. 99 Suppl 1: pp. 2466-72.
- [5] H. Hurst, R. Black et al., Long-term storage in reservoirs: an experimental study. *Trans Am Soc Civ Eng*, 1951. 116: pp. 770.
- [6] B. Mandelbrot et J. Van Ness, Fractional Brownian motion, fractional noises and applications. *SIAM Review*, 1968. 10: pp. 422-437.
- [7] C.K. Peng, J. Mietus et al., Long-range anticorrelations and non-Gaussian behavior of the heartbeat. *Phys Rev Lett*, 1993. 70: pp. 1343-6.
- [8] T.E. Prieto, J.B. Myklebust et al., Measures of postural steadiness: differences between healthy young and elderly adults. *IEEE Trans Biomed Eng*, 1996. 43: pp. 956-66.

# Reconstruction 3D de sténoses par modélisation markovienne à partir de plus de deux images d'angiographie rotative par rayons X

Moez CHAKCHOUK<sup>1,2</sup>, Sylvie SEVESTRE-GHALILA<sup>1</sup>, Christine GRAFFIGNE<sup>2,3</sup>, Mériem JAÏDANE<sup>1</sup>  
Hatem RAJHI<sup>4</sup>, Radhi HAMZA<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Unité de Recherche Signaux et Systèmes (U2S), École Nationale d'Ingénieurs de Tunis  
Campus El Manar, 1002 Belvédère, Tunis, Tunisie

<sup>2</sup>Laboratoire Mathématiques Appliquées de Paris 5 (MAP5), Université René Descartes Paris 5  
45 rue des Saints-Pères, 75270 Paris Cedex 0645, France

<sup>3</sup>École Supérieure de la Statistique et de l'Analyse de l'Information  
INSAT, Centre Urbain Nord, 1080 Tunis, Tunisie

<sup>4</sup>Service Imagerie Médicale, Hôpital Charles Nicolle  
Boulevard 9 avril, 1001 Tunis, Tunisie

{chakchouk, sevestre, graff}@math-info.univ-paris5.fr  
meriem.jaidane@wanadoo.tn, {hatem.rajhi, radhi.hamza}@rns.tn

**Résumé** – Dans cette contribution, nous proposons une méthode de reconstruction tridimensionnelle (3D) locale de sténoses à partir de plus de deux images ou projections extraites d'une séquence d'images d'angiographie rotative par rayons X. Cette méthode utilise une modélisation markovienne dont l'énergie comprend un terme décrivant l'a priori sur la structure vasculaire à reconstruire ainsi qu'un terme d'ajustement aux projections. Cette modélisation est une généralisation de celle introduite dans [1]. En effet, l'énergie d'ajustement est modifiée afin de prendre en compte un nombre de projections supérieur à deux. Cette généralisation augmente le nombre de contraintes ce qui diminue le nombre de minima globaux de l'énergie markovienne. Les simulations réalisées dans ce travail montre que cela améliore sensiblement la qualité de la reconstruction dans le cas de présence de sténoses de formes complexes.

**Abstract** – In this paper, we propose a 3D reconstruction method of vessel lesions by using more than two projections. These projections is extracted from an X ray rotational angiography image sequence. It is based on a markov model involving an energy composed of an apriori term and a term describing the adjustment to the projections data. This model is an extension of that proposed in [1]. In fact, the adjustment energy is modified in order to take into account a number of projections greater than two. This generalization increases the number of constraints and then decreases the number of energy minima. The simulations carried out in this work show that this generalization improve the reconstruction quality of complexe vessel lesions.

## 1 Introduction

L'angiographie par rayons X est la modalité d'imagerie médicale la plus utilisée pour le diagnostic des pathologies vasculaires (sténoses, anévrisme, etc.). La routine clinique actuelle consiste à acquérir des séquences d'images acquises suivant plusieurs angles de vue permettant au radiologue de reconstruire mentalement le réseau vasculaire. Ces images sont utilisées pour détecter et quantifier la sévérité des différentes pathologies vasculaires. Dans le cas de sténoses, il s'agit de réaliser le rapport des diamètres des vaisseaux mesurés à partir des contours détectés dans une image choisie par le médecin radiologue [10]. Afin d'améliorer les performances de l'analyse quantitative de sténoses, deux modes d'acquisition ont été envisagés. Le premier, appelé mode d'acquisition biplan, utilise deux sources à rayons X. Il permet d'acquérir simultanément deux séquences d'images d'angiographie sous des incidences orthogonales (frontale et latérale) [5]. Le second, appelé mode d'acquisition rotative, permet d'acquérir une série d'images d'angiographie par rayons X au cours d'une seule in-

jection du produit de contraste et lors de la rotation continue du système d'acquisition autour du patient. Son avantage est de réduire la quantité de produit de contraste, le taux d'irradiation du patient et la durée de l'intervention [3, 10]. Ces deux modes d'acquisition ont rendu possible la reconstruction tridimensionnelle (3D) du réseau vasculaire qui s'avère déterminante pour le diagnostic des sténoses puisqu'elles permettent d'améliorer la précision des méthodes d'analyse quantitative bidimensionnelle (2D) classique par des critères 3D de type surfacique.

Plusieurs méthodes de reconstruction 3D à partir d'images d'angiographie par rayons X ont été proposées. Nous distinguons deux classes de méthodes : les méthodes tomographiques et les méthodes non-tomographiques appelées aussi géométriques [4, 5]. Les méthodes tomographiques permettent généralement une reconstruction volumique globale du réseau vasculaire. Elles ont été largement adoptées par les constructeurs d'équipements d'angiographie vasculaire. Suivant l'approche de reconstruction utilisée, elles nécessitent l'utilisation de quelques dizaines [2] à une centaine d'images [3] d'angiographie rotative. Elles ont l'inconvénient d'être très coûteux en temps de calculs.



Dans le cas des méthodes non-tomographiques ou géométriques, l'approche de reconstruction 3D est locale et nécessite quelques projections qui peuvent être issues d'un système d'acquisition biplan ou rotative. Elles considèrent les vaisseaux sanguins comme des structures curvilignes 3D caractérisées principalement par leur réseau des lignes médianes et les profils densitométriques de leurs sections. Cette modélisation divise le problème de reconstruction des vaisseaux en deux sous problèmes. Le premier vise la reconstruction des lignes médianes des vaisseaux qui représentent leurs positions dans l'espace 3D [4, 5, 6]. Le second sous problème est d'estimer les sections du vaisseau à partir des profils densitométriques monodimensionnels observés sur les projections. Pour cela un modèle elliptique de la section a été proposée dans [7, 8]. Ce modèle n'est valable que pour des sections à symétrie radiale et est par conséquent inapte à modéliser les sténoses de formes complexes [9]. C'est pourquoi, il a été envisagé de déformer l'ellipse par une technique d'optimisation stochastique basée sur les champs de Markov et le recuit simulé [1, 9]. Ces deux méthodes précitées utilisent une énergie comprenant un terme d'ajustement aux données de projection, et un terme d'a priori sur la forme des sections à reconstruire. Elles se distinguent par ce dernier terme utilisant soit un modèle de contour basé sur les B-splines [9] soit un modèle de la région (image binaire) pour la section du vaisseau à reconstruire [1]. L'intérêt de l'approche contour est de diminuer les sites du champ de Markov. En effet, dans ce cas un site est un noeud de la courbe spline alors que l'approche région, un site est un voxel. Par contre, l'approche contour augmente grandement la complexité de la mise en oeuvre de la minimisation de l'énergie en induisant une succession d'approximation nécessaire pour le calcul des projections. pour permettre l'introduction de données supplémentaires à celles de deux vues issues d'un système d'angiographie biplan. Nous avons choisi d'améliorer l'approche région.

Après avoir formalisé le problème en section 2, nous présentons dans la section 3 la généralisation du terme d'ajustement à plusieurs vues issues d'une séquence d'images d'angiographie vasculaire rotative. La section 4 est consacrée à la mise en oeuvre de la minimisation de l'énergie du champ markovien résultant par l'algorithme du recuit simulé. Dans la section 5, nous présentons quelques résultats expérimentaux de reconstruction 3D locale de vaisseaux sanguins présentant des sténoses. En particulier, nous montrons l'apport de cette extension à l'aide de résultats obtenus sur des sections synthétiques représentant des sténoses de formes complexes. Enfin, nous concluons cette contribution en donnant quelques perspectives de ce travail.

## 2 Formulation du problème

Un vaisseau sanguin est défini par une surface représentée par une fonction binaire  $f$  donnée, pour tout site  $s = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , par :

$$f(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \text{ est à l'intérieur de la surface} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

En supposant que le vaisseau se trouve au centre de la zone de projection et qu'il est situé à une distance assez grande du foyer de la source de rayons X, la géométrie d'acquisition conique du système d'acquisition peut être approchée par une géométrie parallèle. Comme le montre la figure 1, on suppose que le

faisceau des rayons X parallèles est perpendiculaire à l'axe  $z$ , et qu'il forme un angle  $\theta$  avec l'axe  $x$ . Si l'on note  $g_\theta$  la projection du vaisseau sanguin, on peut écrire :

$$g_\theta(t, z) = \int_{\mathcal{L}_\theta(t, z)} f(x, y, z) dl \quad (2)$$

où  $\mathcal{L}_\theta(t, z)$  est la droite formée par le rayon X projeté au point  $(t, z)$  quand l'angle de vue vaut  $\theta$ .

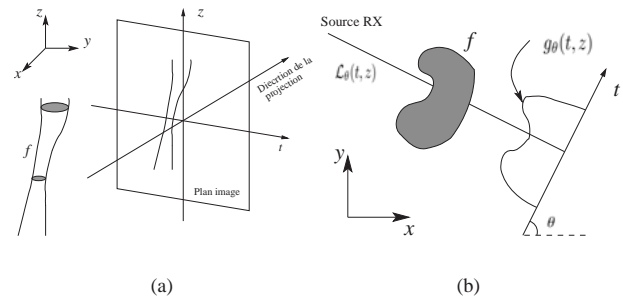


FIG. 1 – (a) Géométrie de la projection (a) d'un vaisseau et (b) d'une section.

Pour chaque angle de vue  $\theta \in \Theta$ , la fonction  $f$  est observée par sa projection  $g_\theta$  supposée être le résultat du modèle de dégradation classique suivant :

$$g_\theta = H_\theta f + \eta, \quad \theta \in \Theta \quad (3)$$

où  $H_\theta$  est l'opérateur de projection suivant l'angle de vue  $\theta$  et  $\eta$  est un bruit dû au procédé d'acquisition supposé être un vecteur de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi normale  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

Le problème de reconstruction de la fonction  $f$  à partir de  $n_p = |\Theta|$  projections est considéré comme un problème inverse mal posé au sens de Hadamard puisque le faible nombre de projections ( $1 < n_p \leq 10$ ) ne permet pas d'assurer l'unicité de la solution. L'approche markovienne permet d'introduire une contrainte de régularisation de type locale traduisant l'a priori sur la forme des objets à reconstruire. Ceci permet de réduire le nombre de solutions de ce problème de reconstruction [12, 11, 13].

## 3 Modélisation markovienne

Soit  $S$  un ensemble fini de sites de  $\mathbb{R}^3$ . Le vaisseau à reconstruire est supposé être un champ markovien binaire noté  $F$ , ce qui signifie  $\forall s \in S$  on a :

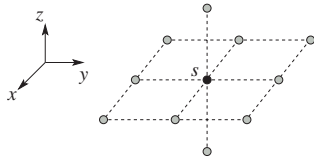
$$\Pr[F_s = f_s / F_{S \setminus \{s\}} = f_{S \setminus \{s\}}] = \Pr[F_s = f_s / F_{\mathcal{V}_s} = f_{\mathcal{V}_s}]$$

où  $F_A$  est la restriction de  $F$  à l'ensemble des sites de  $A$  et  $\mathcal{V}_s$  est le voisinage du site  $s$  que l'on choisit ici formé par les 8 voisins les plus proches voisins dans le plan  $(x, y)$  et par les deux plus proches voisins verticaux suivant l'axe  $z$  (voir figure 2). Sous la contrainte de la positivité et en appliquant le théorème de Hammersley-Clifford,  $F$  suit une distribution de Gibbs  $\pi(f)$  donnée par :

$$\pi(f) = \Pr[F = f] = \frac{1}{Z} \exp(-U_r(f)),$$

où  $Z$  est une constante de normalisation et  $U_r(f)$  est une fonction d'énergie s'écrivant comme somme de potentiels locaux



FIG. 2 – Système de voisinage  $\mathcal{V}_s$  utilisé.

sur des sous-ensembles  $c$  de sites mutuellement voisins, appelés cliques, associés au système de voisinage défini dans la figure 2. Comme dans [1], cette énergie qui ne charge que les cliques paires de sites s'écrit :

$$U_r(f) = 1 - \frac{1}{|S|} \sum_{c=\langle s,r \rangle} \frac{1}{|\mathcal{V}_s|} \delta(f(s) - f(r)). \quad (4)$$

où  $\delta$  est l'opérateur de Kronecker<sup>1</sup>.

L'équation 3 permet d'exprimer la loi de  $G_\Theta$ , ensemble des projections du vaisseau quand  $F = f$  qui n'est autre qu'une  $\mathcal{N}(H_\Theta f, \sigma^2 \mathbf{I})$ , où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité de taille  $n_p |S| \times n_p |S|$ . Ainsi, on peut écrire :

$$\Pr[G_\Theta = g_\Theta / F = f] \propto \exp(-n_p U_a(f, g) / \sigma^2), \quad (5)$$

où  $U_a(f)$  est l'énergie d'ajustement aux données exprimée par :

$$U_a(f, g) = \frac{1}{n_p} \sum_{\theta \in \Theta} \|g_\theta - H_\theta f\|^2. \quad (6)$$

La formulation bayésienne de ce problème de reconstruction revient à estimer  $f$  à l'aide du maximum de la probabilité a posteriori (MAP) :

$$\hat{f} = \arg \max_f (\Pr[G_\Theta = g_\Theta / F = f] \cdot \Pr[F = f]). \quad (7)$$

La modélisation markovienne ainsi introduite ramène ce problème d'estimation à la minimisation en  $f$  de l'énergie suivante :

$$U(f, g) = U_a(f, g) + \lambda U_r(f). \quad (8)$$

où  $U_r(f)$  est appelée énergie de régularisation,  $U_a(f, g)$  l'énergie d'attachement aux données et  $\lambda$  le paramètre de régularisation qui contribue à équilibrer la contribution de ces deux énergies tout en intégrant la variabilité  $\sigma^2$  du bruit  $\eta$ . Ainsi, l'énergie d'attachement aux données quantifie l'erreur entre les projections observées et les projections de la solution  $f$ . Tandis que, l'énergie  $U_r(f)$  permet de garantir la régularité de cette solution en maintenant une homogénéité de la forme du vaisseau sanguin à reconstruire en pénalisant les voxels éparpillés de  $f$ .

## 4 Optimisation de l'énergie

Pour résoudre le problème de minimisation de l'énergie exprimée dans l'équation (8), nous proposons d'utiliser l'algorithme du recuit simulé. Il permet de converger vers l'un des minima globaux désirés et cela en évitant les multiples minima locaux de la fonctionnelle à minimiser [12]. L'algorithme consiste à associer un schéma de refroidissement  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à une procédure de simulation<sup>2</sup> de la distribution de Gibbs définie par :

$$\forall \theta \in \Theta, \pi_{T_n}(f/g_\theta) \propto \exp(-U(f, g)/T_n). \quad (9)$$

<sup>1</sup>l'opérateur de Kronecker au point  $a$  vaut 1 si  $a = 0$  et 0 sinon.

<sup>2</sup>Nous avons opté pour l'algorithme de Metropolis comme décrit dans [12]

Cette suite de paramètres  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , appelés températures, est décroissante, strictement positifs et convergente vers 0. Le schéma de refroidissement choisi ici est classique puisqu'il s'agit d'une descente exponentielle par paliers exprimée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n = a^n T_0 = a T_{n-1}, \quad (10)$$

où  $a$  est un paramètre positif proche de l'unité (typiquement  $a \in [0.95, 0.99]$ , ici  $a = 0.95$ ). Dans ce travail et comme dans [1], le palier de température constante correspond à un balayage aléatoire des sites appartenant uniquement à la surface du vaisseau. Pour rester dans le cadre du recuit simulé et ainsi garantir la convergence vers les minima de notre énergie, le paramètre de régularisation  $\lambda$ , contrairement à [1], reste constant tout au long du schéma de refroidissement.

Cet algorithme d'optimisation nécessite à la fois une initialisation de son paramètre de température  $T_0$  et aussi une solution initiale  $f^{(0)}$ . ces deux paramètres intimement liés sont pour :

- $f^{(0)}$  est un cylindre généralisé de sections elliptiques [7].
- $T_0$  doit être suffisamment élevée dans le cas où l'initialisation est éloignée de la solution optimale. La pertinence de notre choix de la solution initiale nous permet de choisir  $T_0$  autour de  $10^{-3}$ .

## 5 Résultats expérimentaux

Nous proposons ici de montrer l'intérêt de plus de deux vues dans la reconstruction 3D à l'aide de simulation de surfaces d'un vaisseau présentant une sténose. La figure 3(g) présente le résultat de reconstruction d'un vaisseau présentant une sténose de forme simple. Ce résultat de reconstruction est obtenu quand  $\lambda = 50$  et  $T_0 = 10^{-3}$  dans le cas de trois projections acquises suivant trois différents angles de vues (voir figures 3(a), 3(b) et 3(c)). La section présentée dans la figure 3(f) n'est autre que la vraie section sténosée. L'erreur de reconstruction obtenue à partir de ces projections est nulle. En figure 3(e), on présente les pixels erronés obtenus en utilisant uniquement deux vues comme dans [1]. Le nombre de ces pixels erronés devient grandissant quand la section sténosée augmente en complexité. En effet pour celle de la figure 4(a), nous avons évalué les résultats de reconstruction obtenus en faisant 3 tourner 100 fois l'algorithme d'optimisation. Dans la figure 4(e), on montre que la probabilité de reconstruire la vraie section sténosée est quasiment nulle dans le cas de deux vues. Elle atteint 0.88 qu'en considérant un nombre de vue égale à 4. Cela se traduit par l'absence de la vraie solution dans l'ensemble des minima en utilisant un nombre de vues inférieur à quatre.

## 6 Conclusion

Dans cet article, nous avons mis en évidence que la qualité de la reconstruction 3D de vaisseau sanguin est améliorée en considérant un nombre de vue non limité à deux. Les minima obtenus en minimisant l'énergie markovienne de reconstruction correspondent à la solution de reconstruction recherchée. De plus, nous avons constaté que le réglage des paramètres de l'algorithme d'optimisation est indépendant du nombre de vue. Cela permet au médecin une certaine flexibilité quant aux choix des images qu'il souhaite utiliser pour la reconstruction.

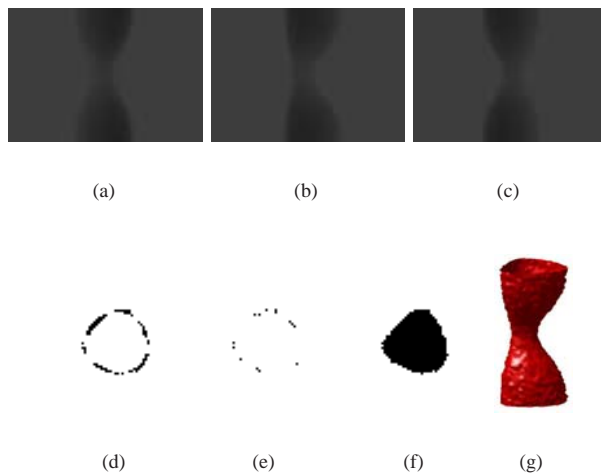


FIG. 3 – Reconstruction 3D de la partie d'un vaisseau présentant une sténose en utilisant trois projections extraites d'une séquence d'angiographie rotative acquises respectivement suivant les angles de vue (a)  $-43^\circ$ , (b)  $13^\circ$  et (c)  $78^\circ$ . (d) Erreur obtenue à l'initialisation elliptique d'une section du vaisseau. (e) Erreur obtenue par la reconstruction de cette section à partir de 2 vues. (f) Résultat de la reconstruction de cette section à partir de 3 vues. (g) Visualisation du vaisseau reconstruit en 3D

## Références

- [1] C. Pellot, A. Herment, M. Sigelle, P. Horain, H. Maître, and P. Peronneau. A 3D reconstruction of vascular structures from x-ray angiograms using an adapted simulated annealing algorithm. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 13(1) :48–60, 1994.
- [2] A. Rougée, C. Picard, D. Saint-Felix, Y. Troussset, T. Moll, and M. Amiel. Three-dimensional coronary arteriography. *International Journal of Cardiac Imaging*, 10(1) :67–70, 1994.
- [3] R. Fahrig, A. J. Fox, S. Lownie, and D.W. Holdsworth. Use of a C-arm system to generate true three-dimensional computed rotational angiograms : preliminary in vitro and in vivo. *American Journal of Neuroradiology*, 18(8) :1507–1514, september 1997.
- [4] J. L. Coatrieux, M. Garreau, R. Collorec, and C. Roux. Computer vision approaches for the three-dimensional reconstruction of coronary arteries : Review and prospects. *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, 22(1) :1–38, 1994.
- [5] A. Wahle, H. Oswald, and E. Fleck. 3D heart-vessel reconstruction from biplane angiograms. *IEEE Computer Graphics and Applications Magazine*, 16(1) :65–73, 1996.
- [6] M. Chakchouk, S. Sevestre-Ghalila, F. Ghorbel, F. Tenzekhti, and R. Hamza. Three-dimensional vascular network projective reconstruction from uncalibrated and non-subtracted x-ray rotational angiography image sequence. In *SPIE Medical Imaging*, 23-28 February 2002, San Diego, California, USA.

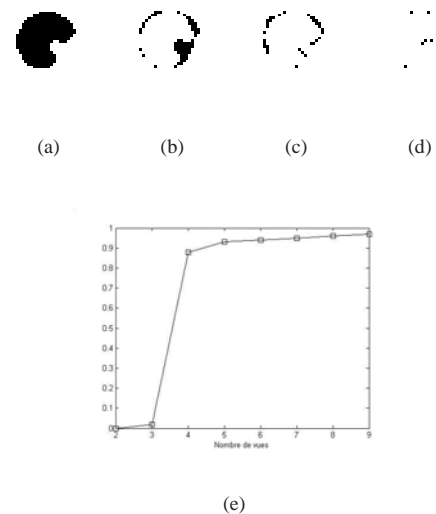


FIG. 4 – Résultats de reconstruction d'une section de vaisseau présentant (a) une sténose complexe. (b) Erreur à l'initialisation. (c) Erreur de reconstruction à partir de deux vues. (d) Erreur de reconstruction à partir de trois vues. (e) Variation en fonction du nombre de vues de la probabilité pour reconstruction la vraie section (a).

- [7] K. Kitamura, J. M. Tobis, and J. Sklansky. Estimating the 3D skeletons and transverse areas of coronary arteries from biplane angiograms. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 7(3) :173–187, 1988.
- [8] T. Kayikcioglu, A. Gangal, and M. Turhal. Reconstructing coronary arterial segments from three projection boundaries. *Pattern Recognition Letters*, 22 :611–624, 2001.
- [9] M. Senasli, L. Garnero, A. Herment, and E. Mousseaux. 3D reconstruction of vessel lumen from very few angiograms by dynamic contours using a stochastic approach. *Graphical Models*, 62(2) :105–127, 2000.
- [10] O.E.H. Elgersma, P.C. Buijs, A.F.J. W'ust, Y. van der Graaf and B.C. Eikelboom, and W.P.T.M. Mali. Maximum internal carotid arterial stenosis : Assessment with rotational angiography versus conventional intraarterial digital subtraction angiography. *Radiology*, 213(3) :777–783, 1999.
- [11] S. Geman and C. Graffigne. Markov random field image models and their applications to computer vision. In A.M. Gleason (ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, pages 1496–1517, august 1986.
- [12] S. Geman and D. Geman. Stochastic relaxation, Gibbs distribution, and Bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(6) :721–741, 1984.
- [13] B. Chalmond. Éléments de modélisation pour l'analyse d'images (Mathématiques et Applications) *Springer Verlag*, 1999.

# ICASENSE : une application de l'Analyse en Composantes Indépendantes à l'IRM parallèle

G. LE BEC<sup>1,2</sup>, K. RAOOF<sup>1</sup>, J.-P. YONNET<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire des Images et Signaux, BP 46, 38402 St Martin d'Hères Cedex, France

<sup>2</sup>Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, BP46, 38402 St Martin d'Hères Cedex, France

Gael.Le-Bec@lis.inpg.fr, Kosai.Raoof@lis.inpg.fr, Jean-Paul.Yonnet@leg.ensieg.inpg.fr

**Résumé** – Les récentes méthodes d'imagerie IRM parallèle (SENSE et SMASH) nécessitent une bonne connaissance de la sensibilité des antennes. Celle-ci est généralement mesurée lors d'une phase de calibration, ou estimée par filtrage adaptatif spatio-temporel si l'on dispose d'une série d'acquisitions (TSENSE). Nous proposons une formulation du problème en termes de séparation aveugle de sources : une analyse en composantes indépendantes (ICA) permet alors d'extraire les informations de sensibilité des antennes à partir d'une seule acquisition. Des résultats de simulations sont présentés, démontrant l'intérêt de cette nouvelle méthode que nous nommerons ICASENSE.

**Abstract** – Advanced Parallel Magnetic Resonance Imaging methods need coil sensitivity maps for image reconstruction. Sensitivities are commonly measured during a calibration step or estimated using spatio-temporal adaptive filtering. A Blind Source Separation formulation of the problem permits the estimation of coil's sensitivities using only one acquisition. Simulation results are presented, showing the interest of this method named ICASENSE.

## 1. Introduction

En IRM conventionnelle, un système de gradients de champs magnétiques permet de coder les informations spatiales des signaux : à chaque point de l'espace correspond une fréquence et une phase ; la reconstruction est ensuite réalisée par une transformée de Fourier. La réduction du temps d'acquisition a été étudiée dans de très nombreux travaux : citons les progrès sur les systèmes de gradients et les séquences d'acquisition ainsi que les méthodes d'échantillonnages partiels basés sur des propriétés de la transformée de Fourier. L'introduction de réseaux d'antennes en 1991 [1] a débouché sur l'imagerie IRM parallèle (SMASH en 1997 [2] et SENSE en 1999 [3]) : la sensibilité des capteurs n'est pas homogène dans l'espace, ce qui permet un codage supplémentaire et une diminution du temps d'acquisition. Le signal de chaque antenne est sous échantillonné et l'image (reconstruite par FFT des signaux IRM) est repliée. Dans le cas d'un système de deux antennes et avec un temps d'acquisition divisé par deux (une ligne sur deux est échantillonnée) nous avons en tout point :

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}_1(x, y) \\ \tilde{f}_2(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1(x, y) & s_1(x, y \pm N/2) \\ s_2(x, y) & s_2(x, y \pm N/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x, y) \\ f(x, y \pm N/2) \end{bmatrix} \quad (1)$$

où  $f(x, y)$  est l'image initiale,  $\tilde{f}_1(x, y)$  et  $\tilde{f}_2(x, y)$  sont les images repliées reconstruites avec les signaux reçus par les deux antennes,  $s_1(x, y)$  et  $s_2(x, y)$  les sensibilités des antennes et  $N$  le nombre de lignes de l'image. Les méthodes SENSE et SMASH supposent que les sensibilités sont connues. Dans de nombreuses applications où les antennes n'ont pas de position déterminée et sont susceptibles de bouger les une par rapport aux autres, l'estimation de  $s_1(x, y)$  et  $s_2(x, y)$  est délicate. Des algorithmes d'autocalibration basés sur l'introduction de

lignes supplémentaires (AUTO-SMASH [4]) ou l'utilisation d'un filtre adaptatif (TSENSE [5]) en IRM dynamique apportent une solution dans certains cas.

La nouvelle méthode que nous proposons, ICASENSE, est basée sur l'hypothèse qu'une région de l'image est statistiquement indépendante d'une autre région. Les outils de l'analyse en composantes indépendantes (ICA) [6] peuvent alors être utilisés pour séparer les signaux repliés et estimer les coefficients du mélange (donc les sensibilités à un facteur de normalisation près).

## 2. Méthode ICASENSE

### 2.1 Théorie

La sensibilité d'une antenne varie lentement : nous la supposons constante au voisinage d'un point  $(x, y)$ . Formons un vecteur colonne  $\tilde{\mathbf{f}}_1$  (resp.  $\tilde{\mathbf{f}}_2$ ) en balayant  $M$  points proches de  $(x, y)$  dans l'image  $\tilde{f}_1(x, y)$  (resp.  $\tilde{f}_2(x, y)$ ) : voir la figure 1 pour plus de détails. Posons  $\tilde{\mathbf{f}} = (\tilde{\mathbf{f}}_1, \tilde{\mathbf{f}}_2)^T$ .

De même formons  $\mathbf{f}_1$  (resp.  $\mathbf{f}_2$ ) en balayant  $M$  points proches de  $(x, y)$  (resp.  $(x, y \pm N/2)$ ) dans l'image initiale  $f(x, y)$  et posons  $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)^T$ . Le problème consiste à estimer la matrice  $\mathbf{S}$  du mélange telle que

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{S} \mathbf{f} \quad (2)$$

$\mathbf{S}$  contenant les sensibilités des antennes autour des points  $(x, y)$  et  $(x, y \pm N/2)$ . En écrivant l'équation (1) pour un ensemble de points, il apparaît que l'estimation de  $\mathbf{S}$  est un problème classique de séparation de sources. L'optimisation d'un critère d'indépendance statistique entre

$\mathbf{f}_1$  et  $\mathbf{f}_2$  permet alors d'estimer  $\mathbf{S}$ , à une permutation et un facteur près.

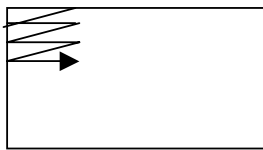


FIG. 1 : création des vecteurs  $\tilde{\mathbf{f}}_1$  et  $\tilde{\mathbf{f}}_2$  par balayage d'une région de l'image.

Il est temps d'introduire certaines propriétés physiques des antennes IRM. La sensibilité en un point  $(x, y)$  donné est calculée par le théorème de réciprocité [7] :

$$s(x, y) = B_u(x, y) \quad (3)$$

$B_u(x, y)$  étant le champ magnétique créé par l'antenne excitée par un courant unitaire. La sensibilité va donc décroître avec la distance :

$$\begin{aligned} s_1(x, y) &> s_1(x, y + N/2) \\ s_2(x, y) &< s_2(x, y + N/2) \end{aligned} \quad (4)$$

Les colonnes de la matrice  $\mathbf{S}$  estimée par l'algorithme d'ICA sont alors permutées pour satisfaire les inéquations (4) : les sensibilités  $s_1(x, y)$  et  $s_2(x, y)$  peuvent être identifiées. Ce traitement est repris en d'autres points pour que toute l'image soit balayée. Après d'éventuelles opérations d'interpolation et de filtrage les matrices  $s_1$  et  $s_2$  sont utilisées pour reconstruire l'image par la méthode SENSE.

## 2.2 Résultats de simulations

Les simulations ont été faites sous Matlab, à partir d'une image IRM modulée par des antennes de sensibilités connues (Fig. 2). Les images ont été repliées par sous-échantillonnage de leur transformée de Fourier (Fig. 3). L'algorithme de séparation de sources utilisé est le package FastICA [8] qui permet de séparer des mélanges linéaires en minimisant l'information mutuelle des composantes. La figure 4 nous montre l'estimation de la sensibilité d'une antenne, puis la reconstruction de l'image initiale par la méthode SENSE.

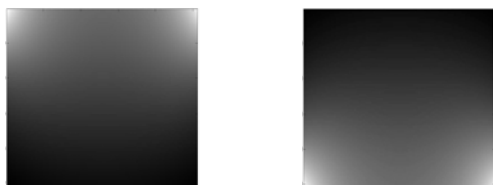


FIG. 2 : sensibilité des antennes. Sur la figure de gauche, l'antenne est en haut (et inversement pour la figure de droite). Les inéquations (4) sont vérifiées. Ces cartes de sensibilités sont calculées en intégrant l'équation de Biot et Savart (d'après l'équation (3)).



FIG. 3 : images « repliées ». Simulations des images reconstruites à partir de signaux IRM sous-échantillonnés spatialement, captés par des antennes de sensibilités données sur la figure 2.



FIG. 4 : à gauche, les sensibilités estimées par la méthode ICASENSE puis lissées et interpolées, à partir des acquisitions de la figure 3. A droite, l'image reconstruite à partir de ces données et des images figure 3, en inversant l'équation (1).

## 3. Conclusion

Les résultats de simulations nous montrent que les sensibilités des antennes d'IRM parallèles peuvent être estimées à partir d'une seule acquisition : à la différence des méthodes adaptatives classiques, il n'est plus nécessaire de disposer d'une série d'images. Pour clarifier l'exposé nous nous sommes limités ici à un système de deux antennes mais il semble évident que pour un même taux d'accélération (ou de sous échantillonnage) l'ajout d'antennes supplémentaires permet d'améliorer la reconstruction de l'image.

## Références

- [1] Roemer, Edelstein, Hayes, Souza, Mueller, The NMR phased array, Magn Reson Med, 1990, Vol 16, 192-225.
- [2] Sodickson, Manning, Simultaneous acquisition of spatial harmonics (SMASH): ultra-fast imaging with radiofrequency coil arrays, Magn Reson Med, 1997, Vol 38, 591-603.
- [3] Pruessman, Weiger, Scheidegger, Boesiger, SENSE : Sensitivity Encoding for Fast MRI, Magn Reson Med, 1999, Vol 42, 952-962.
- [4] Jakob, Griswold, Edelman, Sodickson, AUTO-SMASH: a self-calibrating technique for SMASH imaging, MAGMA 1998, Vol 7, 4254.
- [5] Kellman, Epstein, McVeigh, Adaptive sensitivity encoding incorporating spatial filtering (TSENSE), Magn Reson Med, 2001, Vol 45, 846-852.
- [6] Jutten, Calcul neuromimétique et traitement du signal. Analyse en composantes indépendantes. Thèse d'Etat, INPG-USMG, Grenoble, 1987.
- [7] Hoult, Bhakar, NMR Signal Reception : Virtual Photons and Coherent Spontaneous Emission, Concepts Magn Reson, 1996, Vol 9, 277-297.
- [8] Hyvärinen, Oja, A fast fixed-point algorithm for Independent Component Analysis, Neural Computation, 1997, Vol 9, 1483-1492.

# Modèle de connaissances pour l'interprétation d'un électrogramme

Antoine DEFONTAINE, Alfredo HERNÁNDEZ, Guy CARRAULT

Laboratoire Traitement du Signal et de l'Image – INSERM U642  
 Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, bât 22, 35042 Rennes Cedex, France  
 {antoine.defontaine, alfredo.hernandez, guy.carrault}@univ-rennes1.fr

**Résumé** – Les électrogrammes (EGM) intracavitaires ne sont que très peu étudiés ou seulement d'un point de vue temporel avec l'analyse des relations entre les ondes détectées. Une nouvelle stratégie d'interprétation physiopathologique est proposée dans cet article. Elle associe de manière originale la modélisation de tissus cardiaques, la synthèse du signal EGM et l'estimation de paramètres à l'aide d'algorithmes évolutionnaires. Les résultats obtenus ont permis d'interpréter plusieurs types de comportements physiopathologiques.

**Abstract** – Few studies have been made on electrogram (EGM) intracavitary signals. The only ones that exist are based on a temporal analysis of detected waves. A new physiopathological way of interpreting these signals is proposed in this article. It gathers, in an original way, cardiac tissue modelling, EGM synthesis and parameters estimation through evolutionary algorithms. Different physiopathological behaviours have been interpreted by this method.

## 1 Introduction

Les arythmies cardiaques représentent l'une des principales causes de mortalité au monde. L'observation et l'analyse de cette activité électrique cardiaque sont traditionnellement effectuées par l'étude de l'électrocardiogramme (ECG), mesuré au niveau de la surface thoracique. Cette analyse procède à l'étude morphologique des ondes ECG connues (QRS, ondes P et T, ...) (figure 3) et de leurs relations temporelles. D'autres signaux, comme l'électrogramme (EGM), peuvent être acquis de manière invasive en disposant une sonde munie d'électrodes à l'intérieur du cœur. C'est le cas en particulier lors de deux approches thérapeutiques :

- l'utilisation de dispositifs cardiaques implantables (DCI) – pacemakers, défibrillateurs implantables – qui proposent de plus en plus de traitements automatiques embarqués ;
- les études électrophysiologiques permettant d'identifier les zones pathologiques par l'étude de la propagation intracardiaque.

Comme pour l'ECG, il est important d'interpréter ces EGM qui sont les seuls signaux observables dans les DCI pour les traitements embarqués. Actuellement, l'analyse des EGM est basée sur l'estimation d'intervalles temporels entre les pics observés, qui peuvent être synchrones avec les ondes P ou QRS de l'ECG de surface (figure 3). L'analyse morphologique de ces signaux est très limitée, principalement à cause de leur nature locale (l'EGM n'est le reflet que de quelques  $cm^3$  du myocarde) et à la méconnaissance du lien entre leur morphologie et l'explication clinique des phénomènes locaux observés.

Cet article propose une nouvelle démarche d'interprétation d'EGM qui associe la modélisation cellulaire cardiaque, la synthèse de l'EGM et l'estimation de paramètres à l'aide d'algorithmes évolutionnaires. Dans un premier temps la méthode utilisée sera développée puis les résultats obtenus lors de l'interprétation de signaux physiopathologiques seront discutés.

## 2 Méthode

La démarche présentée associe de manière originale la modélisation de tissus cardiaques, la synthèse du signal EGM et l'estimation de paramètres à l'aide d'algorithmes évolutionnaires pour l'assistance à l'interprétation des signaux observés.

### 2.1 Modélisation tissulaire

La modélisation physiologique des cellules et tissus cardiaques a connu un essor important au cours des trente dernières années. De nombreux modèles du fonctionnement cellulaire ont été proposés [1] et la représentation des tissus cardiaques, constitués d'un ensemble de cellules couplées, est principalement basée sur une extension de l'équation du câble.

$$\frac{\partial V}{\partial t} = f(V, T) + K \cdot \nabla^2 V \quad (1)$$

où  $V$  est le potentiel de membrane cellulaire,  $f(V, T)$  un ensemble d'équations décrivant le fonctionnement cellulaire et  $K$  un coefficient de diffusion entre les cellules.

Traditionnellement la résolution d'un tel système se fait par une approche centralisée où l'ensemble des équations différentielles fait parti d'une seule boucle de simulation, permettant uniquement l'utilisation d'un seul formalisme et empêchant une simulation distribuée aisée.

Une librairie de simulation multi-formalisme basée sur une approche distribuée proposée par Zeigler [2] a été proposée [3, 4]. Elle permet, dans une structure tissulaire donnée, de définir chaque élément par un formalisme propre. Cette vue de la modélisation repose sur deux idées :

- une structure en forme d'arbre où chaque feuille correspond à un élément atomique (cellule) et les modèles couplés sont composés de plusieurs sous modèles (atomiques ou déjà couplés) ;
- un parallélisme entre la structure d'un modèle et son simulateur associé permettant de considérer aisément une

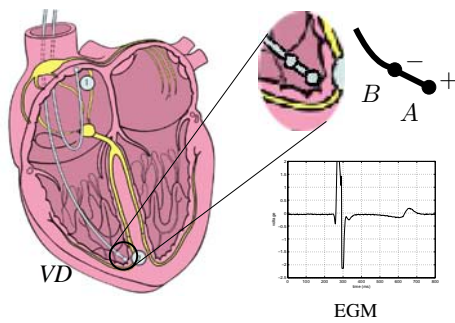


FIG. 1 – Électrode bipolaire.

distribution du calcul sur plusieurs processeurs.

L'intérêt d'une telle méthode générique est la possibilité d'intégrer plusieurs types de modèles et ainsi de pouvoir simuler différents cas pathologiques de manière standard, sans avoir à redéfinir complètement le tissu d'un point de vue mathématique et formel. La possible distribution physique du calcul est aussi un autre avantage.

## 2.2 Synthèse du signal EGM

La sonde d'une prothèse cardiaque est typiquement constituée de deux capteurs séparés par une distance de 9 à 25 mm environ. Dans le cadre de l'électrode bipolaire endocavitaire placée dans le ventricule droit (*VDBip*), un capteur est fixé à la paroi interne, au niveau de l'apex, et l'autre est mobile dans le ventricule (figure 1). Chacun de ces capteurs est sensible au champ dipolaire créé dans une petite sphère autour de son centre. Les signaux fournis par cette électrode correspondent à la différence entre les champs mesurés par chaque capteur.

La simulation des tissus endocardiaques donne, pour chaque instant, un champ de potentiels d'action (PA). Le vecto-électrogramme endocardique est généré en considérant la somme vectorielle de dipôles électriques unitaires obtenus en chaque point du tissu.

$$\vec{G} = \sum_{i,j} \Delta \vec{V}_{i,j} \quad (2)$$

On peut alors estimer la contribution à l'EGM de chaque tissu en projetant le vecto-électrogramme sur des axes correspondant aux axes d'observation (ici axe des capteurs).

La démarche présentée propose d'approximer le champ dipolaire visible par chaque capteur par le champ créé par un morceau 2D de cellules endocardiques. Ces champs simulés sont obtenus après la modélisation et la simulation de la propagation des potentiels d'action, présentée plus en détails dans [3]. La propagation du potentiel d'action est supposée isotropique. On considère les angles  $\alpha_A$  et  $\alpha_B$  formés entre l'axe de l'électrode et les fronts d'activation respectifs (figure 2). On introduit des retards ( $\delta_A$  et  $\delta_B$ ) à l'activation de chaque tissu par rapport aux tissus simulés. En considérant la projection sur l'axe des électrodes, l'EGM simulé est défini par :

$$EGM_s = G_A(t - \delta_A) \cdot \cos(\alpha_A) - G_B(t - \delta_B) \cdot \cos(\alpha_B) \quad (3)$$

Les observations expérimentales ayant été obtenues sur des électrodes bipolaires, la reconstruction de l'EGM, et plus tard l'interprétation des paramètres, ne pourra être faite qu'en consi-

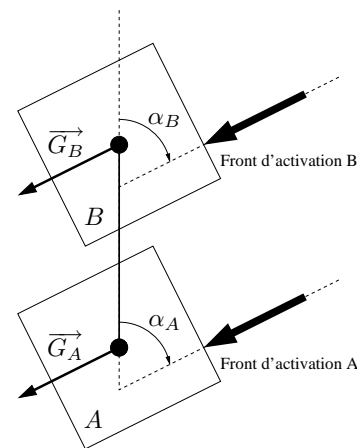


FIG. 2 – Simulation de l'EGM.

dérant une direction de propagation dans l'espace appartenant au cône de révolution d'angle  $\alpha$  par rapport à un capteur donné.

## 2.3 Estimation des paramètres

L'objectif de cette étape est d'estimer le vecteur de paramètres  $P^*$  du modèle  $M(P)$  qui reproduit au mieux l'EGM observé du patient ( $EGM_o$ ). Cette estimation est formalisée comme un problème d'optimisation, qui consiste à minimiser une fonction d'erreur définie entre l'observation et la sortie du modèle :

$$\varepsilon(P) = \| EGM_o - EGM_s \|^2 = \| EGM_o - M(P) \|^2 \quad (4)$$

La procédure d'optimisation est basée sur un algorithme évolutionnaire (AE) [5, 6]. Les AE sont des méthodes de recherche stochastique inspirées des théories de l'évolution et de sélection naturelle, qui peuvent être utilisées pour l'optimisation de problèmes complexes [6]. Dans ces algorithmes, chaque "individu" d'une "population" est caractérisé par un ensemble de paramètres (ou chromosomes)  $C$ . Une population initiale  $Pop_0$  de  $N$  individus est créée, à partir d'un ensemble de paramètres aléatoires, et cette population "évolue" au moyen de l'application itérative de transformations aléatoires  $TR$ , telles que :

$$Pop_{k+1} = TR(Pop_k) \quad (5)$$

$TR$  est classiquement construite à partir d'opérateurs de sélection, de recombinaison et de mutation pour créer aléatoirement de nouvelles valeurs de  $C$  avec un biais favorisant les individus performants (minimisation de la fonction  $\varepsilon$ ).

Dans cette application, chaque individu de l'AE représente une instance du modèle complet et ses chromosomes, à valeurs réelles, sont associés aux paramètres du modèle :  $\alpha_A$ ,  $\alpha_B$ ,  $\delta_A$  et  $\delta_B$ . Le processus de sélection est basé sur la méthode de classement, adaptée pour la minimisation d'une fonctionnelle et les opérateurs de mutation géométrique et de recombinaison uniforme et heuristique ont été utilisés [7]. Cette approche est similaire à celle proposée dans une application précédente, pour l'interprétation de battements cardiaques à partir de l'ECG de surface, mais basée sur un modèle différent de l'activité cardiaque globale, défini comme un réseau d'automates cellulaires [5].

TAB. 1 – Paramètres estimés

Cas	$\alpha_A$ (°)	$\alpha_B$ (°)	$\delta_A$ (ms)	$\delta_B$ (ms)
Physio	57.8	28.3	41.7	21.1
Patho	148.4	160.7	122.9	143.3

### 3 Résultats

Concernant les EGM observés, nous disposons de 8 segments constitués de signaux synchrones présentant 5 voies d'ECG de surface et, au moins, une voie d'EGM acquise en mode bipolaire dans le ventricule droit. Ces signaux, de quelques secondes, ont été enregistrés au CHU de Rennes lors de la pose d'électrodes endocardiques pendant l'implant d'un stimulateur cardiaque. Nous avons sélectionné un battement normal et un battement pathologique présentant une conduction rétrograde (extrasystole ventriculaire) pour lesquels nous avons un ECG de surface permettant d'établir une interprétation clinique de référence.

Les EGM synthétiques ont été générés à partir de la simulation de tissus 2D de  $256 \times 256$  cellules endocardiques, correspondant à une taille de  $10 \times 10$  mm. Les paramètres  $\alpha_A$ ,  $\alpha_B$ ,  $\delta_A$  et  $\delta_B$  de (3) ont été estimés en utilisant l'approche évolutionnaire (tableau 1) décrite précédemment. Les battements physiologiques et pathologiques sélectionnés ont été interprétés par estimation des paramètres du modèle. De plus, un cas pathologique non observé (ischémie) a été simulé, comme un exemple d'outil d'assistance à l'interprétation.

La figure 3 représente pour chaque cas identifié, l'ECG (signal de surface) et l'EGM observés du patient et la reconstruction de l'EGM par la méthode présentée après estimation des paramètres optimaux.

#### 3.1 Battement physiologique

Le battement présenté dans la figure 3a a été diagnostiqué comme un battement normal à partir de l'analyse de l'ECG de surface. Une analyse des paramètres identifiés (tableau 1) révèle une propagation antérograde (normale) pour ce battement physiologique. La propagation du front d'activation a lieu dans le tissu B avant le tissu A ( $\delta_B < \delta_A$ ), le retard de propagation entre les deux capteurs est de  $\delta_A - \delta_B = 20.6$  ms, ce qui correspond à une vitesse de propagation de l'onde de dépolarisation de l'ordre de  $30 \text{ cm.s}^{-1}$  pour ces capteurs séparés de 15 mm. Cette valeur est caractéristique de cellules ventriculaires saines. Quant aux directions de propagation pour chaque tissu, elles sont en accord avec une propagation normale dans les fibres de Purkinje.

Certaines caractéristiques morphologiques particulières de l'ECG (QRS, T) se retrouvent sur l'EGM observé. Il est important de noter que ces morphologies se retrouvent sur l'EGM simulé. Le changement d'axe électrique, dépendant de la direction de propagation et donc des angles  $\alpha$ , identifiés, se retrouve dans l'analyse de ces signaux (voir par exemple l'onde T, biphasique).

Quelques légères différences apparaissent entre les EGM observé et simulé (en particulier une onde T plus précoce lors de la reconstruction) et sont dues à l'utilisation, lors de la simulation des tissus sains, du modèle de Beeler Reuter (BR) [1]

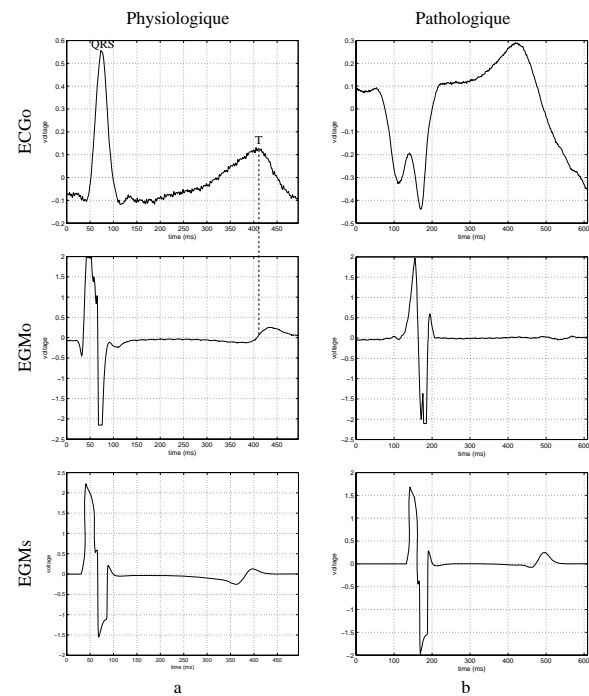


FIG. 3 – Signaux enregistrés et signaux générés : a. battement physiologique, b. battement pathologique.

qui est un modèle simplifié de cellules ventriculaires canines. Leur morphologie est légèrement différente de celle de cellules humaines et, en particulier, le temps de repolarisation est plus faible pour un modèle BR que pour des cellules cardiaques humaines. Il est néanmoins important de noter la ressemblance entre les signaux enregistrés et les signaux générés.

#### 3.2 Battement pathologique

L'analyse de l'ECG de surface observé (figure 3b) fait apparaître une extrasystole ventriculaire et une conduction rétrograde (inversion de polarité du QRS dans l'ECG de surface). Cette interprétation est moins évidente en étudiant uniquement la morphologie de l'EGM observé (voir différences des  $EGM_o$  pour les cas normal et pathologique).

Les paramètres identifiés (tableau 1) révèlent une propagation rétrograde pathologique. La propagation du front d'activation a lieu dans le tissu A avant le tissu B ( $\delta_A < \delta_B$ ) et les directions de propagation pour chaque tissu font bien apparaître une propagation du bas vers le haut (conduction rétrograde). Le retard entre l'activation des deux tissus est également cohérent. Le changement de phase de l'onde T sur les EGM correspond à la modification d'axe d'activation électrique associée à cette pathologie.

#### 3.3 Assistance à l'interprétation par simulation d'une ischémie

Un autre contexte d'utilisation du modèle proposé concerne la simulation de signaux EGM à partir d'un ensemble de paramètres représentant des conditions normales ou pathologiques prédéfinies, afin d'étudier leur morphologie. Cette approche



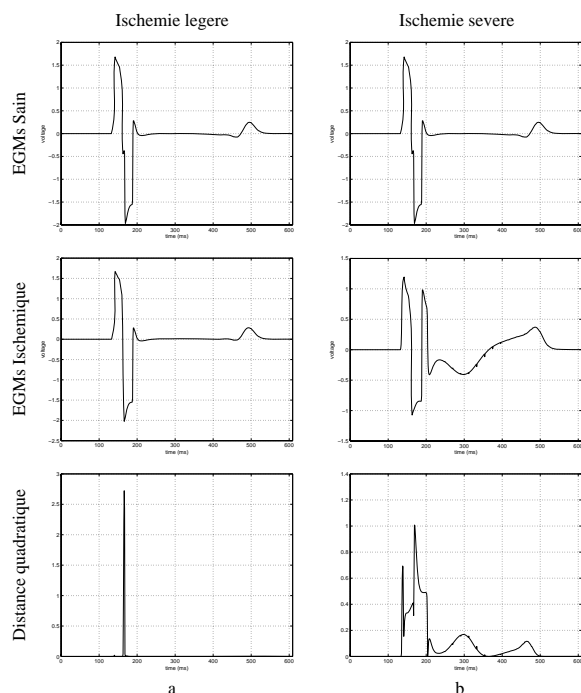


FIG. 4 – Simulation de battements ischémiques : a. ischémie légère (15% de cellules atteintes dans le tissu *A*), b. ischémie sévère (100% de cellules atteintes dans le tissu *A*).

pourrait permettre de créer un atlas de morphologies plausibles, accompagnées d'une hypothèse d'interprétation.

La figure 4 montre un exemple de cette approche. Ici, nous avons étudié l'effet de la présence d'une ischémie cardiaque faible (figure 4a) ou sévère (figure 4b) dans le tissu *A* du modèle, sur l'EGM simulé. Dans ces simulations, le modèle cellulaire pour le tissu *A* a été remplacé par une combinaison du modèle de cellule saine (modèle BR) et d'un modèle de cellules ischémiques reproduisant les conséquences de cette pathologie au niveau des canaux ioniques cellulaires et de la concentration intracellulaire de certains ions [8]. Le modèle d'ischémie faible présente une proportion de 15% de cellules pathologiques, le modèle d'ischémie sévère présente 100% de cellules ischémiques. La figure 4 présente, en haut, l'EGM simulé avec le modèle de tissu sain et les paramètres identifiés pour le battement rétrograde (figure 3b), au milieu, les EGM simulés avec une ischémie faible (a) ou sévère (b) et, en bas, la distance quadratique entre les EGM sain et pathologique. Les résultats sont cohérents avec la physiopathologie, montrant une différence dans la dépolarisation (début du QRS) et la repolarisation (segment ST et onde T) des tissus simulés. Ces différences sont plus importantes pour l'ischémie sévère, où l'on observe un EGM avec un QRS à quatre phases, associé aux changements significatifs dans la phase de plateau des potentiels d'action ischémiques.

## 4 Conclusion

Le modèle proposé ici permet de simuler un signal EGM pour différentes conditions de propagation du potentiel d'ac-

tion et pour des tissus normaux et ischémiques. Contrairement à des travaux précédents [5], l'approche proposée permet d'étudier ces dysfonctionnements au niveau cellulaire (modifications des concentrations et des courants ioniques) et permet de simuler des pathologies survenant à un tel niveau cellulaire comme l'ischémie.

L'originalité de cette méthode est la synthèse d'un EGM qui reproduit au mieux les signaux observés du patient en utilisant une méthode d'identification basée sur les algorithmes évolutionnaires. Les paramètres estimés peuvent être interprétés directement en termes physiologiques pour définir la direction et le retard du front de propagation associé à chaque tissu. Cette approche permet de prendre mieux en compte des conditions physiopathologiques qu'une approche traitement du signal classique [9].

Les résultats préliminaires présentés sont encourageants et les perspectives de développement concernent l'utilisation d'autres modèles de cellules ventriculaires dans un cadre multi-formalisme [3]. Des développements en 3D avec prise en compte d'autres structures et de l'anisotropie de propagation iront de pair avec la disponibilité de nouveaux enregistrements cliniques.

## Références

- [1] R.H. Clayton. *Computational models of normal and abnormal action potential propagation in cardiac tissue : linking experimental and clinical cardiology*. Physiological Measurement. **22** (2001) R15–R34
- [2] B.P. Zeigler, H. Praehofer et T.G. Kim. *Theory of Modeling and Simulation Second Edition Integrating Discrete Event and Continuous Complex Dynamic Systems*. Academic Press. (2000)
- [3] A. Defontaine, A. Hernández et G. Carrault. *Multi-formalism Modelling of Cardiac Tissue*. Lecture Notes in Computer Science - FIMH 2005, 2005, **3504**, 394–403
- [4] A. Defontaine, A. Hernández et G. Carrault. *Multi-formalism modelling and simulation : application to cardiac modelling*. Acta Biotheoretica. **52** (2004) 273–290
- [5] A.I. Hernández, G. Carrault et F. Mora. *Model-based interpretation of cardiac beats by evolutionary algorithms : signal and model interaction*. Artificial Intelligence in Medicine. **26** (2002) 211–235
- [6] D.E. Goldberg. *Genetic Algorithms in search, optimization and machine learning*. Addison-Wesley. (1989)
- [7] Z. Michalewicz. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. Springer-Verlag. (1994)
- [8] A.V. Sahakian, G.A. Myers et N. Maglaveras. *Unidirectional Block in Cardiac Fibers : Effects of Discontinuities in Coupling Resistance and Spatial Changes in Resting Membrane Potential in a Computer Simulation Study*. IEEE Transactions on Biomedical Engineering. **39** (1992) 510–522
- [9] X. Min, M.L. Brown et R. Mehra. *Computer simulation of effect of bipolar electrode tip to ring spacing on P wave and far field R wave sensing in atrium*. Proceedings - 20th Annual International Conference - IEEE/EMBS. (1998) 216–219



# Proposition d'un indice de synchronisation pour la validation de modèles de réponses neuronales à des stimuli périodiques

J. HUILLERY, R. LE BOUQUIN-JEANNÈS, G. FAUCON, P. DUGUÉ, A. GUÉRIN

LTSI, Laboratoire Traitement du Signal et de l'Image, INSERM U642, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, Rennes, France

regine.le-bouquin-jeannes@univ-rennes1.fr

**Résumé** – Il est courant d'évaluer le degré de synchronisation d'une réponse neuronale à un stimulus périodique pour la caractériser. En neurophysiologie et par conséquent en modélisation, la mesure du vecteur dominant de Goldberg et Brown (1969) est très répandue. Les défauts de cet indice sont explicités et un nouvel indice les corrigeant est proposé. Une base de tests est construite pour évaluer le comportement de ceux-ci dans différentes situations. Il apparaît d'une part que l'interprétation en termes de synchronisation de l'indice vecteur dominant doit être faite avec précaution, et d'autre part que le nouvel indice est une mesure qui, à elle seule, permet de mieux rendre compte de la synchronisation d'une réponse neuronale. Cet indice est paramétrable, ce qui offre un certain éventail de comportements.

**Abstract** – In neurophysiology and therefore in modeling, synchronisation of a neuron response to a given periodic stimulus is usually measured by Goldberg and Brown's vector strength metric (1969). Poor feature of this index is shown and a new index correcting this behaviour is proposed. A testing set is built and allows us to compare the two indexes in various situations. It is shown that vector strength index should be interpreted with great care. The corrected vector strength metric proposed here is a better synchrony relevant measure. Moreover this new index is tunable and offers a large array of behaviours.

## 1. Contexte

Ce travail s'inscrit dans le contexte de la modélisation du système auditif humain et plus particulièrement de la chaîne précorticale, de l'oreille externe au colliculus inférieur, l'idée étant d'appréhender le traitement de l'enveloppe temporelle en réponse à des stimuli sonores, de type bruit blanc ou sinusoïde de fréquence élevée, modulés en amplitude par une sinusoïde basse fréquence. Au niveau du colliculus inférieur, le codage de cette information est réalisé sous forme de trains de potentiels d'action dont la fréquence d'émission correspond à la fréquence de modulation  $f_m$ . C'est de cette correspondance et de sa mesure dont il est question ici.

Dans la littérature, les modèles de noyaux neuronaux sont évalués par comparaison avec des données physiologiques. Cette comparaison nécessite l'utilisation de mesures communes, révélatrices du comportement de l'appareil physiologique. Dans le cadre de la détection de modulation d'amplitude, une mesure fréquemment utilisée consiste à évaluer la synchronisation des réponses neuronales avec les modulations des signaux acoustiques présentés à l'oreille. Plus spécifiquement, il s'agit d'évaluer avec quelle précision les potentiels d'action (PA) en sortie du colliculus inférieur (modèle ou physiologique) sont synchronisés aux excitations sonores.

## 2. La mesure du vecteur dominant

Une mesure de synchronisation largement utilisée dans la littérature ([1], [2] et [3] entre autres) pour évaluer et comparer les données physiologiques et les réponses de modèles de noyaux neuronaux (noyau cochléaire et colliculus

inférieur) est le « vecteur dominant » proposé par Goldberg et Brown [4]. Ce paragraphe rappelle le principe de cet indice de synchronisation ainsi que ses faiblesses à rendre compte de certains phénomènes, le but de notre étude étant de proposer un nouvel indice de synchronisation plus pertinent. Celui-ci sera testé sur une base de signaux simulés et les résultats seront comparés avec ceux du vecteur dominant de la littérature.

Il s'agit d'évaluer la synchronisation entre les instants auxquels un PA est déclenché et les instants séparant deux périodes de modulation successives du signal d'excitation. L'indice du vecteur dominant (IVD) est défini ainsi :

$$IVD = \frac{\sqrt{\left[ \sum_{k=0}^{K-1} R_k \cos 2\pi(k/K) \right]^2 + \left[ \sum_{k=0}^{K-1} R_k \sin 2\pi(k/K) \right]^2}}{\sum_{k=0}^{K-1} R_k}$$

où  $K$  est le nombre d'échantillons par période de modulation.  $R_k$  est défini de la façon suivante :

$$R_k = \sum_{m=0}^{N-1} s(k + mT_r), \quad k \in [0, K-1]$$

où  $s(k)$  est un signal qui vaut 1 lorsque le neurone mesuré (ou modélisé) émet une décharge et 0 sinon ;  $T_r$  est la période de modulation du stimulus et  $N$  le nombre de périodes dans l'enregistrement.

Lorsque la réponse neuronale est constituée d'un PA par période de modulation du stimulus et que les PA sont toujours émis au même instant de la période, on a synchronisation « parfaite », l'IVD vaut 1. Au contraire, pour

un stimulus périodique et une réponse aléatoire uniformément répartie sur la période de modulation, l'indice vaut 0.

Un aspect limitatif de cet indice de synchronisation est qu'il ne prend pas en compte la différence entre le nombre de modulations détectées et le nombre de modulations présentes dans le signal d'excitation. Plus précisément, il ne tient pas compte du nombre de modulations oubliées (non-détections). Ainsi, par exemple, une réponse dans laquelle une modulation sur deux aura été détectée recevra le même indice de synchronisation qu'une réponse contenant un PA sur chaque modulation, et celui-ci sera égal à 1 si la synchronisation est parfaite. De même, pour une réponse ne comprenant qu'un seul instant de détection, bien que l'on ne puisse plus parler de synchronisation, l'IVD sera égal à 1. Ces 3 situations sont représentées Figure 1.

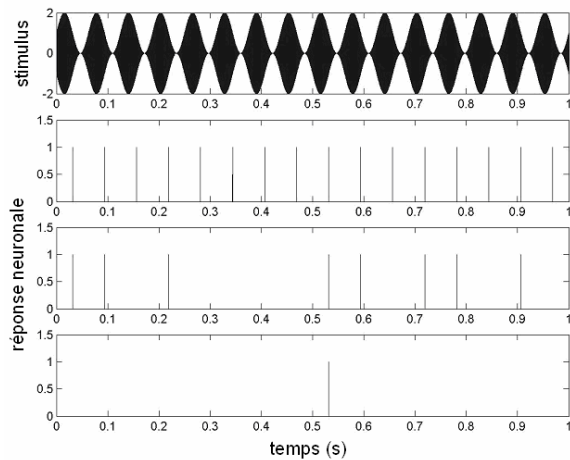


FIG. 1 : simulations de réponses neuronales à un signal modulé en amplitude à 16 Hz (en haut). Pour chacune des trois réponses (correspondant aux trois signaux du bas), l'IVD vaut 1.

Dans chacun des trois cas évoqués ci-dessus, le périodogramme résultant ne contient qu'une seule composante non nulle d'amplitude égale au nombre  $n$  de modulations détectées. La normalisation ramène l'indice de synchronisation à 1.

Cette mesure de synchronisation ne permet donc pas de différencier un aspect du comportement des réponses neuronales physiologiques d'une part et des modèles auditifs d'autre part, aspect qui semble toutefois un critère important pour leur caractérisation et leur évaluation. De la même façon, cette mesure seule ne permet pas la validation des modèles par rapport aux mesures physiologiques.

### 3. Proposition d'un nouvel indice

Dans le but de pallier la limitation de la mesure du vecteur dominant, nous proposons un nouvel indice, basé sur le principe du vecteur dominant mais présentant une normalisation différente qui prend en compte la différence entre le nombre de modulations détectées et le nombre de modulations présentes dans le signal d'excitation.

La stratégie consiste à pénaliser les réponses neuronales ne comprenant pas le bon nombre de potentiels d'action en normalisant l'indice par une valeur toujours supérieure ou égale au nombre de modulations détectées.

Le dénominateur proposé, que nous noterons  $Den(n, N)$ , est une fonction du nombre  $n$  de modulations détectées et du nombre  $N$  de périodes de modulations présentées en excitation. Il s'exprime de la manière suivante :

$$Den(n, N) = \begin{cases} p_o \cdot n + (1 - p_o)N & \text{pour } n \leq N \\ p_a \cdot n + (1 - p_a)N & \text{pour } n > N \end{cases}$$

où  $p_o$  et  $p_a$  sont respectivement les coefficients de pénalisation des oublis (non-détections) et des ajouts (détections fausses). Il est à noter que quelles que soient les pondérations  $p_o$  et  $p_a$ , on a :  $Den(N, N) = N$ .

Les paramètres  $p_o$  et  $p_a$  permettent de modifier le comportement de la normalisation proposée et donc de l'indice de synchronisation qui en résulte. Ils permettent une certaine liberté quant à la pénalisation à appliquer pour les deux types d'erreurs, non-détections et détections fausses, et le rapport souhaité entre les deux. Selon la stratégie définie précédemment, on cherche à avoir  $Den(n, N) \geq n$ , ce qui nous donne un nouveau dénominateur plus grand que l'ancien<sup>1</sup>. Or :

$$p_o \cdot n + (1 - p_o) \cdot N \geq n \quad \text{avec } n \leq N \Rightarrow p_o \leq 1.$$

D'une façon similaire, on montre que  $p_a \geq 1$ .

Le nouvel indice, appelé indice du vecteur dominant corrigé (IVDC), est alors donné par :

$$IVDC = \frac{\sqrt{\left[ \sum_{k=0}^{K-1} R_k \cos 2\pi(k/K) \right]^2 + \left[ \sum_{k=0}^{K-1} R_k \sin 2\pi(k/K) \right]^2}}{Den(n, N)}.$$

### 4. Évaluation et comparaison des indices

Nous comparons ici la capacité des deux indices à rendre compte de différents aspects des réponses neuronales, relatifs à leur synchronisation avec un signal d'excitation modulé en amplitude. En vue d'une meilleure maîtrise des caractéristiques des réponses neuronales évaluées par les indices de synchronisation, une base de réponses tests est utilisée. Cette base de tests doit permettre d'isoler certains types de réponses neuronales sur lesquels les indices seront évalués et comparés.

Nous évaluerons les performances des deux indices en tenant compte des trois défauts suivants :

- non-détection de modulations
- détection de modulations non existantes
- non-régularité dans la fréquence d'émission des potentiels d'action.

La base de réponses tests est alors construite à partir d'un signal de référence donné par un peigne de Dirac de période  $T_r = 1/f_r$  et de durée  $T$ , où  $f_r$  est la fréquence de modulation. Ce signal contient  $N$  ( $N = T/T_r$ ) potentiels d'action (idéalisés ici par un simple pic) correspondant aux instants  $t_{oi}$  de détections des modulations.

Les non-détections de modulations correspondent à des potentiels d'action non émis. Cette caractéristique est prise en

<sup>1</sup> Pour le dénominateur de l'IVD, on a :  $\sum_{k=0}^{K-1} R_k = n$

compte en supprimant aléatoirement du signal de référence le nombre souhaité de potentiels d'action. Pour reproduire  $N_o$  non-détections, un tirage aléatoire de  $N_o$  instants parmi les  $N$  instants  $t_{oi}$  est réalisé, et les PA à ces instants de détection sont supprimés du signal de référence pour obtenir la réponse neuronale souhaitée. Une détection fautive correspond à l'émission d'un potentiel d'action malgré l'absence de frontière de modulation dans le signal d'excitation. Ce comportement est reproduit par l'introduction aléatoire de  $N_a$  potentiels d'action sur l'ensemble de la réponse test. La non-régularité dans la fréquence d'émission des potentiels d'action est reproduite en introduisant une durée d'incertitude  $T_v$  dans les instants d'émission, durée centrée autour de chaque instant d'émission idéal  $t_{oi}$  (issu du signal de référence). Chaque potentiel d'action consiste alors en une réalisation  $t_i$  d'une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle  $[t_{oi} - T_v, t_{oi} + T_v]$ .

La comparaison des deux indices de synchronisation a été réalisée sur les signaux de la base de réponses tests. Dans ce qui suit, les paramètres de pénalisation de la normalisation utilisée pour le calcul de L'IVDC sont fixés à  $p_o = 0,5$  pour les oublis et  $p_a = 2$  pour les ajouts.

Le point faible de la mesure du vecteur dominant ayant conduit à cette étude est qu'il ne rend pas compte de la présence de non-détections dans les réponses neuronales. Cette particularité est illustrée sur la Figure 2 présentant le comportement des deux indices face au seul défaut de non-détections. L'IVD reste égal à 1 quel que soit le pourcentage de modulations non détectées, avant de chuter à zéro lorsqu'aucun potentiel d'action n'est émis. Par opposition, le nouvel indice permet de rendre compte des non-détections, il décroît ainsi continûment en parabole inverse vers zéro lorsque le nombre de non-détections augmente. Le choix  $p_o = 0,5$  correspond à un comportement dont la sévérité face aux non-détections augmente exponentiellement. Quelques modulations non détectées ne seront pas pénalisées trop fortement. D'autres comportements sont possibles en pénalisant plus fortement la réponse neuronale dès les premiers oublis.

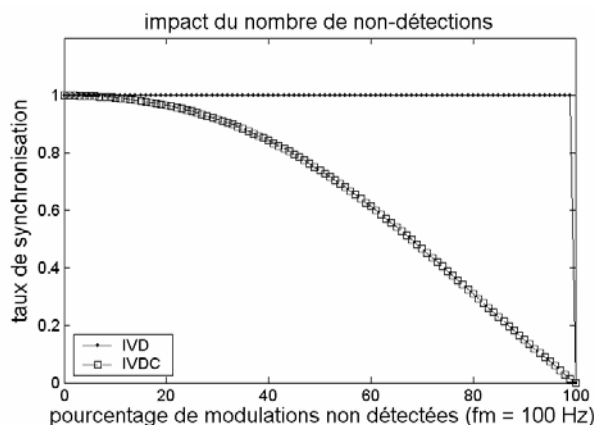


FIG. 2 : comportement des deux indices de synchronisation face à la quantité de non-détections.

Pénalisation des oublis  $p_o = 0,5$ .

Le comportement des indices face au nombre de détections fausses contenues dans les réponses neuronales est donné Figure 3 pour  $p_a = 2$ . Les comportements sont identiques dans la forme : la valeur des indices décroît exponentiellement lorsque le nombre de détections fausses

augmente. Le comportement du nouvel indice peut être modifié avec le paramètre de pénalisation des ajouts  $p_a$ . Donner une valeur plus élevée à ce paramètre entraîne une augmentation de la sévérité des indices, les petits nombres d'ajouts étant alors plus fortement pénalisés.

Nous avons ensuite étudié le comportement des deux indices face à la seule évolution du niveau d'incertitude dans les instants d'émission de potentiels d'action. Les deux indices, non représentés ici, donnent les mêmes résultats. Ceci est dû à la présence dans les réponses neuronales du nombre exact de potentiels d'action, la normalisation étant alors la même ( $Den(N, N) = N$ ).

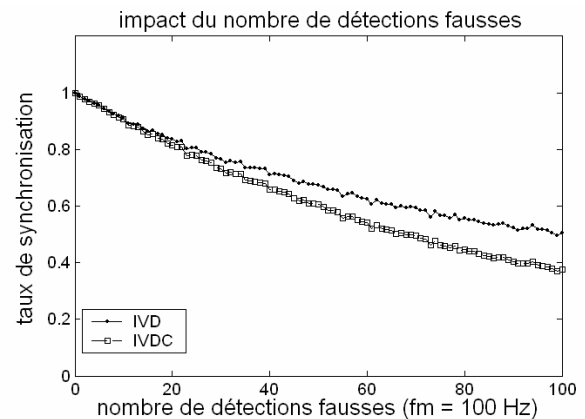


FIG. 3 : comportement des deux indices de synchronisation face à la quantité de détections fausses.

Pénalisation des ajouts :  $p_a = 2$ .

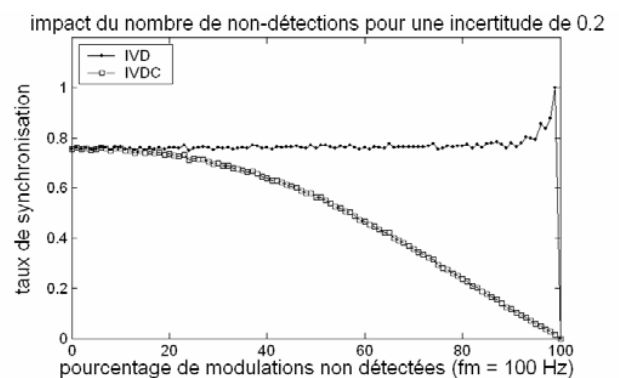


FIG. 4 : comportement des deux indices de synchronisation face à la variation du nombre de non-détections, pour une incertitude dans les instants d'émission  $T_v = 0.2T_m$  (avec  $T_m = 1 / f_m$ ).

Il est également intéressant d'observer le comportement des indices pour des réponses neuronales comportant deux types de défauts de synchronisation. Par exemple, la Figure 4 illustre l'évaluation de réponses neuronales contenant une incertitude sur les instants d'émission et dont on fait varier le nombre de non-détections. Cette situation révèle un comportement peu adapté de l'IVD dont la valeur tend à augmenter lorsque le nombre de non-détections augmente. Cependant, le comportement des indices en fonction du nombre de détections fausses en présence d'incertitude est similaire à celui de la Figure 3. La valeur des indices à l'origine (aucune détection fautive) est plus faible à cause de

l'incertitude sur les instants d'émission. La courbure du tracé de l'IVDC dépend de la valeur de  $p_a$ .

## 5. Discussion

Comme nous l'avons vu, l'indice proposé ici est paramétrable ( $p_o$  et  $p_a$ ). Le choix des facteurs de pénalité dépend de l'idée que l'on a de la synchronisation. La Figure 5 présente les résultats du nouvel indice avec plusieurs paramétrages du nouveau dénominateur comparés à ceux de l'IVD. Dans certaines situations, on peut considérer que l'oubli et l'ajout de PA ne posent pas de problème pourvu que ceux-ci soient proches de l'instant d'émission idéal. Dans ce cas, on choisira des valeurs de pénalité proches de 1 (Fig. 5-b), la mesure du vecteur dominant corrigé apportant la correction pour les très faibles taux de décharge. Pour d'autres, c'est la régularité d'émission qui va être importante pourvu que l'instant d'émission des PA soit en moyenne correct. Dans ce cas, on prendra des valeurs éloignées de 1 (Fig. 5-c).

La mesure du vecteur dominant est souvent utilisée en complément du taux de décharge moyen (TDM) d'un neurone (en PA/s). On montre simplement que pour une combinaison donnée de TDM et d'IVD, il ne peut y avoir, à  $p_o$  et  $p_a$  fixés, qu'une seule valeur pour la mesure d'IVDC. Étant donné les qualités du nouvel indice, ce résultat permet d'apporter la preuve que cette mesure conjointe est nécessaire pour rendre compte de la synchronisation d'une réponse neuronale. Ceci montre qu'il faut être prudent quant à l'interprétation des résultats donnés par la mesure du vecteur dominant en termes de synchronisation, en particulier pour les faibles taux de décharge (relativement à la fréquence de la composante périodique du stimulus). Ce résultat permet de mettre en avant un autre intérêt du nouvel indice puisqu'il regroupe en une seule mesure toute la partie d'information concernant la synchronisation. L'IVDC donne à la fois une meilleure quantification et par la même une visualisation plus aisée de cette information. Bien entendu la mesure de TDM reste indispensable pour caractériser une réponse neuronale pour certains types de codage.

De même, à une combinaison de TDM et de mesure de vecteur dominant corrigé ( $p_o$  et  $p_a$  fixés) ne peut correspondre qu'une mesure de vecteur dominant. C'est un point important car ceci prouve que l'utilisation du nouvel indice ne fait pas perdre d'information par rapport à l'indice existant. En effet, bien que la banque de signaux tests présente des réponses qui semblent proches des observations, les mécanismes qui engendrent les véritables réponses mesurées sont par nature très différents. En considérant qu'il

n'y a pas de perte d'information et la large utilisation de l'IVD, le bon comportement du nouvel indice ne devrait théoriquement pas poser de problème même si des comparatifs sur données réelles sont indispensables. Enfin, la possibilité de passer de l'IVD à l'IVDC permet de garder une continuité avec les mesures déjà disponibles dans la littérature et d'analyser les signaux plus précisément.

## 6. Conclusion

Pour résumer le comportement des indices évalués, les résultats obtenus en faisant varier indépendamment les trois caractéristiques de synchronisation sont rappelés ici :

- Impact de l'incertitude : les deux indices présentent un comportement similaire.
- Impact des non-détections : la lacune contenue dans la mesure du vecteur dominant est palliée par la normalisation proposée. Le comportement de l'indice proposé est modifiable avec le paramètre d'oubli  $p_o$ .
- Impact des détections fausses : le comportement des deux indices est assez semblable, celui de l'indice proposé est ajustable avec le paramètre d'ajout  $p_a$ .

Le nouvel indice permet de prendre en compte le nombre de non-détections et présente pour d'autres défauts de synchronisation un comportement identique ou meilleur que la mesure du vecteur dominant.

## Références

- [1] Hewitt M.J. and Meddis R., *A computer model of amplitude-modulation sensitivity of single units in the inferior colliculus*, Journal of Acoustical Society of America, Vol. 95, No. 4, pp. 2145-2159, 1994.
- [2] Wallace M.N., Rutkowski R.G., Shackleton T.M., Palmer A.R., *Phase-locked responses to pure tones in guinea pig auditory cortex*, Neuroreport, 11(18):3989-3993, December, 2000.
- [3] Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J., Schaefer C., and Tass P.A., *Phase synchronization: from theory to data analysis*, In F. Moss and S. Gielen, editors, Handbook of biological physics, page 297. Elsevier Science, Amsterdam, 2001.
- [4] Goldberg J.M. and Brown P.B., *Responses of binaural neurons of dog superior olivary complex to dichotic tonal stimulation: some physiological mechanisms of sound localization*, J. Neurophysiol, Vol. 32, pp. 940-958, 1969.

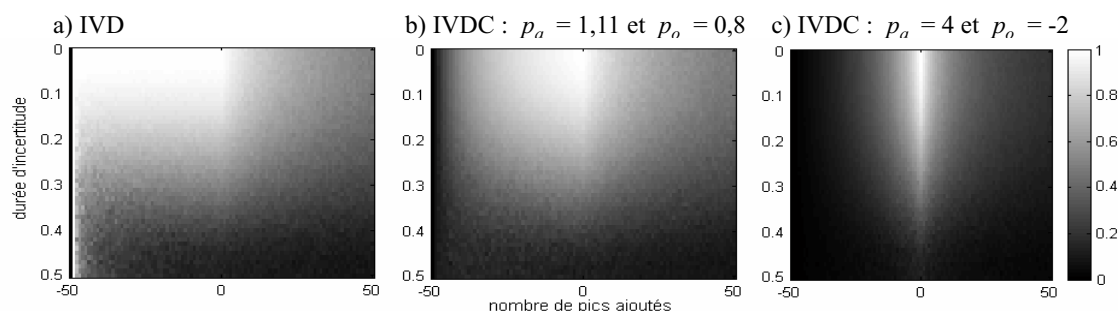


FIG. 5 : valeur des indices en fonction des trois paramètres : oubli (ajout négatif de pics), ajout et incertitude. Moyenne des résultats sur 10 signaux simulés de durée 5 s chacun et de  $f_m = 10$  Hz.

# Mesures volumétriques à partir de vues stéréoscopiques non calibrées

## Application au suivi thérapeutique d'escarres

Benjamin ALBOUY<sup>1</sup>, Sylvie TREUILLET<sup>2</sup>, Yves LUCAS<sup>3</sup>

Laboratoire Vision & Robotique, UPRES EA 2078

<sup>1</sup> ENSI, 10 Bd Lahitollé, 18000 Bourges

<sup>2</sup> Polytech'Orléans, BP 4567, 45067 Orléans cedex

<sup>3</sup> IUT de Bourges, 63 ave de Lattre de Tassigny, 18000 Bourges cedex

Benjamin.Albouy@ensi-bourges.fr

**Résumé** – Ce travail propose une évaluation de la reconstruction 3D issue de deux vues stéréoscopiques non calibrées, en termes de précision sur les points reconstruits et sur les mesures volumétriques induites. Des simulations de type Monte Carlo sont utilisées pour estimer les intervalles de confiance. Ramenée à la dimension de l'objet, l'erreur sur les points reconstruits reste inférieure à 3%, dans le cas d'un bruit gaussien sur les positions dans les images d'écart-type 1 pixel. Les tests répétitifs réalisés sur une maquette donnent un écart du volume estimé à la référence très raisonnable, de l'ordre de 3,5%. Cette tolérance est jugée suffisante pour un suivi thérapeutique d'escarres. Grâce à cette technique, l'évolution volumétrique de l'escarre pourra être suivie en utilisation clinique routinière à l'aide d'un simple appareil photo numérique.

**Abstract** – In this paper, 3D reconstruction obtained from two uncalibrated views is assessed in terms of precision on a set of reconstructed points and on the inferred volume estimation. Monte Carlo simulations are used to estimate the confidence intervals. The error on reconstructed points is less than 3% in the ratio of the object size. Repetitive test realized on a cork model leads to a slightly overestimated volume, around 3,5% against the ground truth. This tolerance is sufficient for wound healing assessment. With this technique, wound volumetric measurements are achievable in clinical environment using a single digital camera.

## 1. Introduction

Les soins d'escarres affectent l'ensemble du système de santé et représentent un enjeu socio-économique important : on estime à 2 millions le nombre de personnes actuellement touchées en Europe, et une augmentation de 25% de ce nombre est attendue d'ici 2010 avec l'accroissement de la population âgée. Une des pistes importantes pour endiguer ce fléau concerne la rationalisation des soins qui nécessite de disposer d'un outil d'évaluation quantitatif, dont les équipes cliniques sont aujourd'hui dépourvues. D'où la nécessité de développer un système d'imagerie pour une surveillance sans contact, qui combine à la fois un relevé 3D et une classification colorimétrique pour suivre l'évolution des différents tissus et la progression volumétrique de la cicatrisation. Les tentatives précédentes de développement de prototypes 3D ont débouché sur des systèmes encombrants, utilisant la triangulation par projection de lumière texturée avec une ou plusieurs caméras [1-4]. Dans [5], un scanner Minolta VI910 permet de combiner un relevé 3D et une image couleur 640x480 de la plaie. Ces dispositifs onéreux permettent d'obtenir une précision adéquate pour cette application, de l'ordre de 5% sur des modèles en plastiques ou des plaies de taille limitée (< 9 cm<sup>2</sup>). Mais ils sont d'une portabilité très réduite et exigent une procédure de calibrage réservée à des spécialistes, incompatibles avec une utilisation routinière dans les équipes de soin. A contre courant de ces approches, nous avons fait le choix d'utiliser un simple appareil photo numérique (APN) du commerce pour réaliser un relevé 3D couleur à moindre coût [6]. De plus, l'APN permet de cadrer l'image plein champ en fixant la focale

selon la taille de l'escarre (4 à 400 cm<sup>2</sup>) avec un maximum de confort pour le patient. Derrière cette mise en oeuvre très simple, se dissimulent de réelles difficultés techniques (géométrie des vues non contrainte, variations d'éclairage, etc).

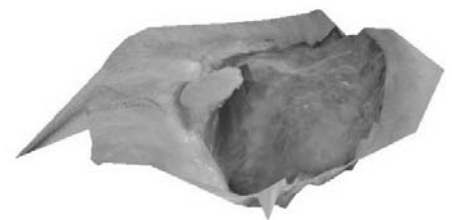
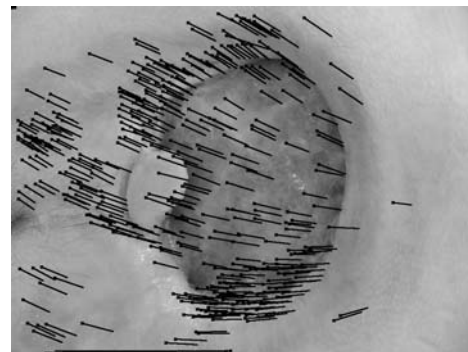


FIG.1 : Vue 3D texturée d'une escarre obtenue à partir de deux vues non calibrées.

La question abordée ici concerne l'estimation du volume à partir d'une triangulation issue de deux vues stéréoscopiques non calibrées, et la précision que l'on peut en attendre. Après la présentation de la méthode employée, nous discutons des résultats obtenus et des pistes d'améliorations.

## 2. La chaîne de reconstruction 3D

La Fig.1, montre la triangulation obtenue sur une escarre réelle par la chaîne de reconstruction 3D présentée en [7]. La chaîne complète comprend quatre étapes : mise en correspondance sur une paire d'images, calcul de la matrice fondamentale, auto-calibrage, puis triangulation. Environ deux mille points sont détectés dans chaque image, par l'adaptation en couleurs de l'algorithme d'Harris et Stephen proposé par Gouet [8]. La nature texturée des images permet une mise en correspondance croisée automatique par une fonction de similarité. La méthode robuste MAPSAC [9] est utilisée pour réduire les erreurs d'appariement : environ 400 appariements sont retenus comme corrects (Fig.1). Ces appariements permettent l'estimation de la matrice fondamentale. Torr [10] a montré qu'une compression JPEG raisonnable sur les images ( $Q > 70$ ) ne provoquait pas de dégradation significative dans l'estimation de la matrice fondamentale. D'autre part, en présence de bruit sur la position des points dans l'image, une minimisation aux moindres carrés sur les appariements retenus permet d'affiner l'estimation de la matrice fondamentale [11]. L'auto-calibrage, réalisé par les équations de Kruppa [12], s'appuie sur l'hypothèse d'un modèle sténopé à pixels carrés et d'un point principal au centre de l'image. Une fois les matrices de projection des deux vues connues, les points 3D peuvent être reconstruits à partir de chaque appariement. Le maillage de la surface est réalisé par une triangulation de Delaunay en éliminant les points 3D aberrants (projections hors images). On obtient ainsi un relevé 3D de la plaie, à partir duquel on peut ensuite estimer le volume.

Cette chaîne a été validée dans le cadre d'une étude comparative des méthodes d'estimation de la matrice fondamentale [11]. L'erreur sur les points reconstruits a été évaluée par une simulation statistique de type Monte Carlo sur des données de synthèse bruitées. Ramenée à la dimension de l'objet, l'erreur reste inférieure à 3%, dans le cas d'une géométrie des vues relativement favorable et d'un bruit gaussien sur les positions dans les images d'écart-type 1 pixel.

## 3. Mesures volumétriques

La mesure de volume est estimée à partir de la surface 3D issue de la triangulation de Delaunay. Le calcul du volume est effectué en intégrant les volumes élémentaires des prismes, définis entre chaque facette triangulaire et un plan de bouchage. Le plan de bouchage  $P$ , correspondant à la reconstitution de la peau saine, est estimé par moindres carrés sur les points de contours de la plaie. Une fois les coordonnées homogènes de ce plan  $P$  connues, on opère une transformation rigide  $H$  pour le confondre avec le plan de

référence  $P_{ref}(z=0)$  :  $P_{ref} = k.H.P$ ,  $k$  étant un facteur d'échelle. La transformation  $H$  comprend deux rotations selon les axes  $x$  et  $y$  et une translation  $t_z$  selon l'axe  $z$ . Les 4 paramètres ( $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $t_z$ ,  $k$ ) peuvent être déterminés de façon analytique. L'accès à une mesure volumétrique nécessite de disposer d'une référence métrique sur les deux images. Deux boules, verte et bleue, d'espacement fixé sont placées dans le champ de vue et servent de repère métrique. Elles sont automatiquement détectées.

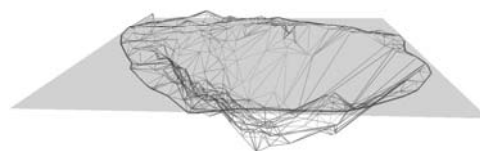


FIG.2 : Relevé 3D du modèle d'escarre en liège avec le plan de référence du contour.

## 4. Résultats

Afin de valider les calculs, des tests répétitifs sont réalisés sur une maquette de volume connu, fabriquée en liège (Fig.2). Le volume de référence est mesuré par 20 pesées successives du volume d'eau avec une balance au centigramme près. La chaîne de traitements décrite précédemment est appliquée sur plusieurs paires d'images correspondant à diverses positions géométriques. La plaie est grossièrement détournée à main levée. Le contour reporté sur la triangulation 3D est défini par les premiers points extérieurs au tracé. Il permet le calcul du plan de bouchage (Fig.2). Pour chaque couple d'images, l'algorithme de reconstruction est répété 40 fois pour appréhender les écarts statistiques dus aux aléas de la sélection des appariements retenus par la méthode robuste MAPSAC. Les résultats obtenus pour 16 couples d'images sont illustrés sur le diagramme de la Fig.3. Le volume (en  $\text{cm}^3$ ) est porté en ordonnée. Chaque barre d'erreur représente l'intervalle de confiance à 95% (moyenne  $\pm 2$  écart-types). La première barre et la bande grisée correspondent au volume de référence, les 16 suivants aux estimations. Les mesures volumétriques moyennes obtenues sur les 16 couples d'images sont données dans le Tableau 1. Les précisions volumétriques sont comparées dans le Tableau 2. Les résultats sont encourageants puisqu'ils donnent une précision (écart-type/moyenne) de l'estimation d'environ 13%, avec un écart à la référence très raisonnable de l'ordre de 3,5%.

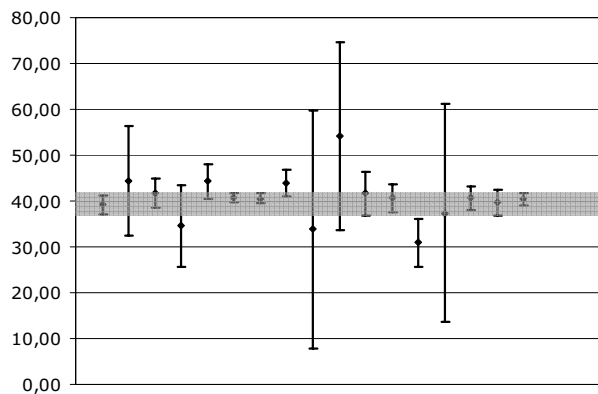


FIG.3 : Intervalles de confiance à 95% des mesures volumétriques pour 16 paires d'images.

TAB.1 : Volumes estimés en cm<sup>3</sup> pour 16 paires d'images

44,40	41,70	34,60	44,27	40,71	40,58	43,90	33,80
41,60	40,61	30,86	37,43	54,15	40,63	39,68	40,37

TAB.2 : Précisions volumétriques (en cm<sup>3</sup>)

	Moyenne	Ecart-type	Min	Max	ET/Moy
Référence	39,20	1,03	37,38	41,10	2,63%
Estimation	40,58	5,25	30,86	54,15	12,93%

## 5. Discussion

Cette première étude a mis en évidence deux difficultés dans l'application de cette technique à l'estimation de volume. La première concerne la précision de la triangulation qui dépend beaucoup de la géométrie des vues. La configuration optimale est obtenue avec des points de vue espacés de 90° mais la mise en correspondance devient vite impossible sur des points de vue aussi éloignés. Ceci explique pourquoi les travaux publiés utilisent souvent une séquence d'images permettant de passer graduellement entre deux points de vue éloignés par l'intermédiaire de vues successives très proches [13].

La seconde difficulté vient de certaines configurations singulières qui gênent l'auto-calibrage [14]. Dans des configurations proches de ces singularités, on constate une instabilité des mesures, illustrée par des écarts à la moyenne importants sur certains couples d'images (Fig.3). Un cas typique de singularité apparaît notamment lorsque les vues sont à une même distance du point visé (mouvement orbital). La Fig.4 présente différentes configurations de paires de vues testées sur des données de synthèse. La vue 1 sert d'origine. Les diverses positions de la seconde vue sont repérées dans le plan XZ. Le point visé (0,15) est le même pour toutes les vues. Les croix noires correspondent à des positions où l'autocalibrage a échoué.

Pour les autres positions, l'intervalle de confiance de l'erreur de reconstruction a pu être estimé par une simulation

de type Monte Carlo. Pour chaque configuration, les moyennes et écart-types de l'erreur sont calculés sur plus d'une centaine de réalisations aléatoires de 100 points 3D [11]. Les résultats sont donnés en Fig.5. Pour chaque position en X, l'intervalle de l'erreur (moyenne  $\pm$  écart-type) est ramené à la dimension de l'objet et exprimée en %. La méthode d'estimation de la matrice fondamentale utilisée pour ces tests est celle des 8 points normalisés proposée par Hartley. Les positions des projections dans les images sont bruitées avec un écart-type de 2 pixels. L'instabilité à l'approche de la singularité est clairement mise en évidence (série des losanges gris). On constate sans surprise une amélioration de la reconstruction lorsque l'angle augmente entre les points de vue (série des carrés noirs). Ces remarques justifient une réflexion en cours sur le protocole de prise de vues.

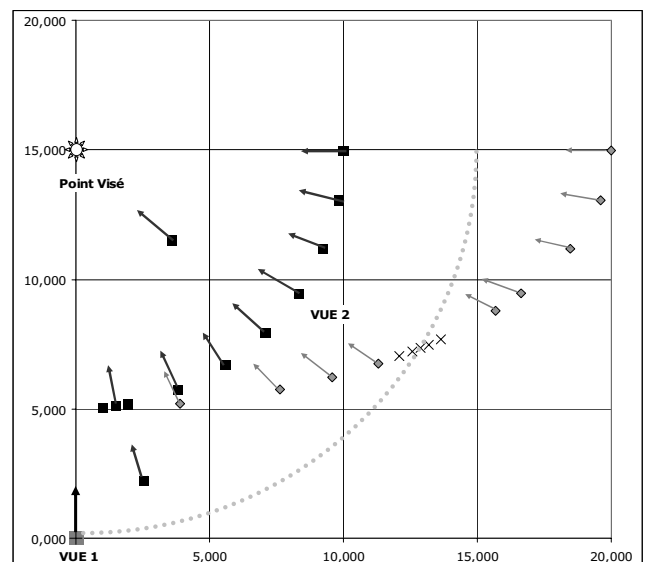


FIG.4 : Différentes configurations de couples de vues repérées dans le plan XZ. La vue 1 sert d'origine.

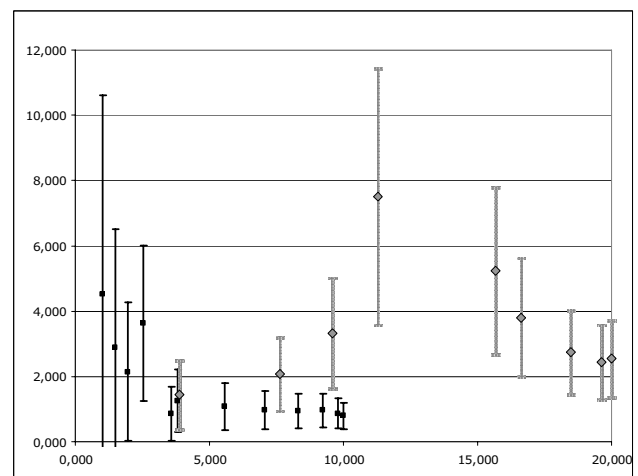


FIG.5 : Moyennes et écart-types des estimations de l'erreur (en %) pour les différentes positions en X.

## 6. Conclusion et perspectives

L'accès à des mesures volumétriques à partir de vues non calibrées reste un champ assez peu exploré. Généralement, la reconstruction non calibrée est surtout utilisée pour la visualisation de scènes 3D à partir de séquences vidéo [13]. L'utilisation de simulations statistiques de type Monte Carlo a permis d'estimer l'intervalle de confiance de l'erreur sur les points 3D reconstruits à partir de deux vues non calibrées. Ramenée à la dimension de l'objet, l'erreur sur les points reconstruits reste inférieure à 3%, dans le cas d'un bruit gaussien sur les positions dans les images d'écart-type 1 pixel. D'autre part, les tests répétitifs réalisés sur une maquette donnent un écart du volume estimé à la référence très raisonnable, de l'ordre de 3,5%. Une tolérance de 5% est jugée suffisante par les médecins pour suivre la progression volumétrique de la cicatrisation de la plaie. Ces premiers résultats encourageants doivent être confirmés sur des cas d'escarres réels.

Afin d'améliorer les résultats, nous envisageons de renforcer la mise en correspondance pour utiliser des points de vue plus éloignés et obtenir une meilleure triangulation. La mise en correspondance de points de vue éloignés reste un des principaux verrous en traitement d'images. Des tests en cours utilisent la relaxation et des descripteurs invariants plus robustes aux transformations géométriques et aux variations d'éclairage. Une autre piste est l'ajout de contraintes par la cartographie tissulaire obtenue par segmentation couleurs. D'autre part, la reconstruction à partir de deux vues souffre d'un manque de répétitivité, lorsque que l'on est proche de configurations singulières d'autocalibrage. L'utilisation d'une ou deux vues supplémentaires permettra de réduire considérablement les singularités de l'autocalibrage et peut également affiner la triangulation. Enfin, l'estimation volumétrique devra prendre en considération la courbure du corps dans la reconstitution de la peau.

La technique de reconstruction non calibrée s'avère être une bonne piste pour le suivi thérapeutique d'escarres. Grâce à cette technique, l'évolution volumétrique de l'escarre pourra être suivie en utilisation clinique routinière à l'aide d'un simple appareil photo numérique. Par son faible coût et sa simplicité d'utilisation, l'APN favorisera une large diffusion, y compris à domicile par télémedecine.

## Remerciements

Ces travaux de recherche sont soutenus par la Délégation Régionale de la Recherche et de la Technologie de la région Centre et par le Fond Social Européen.

## Bibliographie

[1] P. Plassman, T.D. Jones, MAVIS: a non-invasive instrument to measure area and volume of wounds, *Med. Eng. Phys.* 20-5 (1998) p332-338.

- [2] S.M. Boersma, & al., Photogrammetric wound measurement with a three-camera vision system, IAPRS Vol. XXXIII Amsterdam (2000).
- [3] A. Malian, & al., A robust photogrammetric system for wound measurement, *Int. Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, Vol. 34 Part 5 (2002) p264-269.
- [4] T.A Krouskop, & al., A non contact wound measurement system, *Journal of Rehabilitation R&D* Vol. 39 N°3 May/June (2002) p337-346.
- [5] M. Romanelli, & al., Technigical advances in wound bed measurement, *WOUNDS* (2002) 14-58
- [6] B.Albouy & al., Relevé 3D couleur d'escarres par un appareil photo numérique, JSTIM – Forum de Recherche en Génie Biologique et Médical, Nancy 21-23 mars (2005).
- [7] B.Albouy & al., Reconstruction tridimensionnelle d'escarres par stéréovision couleur non calibrée, Journées ORASIS, Fournols 24-27 mai (2005).
- [8] V. Gouet, *Mise en correspondance d'images en couleurs, application à la synthèse de vues intermédiaires*, Thèse de Doctorat, Université Montpellier II Sciences et Techniques du Languedoc (2000).
- [9] P.H.S. Torr, *Bayesian Model Estimation and Selection for Epipolar Geometry and Generic Manifold Fitting*, International Journal of Computer Vision 50-1 (2002) p35-61.
- [10] P.H.Torr & A. Zisserman, Performance characterization of fundamental matrix estimation under image degradation, *Machine Vision & Application* Vol.9 (1997) p321-333.
- [11] B. Albouy, & al., Fundamental matrix estimation revisited through a global 3D reconstruction framework, *IEEE Proc. of ACIVS* Bruxelles (2004) p185-192.
- [12] Peter Sturm, *On Focal Length Calibration from Two Views*, Conf. On Computer Vision and Pattern Recognition vol. II (2001) p145-150.
- [13] M. Pollefeys, *Self-Calibration and Metric 3D Reconstruction From Uncalibrated Image Sequences*, Thèse de Doctorat, Université catholique de Leuven (1999).
- [14] P. Sturm, *Vision 3D non calibrée : Contributions à la reconstruction projective et études des mouvements critiques pour l'auto-calibrage*, Thèse de doctorat, Laboratoire GRAVIR INRIA RHONE-ALPES décembre (1997).



# Evaluation des déformations du myocarde sur des séquences temporelles d'images IRM par estimation contrainte du flot optique

Solofohery RANDRIANARISOLO<sup>1</sup>, Eric DELÉCHELLE<sup>1</sup>, Eric PETIT<sup>1</sup>, Yasmina CHENOUNE<sup>1</sup>, Jérôme GAROT<sup>2</sup>, Alain RAHMOUNI<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire Images, Signaux et Systèmes Intelligents  
Université Paris 12 Val-de-Marne, 61 Av du Général de Gaulle, 94010 Créteil, France

<sup>2</sup>Unité INSERM 400, Hôpital Henri Mondor  
8 Av du Général Sarraill, 94000 Créteil, France

s.randria@univ-paris12.fr, petit@univ-paris12.fr  
delechelle@univ-paris12.fr, jerome.garot@hmn.ap-hop-paris.fr

**Résumé** – Ce travail a pour objectif l'estimation du champ de déformation du myocarde sur des séquences d'images IRM non marquées en vue de l'évaluation de la fonction cardiaque. Nous évaluons, par une méthode de segmentation et de mise en correspondance des contours du myocarde, un champ de vitesse épars utilisé comme contrainte dans le calcul du flot optique. Une validation clinique de la méthode d'estimation des déformations myocardiques à partir de ciné IRM standard a permis d'envisager l'évaluation précise de la viabilité du tissu cardiaque en routine clinique.

**Abstract** – This work aims to estimate the myocardial strain on MR sequences for evaluating cardiac function. We assess, by a segmentation and myocardial contours mapping method, a sparse velocity field used like constraint in calculation of the optical flow. A clinical validation of the myocardial strain estimating method from standard cine-MR image made it possible to consider the accurate evaluation of the viability of cardiac tissue in clinical routine.

## 1 Introduction

Une meilleure quantification de la déformation du myocarde au cours de sa contraction aiderait considérablement le médecin à établir un pronostic de viabilité du tissu cardiaque dans les problèmes d'infarctus. La visualisation des déformations cardiaques est possible par la technique d'imagerie IRM de marquage tissulaire [1], [2] ou IRM « taggée », qui n'est pas disponible en routine clinique. Le principe de cette modalité d'imagerie est d'appliquer au myocarde une impulsion radio-fréquence pendant la phase diastolique pour créer des lignes parallèles de saturation magnétique avant d'effectuer une acquisition ciné-IRM standard. De nombreux travaux de recherche ([3], [4], [5], [6] et [7]) se sont intéressés à la détection et au suivi des lignes de « tags » afin d'estimer, en particulier, les déformations du ventricule gauche qui joue un rôle prépondérant dans l'activité cardiaque. La méthode HARP-MRI [1] pour Harmonic Phase MRI, a été validée d'un point de vue clinique (voir [8], [9] et [10]) et permet à un médecin expert d'obtenir de manière semi-automatique des mesures de déformation cardiaque à partir d'IRM marquées. L'objectif de nos travaux est de quantifier ces déformations cardiaques en utilisant une méthode automatique qui exploite les séquences temporelles d'images IRM standards ou ciné-IRM, afin d'obtenir ces mesures dans un contexte de routine clinique. L'utilisation de ces images standards présente également 2 avantages : d'une part on peut effectuer des mesures de déformations sur un voire plusieurs cycles cardiaques complets ce qui n'est pas possible en IRM marquée en raison de la disparition rapide (500ms environ) de la magnétisation des tissus et d'autre part on peut

obtenir des mesures dont la résolution spatiale n'est pas limitée par la résolution du réseau de marquage (lignes espacées de 6mm). Nous proposons de déduire les mesures de déformations de l'estimation d'un champ de vecteur vitesse que nous estimons par une méthode de flot optique contraint. A la contrainte classique de lissage proposée par Horn et Schunck [11], nous adjoignons, pour résoudre le problème d'ouverture, une contrainte apportée par la détermination des vitesses au niveau des contours cardiaques. Ces vitesses initiales sont déduites d'une segmentation des ciné-IRM, suivie d'une mise en correspondance des contours successifs. Les images traitées étant des séquences 2D temporelles (images 2D + t), les mesures de déformations obtenues correspondent aux mouvements de cisaillement concentrique du cœur dans un plan horizontal mais pas au mouvement de raccourcissement vertical qui pourra être pris en compte dans l'extension 3D de la méthode proposée.

## 2 Segmentation du VG

La segmentation du contour interne du myocarde appelé endocarde est généralement l'étape préalable à toute extraction automatique ou assistée des paramètres cliniques. Nous présentons ici une méthode de segmentation et d'analyse des déformations de l'endocarde par une approche fondée sur les ensembles de niveaux.

## 2.1 Méthode des ensembles de niveaux

La segmentation de l'endocarde est réalisée en développant à l'intérieur de la cavité ventriculaire une hyper-surface qui viendra épouser la forme des contours. Le suivi de cette hyper-surface repose sur le formalisme des ensembles de niveaux introduit par Osher-Sethian [12], qui présente des avantages majeurs dans la segmentation du VG. Elle fournit une solution lisse, peut être étendue en 3D ou 4D et permet d'évaluer aisément des paramètres intrinsèques à la courbe tels que la courbure locale. Cette méthode fait évoluer des hyper-surfaces d'un espace (généralement 2D ou 3D) par l'intermédiaire d'une fonction implicite  $\phi$  dite fonction de distance qui encode l'hyper-surface par ses passages par zéro. Les coordonnées des points l'hyper-surface vérifient donc la relation suivante :

$$\varphi(x(t), t) = 0 \quad (1)$$

En dérivant (1) par rapport au temps, on obtient l'équation aux dérivées partielles associée à l'évolution de  $\varphi$ :

$$\varphi_t + \nabla(x(t), t) \cdot x'(t) = 0 \quad (2)$$

Où  $\varphi_t$  désigne la dérivée partielle temporelle de  $\varphi$ .

Si l'on note par  $F$  la composante normale aux contours de la vitesse de déploiement de l'hyper-surface,  $F = x'(t) \cdot n$ , avec  $n = -\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}$ , l'équation (2) devient :

$$\varphi_t + F \cdot |\nabla\varphi| = 0 \quad (3)$$

Après discrétisation et rajout d'une fonction initiale  $\varphi_0$  égale à la carte de distance d'un contour tracé manuellement, l'équation (3) peut être résolue par un schéma de différences finies itératif [12].

L'expansion de l'hyper-surface est obtenue en utilisant une vitesse constante  $F = -v_0$ . Et en rajoutant la courbure locale de l'hyper-surface  $\kappa$ , on pourra plus ou moins lisser les contours détectés :

$$F = -v_0 - \varepsilon\kappa \quad (4)$$

L'attachement aux données de l'image est obtenu d'une part en multipliant  $F$  par une fonction indicatrice de contours  $g$  à valeurs dans  $[0,1]$ , qui est minimale dans les régions de forts gradients, et d'autre part en rajoutant un terme de rappel  $-\nabla g \cdot \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}$  qui permet d'attirer l'hyper-surface vers les régions de fort gradient.

$$F = -g(v_0 + \varepsilon\kappa) - \nabla g \cdot \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|} \quad (5)$$

Dans la littérature, il existe différentes expressions de la fonction  $g$ . Celle qui donne un résultat satisfaisant sur nos images est la fonction gaussienne centrée sur l'intensité moyenne des pixels contenus dans l'hyper-surface initiale :

$$g(I) = \exp\left(\frac{-(I - \bar{I}_{init})^2}{2 \cdot \beta^2}\right) \quad (6)$$

La segmentation de l'épicarde est également réalisée avec la méthode des ensembles de niveaux. Celle-ci s'exécute lorsque les contours de l'endocarde sont détectés. Comme la fonction indicatrice de contours  $g$  dépend de l'intensité moyenne de l'objet à segmenter (équation 6),  $\bar{I}_{init}$  doit donc être recalculée pour annuler  $g$  sur les contours de l'épicarde. Pour ce faire,

on a élargi les contours endocardiques de 4 pixels pour obtenir l'hyper-surface initiale, puis évalué l'intensité moyenne  $\bar{I}_{init}$  sur les pixels situés entre les contours endocardiques et l'hyper-surface. D'autre part, l'épaisseur du myocarde a été majorée pour ne pas segmenter le ventricule droit. La figure 1 illustre le résultat de la phase de segmentation en affichant une image sur deux d'une séquence de 12 images.



FIG. 1: Résultat de l'extraction des contours par la méthode des ensembles de niveaux. Le triangle bleu représente l'hyper-surface initiale tracée manuellement.

## 3 Estimation des vitesses des contours

L'estimation des vitesses des contours est nécessaire pour contraindre le flot optique. Cette tâche se divise en deux opérations successives. Les contours sont d'abord alignés par une transformation géométrique afin de gérer les grandes déformations puis mis en correspondance par une méthode de morphing pour affiner le recalage.

### 3.1 Méthode d'alignement

Soient  $C_1 = \{p_1(j), j = 1, \dots, L_1\}$  et  $C_2 = \{p_2(k), k = 1, \dots, L_2\}$  deux courbes à apparier. La procédure d'alignement réalise un recalage rigide entre deux contours successifs à l'aide d'une transformation géométrique affine (transformation d'Helmert) commandée par un critère de dissimilarité basé sur trois paramètres :

- la distance euclidienne entre ces deux points :

$$d_{j,k} = 1 + \sqrt{(x_1(j) - x_2(k))^2 + (y_1(j) - y_2(k))^2}$$

- différence de courbure locale calculée au niveau de ces deux points

$$\kappa_{j,k} = 1 + \log\left(1 + \left|\frac{\kappa_1(j) - \kappa_2(k)}{\kappa_1(j) + \kappa_2(k)}\right|\right)$$

où  $\kappa_1(j)$  et  $\kappa_2(k)$  sont les courbures

- la différence d'orientation des vecteurs normaux aux courbes en ces deux points

$$n_{j,k} = 2 - n_1^T(j) \cdot n_2(k)$$

où  $n_1(j)$  et  $n_2(k)$  sont les vecteurs normaux.

Finalement, la mesure de dissimilarité entre deux points appartenant à deux contours successifs est donnée par l'expression suivante :

$$D_{p_2(k)}(p_1(j)) \equiv D_{j,k} = d_{j,k} \cdot (\kappa_{j,k})^{\gamma_\kappa} \cdot (n_{j,k})^{\gamma_n} \quad (7)$$

Avec  $D_{j,k} \geq 1$  et  $\gamma_\kappa, \gamma_n$  sont des facteurs de pondération égale à 4.

En prenant  $C_1$  comme référence, on se doit de trouver pour chaque  $p_2(k) = (x_2(k), y_2(k))$  de  $C_2$ , un point  $p_1(j) = (x_1(j), y_1(j))$  de  $C_1$  qui minimise la mesure de dissimilarité (Eq. 7). Donc  $p_1(j)$  est défini comme suit :

$$p_1^* = \arg \min_{p_1} D_{p_2}(p_1) \quad (8)$$

Nous supposons qu'il existe une transformation  $T$  (transformation d'Helmert) telle que  $p_2 = T(p_1)$  et exprimée par :

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot \cos \theta & -s \cdot \sin \theta \\ s \cdot \sin \theta & s \cdot \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} \quad (9)$$

En utilisant les coordonnées homogènes, l'équation (9) devient :

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 & t_x \\ \alpha_2 & \alpha_1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Où  $\alpha_1 = s \cdot \cos \theta$  et  $\alpha_2 = s \cdot \sin \theta$ .

Les paramètres  $(\alpha_1, \alpha_2)$  et  $(t_x, t_y)$  sont estimés par minimisation d'une erreur quadratique calculée sur l'ensemble de points à appairer et définis par :

$$\varepsilon^2 = \sum_{(j,k)} \omega_{j,k} \cdot [p_2(k) - T(p_1(j))]^2 \rightarrow \min$$

Où  $\omega_{j,k}$  est un facteur de pondération.

Les valeurs de la pondération  $\omega_{j,k}$  de chaque paire de points sont définies en fonction de la mesure de dissimilarité calculée lors de la procédure d'appariement.

Nous prenons  $\omega_{j,k} = \Omega \cdot \exp(-D_{j,k}^2 / \sigma^2)$  où  $\Omega$  est une constante de normalisation telle que  $\sum \omega_{j,k} = 1$  et  $\sigma$  est l'écart-type de  $D$ .

### 3.2 Recalage final par morphing

Basée sur la méthode des ensembles de niveaux, cette opération permet d'effectuer un recalage précis des contours alignés. Le principe de cette opération consiste à considérer deux contours successifs,  $C_S$  et  $C_D$ , et à faire évoluer  $C_S$  (la "courbe source") vers  $C_D$  (la

"courbe destination") par l'équation d'évolution :

$$\varphi_t = F \cdot |\nabla \varphi| \quad (11)$$

La vitesse  $F$  est définie par  $F = \varphi_D - \varphi$ . Elle s'annule lorsque la courbe intermédiaire en mouvement  $C$  initialisée avec  $C_S$  atteint  $C_D$ . Donc, l'équation d'évolution devient :

$$\begin{cases} \varphi_t = (\varphi_D - \varphi) |\nabla \varphi| \\ \varphi(X, t=0) = \varphi_S(X) \end{cases} \quad (12)$$

## 4 Flux Optique

### 4.1 Méthode de Horn et Schunck

Nous utilisons la méthode de Horn et Schunck [11], pour estimer le champ de vitesse à l'intérieur du myocarde. C'est une méthode différentielle s'appuyant sur la conservation temporelle de l'intensité des points de l'image :

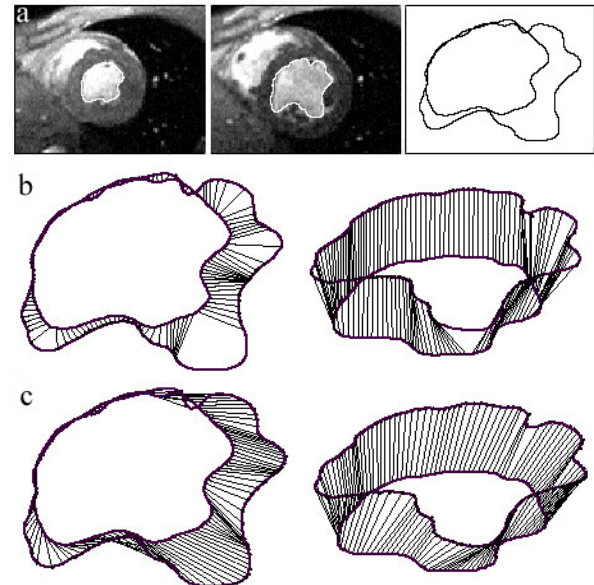


FIG. 2: Appariement des contours endocardiques. (a) Deux images successives et la représentation des contours extraits, (b) résultat de l'appariement obtenu sans d'alignement préalable et (c) résultat de l'appariement obtenu avec l'étape d'alignement préalable.

$$\frac{dI}{dt} = I_x u + I_y v + I_t = 0 \quad (13)$$

où  $u = dx/dt$  et  $v = dy/dt$  sont les composantes de la vitesse recherchée.

Comme cette équation présente deux inconnues ( $u$  et  $v$ ), une contrainte supplémentaire est nécessaire pour la résoudre. Dans [11], Horn et Schunck ajoutent la contrainte de régularité spatiale

$$\inf \left\{ \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 \right\} \quad (14)$$

qui permet seulement de résoudre l'équation du flot optique. Pour avoir un résultat correct il a fallu contraindre le flot optique à prendre une valeur fixe et connue en certains points de l'image. Ces vitesses sont celles des contours du myocarde, évaluées par la méthode d'appariement précédente. On les introduits dans le schéma itératif de résolution du flot optique proposé par Gauss-Siedel par l'intermédiaire de cette combinaison linéaire :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \alpha(i, j) \begin{pmatrix} u_{HS} \\ v_{HS} \end{pmatrix} + (\alpha(i, j) - 1) \begin{pmatrix} u_c \\ v_c \end{pmatrix} \quad (15)$$

Où  $(u_{HS}, v_{HS})$  désigne la vitesse obtenue par la méthode de Horn et Schunck et  $(u_c, v_c)$  la vitesse éparse des contours myocardiens.

## 5 Résultats

Les mesures de déformation obtenues sont confrontées aux mesures effectuées semi-automatiquement sur le même ensemble de patients avec la méthode de référence HARP par un cardiologue expert à partir de séquences IRM marquées. Le protocole

consiste à définir 8 secteurs au sein du myocarde (voir figure 3) et à calculer, par les 2 méthodes, l'évolution temporelle de l'allongement moyen dans chaque secteur. Nous avons traité 16 séquences (5 correspondant à des patients sains et 11 à des patients présentant une pathologie). Dans cet article nous présentons à la figure 4, un exemple des résultats de mesures de raccourcissement circonférentiel obtenues par les 2 méthodes pour un patient présentant un infarctus latéral. La séquence d'images IRM traitée est partiellement reproduite à la figure 1.



FIG. 3: Sectorisation du myocarde. Le premier secteur est repéré par le point de jointure inférieur du ventricule gauche avec le ventricule droit.

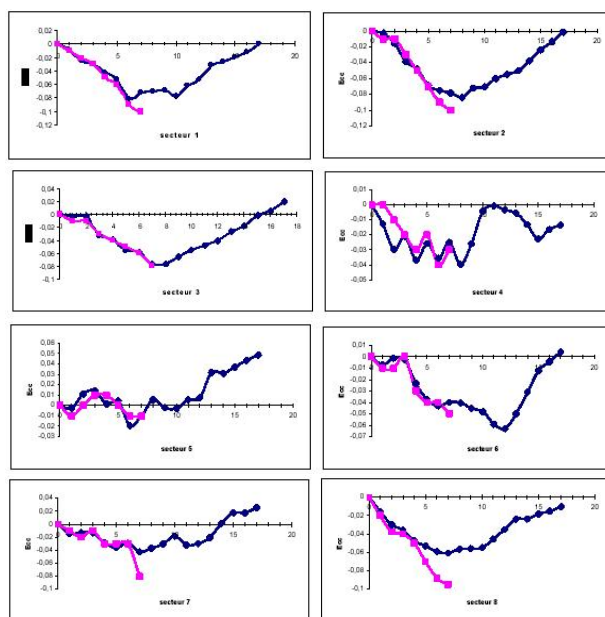


FIG. 4: Représentation graphique du raccourcissement circonférentiel moyen (Ecc) en fonction du temps dans les 8 secteurs myocardiques. Courbes roses : méthode HARP. Courbes bleues : méthode du flot optique contraint.

## 6 Conclusion

Nous présentons dans ce travail une méthode utilisant les séquences IRM standard pour l'évaluation des champs de déformation du myocarde en routine clinique. Les mesures de déformation sont déduites du champ de vitesse obtenu par une méthode du flux optique différentielle à laquelle nous avons ajouté les vitesses des contours myocardiques comme contrainte supplémentaire. La méthode permet d'obtenir des mesures d'al-

longement sur un cycle cardiaque complet et a été validée cliniquement sur 16 individus (sains et pathologiques).

## Références

- [1] L. Axel. Physics and technology of cardiovascular mr imaging. *Cardiology Clinics*, 16(2):125–133, 1998.
- [2] E. R. McVeigh. Regional myocardial function. *Cardiology Clinics*, 16(2):189–206, 1998.
- [3] R. W. Curwen A. A. Amini, Y. Chen. Coupled b-snake grides and constrained thin-plate splines for analysis of 2-d tissue deformations from tagged mri. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 17:344–356, 1998.
- [4] W. S. Kerwin and J. L. Prince. Cardiac material markers from tagged mr images. *Medical Image Analysis*, 2(4):339–353, 1998.
- [5] S. N. Gupta and J. L. Prince. On variable brightness optical flow for tagged mri. In *Information Processing in Medical Imaging*, June 1995.
- [6] Jr T. S. Denney and J. L. Prince. Reconstruction of 3-d left ventricular motion from planar tagged cardiac mr images: An estimation theoretic approach. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 14:625–635, December 1995.
- [7] J. L. Prince and E. R. McVeigh. Motion estimation from tagged mr image sequences. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 11:238–249, 1992.
- [8] McVeigh ER Osman NF, Kerwin WS and Prince JL. Cardiac motion tracking using cine harmonic phase (harp) magnetic resonance imaging. *Magn Reson Med*, 42:1048–1060, 1999.
- [9] E. Atalar et al S. Sampath, J.A. Derbyshire. Real-time imaging of two-dimensional cardiac strain using a harmonic phase magnetic resonance imaging (harp-mri) pulse sequence. *Magnetic Resonance in Medicine*, 50(1):154–163, July 2003.
- [10] E. McVeigh N. Osman and J. Prince. Imaging heart motion using harmonic phase mri. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 19(3):186–202, March 2000.
- [11] B.K.P. Horn and B.G. Schunck. Determining optical flow. *Artificial Intelligence*, 17:185–203, 1981.
- [12] J. A. Sethian. *Level Set Methods and Fast Marching Methods*. Cambridge University Press, 2 edition, 1999.

# Détection et caractérisation d'un bioprocédé fed-batch par l'analyse de l'exposant de Hölder

Sbastien RÉGIS<sup>1</sup>, Andrei DONCESCU<sup>2</sup>, Lætitia FAURE<sup>3</sup>, Jean-Louis URIBELARREA<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Groupe de Recherche en Informatique et Mathématiques Appliquées des Antilles et de la Guyane  
Université Antilles-Guyane 97159 Pointe-à-Pitre Guadeloupe France

<sup>2</sup>Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes CNRS  
7, Av. du Colonel Roche 31077 Cedex 04 Toulouse France

<sup>3</sup>Laboratoire de Biotechnologies Bioprocédés GBA-INSA  
Toulouse 31077 Cedex 04 Toulouse France  
sregis@univ-ag.fr, adoncesc@laas.fr

**Résumé** – Nous cherchons une méthode non supervisée qui puisse détecter des états physiologiques dans les bioprocédés pour confirmer et enrichir la connaissance d'expert. Pour cela nous proposons une méthode de clustering basée sur la détection et la sélection de singularités par l'exposant de Hölder à partir des coefficients de la Transformée en Ondelettes.

**Abstract** – We search an unsupervised method for the detection of physiological states of bioprocesses in order to confirm and increase knowledge. We propose a method of clustering based on the detection and selection of singularities by Hölder exponent by using wavelets transform.

## 1 Introduction

Aujourd'hui les systèmes biologiques sont au centre de la recherche appliquée et fondamentale. L'explication à ce grand intérêt pour la biologie systémique vient de la nature de l'information véhiculée par ce type de système. D'abord les mécanismes de transport et de production qui se réalisent à l'intérieur de la cellule et qui s'organisent dans un système complexe de réactions biologiques peuvent être décrites par un système d'équations dynamiques non-linéaires. La résolution d'un système non-linéaire est une tâche complexe que nous voulons éviter. Pour caractériser un système biologique nous avons choisi l'analyse des états physiologiques. L'analyse des états survenant durant ces bioprocédés est un point essentiel pour le contrôle et l'optimisation de ces bioprocédés. Des méthodes basées sur des modèles existent, mais ces techniques basées sur des simulations peuvent conduire à des conclusions erronées car ces modèles ne tiennent pas compte de tous les paramètres en jeu et ne peuvent prévoir certaines situations inattendues. C'est pourquoi les méthodes qui ne sont pas basées sur des modèles et qui s'appuient sur l'analyse de signaux biochimiques mesurés durant l'expérience sont de plus en plus utilisées. La détection et la caractérisation des états physiologiques survenant durant le bioprocédé sont basées sur le traitement des signaux biochimiques et sur leur analyse statistique en utilisant des méthodes de classification. Dans ce papier nous proposons une méthode utilisant le maximum du module de la transformée en ondelettes, l'exposant (ou coefficient) de Hölder et le produit de corrélation pour détecter et caractériser les états d'un bioprocédé de type fed-batch. Dans la deuxième partie, nous présentons quelques-uns des travaux existants sur la détection et la caractérisation des états d'un bioprocédé. Dans la troisième partie,

la méthode du maximum du module de la transformée en ondelettes et l'exposant de Hölder qui sont utilisés pour détecter et sélectionner les singularités les plus significatives, sont présentés succinctement. La corrélation et la méthode de clustering qui sont utilisées pour caractériser les états, sont présentées dans la quatrième partie. La cinquième partie est consacrée aux résultats expérimentaux et enfin la dernière partie présente la conclusion et les perspectives.

## 2 Travaux existants

Les plupart des travaux sur la détection des états physiologiques ont montré que les singularités des signaux biochimiques mesurés durant un bioprocédé (quelque soit son type) correspondent au début et à la fin d'un état physiologique du système. Ainsi plusieurs auteurs utilisant des méthodes très différentes les uns des autres sont arrivés à la conclusion que ces singularités représentaient les limites des états physiologiques: c'est le cas de Steyer et al. [1] (en utilisant la logique floue et un système expert), Bakshi and Stephanopoulos [2] (en utilisant les ondelettes et un système expert) et Doncescu et al. [3] (en utilisant la logique inductive). La détection des états physiologiques peut être suivie d'une phase de caractérisation automatique des ces états, souvent à partir des propriétés statistiques des signaux mesurés. Une des particularités des bioprocédés de type fed-batch est qu'un état peut apparaître plusieurs fois et à des moments différents de l'expérience. Il est donc nécessaire de caractériser ces états pour savoir s'ils réapparaissent au cours du temps. Plusieurs méthodes statistiques ont été proposées pour caractériser ces états. Par exemple, des méthodes de classification basées sur l'Analyse en Composantes

Principales (ACP) [4], l'ACP adaptative [5], ou la kernel ACP [6] permettent de distinguer et de caractériser les différents états d'un procédé.

La méthode du maximum du module de la transformée en ondelettes [7][8] est utilisée dans cet article pour détecter les singularités des signaux (afin de définir les limites d'un état) et l'étude des coefficients de corrélation entre ces signaux permet de caractériser ces différents états.

### 3 Détection et sélection des singularités par les ondelettes et l'exposant de Hölder

Les singularités des signaux biochimiques correspondent aux limites d'un état. Ces signaux biochimiques sont des signaux non stationnaires et non symétriques. Plusieurs méthodes utilisent les ondelettes pour détecter les singularités de ces signaux afin de détecter les états: par exemple, Bakshi and Stephanopoulos [2] et plus récemment Jiang et al. [9]. En effet ces singularités correspondent à des maxima des coefficients de la transformée en ondelettes des signaux biochimiques. Jiang et al. [9] proposent de sélectionner les maxima en utilisant un seuil. Cependant le choix de ce seuil reste empirique. Nous proposons d'utiliser l'exposant de Hölder pour sélectionner ces maxima. En effet la valeur de cet exposant de Hölder change en fonction de la nature de la singularité (voir [7][8]). Ainsi il est possible de sélectionner les singularités les plus significatives partir de leur exposant de Hölder. Récemment une méthode utilisant les algorithmes génétiques a été proposée et semble fournir des résultats plus précis que les méthodes classiques [10].

### 4 Caractérisation des états par corrélation et classification

Après avoir déterminé les limites des états par la détection des singularités, ces états physiologiques sont caractérisés par l'analyse des corrélations entre les signaux biochimiques. Sur chaque intervalle temporel défini à partir des singularités, le coefficient de corrélation est calculé entre les signaux deux à deux. Ce coefficient de corrélation (aussi appelé coefficient de Bravais-Pearson voir [11]) est donné par l'équation suivante:

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sigma_x \sigma_y} \quad (1)$$

où  $x_i$  représente les valeurs du premier paramètre biochimique (sur un intervalle temporel donné),  $y_i$  les valeurs du deuxième paramètre (sur le même intervalle temporel),  $n$  le nombre d'éléments,  $\bar{x}$  la valeur moyenne des éléments  $x$ ,  $\bar{y}$  la valeur moyenne des éléments  $y$ , et  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  les écarts type pour chacun des deux paramètres.

Ce coefficient de corrélation est en fait équivalent au cosinus du produit scalaire de deux variables projetées sur le cercle de corrélation pour une Analyse en Composantes Principales (ACP) effectuée entre ces deux variables.

Sur chaque intervalle on garde le signe des coefficients de corrélation entre deux signaux. Chaque intervalle est ainsi caractérisé par un ensemble de signes positifs et négatifs. Les intervalles

ayant la même série de signes sont regroupés dans la même classe. Ruiz et al. [4] proposent également une méthode basée sur l'ACP également pour une application concernant le traitement des eaux usées: la méthode consiste à classer les données projetées préalablement dans l'espace défini par les deux premières composantes principales. Cette méthode réduit la dimension de l'espace analysé mais l'ACP ne tient pas compte du temps: l'évolution des signaux n'est pas prise en compte. Pour pallier ce problème, Ruiz et al. proposent d'utiliser une fenêtre d'analyse de taille fixe contenant des données consécutives dans le temps. Cependant du fait que la taille de la fenêtre d'analyse est fixe, cette méthode ne tient pas réellement compte des changements survenant dans le procédé. Ainsi, la méthode basée sur la segmentation temporelle à partir de l'exposant de Hölder des singularités, semble mieux adaptée si l'on veut tenir compte de la dynamique du système.

### 5 Résultats expérimentaux

Les tests ont été effectués sur un bioprocédé fermentaire de type fed-batch. Ce bioprocédé utilisant des micro-organismes (levures) appelés *Saccharomyces Cerevisiae* a duré environ 34 heures. 11 signaux biochimiques ont été utilisés pour la classification. L'échelle maximum utilisée a été  $2^{10}$  [7]. La méthode a permis de détecter et de caractériser une action externe réalisée durant l'expérience. La classification est composée au total de 24 classes mais c'est surtout la classe numéro 8 qui est intéressante, caractérisée par un coefficient d'Hölder de 0.4. En effet cette classe 8 correspond à l'ajout d'un acide dans le milieu. Toutes les apparitions de la classe 8 correspondent exactement à l'ajout de cet acide. Autant que nous le sachions, c'est la première qu'une méthode qui n'est pas basée sur un modèle permet de trouver automatiquement l'addition d'un acide dans un bioprocédé fed-batch. Les résultats sont prometteurs et une analyse biologique approfondie est donc nécessaire.

### 6 Conclusion et perspectives

Nous avons proposé une méthode de classification non supervisée basée sur les ondelettes, l'exposant de Hölder et le coefficient de corrélation pour la détection et la caractérisation des états dans un bioprocédé. La détection des états est basée sur la détection et la sélection de singularités des signaux biochimiques en utilisant le maximum du module de la transformée en ondelettes et l'évaluation de l'exposant de Hölder. La caractérisation des états s'appuie sur le coefficient de corrélation entre les signaux. Les prochains travaux concernent l'utilisation d'autres ondelettes. L'utilisation des valeurs du coefficient de corrélation (au lieu du signe de ce coefficient) pour caractériser les états est une voie à explorer. La prochaine étape est la mise en ligne de la méthode pour une utilisation en temps réel.

### Références

- [1] J.P. Steyer, J.B. Pourciel, D. Simoes, and J.L. Uribelarra, "Qualitative knowledge modeling used in a real time expert system for biotechnological process control," in

- IMACS International Workshop "Decision Support Systems and Qualitative Reasoning"*, 1991.
- [2] B.R. Bakshi and G. Stephanopoulos, "Representation of process trends-III. multiscale extraction of trends from process data," *Computer and Chemical Engineering*, vol. 18, no. 4, pp. 267–302, 1994.
  - [3] A. Doncescu, J. Waissman, G. Richard, and G. Roux, "Characterization of bio-chemical signals by inductive logic programming," *Knowledge-Based Systems*, vol. 15, no. 1-2, pp. 129–137, Janvier 2002.
  - [4] G. Ruiz, M. Castellano, W. González, E. Roca, and J.M. Lema, "Algorithm for steady states detection of multivariate process: application to wastewater anaerobic digestion process," in *AutMoNet 2004*, 2004, pp. 181–188.
  - [5] J. Lennox and C. Rosen, "Adaptative multiscale principal components analysis for online monitoring of wastewater treatment," *Water Science and Technology*, vol. 45, no. 4-5, pp. 227–235, 2002.
  - [6] J.-M. Lee, C. Yoo, I.-B. Lee, and P. Vanrolleghem, "Multivariate statistical monitoring of nonlinear biological processes using kernel PCA," in *IFAC CAB'9*, Nancy, France, March 2004.
  - [7] S. Mallat and S. Zhong, "Characterization of signals from multiscale edges," *IEEE Trans. on PAMI*, vol. 14, no. 7, pp. 710–732, 1992.
  - [8] S. Mallat and W.-L. Hwang, "Singularity detection and processing with wavelets," *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 38, no. 2, pp. 617–643, March 1992.
  - [9] T. Jiang, B. Chen, X. He, and P. Stuart, "Application of steady-state detection method based on wavelet transform," *Computer and Chemical Engineering*, vol. 27, no. 4, pp. 569–578, 2003.
  - [10] L. Manyri, S. Regis, A. Doncescu, J. Desachy, and JL Urribelarea, "Holder coefficient estimation by differential evolutionary algorithms for *saccharomyces cerivisiae* physiological states characterisation," in *ICPP-HPSECA*, Kaohsiung, Taiwan, Octobre 2003.
  - [11] G. Saporta, *Probabilités, et Analyse des données et Statistique*, Technip, 1990.





# Extraction des signatures de composés purs constituant la couche externe du grain d'orge à partir d'images de fluorescence

Abdelkamel ELHAFID<sup>1</sup>, Danielle NUZILLARD<sup>1</sup>, Marie-Françoise DEVAUX<sup>2</sup>, Nicolas PETROCHILLOS<sup>1</sup>, Fabien BELLOIR<sup>1</sup>

<sup>1</sup>CRéSTIC, UFR Sciences Exactes et Naturelles, B.P. 1039, 51687 REIMS Cedex 2

<sup>2</sup>INRA URPOI, Rue de la Gérandière BP 71627 44316 Nantes Cedex 03, France

abdelkamel.elhafid@univ-reims.fr, danielle.nuzillard@univ-reims.fr,

nicolas.petrochillos@univ-reims.fr, fabien.belloir@univ-reims.fr, devaux@nantes.inra.fr

**Résumé** – L'identification des différents types de tissus après fragmentation ou transformation des grains de céréale et de leurs dérivés est un enjeu majeur de l'industrie agro-alimentaire. L'objectif de notre travail est l'extraction des signatures spectrales des principaux composés purs des tissus de la couche externe d'un grain d'orge et l'estimation de leur carte de répartition. Les données sont disponibles sous forme d'un cube constitué d'une pile d'images acquises par microscopie confocale en fluorescence. Elles sont traitées soit en considérant le cube dans sa globalité, soit en sélectionnant visuellement des pixels selon des lignes de coupe dans chaque tissu identifiable. Le traitement met en oeuvre des méthodes de séparation aveugle de sources, il tient compte de l'autocorrélation des données, de la positivité des signatures et de leur carte de répartition spatiale. Des signatures de référence permettent de valider les résultats.

**Abstract** – Automatic identification of cereal grain tissues is studied with the objective to follow them after fragmentation or other transformations. In our work, we aim at extracting the spectral signature of the various pure components present in the tissue of the external layer of the barley grain. As well, we desire to estimate their concentration mapping. The data is available in the form of a cube (3-th order tensor), which each layer is an image measured by fluorescence confocal microscopy. We process either the data cube as a whole, or by selecting a slice along the spectral dimension. The processing is done by blind source separation methods, using together the inner correlation of the data, and the positivity of the data model (spectral signature, and concentration mapping). Reference signatures allow an experimental confirmation.

## 1 Description du cube de données et du modèle associé

### 1.1 Les données

Les grains de céréale sont constitués de plusieurs tissus qui se superposent. La partie centrale renferme de l'amidon, les tissus des couches externes servent de protection (figure 1). Ceux-ci contiennent des composés naturellement fluorescents : cutine, acide férulique, lignine, dont les signatures spectrales se recouvrent partiellement.

L'identification de ces différents composés ainsi que leur carte de répartition est très importante puisqu'elle peut permettre de suivre les différents types de tissus après fragmentation ou transformation des grains et de leurs dérivés.

Le cube de données utilisé est constitué de 19 images multispectrales acquises en microscopie confocale de fluorescence (figure 2). Chaque image est le résultat de la mesure de l'autofluorescence des parois végétales d'un grain d'orge pour une longueur d'onde d'excitation et un filtre d'émission donné. Chaque point de mesure est un spectre de mélange de composés purs avec différentes proportions.

A partir de ces images spectrales de mélange l'objec-

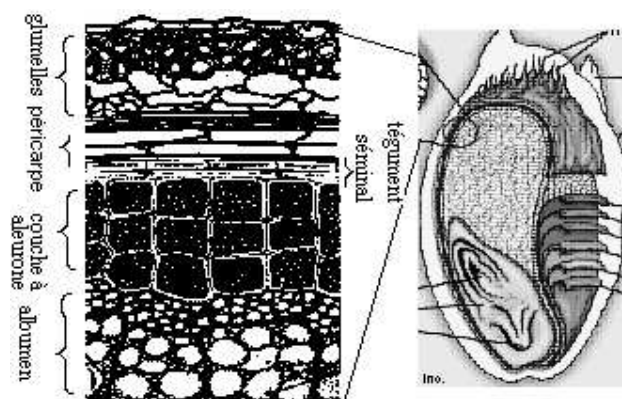


FIG. 1: Coupe transversale d'un grain d'orge.

tif est d'extraire les profils spectraux des composés purs ainsi que leur carte de répartition. On procède de deux manières, soit en séparant les 19 images placées dans une matrice d'observation  $\mathbf{X}$  de taille  $(256 \times 512 \times 19)$  (figure 2), soit en considérant un ensemble de 20 pixels sélectionnés selon des lignes de coupe dans les tissus externes formant une matrice d'observation  $\mathbf{X}$  de taille  $(20 \times 19)$  (figure 3).

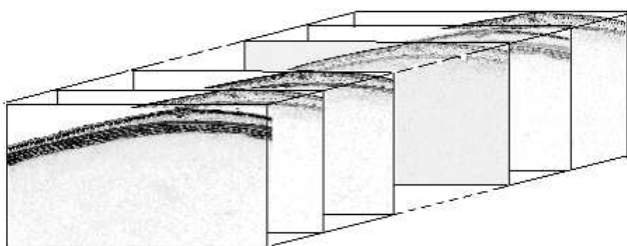


FIG. 2: Cube d'images multispectrales du grain d'orge.

## 1.2 Analyse des images

Parmi les techniques utilisées avec ce type de données, la méthode introduite par P. Courcoux *et al.* [1] basée sur l'analyse en composantes principales (ACP) des images de données, a permis de révéler les différents tissus fluorescents à partir de cinq composantes principales. Chaque composante met en évidence de manière contrastée plusieurs tissus simultanément : par exemple la couche à aleurone en positif et le péricarpe en négatif. La méthode ne fournit pas les profils spectraux des composés purs. Notre objectif est de déterminer ces profils spectraux et d'améliorer la reconnaissance de la répartition des tissus. À l'aide d'une méthode de séparation aveugle de sources (SAS), suivie par un post-traitement tenant compte des contraintes physiques des données il est possible d'obtenir des solutions physiquement correctes.

Afin de réduire le bruit de mesure, il est judicieux de ne retenir que des régions d'intérêt ne contenant que les tissus externes.

La qualité du microscope mis en oeuvre est suffisamment bonne pour négliger la déformation introduite par la fonction de transfert instrumentale. Sachant que les lois physiques de la spectroscopie sont linéaires, les images spectrales enregistrées sont une somme pondérée des images des composés purs. Le choix du modèle instantané et linéaire couramment utilisé en SAS, est justifié. On suppose :

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{S} \quad (1)$$

où  $\mathbf{X}$  est la matrice d'observation construite à partir du cube de données. Par la suite chaque image est reformattée pour placer les éléments de la matrice des données en ligne. On note que tous les éléments de  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{S}$  sont à valeurs positives.  $\mathbf{A}$  est la matrice de mélange où chaque colonne représente la signature d'un composé pur et  $\mathbf{S}$  est la matrice source qui représente l'image de leurs concentrations. Vu la structure des couches externes du grain d'orge, les cartes de concentrations des composés purs présentent une corrélation spatiale non nulle.

Puisque la plupart des molécules fluorescentes ont des bandes fluorescentes larges et non structurées et que les valeurs des intensités des spectres sont positives, l'indépendance mathématique des sources ne peut pas être vérifiée. Ainsi les méthodes basées sur les statistiques d'ordre supérieur, type ICA [2, 3], ne sont pas appropriées. Elles fournissent néanmoins des résultats intéressants. Par contre la prise en compte de la corrélation intrinsèque des profils de concentration et leur indépendance extrinsèque est plus réaliste, ce qui justifie l'utilisation de l'algorithme (SOBI)

[4]. Cependant celui-ci ne suffit pas à donner une solution finale. Il est nécessaire de forcer la positivité par une procédure itérative.

## 1.3 Analyse des spectres

Une seconde approche consiste à limiter l'observation à un ensemble de pixels sélectionnés selon des lignes de coupe dans les tissus externes du grain d'orge. À chaque pixel de cette ligne correspond un vecteur spectral exprimé en longueur d'onde, ( $\lambda = c/\nu$ ), qui constitue une ligne de la matrice d'observation  $\mathbf{X}$  (figure 3). Dans ce cas les sources recherchées  $\mathbf{S}$  sont les signatures des composés purs et la matrice  $\mathbf{A}$  est une matrice de proportion de ces composés purs dans les vecteurs de mélanges observés. Les hypothèses de mélange instantané et linéaire restent valables.

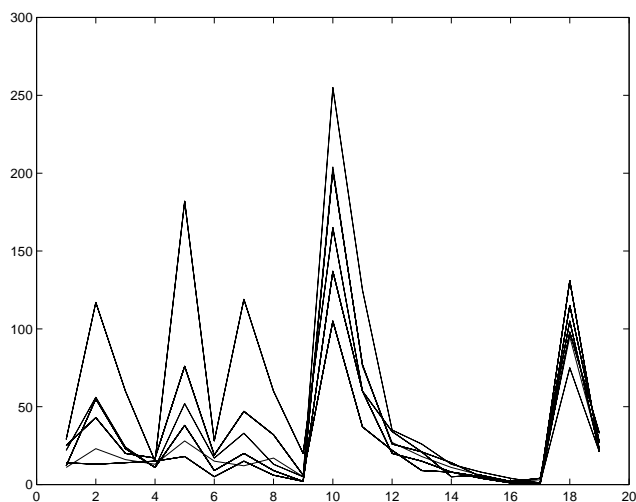


FIG. 3: Profils de mélange extraits pour des pixels sélectionnés selon une ligne de coupe choisie dans la région du tégment séminal.

Pour cette approche spectrale, les données étant parcimonieuses (figure 3), on applique l'algorithme "Non-negative matrix factorization" (NMF) [5], qui consiste à factoriser la matrice  $\mathbf{X}$  en deux matrices positives  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{S}$ .

## 2 Les algorithmes utilisés

### 2.1 SOBI positif

Une étude préliminaire a montré que l'utilisation des algorithmes utilisant les statistiques d'ordre supérieur ne fournit pas de "bons résultats spectraux" du fait du faible nombre de points de mesure dont on dispose (19 points de mesure spectrale). Notre choix s'est porté sur l'algorithme SOBI [4] qui a déjà été utilisé avec succès dans le domaine des signaux spectraux [6, 7] même avec un faible nombre de points de mesure. Cet algorithme est ensuite suivi par une procédure itérative dite de positivité pour prendre en compte la réalité physique des données [6].

Cette procédure répète les étapes suivantes :

1. Les valeurs négatives des sources  $\hat{\mathbf{S}}_n$  sont remplacées par des zéros.
2. La matrice de mélange  $\hat{\mathbf{A}}_{n+1}$  est évaluée par pseudo-inversion à droite de  $\hat{\mathbf{S}}_n$  :

$$\hat{\mathbf{A}}_{n+1} = \mathbf{X} \hat{\mathbf{S}}_n^T (\hat{\mathbf{S}}_n \hat{\mathbf{S}}_n^T)^{-1} \quad (2)$$

3. Les valeurs négatives de la matrice  $\hat{\mathbf{A}}_{n+1}$  sont remplacées par des zéros.
4. La matrice des sources  $\hat{\mathbf{S}}_{n+1}$  est évaluée par pseudo-inversion à gauche de  $\hat{\mathbf{A}}_{n+1}$  :

$$\hat{\mathbf{S}}_{n+1} = (\hat{\mathbf{A}}_{n+1}^T \hat{\mathbf{A}}_{n+1})^{-1} \hat{\mathbf{A}}_{n+1}^T \mathbf{X} \quad (3)$$

5. Tant que le couple  $(\hat{\mathbf{S}}_{n+1}, \hat{\mathbf{A}}_{n+1})$  évolue, on itère une nouvelle fois.

## 2.2 Factorisation en matrice non négative (NMF)

L'algorithme de factorisation en matrice non négative [5] est un algorithme itératif, qui permet de factoriser une matrice de donnée positive (tous ses éléments sont positifs)  $\mathbf{X}$  en deux matrices positives  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{S}$  en minimisant une fonction coût par rapport à  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{S}$  sous les contraintes  $\forall (i,j) \in \mathbb{R}^2, \mathbf{A}_{ij} \geq 0$ , et  $\mathbf{S}_{ij} \geq 0$ . Dans notre cas on choisit le carré de la distance Euclidienne entre  $\mathbf{X}$  et le produit  $\mathbf{AS}$ ,  $\|\mathbf{X} - \mathbf{AS}\|_{\text{FRO}}^2$ . De multiples techniques de minimisation sont possibles, mais afin de respecter le critère de positivité, Lee et al proposent d'utiliser les mises à jour suivantes jusqu'à la convergence :

$$\mathbf{S}_{ij} \leftarrow \mathbf{S}_{ij} \frac{(\mathbf{A}^T \mathbf{X})_{ij}}{(\mathbf{A}^T \mathbf{AS})_{ij}} \quad (4)$$

$$\mathbf{A}_{ij} \leftarrow \mathbf{A}_{ij} \frac{(\mathbf{XS}^T)_{ij}}{(\mathbf{ASS}^T)_{ij}} \quad (5)$$

Il a été démontré dans [5] que ces mises à jour font varier la fonction coût de manière non strictement décroissante jusqu'à atteindre un minimum (global ou local).

On note que par construction (4) et (5) ne peuvent donner que des valeurs positives pour  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{A}$  à partir de valeurs positives.

L'application de cet algorithme sur des données de céréales de blé ayant les mêmes caractéristiques que l'orge a fourni des résultats très satisfaisants [8].

## 3 Résultats

### 3.1 SOBI positif

L'algorithme SOBI a été appliqué sur le cube des 19 images, en prenant quatre matrices de corrélation des données. L'expérience montre que le choix optimum du nombre de ces matrices est compris entre 4 et 8. Cela a permis d'extraire quatre sources décorrelées qui mettent en évidence des régions opposées et présentent des valeurs négatives. Ensuite la procédure de positivité a été itérée jusqu'à la convergence.

De plus les signatures des composés de référence (figure 4) ont été obtenues expérimentalement à partir d'autres matériaux biologiques caractérisés à l'INRA de Nantes. Ces signatures permettent de comparer l'estimation des signatures à valeurs positives (figure 5) et d'accepter les cartes de répartition correspondantes (figure 6).

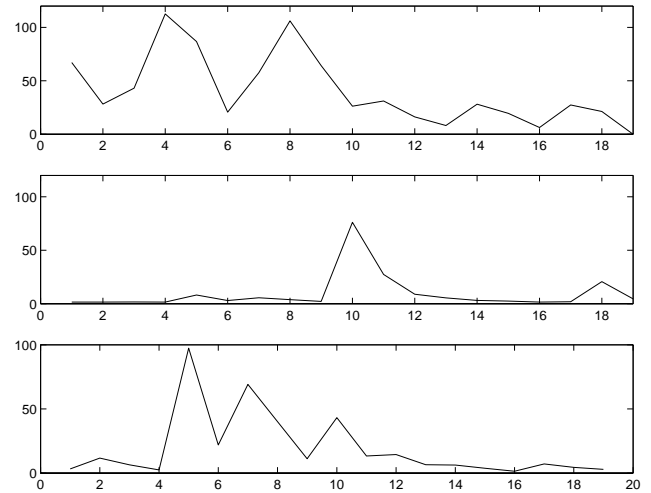


FIG. 4: Signatures de référence des composés purs (cutine, acide férulique et lignine).

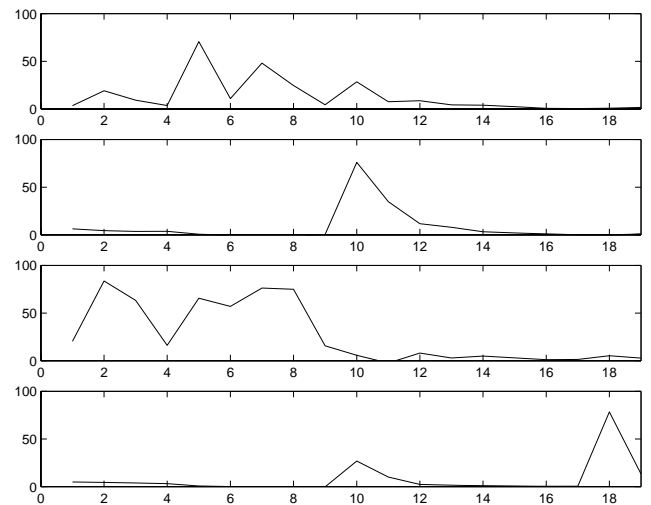


FIG. 5: Estimation des signatures des composés purs par l'algorithme SOBI + positivité: (a) lignine, (b)+(d) acide férulique, (c) cutine.

Le profil (5.a) correspond à un profil de type lignine. Le graphe (5.c) correspond à la signature de la cutine. L'image (figure 6.a) correspond à la répartition de la lignine, celle-ci est obtenue dans l'ensemble des tissus péricarpe+glumelle. L'image (figure 6.c) correspond à la cutine et révèle la région la plus externe du grain et de manière moins intense les glumelles et le péricarpe. Une combinaison linéaire des graphes des figures (5.b) et (5.d) correspond à la signature de l'acide férulique visible sur le graphe (4.b). La région correspond à la couche à aleurone et aux glumelles.

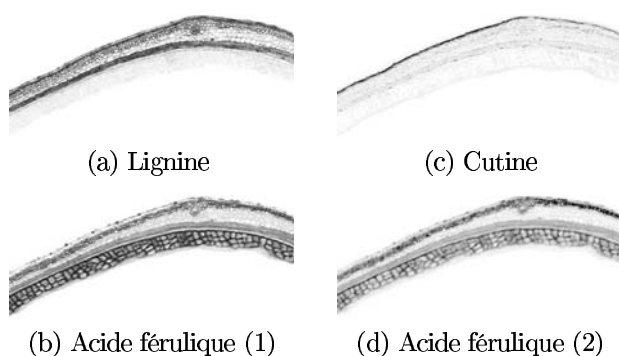


FIG. 6: Estimation des concentrations des composés purs par la méthode SOBI + positivité.

Les cartes de concentration associées aux composés purs (figure 5) sont présentées sur la figure 6 en respectant l'ordre de la figure 5. Les deux images (figure 6.b) et (figure 6.d) sont fortement corrélées puisqu'elles correspondent à la concentration d'un seul composé pur : l'acide férulique.

### 3.2 Factorisation en matrice non négative (NMF)

Pour chaque tissu identifiable (péricarpe, couche à aleurone, cutine, glumelle), des pixels ont été sélectionnés visuellement selon une ligne de coupe. Dans l'exemple présenté ci-dessous, les données à séparer sont des vecteurs de points appartenant à la région du tégument séminal (figure 3).

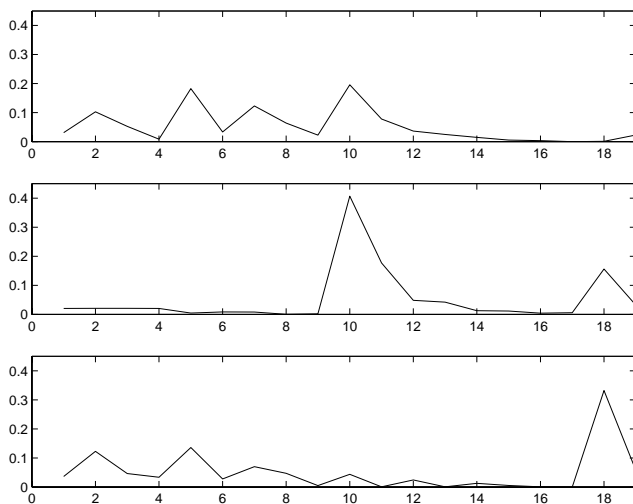


FIG. 7: Estimation des signatures des composés purs du tégument séminal par la méthode NMF: (a) lignine, (b) acide férulique, (c) résidus.

Le traitement du tégument séminal met en évidence des profils de type lignine (figure 7.a), acide férulique (figure 7.b) et un résidu en (figure 7.c). La cutine n'étant pas présente dans le jeu de points choisi, il est normal de ne pas la retrouver après séparation. L'algorithme NMF a pu être appliqué ici car le jeu de données est réduit. Il est difficilement applicable directement sur les images du

cube car il ne prend pas en compte l'autocorrélation des données et il introduit des indéterminations aux endroits où l'image ne contient qu'un faible signal.

## 4 Conclusions et perspectives

Ce travail a porté sur l'analyse d'un cube de données multispectrales d'une section d'un grain d'orge pour en extraire les composés purs ainsi que leur carte de répartition. La combinaison linéaire des composés purs permet de remonter aux tissus.

La prise en compte de la positivité des données aide à fournir des résultats physiquement interprétables. Ainsi le cube a été considéré dans son ensemble et les images ont été séparées grâce à l'algorithme SOBI + positivité de manière à fournir les cartes de répartition des composés purs ainsi que leurs signatures spectrales. Parallèlement, les données sélectionnées suivant une ligne de coupe ont été séparées en vecteurs spectraux dans le même but.

Cette méthodologie sera appliquée à un ensemble de nouvelles observations d'images de grains broyés dans le but de comprendre les mécanismes de fragmentation des tissus.

## Références

- [1] P. Courcoux, M.-F. Devaux, and B. Bouchet, "Simultaneous decomposition of multivariate images using three-way data analysis. application to the comparison of cereal grains by confocal laser scanning microscopy," *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, vol. 62, pp. 103–113, Mai 2002.
- [2] P. Common, "Independent component analysis, a new concept?," *Signal Processing, Special Issue on High-Order Statistics*, vol. 36, pp. 287–314, Avril 1996.
- [3] J.-F. Cardoso and A. Souloumiac, "Jacobi angles for simultaneous diagonalization," *SIAM J. Mat. Anal. Appl.*, vol. 17, pp. 161–164, Janvier 1996.
- [4] A. Belouchrani, K. Abed-Meraim, J. Cardoso, and E. Moulines, "A blind source separation technique using second order statistics," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 45, pp. 434–444, Février 1997.
- [5] D. D. Lee and H. S. Seung, "Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization," *Nature*, vol. 401, pp. 434–444, Octobre 1999.
- [6] D. Nuzillard and J. Nuzillard, "Blind source separation applied to nonorthogonal signals," in *1st Workshop ICA '99*, (Aussois, (France)), pp. 25–30, 11-15 Janvier 1999.
- [7] D. Nuzillard, S. Bourg, and J. Nuzillard, "Model-free analysis of mixture by NMR," *Journal of Magnetic Resonance*, vol. 133, pp. 358–363, août 1998.
- [8] C. Gobinet, A. Elhafid, V. Vrabie, R. Huez, and D. Nuzillard, "About importance of positivity constraints for source separation in fluorescence spectroscopy," in *Eusipco '05*, (Antalya, (Turkey)), 5 Septembre 2005.

# Application de modèles à dérivée non entière à la détection électrochimique sur biopuce

Alexandre CHIBANE<sup>1</sup>, Pierre GRANGEAT<sup>1</sup>, Laurent DESBAT<sup>2</sup>, Alina VODA<sup>3</sup>

<sup>1</sup>LETI – CEA-DRT, Grenoble  
CEA/Grenoble DTBS, 17, rue des Martyrs 38054 GRENOBLE Cedex 9 - France

<sup>2</sup>IMAG, Grenoble  
GMCAO - In3S - Faculté de Médecine 38706 La Tronche - France

<sup>3</sup>INPG, Grenoble  
ENSIEG BP46, Rue de la Houille Blanche 38402 St Martin d'Hères Cedex - France  
alexandre.chibane@cea.fr, pierre.grangeat@cea.fr  
laurent.desbat@imag.fr, alina.voda@inpg.fr

**Résumé** — Notre article traite de modélisation de systèmes électrochimiques par des fonctions de transfert à dérivée non entière. Celles-ci sont adaptées pour décrire de manière compacte les phénomènes de diffusion. L'objet de l'étude est de réaliser le processus complet d'identification des paramètres du système, afin de proposer une modélisation efficace de systèmes électrochimiques. Une factorisation en monômes est effectuée, qui comporte un ensemble de couples fréquence de coupure/ordre de dérivation non entier. Des tests ont été effectués sur des données de simulation, bruitées ou non, puis sur des données expérimentales représentant les spectres d'impédance d'un système électrochimique.

**Abstract** — Our article deals with modelling electrochemical systems with fractional-derivative transfer functions. Those are well designed to explain the behavior of diffusive systems, in a synthetic formulation. Our study aims to make the whole process of system parameters identification, in order to propose an efficient electrochemical systems modelling. We use a factorization with monomes, in which we find a set of values frequency/fractional derivation order. Some tests have been set on simulation data, with additive noise. We also have tested the algorithm on experimental data, which consists in an electrochemical system impedance spectra.

## 1 Introduction

Notre étude est réalisée dans le cadre de la recherche amont sur les biopuces. Leur but est de détecter de manière sélective et reproductible la présence d'un composé biomoléculaire (protéine, molécule toxique, ADN, etc.) au sein d'une solution. Dans notre travail, l'objectif est d'investiguer l'approche électrochimique de détection de cibles. Pour reconnaître une molécule cible de façon sélective, on utilise la capacité d'un marqueur à se complexer avec une molécule complémentaire. Si la complexation se fait sur la surface d'une électrode, le comportement électrique de celle-ci sera modifié. Des procédés enzymatiques peuvent aussi être utilisés. On souhaite alors relier concentration et grandeurs électriques mesurées. La tendance actuelle des microtechnologies consiste à miniaturiser les systèmes utilisés pour la détection. Cela ouvre des extensions importantes, notamment pour la détection simultanée de plusieurs produits au sein d'un mélange, la réduction du volume des échantillons nécessaires, la réduction des phénomènes de diffusion au sein de l'échantillon et l'amélioration des temps de réponse. L'automatisation de l'analyse, la portabilité des systèmes, et la réduction des coûts semblent également primordiales pour de nouveaux usages, comme les bornes de santé, le contrôle de l'environnement ou la lutte contre le bioterrorisme. L'électrochimie semble

proposer des solutions technologiques intéressantes en vue de ces objectifs.

Les méthodes classiques consistent à appliquer une tension électrique de forme temporelle standardisée (par exemple en dents de scie pour la voltampérométrie). On étudie ensuite l'intensité du courant qui en découle, et une analyse graphique produit une valeur qui est traitée pour en déduire la concentration. Ces méthodes sont peu robustes, et l'excitation du système n'est pas suffisante pour identifier son fonctionnement fin. Ceci nous a conduit à étudier des démarches basées sur la spectroscopie d'impédance, afin de caractériser au mieux le système en présence [1].

Les données de spectroscopie d'impédance sont obtenues en stimulant le système à différentes fréquences par des sinusoïdes de faible amplitude, autour d'une tension de polarisation. On mesure donc un spectre d'impédance complexe. Ce spectre est représenté par son module et sa phase ou par ses parties réelles et imaginaires (diagrammes de Bode ou de Nyquist).

Afin de mettre en place une approche par identification, il nous faut introduire une modélisation adaptée, par exemple par réseau électrique équivalent. Dans cette approche, on détermine la forme de l'impédance complexe du circuit en fonction d'un schéma électrique composé de cellules. Des modèles complexes ont été introduits, comme l'impédance de Warburg [3] (qui modélise des phénomènes

de diffusion) pour tenir compte de comportements plus fins. Ceci conduit au modèle de Randles. Cependant, il s'avère que ce modèle est insuffisant pour décrire les spectres mesurés sur biopuce. Nous présentons dans cette communication une généralisation par un modèle à dérivée non entière permettant de mieux décrire les phénomènes observés. Nous étudions également une méthode d'identification des paramètres du modèle.

## 2 Modèle de Randles

Dans le cadre d'une modélisation par réseau électrique équivalent, le modèle d'impédance complexe de Randles a été proposé. Une application pratique au diagnostic de batteries a été réalisée dans [4]. Cette impédance modélise de manière classique le comportement d'une électrode présentant une diffusion sur une couche semi-infinie. La figure (1) montre son diagramme de Nyquist et le schéma électrique équivalent.

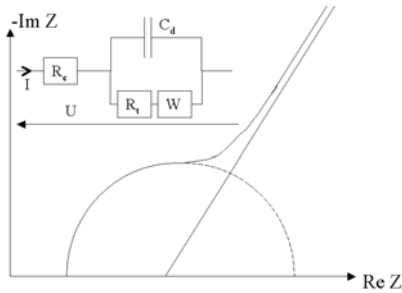


FIG. 1: Diagramme de Nyquist du circuit de Randles

L'impédance de Warburg  $W$  est donnée par  $W(\omega) = \frac{\sigma(1-j)}{\sqrt{j\omega}} = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{j\omega}}$  où  $\omega$  est la pulsation, et l'expression de l'impédance du circuit de Randles est donc :

$$Z(\omega) = R_e + \frac{R_t(j\omega)^{1/2} + \sigma\sqrt{2}}{C_d R_t(j\omega)^{3/2} + \sigma\sqrt{2}C_d(j\omega) + (j\omega)^{1/2}}$$

où  $j^2 = -1$ . Les paramètres du modèle des Randles ont l'interprétation physique suivante :  $R_t$  et  $R_e$  sont des résistances,  $C_d$  une capacité et  $\sigma$  un paramètre de diffusion.

## 3 Limites du modèle de Randles et généralisation

L'impédance de Warburg introduit une dérivée non entière pour modéliser une diffusion linéaire semi-infinie [3]. En effet,  $(j\omega)$  représentant la dérivation dans le domaine de Fourier, le terme  $(j\omega)^{1/2}$  correspond à une dérivation d'ordre  $1/2$  dans le domaine de Fourier. Pour le circuit de Randles, on a donc une impédance complexe représentée par une fraction rationnelle de  $(j\omega)^{1/2}$ , où apparaissent donc des coefficients de dérivation non entière d'ordre multiple de  $1/2$ . Cependant, ce type de fonction de transfert est insuffisant pour l'analyse des données expérimentales obtenues sur les biopuces étudiées.

Les modèles d'ordre non entier ont déjà été utilisés notamment pour étudier la réponse fréquentielle d'un matériau visco-élastique, dont la réponse en fréquence est fortement non-linéaire [5]. La fonction de transfert est représentée sous la forme d'un produit de monômes du type  $(1 + j\frac{\omega}{\omega_k})^{n_k}$ , soit  $Z(\omega) = Z_0 \prod_{k=1}^n (1 + j\frac{\omega}{\omega_k})^{n_k}$ . A. Oustaloup introduit ce modèle dans [5]. L'intérêt de ce modèle réside dans la séparation qu'il réalise entre les différentes cinétiques de réaction électrochimique. En effet, les monômes précités contribuent de manière "séparable" à la fonction de transfert globale, en ce sens que leurs variations fortes sont concentrées autour de leur fréquence de coupure  $\omega_k$  comme le montre la figure (2). Entre chaque fréquence de coupure  $\omega_k$ , la phase varie très peu, ce qui correspond à des plages de fréquence. Pour chacune d'elles, le régime de diffusion est alors spécifique et correspond à un ordre de dérivation non entier.

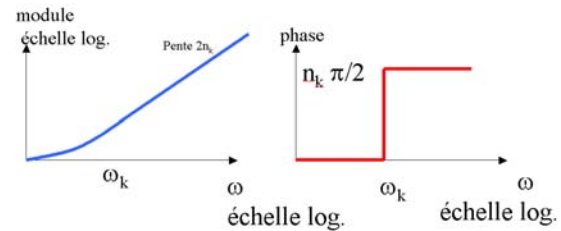


FIG. 2: Diagramme de Bode d'un monôme  $(1 + j\omega/\omega_k)^{n_k}$

## 4 Identification des paramètres du modèle à dérivée non entière

Dans cette partie, nous décrivons l'approche utilisée pour identifier les paramètres du modèle à dérivée non-entière. Dans l'ouvrage [5], une méthode graphique d'identification est proposée.

Nous avons exploré une autre méthode plus automatique qui consiste à calculer des dérivées du module afin d'identifier les fréquences caractéristiques  $\omega_k$ . Cette approche a été développée à l'origine dans [6]. Un calcul rapide permet de voir que la dérivée troisième du logarithme du module s'annule à la fréquence  $\omega_k$ . On estime ensuite l'ordre du saut  $n_k$  en mesurant la valeur de la dérivée seconde (minimum en  $\omega_k$ ). Enfin, ces paramètres sont optimisés grâce à un algorithme de minimisation aux moindres carrés.

### 4.1 Calcul des dérivées

Le calcul de dérivées est très sensible au bruit. En effet, la dérivation correspond à une multiplication par  $i\omega$  dans le domaine de Fourier, ce qui augmente la valeur de la transformée de Fourier des hautes fréquences. Nous avons donc adopté une approche tendant à éviter ce type d'erreurs. Dans [6], le calcul est effectué sur des schémas aux différences finies, qui sont connus pour leur caractère instable.

Nous avons alors effectué des calculs par l'intermédiaire des splines cubiques, réalisant une approximation par po-

lynômes de degré 3 par morceaux. Nous réalisons donc une approximation  $\log(|Z(\omega)|)$  en fonction de  $\log(\omega)$ . Son expression au point de mesure  $\hat{\omega}_i$  est :

$$\log|Z(\hat{\omega}_i)| = - \sum_{k=1}^N \frac{n_k}{2} \log \left( 1 + \left( \frac{\hat{\omega}_i}{\omega_k} \right)^2 \right)$$

## 4.2 Estimation des fréquences $\omega_k$

Pour chaque fréquence de mesure  $\hat{\omega}_i$ , la dérivée troisième de la fonction de transfert s'écrit :

$$\frac{d^3 \log|Z(\omega)|}{d(\log \omega)^3}(\hat{\omega}_i) = - \sum_{k=1}^N n_k \frac{4 \left( \frac{\hat{\omega}_i}{\omega_k} \right)^2 (1 - \left( \frac{\hat{\omega}_i}{\omega_k} \right)^2)}{(1 + \left( \frac{\hat{\omega}_i}{\omega_k} \right)^2)^3}$$

Chaque terme de la somme est nul en  $\left( \frac{\hat{\omega}_i}{\omega_k} \right) \rightarrow 0$  car alors le développement limité en  $0^+$  s'écrit :  $-4 \left( \frac{\hat{\omega}_i}{\omega_k} \right)^2$ , de même pour  $\left( \frac{\hat{\omega}_i}{\omega_k} \right) \rightarrow +\infty$ , la dérivée troisième tend vers 0 car le développement généralisé s'écrit :  $\frac{-4}{\left( \frac{\hat{\omega}_i}{\omega_k} \right)^2}$ . On peut donc considérer qu'autour de la fréquence  $\omega_k$ , la dérivée s'écrit :  $\frac{d^3 \log|Z(\omega)|}{d(\log \omega)^3}(\hat{\omega}_i) \approx -n_k \frac{4 \left( \frac{\hat{\omega}_i}{\omega_k} \right)^2 (1 - \left( \frac{\hat{\omega}_i}{\omega_k} \right)^2)}{(1 + \left( \frac{\hat{\omega}_i}{\omega_k} \right)^2)^3}$ . On déduit donc que la dérivée troisième s'annule pour  $\omega = \omega_k$ . Cela nous donne donc un critère pour déterminer un ensemble de fréquences parmi lesquels on trouvera les fréquences des monômes précités. La dérivée seconde doit de plus être minimale en ce point.

Soit un polynôme de degré trois  $aX^3 + bX^2 + cX + d$ . La dérivée troisième correspond à  $6a$  où  $a$  est son coefficient de troisième degré. On doit détecter l'annulation de ce coefficient pour détecter les fréquences  $\omega_k$ . Nous détectons pour cela les changements de signe de  $a$  (passant de négatif à positif).

## 4.3 Estimation des ordres $n_k$

Pour chaque fréquence de mesure  $\hat{\omega}_i$ , la dérivée seconde de la fonction de transfert s'écrit :

$$\frac{d^2 \log|Z(\omega)|}{d(\log \omega)^2}(\hat{\omega}_i) = - \sum_{k=1}^N n_k \frac{2 \left( \frac{\hat{\omega}_i}{\omega_k} \right)^2}{(1 + \left( \frac{\hat{\omega}_i}{\omega_k} \right)^2)^2} \quad (1)$$

Avec les mêmes notations que précédemment, la dérivée seconde correspond à  $6aX + 2b$  où  $a$  et  $b$  sont respectivement ses coefficients de second et troisième degrés. En écrivant cette relation pour tout  $\hat{\omega}_i$  et pour tout  $\omega_k$ , on obtient une relation matricielle  $d_i = \sum_{k=1}^N n_k \cdot A_{i,k}$ , où  $d_i$  est la valeur de la dérivée seconde en  $\hat{\omega}_i$  et  $A_{i,k}$  le coefficient du second membre de l'équation 1. On déduit les valeurs des  $n_k$  en résolvant ce système surdéterminé (le nombre de fréquences du spectre est bien plus grand que le nombre de fréquences de coupure choisies). Pour cela, on utilise une routine de calcul de valeurs singulières qui donne une solution optimale aux moindres carrés grâce à une pseudo-inverse.

On obtient donc un jeu de paramètres  $n_k$  associés à chaque fréquence  $\omega_k$ .

## 4.4 Optimisation des paramètres

Une amélioration de l'estimation des paramètres est effectuée pour augmenter la robustesse du processus. La

formulation du problème conduit alors à minimiser une erreur aux moindres carrés non linéaire. Pour cela, nous additionnons les erreurs réalisées en chaque point de mesure  $\hat{\omega}_i$ . Le spectre d'impédance nous fournit un nombre complexe. Le premier critère testé est la distance quadratique entre les points de mesure :

$$E(Z, Z_M) = \sum_{\hat{\omega}_i} (Re(Z) - Re(Z_M))^2 + (Im(Z) - Im(Z_M))^2.$$

Ce critère est simple, mais il converge lentement, donne des résultats insuffisants, et ne permet pas de bien étudier les variations fréquentielles de la phase. Le second critère testé est différent, puisqu'on travaille sur le module et la phase séparément puis on additionne les erreurs. Pour des problèmes d'échelle, on extrait le logarithme du module et on calcule l'erreur sur cette valeur :

$$E(Z, Z_M) = \sum_{\hat{\omega}_i} \alpha (\log|Z| - \log|Z_M|)^2 + (\phi(Z) - \phi(Z_M))^2$$

où  $\phi(Z)$  désigne la phase de  $Z$  et  $\alpha$  est un facteur d'échelle. Il peut être arbitrairement pris égal à 1, même si la contribution de la phase au calcul de l'erreur semble faible, elle est suffisamment grande pour influencer l'algorithme d'optimisation. Faire varier  $\alpha$  n'apporte pas de changement significatif. On obtient un poids du même ordre de grandeur au module et à la phase dans le calcul d'optimisation. Les résultats s'améliorent sensiblement, et la convergence est plus rapide.

## 4.5 Raffinement des calculs

Nous diminuons le nombre de monômes si deux fréquences  $\omega_k$  sont trop proches (écart relatif 2dB). Nous additionnons alors les ordres  $n_k$  et conservons la fréquence médiane.

Nous augmentons le nombre de monômes si l'erreur finale entre le modèle paramétrique et les données est trop important. Nous ajoutons alors une fréquence supplémentaire positionnée entre les deux premières fréquences et de coefficient  $n_k$  nul.

## 5 Résultats sur données simulées

Nous avons collecté les résultats dans des tableaux. La fonction de transfert est la suivante :

$$Z(\omega) = \frac{(1 + j \frac{\omega}{0.1})^{0.2}}{(1 + j \frac{\omega}{1})^{0.3} (1 + j \frac{\omega}{100})^{0.2}}$$

### 5.1 Données non bruitées

Sur les données non bruitées, les résultats sont très bons, avec une erreur inférieure à  $10^{-7}$  sur chaque paramètre. Les résultats sont consignés dans le tableau 1. La première ligne indique les paramètres du modèle, la seconde l'estimation réalisée grâce aux calculs de dérivées, enfin la troisième ligne indique les valeurs obtenues après l'optimisation non linéaire.

### 5.2 Données bruitées

Afin de tester la robustesse des algorithmes proposés, nous avons ajouté un bruit blanc gaussien aux données simulées. Nous supposons que deux bruits s'appliquent indépendamment sur le logarithme du module et sur la phase,

TAB. 1: Sans bruit

	$\omega_1$	$n_1$	$\omega_2$	$n_2$	$\omega_3$	$n_3$
simulation	0.1	0.2	1	-0.3	100	-0.2
estimation	7.7	0.01	0.83	-0.26	86	-0.22
optimisation	0.10	0.20	1.0	-0.30	100	-0.20

et les puissances sont calculées en fonction des écarts-types de ces deux quantités. Les tableaux suivant rendent compte des valeurs étudiées.

TAB. 2: Avec un bruit blanc gaussien de 30dB

	$\omega_1$	$n_1$	$\omega_2$	$n_2$	$\omega_3$	$n_3$
simulation	0.1	0.2	1	-0.3	100	-0.2
estimation	0.27	0.13	0.52	-0.36	36	-0.7
optimisation	0.100	0.202	0.995	-0.304	102	-0.198

TAB. 3: Avec un bruit blanc gaussien de 15 dB

	$\omega_1$	$n_1$	$\omega_2$	$n_2$	$\omega_3$	$n_3$
simulation	0.1	0.2	1	-0.3	100	-0.2
estimation	0.29	0.56	0.37	-0.15	59	-0.16
optimisation	0.11	0.21	1.0	-0.31	100	-0.20

Analyse :

- Nous arrivons à identifier les paramètres avec des niveaux de bruit plus élevés que dans [6]. Cela provient probablement du calcul des dérivées, qui est plus robuste avec l'utilisation de splines cubiques, ainsi que du critère d'optimisation, qui utilise la phase en plus du module.
- Jusqu'à 15 dB, l'identification est très bonne. Avec un rapport signal sur bruit encore plus faible, par exemple 10dB (écart-type de l'erreur égal à 10% de celui des données), l'algorithme converge plus difficilement et donne des valeurs éloignées des valeurs initiales, comme le montre le tableau 4. Il est alors plus difficile d'identifier le nombre de monômes et l'optimisation donne des valeurs moins précises.

## 6 Tests sur données expérimentales et perspectives

Nous sommes en train de réaliser des tests sur des données expérimentales afin de valider l'approche et de tester la pertinence de notre modèle. Les résultats ne sont pas encore probants, mais de nouveaux jeux de données plus fiables doivent être produits ou réutilisés dans ce but.

Plusieurs étapes sont nécessaires :

- Régularisation des données : nous réalisons une moyenne glissante des spectres étudiés pour réduire le bruit.
- Seuillage du nombre de monômes en fonction de la valeur de l'ordre de dérivation associée : le bruit contribue à ajouter des zéros non significatifs à la dérivée troisième.

TAB. 4: Avec un bruit blanc gaussien de 10 dB

	$\omega_1$	$n_1$	$\omega_2$	$n_2$	$\omega_3$	$n_3$
simulation	0.1	0.2	1	-0.3	100	-0.2
estimation	0.89	0.16	0.40	-0.41	104	-0.3
optimisation	0.14	0.26	0.81	-0.35	86	-0.19

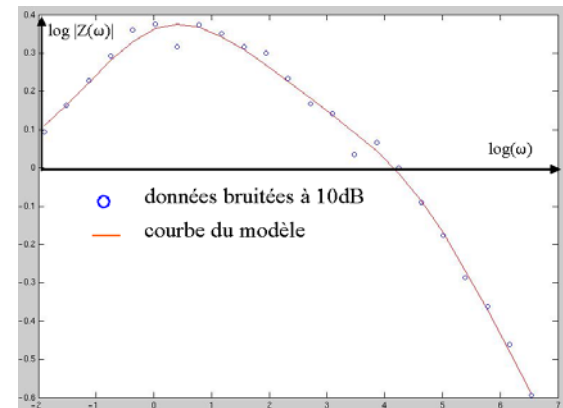


FIG. 3: Optimisation sur simulation avec un bruit de 10dB

- Identification de la concentration : cette étape reste encore à développer.

L'étape suivante de notre travail consiste à analyser les paramètres extraits afin d'en tirer des informations sur la concentration. Cette étape est nécessaire afin de savoir si le modèle étudié est pertinent pour les applications recherchées et s'il permet de bien traiter le bruit de mesure. Nous aimerions aussi déterminer si l'extraction de la concentration peut se faire de manière automatique, moyennant une phase d'apprentissage. Des méthodes graphiques permettent de corréler la concentration aux spectres pour certaines fréquences caractéristiques [2]. Il faudrait aller plus loin et proposer une analyse multiparamétrique pour calculer de manière robuste une estimation de la concentration recherchée.

## Références

- [1] CLAUDE GABRIELLI. *Mesures d'impédance. Méthodes électrochimiques, techniques de l'ingénieur, traité Analyse et caractérisation*, Supelec, 1994.
- [2] P. VADGAMA, G. FARACE. *Ultrathin Electrochemical Chemo- and Biosensors*, pp. 181-198. Springer, 2004.
- [3] JEAN-PAUL DIARD, BERNARD LE GORREC, CLAUDE MONTELLA. *Cinétique électrochimique*. Hermann, 1996.
- [4] J.D.KOZLOWSKI, C.B.BYINGTON, A.K.GARGA, M.J.WATSON, T.A.HAY. *Model-based predictive diagnostics for electrochemical energy sources*. IEEE 0-7803-6599-2/01, 2001.
- [5] A. OUSTALOUP. *La dérivation non entière, théorie, synthèse et applications*. Hermès, 1995.
- [6] Y.Y.TSAO, B.ONARAL, H.H.SUN. *An algorithm for determining global parameters of minimum-phase systems with fractional power spectra*. NASA TP-1999-209424/REV1, October 1999.
- [7] SHARAF MA, ILLMAN DL, KOWALSKI BR. *Chemometrics*. John Wiley and Sons, New York, 1986.



# Etude des parties codantes de l'ADN en fonction du sens lecture

Guillaume SICOT<sup>1</sup>, Ramesh PYNDIAH<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Dept Signal and Communication - ENST-Bretagne - TAMCIC (CNRS 2658)

Technopôle Brest-Iroise - CS 83818 - 29238 Brest Cedex 3

{guillaume.sicot} {ramesh.pyndiah}@enst-bretagne.fr

**Résumé** — Dans les séquences ADN, certaines portions dites codantes contiennent l'information nécessaire à l'élaboration des protéines. Le code génétique utilise des règles de correspondance entre les séquences de nucléotides et les acides aminés, constituants élémentaires de protéines. Ce code génétique est dit dégénéré, c'est-à-dire qu'un même acide aminé peut-être représenté par un ensemble de groupe de nucléotides ou codons. Une manière d'étudier les séquences ADN est de s'intéresser aux fréquences d'apparition des mots. Dans cet article nous étudions les fréquences d'apparition des mots suivant les différents sens de lecture de l'ADN et suivant le brin. Nous montrons en particulier que ces fréquences d'apparition des mots dans la séquence ADN présentent des propriétés qui ne peuvent être reproduite à l'aide de modèles statistiques simple.

**Abstract** — The DNA is the support of the information necessary to elaborate proteins. Rules that associate nucleotids sequences to amino-acids sequences, constitute the genetic code. This code is said to be degenerative, that means that several nucleotids sets or codons can represent the same amino-acid. A way to study nucleotids sequences consists in the study of the set of frequency of appearance of words in nucleotids sequences. In this document we will study frequencies of appearance of words in relation to the reading direction and the strand of the DNA. We show that some features appear by considering the reading direction that cannot be reproduced with simple statistical model.

## 1 Introduction

L'acide désoxyribonucléique (ADN), support de l'information génétique, se présente sous la forme d'une double hélice. Chaque brin de la double hélice est une suite de bases nucléotiques au nombre de quatre : *adénine* (A), *thymine* (T), *cytosine* (C), *guanine* (G). Ces deux brins d'ADN sont dits complémentaires, c'est-à-dire qu'un A (resp. un C) sur un brin est associé à un T (resp. G) sur l'autre brin. Chaque brin est orienté, cette orientation est définie à partir de la composition chimique de l'ADN : un côté du brin est noté 3', l'autre côté est noté 5'. De plus si un brin est orienté dans le sens 3' – 5' alors l'autre brin sera orienté dans le sens inverse, *i.e.* 5' – 3'. Ces rappels sur la molécule d'ADN sont représentés sur la figure 1.

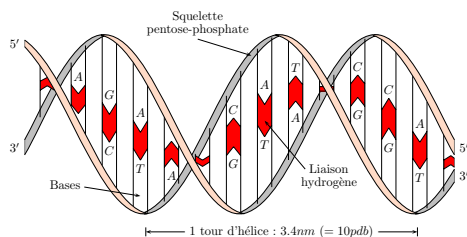


FIG. 1 – Schéma décrivant la double hélice d'ADN

L'information génétique contient l'ensemble de l'information nécessaire à la cellule pour créer les protéines, en d'autres termes elle est utilisée pour construire les sé-

quences d'acides aminés (constituant élémentaire de la protéine). On distingue deux types de séquences, les séquences dites codantes, c'est-à-dire que ces séquences seront traduites en protéines et les séquences non-codantes. Le passage de la séquence ADN codante en protéine se réalise en deux étapes : la transcription qui copie en ARN messager (ARNm) la portion codante de l'ADN puis la traduction qui élabore la protéine à partir de l'ARNm. Les règles de passage entre la séquence de bases nucléotidiques formant l'ARNm et la séquence d'acides aminés formant la protéine constituent le code génétique.

Nous présenterons dans un premier temps le code génétique. Nous montrerons que le code génétique permet de transmettre plus d'information que celle requise pour la transmission de l'information génétique. Ensuite nous présenterons les notions utilisées dans notre étude qui se focalise sur la comparaison des séquences ADN suivant le sens de lecture et le brin. Enfin nous comparerons les résultats obtenus sur des séquences réelles avec des séquences théoriques puis nous terminerons par tirer des conclusions sur ces comparaisons.

## 2 Le code génétique

Le code génétique permet de représenter les 20 acides aminés plus le signal *Stop* ; soit 21 éléments par un ensemble de mots de code. Ces mots de code sont constitués de trois bases nucléotidiques A, T, C, G encore appelés codons. Le code génétique est dit universel, dégénéré et non-

chevauchant. Il est dit dégénéré car le nombre de codons ou mots de code (64) est supérieur aux 21 éléments à coder et donc un même acide aminé peut être associé à plusieurs codons. Ainsi les codons permettent de transmettre potentiellement plus d'information par rapport aux 21 éléments de la source. Il est intéressant de constater que l'alphabet quaternaire maximise le nombre de mots de codes disponibles pour des alphabets de taille  $1 < S < 7$  sous la contrainte de minimiser la longueur  $n$  des mots de code (voir Tableau 1).

Taille de l'alphabet ( $S$ )	2	3	4	5	6	7
$n$ tel que $S^{n-1} < 21 \leq S^n$	5	3	<b>3</b>	2	2	2
Nombre de mots de code	32	27	<b>64</b>	25	36	49

TAB. 1 – Redondance pour différentes tailles d'alphabet.

Ainsi le code génétique permet de transmettre plus d'information que nécessaire pour les séquences d'acides aminés. En effet plusieurs codons, encore appelés codons synonymes, peuvent représenter un même acide aminé et l'usage des codons synonymes n'est pas uniforme et varie suivant les organismes ([2]). La distribution des fréquences d'apparition des codons synonymes est d'ailleurs relativement caractéristiques de chaque organisme ([3]).

Un moyen de caractériser le codage associé à une espèce est de s'intéresser à sa signature génomique. Cette notion peut être définie de différentes manières ([4], [5], [6]), néanmoins elles reposent toutes sur les fréquences d'apparition de mots de taille  $K$  dans la séquence ADN. Cette représentation est d'ailleurs plus à même de caractériser chaque organisme ([3]). La définition de la signature génomique ne distingue pas *a priori* les parties codantes et non-codantes de l'ADN. Les résultats obtenues sont similaires si l'on ne tient compte que des parties codantes ([3]).

C'est cette notion de signature génomique que nous allons utiliser par la suite. En effet nous allons étudier les fréquences d'apparition des mots de taille  $K$  suivant les différents sens de lecture des deux brins constituant la double hélice de l'ADN.

### 3 Signature génomique & sens de lecture

Comme nous l'avons indiqué précédemment, nous allons nous intéresser plus particulièrement aux fréquences d'apparition des mots. Nous allons les comparer suivant les quatre sens de lecture possibles. La figure 2 définit les différents sens de lecture utilisés ainsi que leur notation. Il est important de noter que le sens 1 est le sens de lecture biologique d'une partie codante (de 5' vers 3'). Dans la suite de ce document, nous noterons  $S_i$ , les séquences codantes prises dans le sens  $i$ , avec  $i \in \{1, \dots, 4\}$ .

Nous allons étudier la différence entre les fréquences d'apparition des mots suivant les quatre sens de lecture. Pour cela, considérons deux séquences  $S_i$  et  $S_j$  de bases

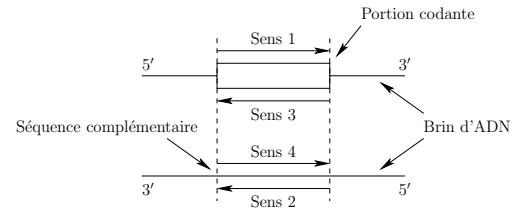


FIG. 2 – Définition des notations des sens de lecture utilisés

nucléotidiques correspondant à deux sens de lecture et soit  $\mathcal{M}_K$ , l'ensemble des mots de taille  $K$ , construit sur l'alphabet,  $\mathcal{A}$  des bases nucléotidiques, donc  $\mathcal{A} = \{A, T, C, G\}$ . Enfin pour étudier la différence de distribution des fréquences d'apparition des mots entre les séquences  $S_1$  et  $S_2$ , nous définissons trois fonctions  $d_1(S_1, S_2)$ ,  $d_2(S_1, S_2)$  et  $d_3(S_1, S_2)$  comme ci-dessous :

$$d_1^K(S_i, S_j) = \frac{1}{\text{card}(\mathcal{M}_K)} \sum_{m \in \mathcal{M}_K} \log^2 \left( \frac{f_{S_i}(m)}{f_{S_j}(m)} \right) \quad (1)$$

$$d_2^K(S_i, S_j) = \frac{1}{\text{card}(\mathcal{M}_K)} \sum_{m \in \mathcal{M}_K} \frac{|f_{S_i}(m) - f_{S_j}(m)|}{f_{S_i}(m)} \quad (2)$$

$$d_3^K(S_i, S_j) = \sum_{m \in \mathcal{M}_K} f_{S_i}(m) \log \left( \frac{f_{S_i}(m)}{f_{S_j}(m)} \right) \quad (3)$$

où  $f_S(m)$  représente la fréquence d'apparition du mot  $m$ , de taille  $K$  dans la séquence  $S$ . La fonction  $d_3$  est la divergence de Kullback-Leibler, permettant de quantifier l'écart entre deux mesures de probabilités.

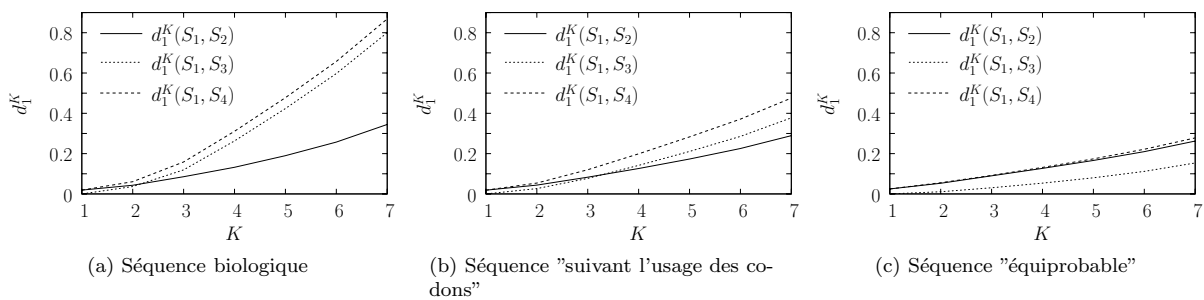
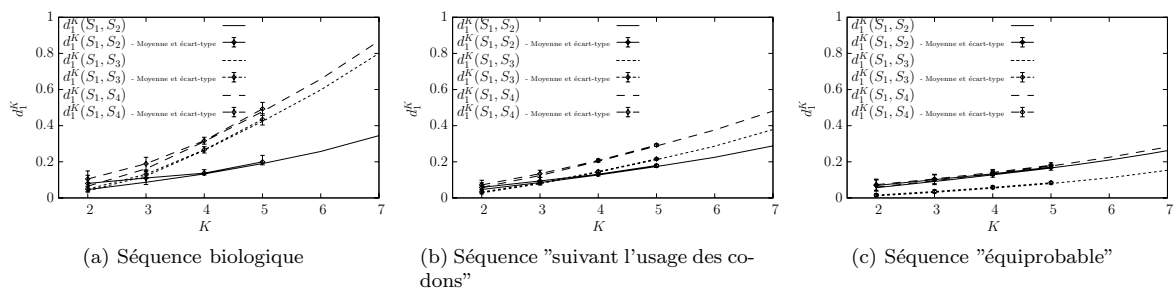
Les résultats présentés sur la figure 3(a) présentent les résultats obtenus avec les séquences codantes<sup>1</sup> de la bactérie *B. Thetaiotaomicron* VPI-5482 avec la fonction  $d_1^K$ . On observe une forte différence statistique entre les séquences codantes prises dans le sens 1 avec les séquences codantes prises dans les sens 3 et 4 (valeurs élevées de  $d_1^K$ ). Cette différence est très atténuée si l'on compare le sens 1 à le sens 2, qui est la séquence complémentaire des séquences codantes.

Nous avons ensuite cherché à reproduire ces résultats à partir de séquences codantes définies par des modèles théoriques. A partir de la séquence d'acide aminé, on détermine la séquence de codons associés suivant les hypothèses suivantes :

- la distribution des probabilités des codons synonymes pour représenter un acide aminé est équiprobable, la séquence obtenue par cette hypothèse sera qualifiée "d'équiprobable".
- la distribution des probabilités des codons est définie à partir de la distribution estimée sur la séquence biologique, cette séquence sera appelée "suivant l'usage des codons".

Il est important de remarquer que les séquences obtenues à partir de ces modèles théoriques représentent la même information génétique que la séquence biologique. Les figures 3(b) et 3(c) présentent les valeurs  $d_1^K$  pour les séquences dites "équiprobable" et "suivant l'usage des codons" pour la bactérie *B. Thetaiotaomicron* VPI-5482.

<sup>1</sup>Les séquences biologiques proviennent de la banque génomique NCBI (<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/>)

FIG. 3 – Valeur de  $d_1^K$  suivant les sens de lecture.FIG. 4 – Comparaison des valeurs de  $d_1$  obtenues sur l'ensemble des parties et sur des sous-ensembles de parties codantes.

On remarque que les résultats obtenus avec la séquence "suivant l'usage des codons" se rapproche de la séquence biologique bien que les différences statistiques sont moins marquées (figure 3(b)), et ceci alors que l'on tient compte de la statistique de l'utilisation des codons. Enfin les observations faites sur la séquence biologique n'apparaissent pas avec la séquence "équiprobable" (figure 3(c)).

Les résultats obtenus avec les fonctions  $d_2^K$  et  $d_3^K$  sont tout à fait similaires. Il est intéressant de noter que ces résultats se retrouvent sur les autres organismes testés. En effet les parties codantes de 25 organismes ont été testés, et 23 présentent cette caractéristique.

### 3.1 Pertinence des résultats

Nous avons ensuite vérifié la stationnarité des résultats ci-dessus en fonction de la position des codons dans la séquence étudiée. Pour cela, nous avons défini des fenêtres d'analyse juxtaposées sur la séquence composée de l'ensemble des parties codantes. L'objectif étant de disposer de suffisamment de fenêtres pour avoir une mesure statistique suffisante sur la dispersion des résultats tout en garantissant une mesure fiable sur chaque fenêtre d'analyse. Pour cela nous avons adopté le compromis suivant : la fenêtre d'analyse doit contenir au moins 100 représentants pour chaque mot de taille  $K$  avec une limite sur le nombre de nucléotides dans la fenêtre fixé à 200000.

Les figures 4(a), 4(b) et 4(c) présentent les résultats obtenus avec les séquences de la bactérie *B. Thetaiotaomicron* VPI-5482 à titre d'illustration. L'ensemble des séquences codantes est constitué 5606913 bases nucléotidiques et les intervalles de confiance à  $\sigma$  associés à chaque mesure sont également indiqués sur les figures. On observe une très bonne concordance entre les résultats obtenus avec les fenêtres d'analyse et ceux obtenus sur la

séquence complète ce qui indique une bonne stationnarité de la caractéristique étudiée en l'occurrence la dispersion de la fréquence d'apparition des mots de longueur  $K$  suivant les différents sens de lecture.

### 3.2 Comparaison avec un estimateur de la fréquence d'apparition des mots

Dans cette section nous allons poursuivre notre étude en comparant les résultats obtenus sur les séquences biologiques et sur les séquences obtenues à partir des modèles théoriques avec un estimateur de la fréquence d'apparition des mots de taille  $K$  dans une séquence ADN proposé. Cet estimateur s'obtient en utilisant le principe de maximisation de l'entropie ([7]), ou par le maximum de vraisemblance lorsque la séquence ADN est considérée comme un processus markovien ([10]). Soit  $S$  une séquence ADN et en notant  $m_1^K = m_1 \dots m_K$  un mot de taille  $K$ , cet estimateur  $F_S$  sur une séquence  $S$  s'exprime de la manière suivante :

$$F_S(m_1^K) = \frac{f_S(m_1^{K-1})f_S(m_2^K)}{f_S(m_2^{K-1})} \quad (4)$$

Comme nous pouvons le voir dans l'expression de cet estimateur, la fréquence d'apparition d'un mot de taille  $K$  est calculée à partir des fréquences d'apparition des mots de taille  $K-1$  et  $K-2$ . Cet estimateur est souvent utilisé pour détecter si des mots sont sous-utilisés ou au contraire sur-utilisés dans les séquences ADN ([8], [9], [10]). À l'inverse des autres séquences considérées précédemment, cet estimateur ne tient en aucun cas compte de l'information génétique. Néanmoins ces propriétés (estimateur obtenu à partir du principe de maximisation d'entropie, estimateur du maximum de vraisemblance) en font un modèle théo-

rique intéressant pour étudier plus en détail la propriété des séquences biologiques vis-à-vis des différents sens de lecture.

Considérons les fonctions  $D_i^K$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , définies comme les fonction  $d_1^K$ ,  $d_2^K$  et  $d_3^K$  où les fréquences d'apparition des mots est donné par l'estimateur défini en (4). Il apparaît que  $D_1^K$  et  $D_3^K$  possède la propriété<sup>2</sup> suivante :

$$D_i^K(S_1, S_j) - d_i^{K-1}(S_1, S_j) = d_i^{K-1}(S_1, S_j) - d_i^{K-2}(S_1, S_j) \quad (5)$$

avec  $i \in \{1, 3\}$  et  $j \in \{2, 3, 4\}$ . La figure 5 illustre les valeurs prises par  $D_1^K$  vis-à-vis de  $d_1^K$ . Etant donné la propriété (5), nous considérons un nouveau paramètre  $\epsilon_i^K(.,.) = D_i^K(.,.) - d_i^K(.,.)$  et représente l'erreur d'estimation en  $K$ . La figure 5 illustre la définition de ce paramètre sur un exemple.

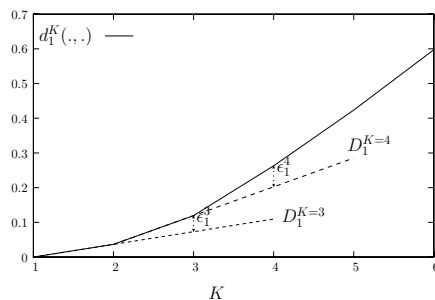


FIG. 5 – Interprétation de  $\epsilon^K$

La figure 6 présente les résultats obtenus pour  $\epsilon_1^K(S_1, S_3)$ . On remarque que quelque soit la taille des mots considérés,  $K$ , c'est pour la séquence biologique qu' $\epsilon_K(S_{dir1}, S_{dir3})$  est le plus élevé. De plus le modèle markovien utilisé dans [10] pour calculer cet estimateur pour des mots de taille  $K$  est d'ordre  $K - 2$ . Ainsi il apparaît que la propriété markovienne n'est pas suffisante pour expliquer la propriété des séquences codantes mis en avant dans ce document.

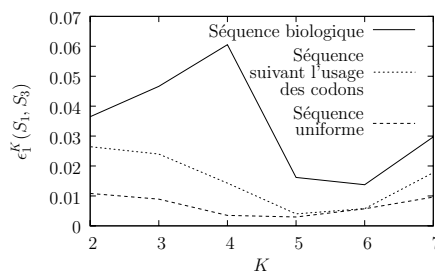


FIG. 6 –  $\epsilon_1^K(S_1, S_3)$  pour les trois séquences considérées

## 4 Conclusion

Comme nous avons pu le constater, le code génétique permet de transmettre plus d'information que nécessaire pour transmettre les séquences des acides aminés (section 2). L'étude des séquences ADN codantes montrent de

plus qu'il existe un mécanisme régissant l'association acide aminé-codon qui dépasse les notions statistiques prises en compte dans les séquences théoriques (différences observées entre la séquence biologique et la séquence "suivant l'usage des codons", section 3). De plus il apparaît que la propriété markovienne n'est pas suffisante pour expliquer la propriété des séquences codantes de l'ADN vis-à-vis du sens de lecture. Ainsi cette étude nécessite d'être poursuivie afin de comprendre les mécanismes présents dans les séquences biologiques.

## Références

- [1] R.G. Gallager, "Information theory and reliable communication", *John Wiley & sons*, 1968.
- [2] P. Sharp, T. Tuohy, K. Mosurski, *Nucleic Acids Res.* 14, 5125-5143, 1986.
- [3] R. Sandberg, C.I. Bränden, I. Ernberg, J. Cöster, "Quantifying the species-specificity in genomic signatures, synonymous codon choice, amino acid usage and G+C content", *Gene* 311, 35-42, 2003.
- [4] R. Grantham, C. Gautier, M. Gouy, R. Mercier, A. Mercier, *Nucleic Acids Res.* 8, 49-62, 1980.
- [5] S. Karlin, C. Burge, "Dinucleotide relative abundance extremes : a genomic signature", *Trends Genet.* 11, 283-290, 1995.
- [6] P.J. Deschavanne, A. Giron, J. Vilain, G. Fagot, B. Fertil, "Genomic signature : characterization and classification of species assessed by chaos game representation", *Mol. Biol. Evol.* 16, 1391-1399, 1999.
- [7] R. Hu, B. Wang, "Statistically significant strings are related to regulatory elements in promoter regions of *Saccharomyces cerevisiae*", *Physica A*, 290, 464-474, 2001.
- [8] B. Prum, F. Rodolphe, E. de Turckheim, "Finding words with unexpected frequencies in deoxyribonucleic acid sequences", *Journal of the Royal Society, Series B*, Vol. 57, No. 1, 205-220, 1995.
- [9] M.Y. Leung, G.M. Marsh, T.S. Speed, "Over- and underrepresentation of short DNA words in herpesvirus genomes", *Journal of Computational Biology*, Vol. 3, No. 3, 345-360, 1996.
- [10] G. Reinert, S. Schbath, M.S. Waterman, "Probabilistic and statistical properties of words : an overview", *Journal of Computational Biology*, Vol. 7, No. 1/2, 1-46, 2000.

<sup>2</sup>cette propriété est vérifiée théoriquement pour la fonction  $D_3^K(.,.)$ , pour la fonction  $D_1^K(.,.)$ , cette propriété n'est pas rigoureusement théoriquement mais s'avère vérifiée par simulation sur les séquences étudiées

# Caractérisation 3D d'images IRM pour l'analyse de l'ostéochondrite primitive de la hanche

P. POULETAUT<sup>1</sup>, I. CLAUDE<sup>1</sup>, R. WINZENRIETH<sup>1</sup>, M.-C. HO BA THO<sup>1</sup> et G. SEBAG<sup>2</sup>,

<sup>1</sup>UMR 6600, Université de Technologie de Compiègne, BP 20529, 60205 Compiègne Cedex

<sup>2</sup>Laboratoire d'imagerie pédiatrique Hôpital R. Debré, 75020 Paris, France

philippe.pouletaut@utc.fr, isabelle.claude@utc.fr, renaud.winzenrieth@utc.fr, hobatho@utc.fr,

guy.sebag@rdb.ap-hop-paris.fr

**Résumé** – L'interface utilisateur développée fournit des indices coxométriques pour caractériser l'état global de l'articulation de la hanche. Le logiciel 3D Slicer sert d'interface pour la visualisation 3D. La technique des ensembles de niveaux est utilisée pour segmenter chaque type de structure. Elle s'adapte à la topologie de la maladie à caractériser (fragmentation) et au type d'examen IRM (T1 ou T2). Un modèle géométrique est ensuite construit. Des indices géométriques tridimensionnels sont calculés automatiquement : excentration de la tête, volume de la tête, volume des cartilages céphalique et acétabulaire, distance tête-cotyle. Ces mesures exploitent l'ensemble des images planes IRM et quantifient les déformations liées à la maladie. Elles peuvent servir à préparer une intervention chirurgicale ou à surveiller l'évolution de la maladie.

**Abstract** – The developed user interface provides indexes of coxometry to evaluate the global state of the hip joint. The 3D Slicer software is used for visualization. We apply the level set method to segment each type of structure. This method is well suited to depict the topology of the disease (fragmentation) whatever the type of MR exam is (T1 or T2). A geometrical model is then built. Three-dimensional indexes are automatically computed : head excentration, head volume, volume of acetabular and head cartilages, distance between head and acetabulum. These measurements take into account all the plane MR acquisitions and quantify the disorders due to the disease. They can help to prepare an operation or to control the evolution of the disease.

## 1. Contexte et objectifs

L'étude porte sur une maladie de croissance chez l'enfant : l'ostéochondrite primitive de la hanche ou maladie de Legg-Calvé-Perthes (LCP). Cette maladie est une nécrose ischémique de l'épiphyse fémorale supérieure [1-3].

L'objectif de l'étude est de caractériser en 3D l'articulation de la hanche à partir d'images coronales IRM de la hanche ; on s'intéresse en particulier à segmenter les images pour caractériser la couverture acétabulaire de la hanche par rapport au noyau osseux de la tête. Les attributs géométriques calculés doivent permettre de quantifier les déformations de l'articulation et d'évaluer précisément la maladie de LCP.

## 2. Matériel et méthodes

L'analyse d'images IRM de hanche s'intègre dans un outil graphique 3D Slicer [4]. Un module spécifique a été développé pour traiter les images et calculer des attributs géométriques (FIG. 1).

La chaîne de traitement développée sur 3D Slicer se base sur la méthode d'ensembles de niveaux (level sets). Cette méthode introduite par Osher et Sethian [5] a de nombreuses applications médicales notamment en 3D [6, 7, 8]. Les travaux de Paragios [9] sur l'implémentation algorithmique ont contribué à son développement. Ici, nous avons mis au point cette méthode en intégrant les résultats de thèse obtenus par Winzenrieth [10].

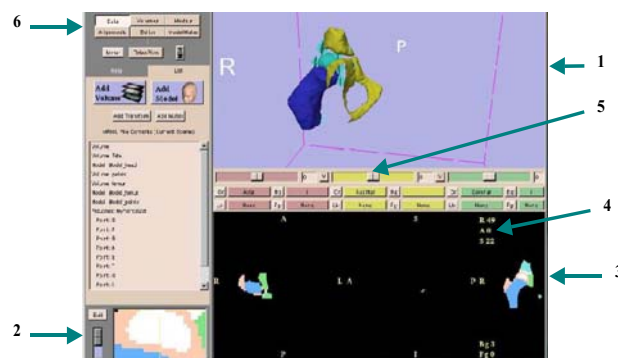


FIG. 1 : Interface 3D Slicer. 1 : fenêtre 3D ; 2 : fenêtre zoom ; 3 : plans axial, sagittal et coronal ; 4 : coordonnées point et niveau ; 5 : sélection de plan ; 6 : modules

Les traitements se décomposent selon la figure suivante (FIG. 2).

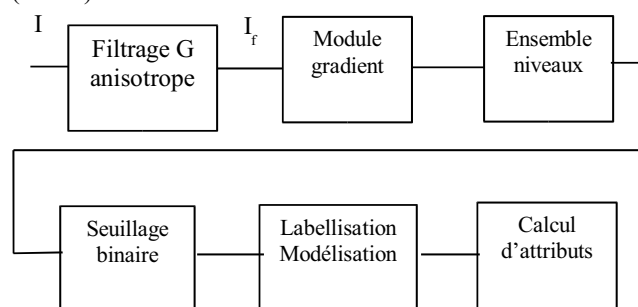


FIG. 2 : Chaîne de traitement des images IRM

Les images cliniques utilisées proviennent d'enfants ayant un seul côté atteint. Elles sont de type coronal, pondérées T1 (os sombre ; séquence FFE/SPIR, TR=45,44ms TE=4,6ms) ou T2 (os clair; séquence TSE, TR=3000ms TE=120ms), avec même résolution spatiale (0,54x0,54x2 mm<sup>3</sup>) et même codage en niveau de gris (12 bits).

Ces images doivent être prétraitées pour homogénéiser les régions : un filtrage anisotrope permet cette opération en préservant les bords des régions (lieu critique pour la maladie); de type non-linéaire, il a l'avantage de ne pas déplacer les bords et de diffuser dans des zones homogènes.

L'interface graphique permet l'interaction du clinicien pour initialiser la segmentation par ensemble de niveaux : le clinicien choisit des points germes pour des tissus à extraire (os, cartilage). L'évolution de la fonction level set  $\psi(t)$  suit l'équation différentielle [11] :

$$\frac{d\psi}{dt} = -k_{STOP}(I_f) [F_A |\nabla\psi|_1 - \varepsilon K |\nabla\psi|_2] \quad (1)$$

avec :

- une fonction d'arrêt qui utilise l'image filtrée  $I_f$  :

- avec constante  $\beta$

- $K$  : courbure locale de la fonction  $\psi(t)$  :

$$K = \text{div}\left(\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|}\right)$$

- $\varepsilon$  : constante pour régulariser la fonction level set aux endroits à forte courbure

- les indices 1 et 2 du module  $|\cdot|$  correspondent à un calcul de gradient explicité par Sethian [5 p.74]

- $F_A$  : terme d'advection qui vaut -1 pour une expansion locale ou +1 pour un rétrécissement local.

Le terme d'advection  $F_A$  est évalué à partir de l'image filtrée  $I_f$  [6, p.100] et des statistiques des régions 3x3 centrées sur les points germes choisis ( $m$  : moyenne,  $\sigma$  : écart-type) : il est calculé par comparaison de l'histogramme de  $I_f$  à une fonction gaussienne  $f$  de moyenne  $m$  et d'écart-type  $\sigma$ .

Si  $\left| \frac{I_f - m}{\sigma} \right| < k_0$ , le terme  $F_A$  vaut 1; sinon, il vaut -1.

Ici, le facteur d'élargissement  $k_0$  est pris à 1,96 (soit un niveau de confiance  $p$  de 95 %).

L'initialisation de  $\psi(t)$  est une fonction signée de distance par rapport à des sphères de rayon  $R$  centrées sur les points germes.

Pour contrôler la segmentation, nous évaluons le critère de stabilité (Courant Friedrichs Lax) [11] :

$\max (F \Delta t / \Delta x) < 1$ , où  $F$  est la fonction vitesse,  $\Delta t$  la résolution temporelle, et  $\Delta x$  la résolution spatiale.

Après extraction des régions à  $\psi$  négatives, une étape de labellisation est réalisée manuellement (FIG. 3). Des modèles géométriques sont ensuite construits pour chaque label en utilisant un algorithme de type Marching Cube [12].

À partir de ces modèles, nous pouvons calculer plusieurs attributs :

- attributs volumiques liés à une structure de l'articulation (tête, cotyle, cartilages céphalique et acétabulaire),
- calcul d'angles entre points anatomiques,
- carte de distance entre structures.

Ces attributs sont calculés pour discriminer les cas sains et pathologiques.

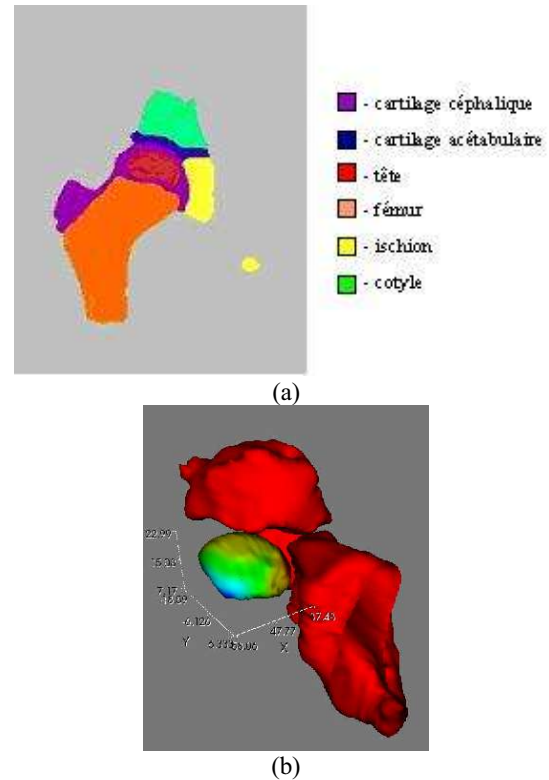


FIG. 3 : Modèle géométrique : (a) image 2D labellisée, (b) vue 3D des labels (tête, cotyle et ischion)

### 3. Résultats

Sur des images IRM, la segmentation s'adapte au type d'images analysées (T1 ou T2) et à la topologie de la maladie : le choix des points germes permet aux ensembles de niveaux de croître à partir des seules régions d'intérêt (FIG. 4).

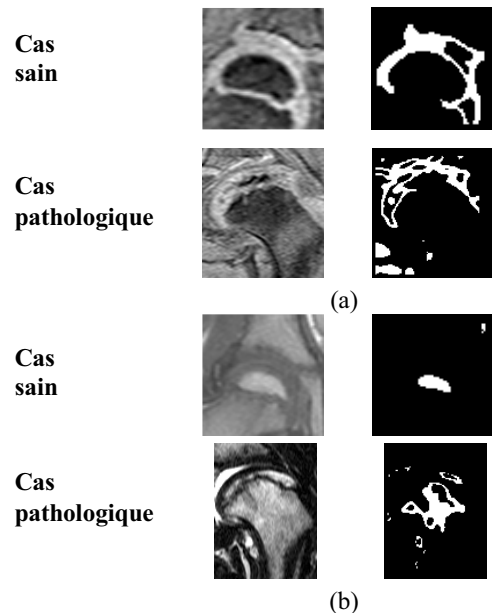


FIG. 4 : Images initiales et images segmentées pour les cas sain et pathologique, et les examens de type T1 (a) et T2 (b)

À partir des images T1, on peut extraire le cartilage céphalique entourant la tête fémorale. Les images T2 sont plus adaptées pour extraire les régions osseuses.



Pour évaluer la couverture de la tête par le cotyle, nous utilisons la segmentation obtenue sur les cartilages céphalique et acétabulaire. Nous calculons la distance 3D euclidienne entre cartilages. On peut visualiser la distance en surface couleur sur le cartilage céphalique et localiser ainsi des zones de proximité ou de contact (FIG. 5). Sur le cas de la figure 5, le côté droit est sain ; le côté gauche est atteint par la maladie de LCP avec une déformation de type coxa plana.

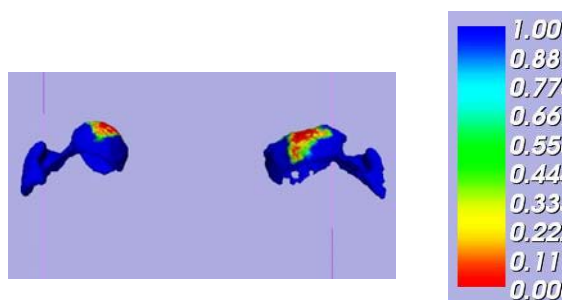


FIG. 5 : Carte de distance entre les cartilages de la tête et du cotyle en mm

Le tableau TAB.1 illustre les calculs sur un cas d'examen : on évalue ici les rayons et les centres des sphères qui ajustent les surfaces de cartilage.

TAB. 1 : Distances comparées entre les cartilages des côtés sain et pathologique

Label	Distance côté sain (mm)	Distance côté pathologique (mm)	Quotient pathologique / sain
cartilage céphalique	22,89	23,45	1,02
cartilage acétabulaire	17,23	19,47	1,13
distance entre centres de cartilage	20,74	21,04	1,03

Les surfaces sont plus importantes du côté pathologique. La couverture cartilagineuse de la tête y est plus étendue.

Les volumes des régions cartilagineuses de l'articulation des hanches sont reportés TAB.2.

TAB. 2 : Volumes comparés des cartilages céphalique et acétabulaire

Label	Volume sain (ml)	Volume pathologique (ml)	Quotient pathologique / sain
cartilage céphalique	13,20	18,64	1,41
cartilage acétabulaire	6,70	12,51	1,87

On note une hypertrophie du côté pathologique (augmentation du volume des cartilages céphalique et acétabulaire).

#### 4. Discussion et conclusion

L'outil 3D Slicer propose les principales méthodes pour visualiser en 3D mais ne permet pas de traitement sophistiqué. Le module développé permet la segmentation d'images de hanche et l'automatisation du calcul d'attributs géométriques avec l'intervention du clinicien pour choisir le type de tissu à extraire. Les indices 3D calculés prennent en compte l'ensemble des données IRM : ils sont plus précis que les indices 2D utilisés cliniquement.

La technique des ensembles de niveaux s'adapte à la topologie de la maladie à caractériser et au type d'examen IRM. Elle permet d'isoler les parties osseuses fragmentées et de déduire des index géométriques (cartes de distances, volumes) qui discriminent les cas sains et pathologiques.

#### Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier le service d'imagerie pédiatrique de l'hôpital Robert Debré pour avoir fourni les acquisitions d'examens IRM ici exploitées.

#### Références

- [1] A. Dimeglio, C. Herrisson et L. Simon, *La maladie de Legg-Perthes-Calvé*, ed. Masson, 1999.
- [2] P. Pouletaut, I. Claude, R. Winzenrieth et G. Sebag, *Geometrical evaluation from MRI of hip disorders in Legg-Calvé-Perthes disease*, Int. Congress Series 1256, Computer Assisted Radiology and Surgery, p.1308, 2003.
- [3] P. Pouletaut, I. Claude, R. Winzenrieth et G. Sebag, *Automated hip MR image analysis : geometrical evaluation of the Legg-Calvé-Perthes disease*, Computer Methods and Programs in Biomedicine, 27 : 415-424, 2005.
- [4] 3D Slicer, url : <http://www.slicer.org>

- [5] J.A. Sethian, *Level set methods and fast marching methods*, Cambridge University Press, 2nd ed., 1999.
- [6] R. Malladi, R. Kimmel, D. Adalsteinsson, G. Sapiro, V. Caselles et J. Sethian. *A geometric approach to segmentation and analysis of 3d medical images*, MMIA96, 1996.
- [7] H. Rifai, I. Bloch, S. Hutchinson, J. Wiart et L. Garnero, *Segmentation of the skull in MRI volumes using deformable model and taking the partial volume effect into account*, Medical Image Analysis, 4 : 219–233, 2000.
- [8] C. Baillard, P. Hellier et C. Barillot, *Segmentation of brain 3d mr images using level sets and dense registration*, Medical Image Analysis, 5 : 185–194, 2001.
- [9] N. Paragios, *Geodesic Active Regions and Level Set methods : Contributions and Applications in Artificial Vision*, url : <http://www.inria.fr/rrrt/tu-0636.html>, thèse, Université de Nice Sophia Antipolis, Janvier 2000.
- [10] R. Winzenrieth, *Caractérisation et modélisation de la hanche par IRM. Application à la maladie de Legg-Calvé-Perthes*, thèse UTC en génie biomédical, décembre 2004.
- [11] L. Sainsaulieu, calcul scientifique, Dunod, Paris, 2000.
- [12] W. E. Lorensen et H. E. Cline, *Marching cubes: a high resolution 3D surface construction algorithm*, ACM Siggraph, Vol. 21, 4 : 163-169, Juillet 1987.



# Caractérisation par analyse d'images de l'angiogenèse sur des coupes histologiques

Sophie LE MAIRE<sup>1</sup>, Silvia BLACHER<sup>2</sup>, Jean-Michel FOIDART<sup>2</sup>, Jacques VERLY<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Groupe de Traitement du Signal  
Université de Liège, Sart-Tilman, B28, 4000 Liège, Belgique

<sup>2</sup>Laboratoire de biologie des tumeurs et du développement  
Université de Liège, Sart-Tilman, CHU, Tour de Pathologie +3, 4000 Liège, Belgique  
Sophie.leMaire@ulg.ac.be, Silvia.Blacher@ulg.ac.be  
jmfoidart@ulg.ac.be, Jacques.Verly@ulg.ac.be

**Résumé** – De nouveaux algorithmes d'analyse d'images pour détecter et mesurer un réseau vasculaire à partir d'images de coupes histologiques sériées obtenues par microscopie optique sont présentés. Après avoir extrait les vaisseaux sanguins, les images binaires résultantes sont recalées et empilées pour reconstruire l'image du réseau vasculaire tridimensionnel. La méthode développée évalue quantitativement différents paramètres de la géométrie vasculaire à partir des images à deux et à trois dimensions. Ces mesures permettent de caractériser le processus de stimulation/inhibition de la structure vasculaire.

**Abstract** – New image processing algorithms for the detection and measurement of a vascular network from images of histological sections obtained by optical microscopy are presented. After extraction of the blood vessels, the resulting binary images are registered and stacked to reconstruct the tridimensional vascular network image. The developed method evaluates quantitatively different parameters of the vascular geometry from images at two and three dimensions. These measurements allow characterizing the process of stimulation/inhibition of the vascular structure.

## 1 Introduction

L'angiogenèse est le processus biologique par lequel de nouveaux vaisseaux sanguins se forment à partir de vaisseaux pré-existants [1]. Ce processus, illustré par la figure 1, est essentiel au développement normal des tissus en assurant l'apport d'oxygène et en éléments nutritifs et l'élimination des déchets du métabolisme cellulaire. Elle est particulièrement importante et indispensable dans divers processus physiologiques tels que le développement embryonnaire, l'implantation, la placentation [2] mais aussi pathologiques, comme dans le cas du cancer où elle est essentielle à la croissance tumorale [3] [4]. La géométrie de la nouvelle vascularisation reflète le processus de l'angiogenèse et peut changer considérablement. Le résultat du processus de l'angiogenèse est généralement caractérisé par l'aire relative occupée par les vaisseaux sanguins dans des coupes histologiques.

Le but de ce travail est de développer une méthode assistée par ordinateur évaluant quantitativement différents paramètres de la géométrie vasculaire en utilisant des coupes histologiques.

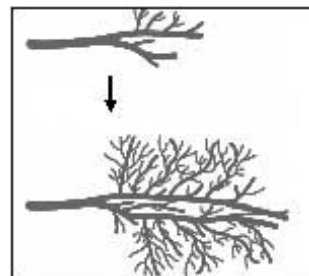


FIG. 1: angiogenèse

## 2.2 Traitement d'images

Les logiciels utilisés pour réaliser ce travail sont les suivants : (a) APHELION v.3.2 pour le traitement d'images à 2D, la reconstruction 3D et les mesures à 2D et à 3D, (b) MATLAB v.6.5. pour le recalage des images, indispensable avant d'effectuer la reconstruction 3D des réseaux vasculaires, et l'analyse statistique des résultats. L'algorithme développé pourrait aussi être implémenté sans difficulté dans tout autre logiciel contenant les outils de base d'analyse d'images.

## 2 Matériels et méthodes

### 2.1 Microscopie

Les coupes histologiques sont observées avec un microscope optique Zeiss Axiovert 25 à un grossissement 25 fois.

## 3 Résultats et discussion

### 3.1 Traitements d'images

La figure 2 donne un exemple d'image correspondant à une coupe histologique. Dans ce travail, nous nous intéressons à la détection et la quantification des vaisseaux sanguins. L'algo-

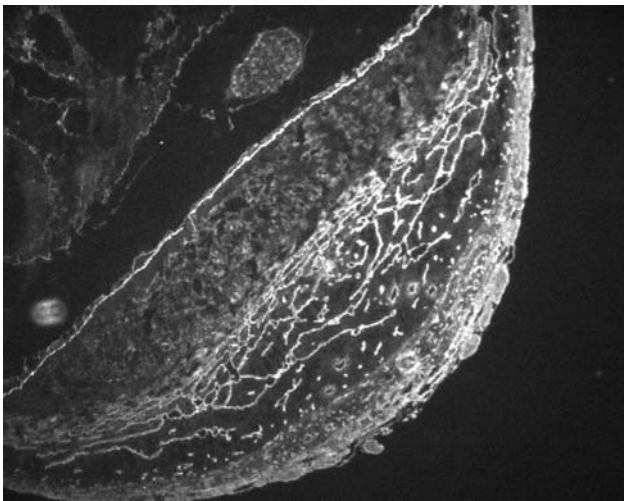


FIG. 2: exemple de coupe histologique

ritme utilisé pour extraire les vaisseaux sanguins est résumé dans l'organigramme de la figure 3. Il est important de noter que la diversité des images du point de vue de leur apparence et de leur qualité rend difficile d'établir un programme complètement automatique. Cependant, nous avons développé un programme paramétrique semi-automatique qui requiert l'interaction de l'utilisateur par l'intermédiaire de boîtes à dialogue à différentes étapes du traitement.

Une difficulté majeure dans la détection des vaisseaux sanguins à partir de coupes histologiques est la position des vaisseaux par rapport au plan de la coupe. En effet, un vaisseau perpendiculaire à ce plan sera représenté par une forme circulaire sur l'image, contrairement à un vaisseau parallèle qui apparaîtra sous une forme longiligne. L'algorithme permettant l'extraction des vaisseaux, représenté par l'organigramme de la figure 3, a été conçu en tenant compte de ce problème. Il se compose de trois étapes.

La première étape a pour objectif d'extraire la majorité des vaisseaux circulaires et longilignes. Les résultats intermédiaires successifs sont montrés dans la figure 3 (Images 1a–1b) et les différentes opérations sont détaillées ci-dessous.

- Une détection de contour est réalisée en appliquant un gradient de Sobel [5] à l'image d'entrée. L'opérateur utilisé pour calculer le gradient de Sobel extrait les pixels dont les amplitudes du gradient obtenues par les noyaux de Sobel sont au moins égales au seuil défini. Cela implique donc de choisir un seuil. Vu les grandes variations d'intensité de luminosité, l'utilisateur choisit le seuil interactivement, ce qui permet une meilleure détection des vaisseaux en fonction de l'image traitée.
- Un algorithme de seuillage automatique (figure 3, 1a) est ensuite utilisé pour maximiser le contraste global des contours [6]. Cet opérateur sélectionne automatiquement les seuils qui maximisent le contraste moyen global des contours détectés par les seuils d'un côté à l'autre de l'image. Il est appliqué récursivement, sélectionnant les seuils supplémentaires en ignorant les contours détectés par les seuils précédemment sélectionnés. Ces seuils sont alors appliqués sur l'image de départ. Cet algorithme utilise l'information locale au lieu de l'histogramme glo-

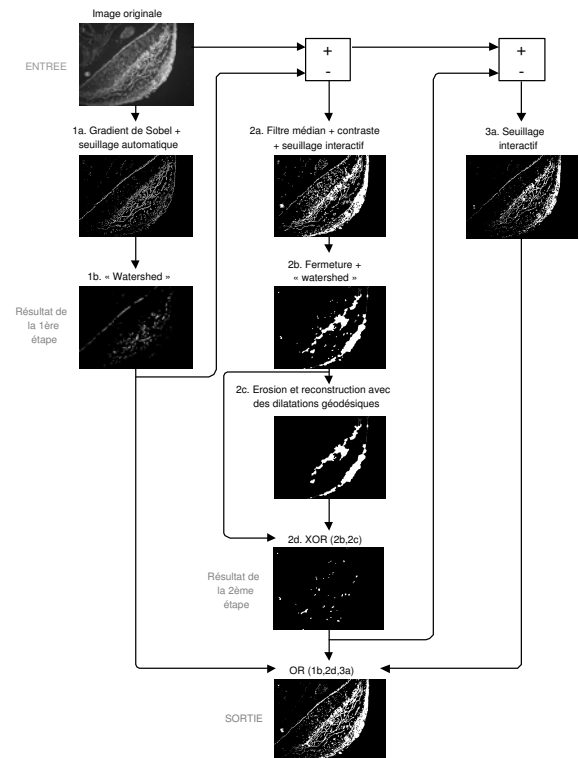


FIG. 3: organigramme du traitement pour extraire les vaisseaux sanguins

bal, ce qui implique qu'il est moins sensible au manque d'uniformité de l'éclairage du microscope.

- Pour détecter les vaisseaux comme des régions sur lesquelles nous pourrions par la suite calculer une série de mesures, l'algorithme de segmentation par ligne de partage des eaux, appelé « watershed », est appliqué [7] (figure 3, 1b).

La deuxième étape détecte les vaisseaux sanguins circulaires. Les résultats intermédiaires successifs sont montrés dans la figure 3 (Images 2a–2d) et les différentes opérations sont détaillées ci-dessous.

- Cette étape commence par une soustraction de l'image de sortie de la première étape à l'image d'entrée. L'image résultante conserve les vaisseaux qui restent à extraire.
- Un filtre médian [5] permet de réduire le bruit dans l'image. Le voisinage utilisé ici est un voisinage 5x5.
- Pour augmenter le contraste de l'image, un filtre morphologique de contraste est appliqué. Ce filtre utilise un élément structurant (disque de rayon 3).
- L'image est alors binarisée avec un seuil choisi interactivement (figure 3, 2a). Le seuillage utilisé ici est un seuillage par bornes inférieure et supérieure [8]. L'image résultante contient les vaisseaux sanguins recherchés ainsi que des régions indésirables.
- Une transformation de fermeture morphologique [9] a pour but de remplir les régions entourées de contours fermés. L'élément structurant utilisé est un disque de rayon 2.

- L'application du watershed [7] extrait les vaisseaux circulaires (figure 3, 2b).
- Les régions indésirables restantes sont extraites plus loin en reconstruisant l'image en utilisant l'image source érodée comme marqueur (figure 3, 2c). Cette opération érode l'image 2b de la figure 3 et reconstruit l'image 2c de la figure 3 sous celle-ci en effectuant des dilations géodésiques [9]. Cette opération peut être utilisée dans les mêmes situations qu'une ouverture morphologique [9], mais a l'avantage de préserver les contours vu que la reconstruction récupère ce qui a été perdu après l'érosion.
- Un OR exclusif logique (XOR) (figure 3, 2d) est alors appliqué entre les images 2b et 2c de la figure 3 pour soustraire les régions indésirables à partir de l'image résultant du « watershed ».

La troisième étape est optionnelle et peut être appliquée par l'utilisateur à travers une boîte à dialogue, si tous les vaisseaux sanguins ne sont pas détectés. Le résultat de cette étape est montré dans la figure 3 (Image 3a).

- L'image de départ est l'image d'entrée à laquelle on a soustrait les résultats des deux premières étapes (figure 3, 1b et 2d).
- Un seuillage interactif est alors utilisé. Il s'agit d'un seuillage par bornes inférieure et supérieure [8].

Finalement, nous appliquons un OR logique entre les résultats des trois étapes (figure 3, 1b, 2d et 3a). Cette image constitue l'image binaire finale sur laquelle les mesures sont réalisées.

### 3.2 Recalage d'images et reconstruction 3D

Lorsque les coupes histologiques sont réalisées en forme sériée, on peut réaliser une reconstruction 3D de l'objet étudié. Dans le cas où ces coupes ne sont pas alignées parfaitement, les images en niveaux de gris correspondantes doivent être recalées. Ce recalage des images successives est réalisé manuellement en utilisant des paires de points.

Pour recalcr une image par rapport à une autre, on sélectionne tout d'abord des points de repère par l'intermédiaire d'une interface graphique illustrée à la figure 4 où l'image de droite est l'image de référence, et celle de gauche l'image à recaler. A partir des points de repère sélectionnés, la transformation géométrique à appliquer à l'image non recalée est déduite. Parmi les différents types de transformation possibles, notre choix se limite à une transformation rigide, c'est-à-dire une transformation qui se compose uniquement de translation et de rotation. Et enfin, cette transformation est appliquée à l'image à recalcr.

Pour recalcr toutes les images d'un même échantillon, cette méthode de recalage est d'abord appliquée sur les deux premières coupes en prenant la première comme image de référence. Ensuite, lorsque la deuxième image est recalée, la méthode est à nouveau appliquée sur la deuxième et la troisième coupe en choisissant la deuxième image comme image de référence. Et ainsi de suite.

Les images en niveaux de gris étant recalées, le programme de traitement d'images (section 3.1) est appliqué sur ces images pour obtenir les images binaires correspondantes. La reconstruction tridimensionnelle peut alors être réalisée. Pour cela,

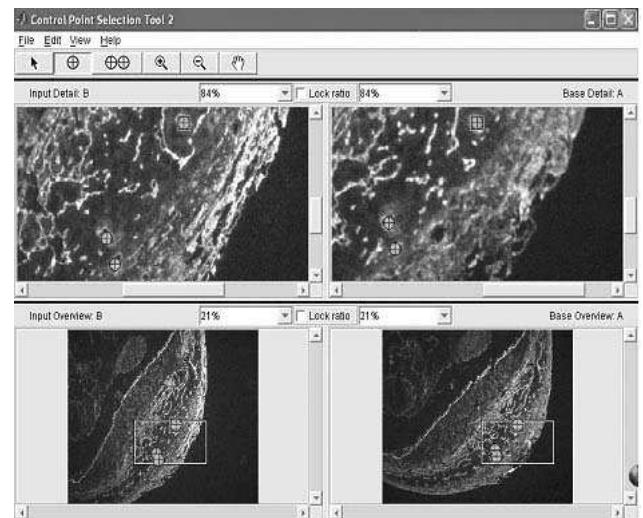


FIG. 4: interface pour sélectionner les points de repère

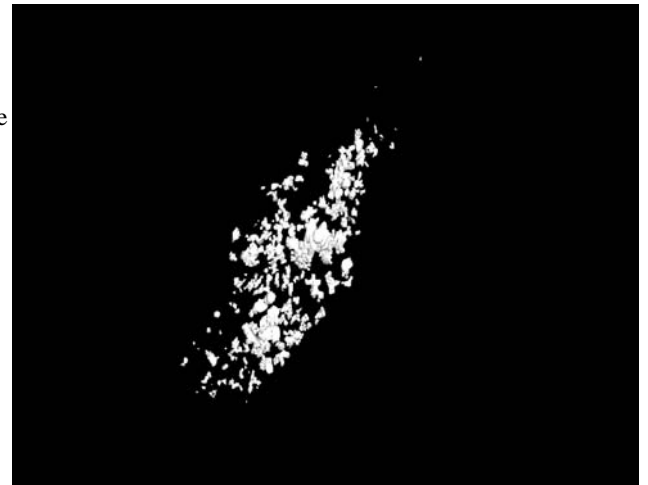


FIG. 5: exemple d'une reconstruction 3D

les images binaires des coupes histologiques successives sont empilées et le résultat est visualisé. La figure 5 présente un exemple de reconstruction 3D d'un réseau vasculaire.

### 3.3 Mesures sur l'image

À titre d'exemple, des mesures réalisées à partir des images 2D et 3D de coupes histologiques de la partie maternelle du placenta de souris déficientes ou non pour le gène PAI-1 (Inhibiteur des activateurs du plasminogène de type 1) sont présentées. Elles permettent de caractériser le processus de l'angiogenèse. Ce modèle est utilisé parce que la souris est le meilleur modèle génétique expérimental de mammifère étudié. De plus, les structures des placentas de souris et d'humain sont groupées dans la même catégorie [10].

Les mesures suivantes ont été réalisées : (a) la distribution de surface des vaisseaux, (b) la distribution de surface de Crofton des vaisseaux, (c) la distribution de volume des vaisseaux, (d) la distribution de surface spécifique des vaisseaux, où la surface spécifique est le rapport entre la surface de Crofton et le

volume, et (e) les densités surfacique et volumique des vaisseaux, notées  $\epsilon_s$  et  $\epsilon$  respectivement. Une comparaison entre les densités surfacique et volumique permet de déterminer l'homogénéité de la distribution des vaisseaux.

## Remerciements

Sophie le Maire remercie le F.R.I.A. (Fonds pour la Formation à la Recherche dans l'Industrie et dans l'Agriculture) pour lui avoir accordé une bourse de recherche PhD. Ce travail était aussi soutenu par les subventions de la Communauté française de Belgique (Actions de Recherches Concertées), la Commission des Communautés Européennes (FP5 n° QLK3-CT02-02136, FP6), le Fonds de la Recherche Scientifique Médicale, le Fonds National de la Recherche Scientifique (FNRS, Belgique), la Fédération Belge Contre le Cancer, la Coopération C.G.R.I.-F.N.R.S.-INSERM, les Fonds spéciaux de la Recherche (Université de Liège), le Centre Anticancéreux près l'Université de Liège, les FB Assurances, la Fondation Léon Frédéricq (Université of Liège), la D.G.T.R.E. de la « Région Wallonne », les Fonds d'Investissements de la Recherche Scientifique (CHU, Liège, Belgique), le Programme « Pôles d'attraction interuniversitaires (PAI) » - Politique scientifique fédérale (Bruxelles, Belgique), et la Société Roche Diagnostics (GmbH) (Penzberg, Allemagne).

## Références

- [1] J. Folkman, H. Brem. *Angiogenesis and inflammation*. In: J.I. Gallin, I.M. Goldstein, and R.S. Snyderman, eds. *Inflammation: basic principles and clinical correlates*. New York: Raven Press, 809-39, 1992.
- [2] J.C. Cross, Z. Werb, S.J. Fisher. *Implantation and the placenta: key pieces of the development puzzle*. *Science* 266 (5190): 1508-18, 1994.
- [3] J. Folkman. *Angiogenesis in cancer, vascular, rheumatoid and other disease*. *Nature Med* 1: 27-31, 1995.
- [4] J. Folkman, M. Klagsbrun. *Angiogenic factors*. *Science* 235: 442-7, 1987.
- [5] J.C. Russ. *The Image Processing Handbook*. 3rd ed., CRC Press, 1999.
- [6] R. Kholer. *A Segmentation System Based on Thresholding*. *Computer Graphics and Image Processing* 15: 319-38, 1981.
- [7] P. Soille. *Morphological image analysis: principles and applications*. Berlin: Springer, 230-9, 1999.
- [8] M. Coster, J.L. Chermant. *Précis d'analyse d'images*. Presses du CNRS, 1989.
- [9] J. Serra. *Image analysis and mathematical morphology*. Volume 1, Academic Press, 1988.
- [10] P. Georgiades, A.C. Ferguson-Smith, G.J. Burton. *Comparative development anatomy of the murine and human definitive placentae*. *Placenta* 23: 3-19, 2002.

# Réduction du bruit par pré-détection pour la localisation échographique radio fréquence de micro-outils dans les tissus biologiques

J.M. Mari<sup>1</sup>, C. Cachard<sup>1</sup>

<sup>1</sup> CREATIS, CNRS UMR 5515, INSERM U630, Université Claude Bernard Lyon 1, Villeurbanne, France.  
[mari@creatis.insa-lyon.fr](mailto:mari@creatis.insa-lyon.fr)

**Résumé** – La localisation d’une micro inclusion linéaire dans un volume de données ultrasonores est une tâche délicate pour laquelle la Projection Intégrale Parallèle (PIP) présente de nombreuses dispositions. Cependant cette transformée ne peut être calculée directement sur le volume complet de données radio fréquences (RF). La sommation des lignes ultrasonores ayant croisé l’inclusion avec celles se propageant uniquement dans les tissus biologiques étant destructrice, le calcul de la PIP ne conduit à aucun résultat cohérent. Cependant l’utilisation de l’atténuation provoquée par la micro inclusion permet de sélectionner les lignes ultrasonores ayant croisé la cible et d’écarter les autres lignes qui constituent, vis à vis de la PIP, le bruit à supprimer. Les résultats, estimés à partir de données 3D d’un foie de porc piqué par une électrode de tungstène de  $150\ \mu\text{m}$  de diamètre, et obtenus par combinaison de la méthode de sélection et de la Projection Intégrale Parallèle, montrent que le gain sur le diamètre apparent est de 7 par rapport au résultat initial obtenu par Projection Intégrale Parallèle des données redressées.

**Abstract** – The localization of a linear micro inclusion in 3D ultrasonic data is a ticklish task to which the Parallel Integral Projection offers a relevant solution. Unfortunately this transform cannot be computed on the whole 3D set of radio frequency (RF) data. Indeed the summation of the ultrasonic lines that imaged the micro inclusion and the one that imaged only the surrounding tissues is a destructive process that does not lead to a significant result. However the shadow generated by the inclusion offers a mean to suppress the ultrasonic lines that did not cross it, and that stand here as noise. Estimated on a 3D set of RF data acquired on a pig liver crossed by a tungsten electrode of  $150\ \mu\text{m}$  of diameter, the results of both combined approaches, selection through the shadow and Parallel Integral Projection show that the apparent diameter is reduce by 7, compared to the initial Parallel Integral Projection performed on data envelope.

## 1. INTRODUCTION

A mesure que les instruments chirurgicaux se miniaturisent, atteignant parfois une centaine de micromètres de diamètre seulement (micro-outils), leur visualisation au cours d’une intervention devient délicate. Des modalités doivent être développées pour permettre un suivi dynamique de ces outils de plus en plus petits [3]. Parmi ces modes d’imagerie, l’échographie présente de nombreux avantages tels que son innocuité, son affichage temps réel et son faible coût de mise en oeuvre. Elle souffre aussi, comme chaque modalité, de ses propres limites. La faible taille des diffuseurs tissulaires donnent à l’image une texture particulière appelée speckle. De plus, quand un faisceau ultrasonore rencontre une interface bien marquée, il est réfracté et le faisceau réfléchi s’écarte de la direction d’incidence à mesure que l’angle formé avec la normale à l’interface augmente. Cela implique que le signal rétrodiffusé par un micro outil varie fortement et qu’un instrument, même métallique et donc fortement échogène au sein de tissus mous, ne renvoie pas obligatoirement un signal de niveau important ni même minimal, comme illustré en Figure 1. Pour certaines configurations géométriques, des segments de la cible peuvent même être absents de l’image échographique, ce qui est particulièrement critique quand il s’agit de l’extrémité de l’outil, zone d’intérêt médicale. De plus, les dimensions apparentes de l’outil sur l’image sont bien plus importantes que celles de l’outil lui même.

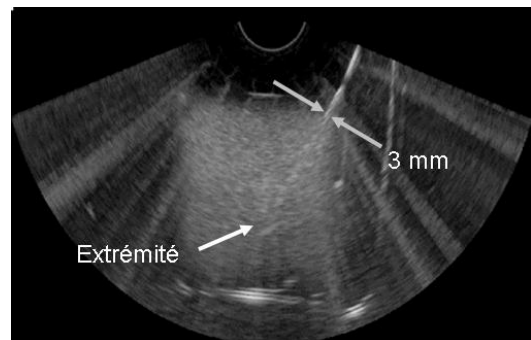


Figure 1 : Echographie mode B d’un bloc de cryogel piqué par une aiguille de tungstène de  $150\ \mu\text{m}$  de diamètre.

Ces différents problèmes rendent difficile l’imagerie de micro outils dans les tissus biologiques. Mais si la quantité d’information affichée est de faible qualité, c’est en partie imputable aux traitements effectués dans les échographes entre l’acquisition et l’affichage. En effet le signal radio fréquence (RF) issu des éléments piézo-électriques de la sonde contient toutes les informations relatives à la propagation de l’onde dans les tissus biologiques, et ce dans la bande passante de la sonde. L’image finale produite par l’échographe correspond à une version filtrée, comprimée logarithmiquement et interpolée des signaux RF initiaux. Notre équipe a montré [1][4][5] que la localisation d’une micro inclusion linéaire par Projection Intégrale Parallèle (PIP) voit la résolution sur la mesure du diamètre apparent de la cible améliorée d’un facteur 5 au minimum quand celle ci est réalisée directement sur les signaux RF redressés par rapport au résultat obtenu sur un volume constitué de coupe en mode B (Figure 2).

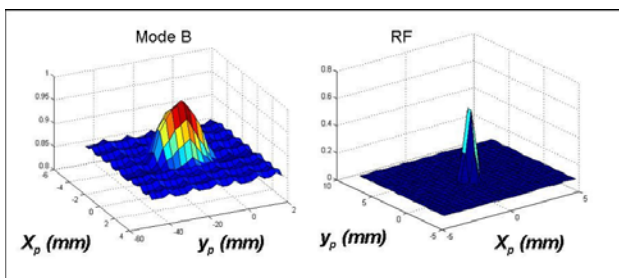


Figure 2 : Plan de maximum de cumul de la PIP sur des données 3D d'une inclusion de 1 mm de diamètre. A gauche, PIP calculée sur des images mode B (amplitude de l'enveloppe), à droite PPI calculée sur des données RF redressés. Le volume mode B a été calculé à partir des données RF pour effectuer la comparaison de résolution. Le rapport minimal des diamètres apparents à - 6 dB est de 5 et au mieux de 12. Les amplitudes en z sont sans dimensions.

Cette méthode est utilisée dans sa forme inverse en tomographie par rayons X pour calculer un volume à partir de ses projections. Dans sa version directe elle permet de repérer la position d'une inclusion linéaire dans un volume (angles d'introduction et position sur le plan de cumul perpendiculaire à l'inclusion [1][4]). De plus, son aspect global l'affranchit des problèmes de variation d'amplitude et de discontinuité du signal rétrodiffusé en privilégiant la forme linéaire de la cible. Cependant cette méthode doit s'appliquer sur une version redressée des signaux RF initiaux car la projection et la sommation des données alternatives donnent lieu à des interférences destructives. Ainsi l'information relative à la cible se trouve détruite par celle des tissus environnants. Calculer la PIP sur le signal RF redressé est ennuyeux, car ce redressement fait perdre toute notion de phase, introduit des harmoniques, et finalement « épaissit » le diamètre apparent de l'instrument. Il est donc intéressant de calculer la PIP directement sur le signal RF sans redressement. Une solution est de calculer la PIP uniquement sur les lignes RF qui ont croisé l'inclusion. Nous montrons ici que c'est possible en utilisant l'atténuation provoquée par une inclusion fortement échogène comme information de sélection.

Nous montrons dans un premier temps que la segmentation des cartes d'énergie des lignes RF permet de sélectionner les lignes pertinentes ainsi que de détecter l'extrémité de la cible, puis nous mettons en évidence que la composition des deux approches, sélection et PIP, permet d'effectuer le calcul directement sur le signal RF et se traduit par un gain en résolution angulaire et spatiale. La dernière partie conclue.

## 2. PRE SELECTION PAR L'ATTENUATION

Pour régler le problème de localisation de l'extrémité d'un outil linéaire et pour permettre à la Projection Intégrale Parallèle de discerner les échos en provenance de la cible de ceux rétrodiffusés par des structures linéaires tels que les vaisseaux sanguins ou certaines interfaces, notre équipe a montré [1] que le cône d'ombre provoqué par l'inclusion pouvait permettre de sélectionner les lignes ultrasonores susceptibles de l'avoir croisée. Si les dimensions de la cible et celles de la cellule de résolution du faisceau ultrasonores incident sont proches, elles donnent lieu à de la diffusion, mais aussi à de la réflexion spéculaire. Ce dernier mode de

réflexion fait apparaître sur l'image mode B un cône d'ombre qui témoigne d'une forte atténuation.

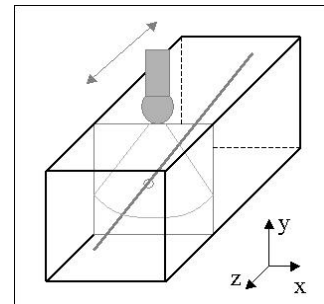


Figure 3 : Schéma d'acquisition d'un volume plan par plan par translation de la sonde sectorielle.

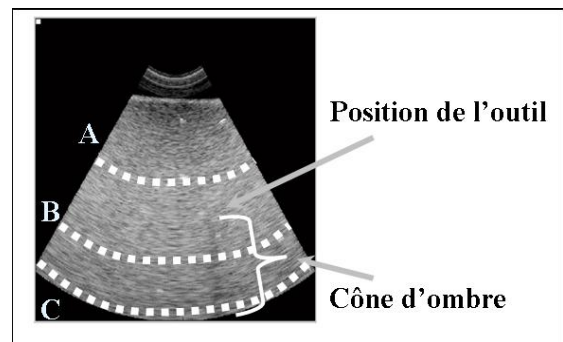


Figure 4 : Image mode B transversale (voir Figure 3) d'une aiguille de tungstène de 150µm de diamètre piquée dans du cryogel - Absence des échos provenant de la cible, mais formation d'un cône d'ombre.

Comme illustré sur la Figure 4, les échos issus de la cible peuvent être absents sur l'image affichée car ils n'ont pas été rétrodiffusés en direction de la sonde, mais une zone d'ombre apparaît toujours en aval, couramment appelée cône d'ombre. Nous nous sommes donc intéressés à l'énergie de chaque signal ultrasonore. L'énergie peut être calculée sur tout le signal ou seulement sur une partie du signal. Lorsque le calcul est effectué sur tout le signal, la valeur de l'énergie sort du niveau moyen si l'objet cible se trouve sur le parcours de l'onde ultrasonore et qu'une partie est rétrodiffusée vers la sonde. Par contre, lorsque le calcul de l'énergie est effectué seulement sur une partie du signal correspondant à des profondeurs au-delà de l'objet cible, la valeur obtenue est très faible et ceci quelque soit le phénomène de diffusion ou de réflexion mis en jeu au niveau de la cible. Pour un volume acquis selon la configuration de la Figure 3, le calcul de l'énergie de chaque signal ultrasonore a été effectué soit sur toute la durée du signal (profondeur A à C, la zone ne champ proche avant A n'est pas prise en compte), soit uniquement au-delà de la cible (profondeur B à C) telles qu'indiquées sur la Figure 4. La Figure 5 représente les cartes d'énergie calculées suivant ces deux profondeurs. Sur la Figure 5-a, la zone claire observée correspond aux signaux de forte amplitude renvoyés vers la sonde échographique par l'électrode. On constate que l'énergie présente dans les signaux mesurés indique que l'électrode s'enfonce dans les tissus jusqu'à la coupe 13. Sur la Figure 5-b, la carte d'énergie, calculée entre les profondeurs B et C, fait apparaître une tache sombre allant



jusqu'à la coupe 18. Cette tache sombre révèle que l'inclusion pénètre dans le bloc de cryogel 7 mm plus profondément que ne l'indique l'information présente dans la Figure 5-a. La recherche de l'information d'atténuation offre donc le moyen de déterminer avec plus de robustesse qu'un calcul basé sur l'énergie rétrodiffusée la présence d'une micro-inclusion fortement écho-gène. Cette méthode souffre malheureusement de deux limites.

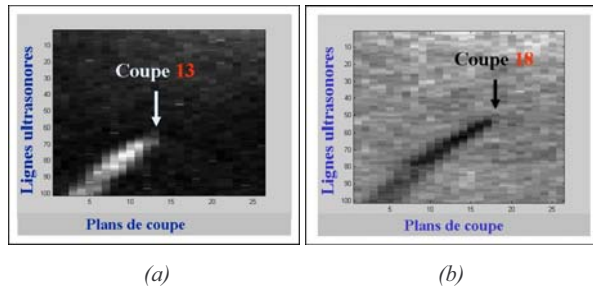


Figure 5 : Cartes d'énergie des lignes RF calculées pour les profondeurs A à C en (a) et B à C en (b) telles qu'indiquées sur la Figure 4, pour une électrode de tungstène de 150  $\mu\text{m}$  de diamètre plantée dans du cryogel à 45° par rapport aux cotés de la boîte englobante.

La première limite est de requérir un a priori sur la profondeur de la cible. La deuxième est la nécessité de faire appel à un opérateur de segmentation pour ne retenir que les lignes RF ayant croisé l'inclusion. Cependant ces limites peuvent facilement être repoussées. En effet un praticien a forcément un a priori sur la position de la zone qu'il cherche à étudier, et donc sur la profondeur approximative de l'extrémité de son outil. De plus les profondeurs B et C ne sont pas critiques, du moment qu'elles sont plus grandes que la profondeur de l'extrémité de la cible.

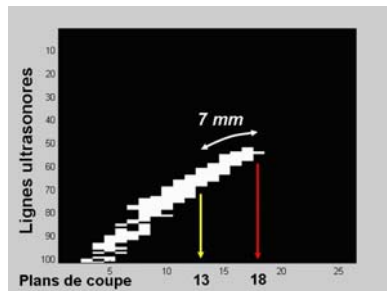


Figure 6 : Carte d'énergie de la Figure 5-b seuillée et binarisée par une sélection à mi moyenne.

Ensuite, le calcul d'une segmentation d'une carte d'énergie du type de la Figure 5-b à partir d'un critère très simple (seuillage à mi hauteur) a montré que les lignes RF ayant croisé l'inclusion sont facilement retenues. La Figure 6 donne un exemple de segmentation/binarisation, à partir de ce même critère, de la carte d'énergie représentée en Figure 5-b. On constate cependant sur la Figure 6 la présence de points noirs à l'intérieur de la région sélectionnée. L'étape de segmentation n'est donc pas critique, mais le critère actuellement mis en œuvre doit tout de même être reconsidéré. Les erreurs d'estimation entre les cartes d'énergie aux profondeurs AC et celles aux profondeurs BC ont été calculées, et ce pour différents angles d'introduction de l'aiguille dans un bloc de cryogel. Le tableau 1 montre que l'erreur de localisation de l'extrémité est nulle pour les deux

approches quand l'inclusion est perpendiculaire au faisceau ultrasonore, mais que cette erreur augmente avec l'angle d'introduction si l'estimation est faite sur les signaux présents dans les mesures, alors que cette erreur reste stable quand l'estimation est réalisée sur l'ombre laissée par la cible. Quand la cible est perpendiculaire aux faisceaux ultrasonores, elle retrodiffuse systématiquement les ultrasons vers la sonde, ce qui permet de réaliser une bonne estimation. Mais à mesure qu'on incline l'inclusion dans les tissus, son extrémité commence à disparaître des signaux mesurés, alors que son ombre persiste.

TAB. 1 : Erreurs d'estimation pour différents angles d'introduction de l'inclusion ;  $\alpha = 0^\circ$  et  $\beta = 90^\circ$  signifie que l'inclusion est perpendiculaire à l'axe de la sonde et au plan d'imagerie, respectivement.

Angles en degrés		Écart pour l'approche par l'écho (mm)	Écart pour l'approche par l'ombre (mm)
$\alpha$	$\beta$		
0	90	0	0
60	0	16	2.2
45	45	8.5	1

L'estimation par l'ombre est donc effectivement plus robuste qu'une estimation réalisée sur les échos présents. Cette méthode permet de distinguer les lignes RF imageant la cible des autres lignes, et donc de calculer la PIP sur les seules lignes sélectionnées et non sur tout le volume, les autres lignes jouant le rôle d'un bruit. Combinée à la Projection Intégrale Parallèle effectuée sur les données redressées, cette méthode de pré détection menée avec notre opérateur de segmentation élémentaire (seuillage à mi hauteur) a permis, sur des données mesurées dans du foie de porc piqué par une électrode de tungstène de 150  $\mu\text{m}$  de diamètre, de supprimer les lignes ultrasonores n'ayant imagé que les tissus, de détecter l'extrémité de l'électrode à plus de deux centimètres de sa position apparente et d'améliorer le diamètre apparent par un facteur supplémentaire de 1.4.

### 3. LOCALISATION SUR LE SIGNAL RF NON REDRESSE

La Projection Intégrale Parallèle ne peut pas être calculée sur le volume RF complet car l'aspect spéculaire des données font se compenser les valeurs contenant du signal, c'est à dire ayant croisé la cible, de celles provenant uniquement des tissus. La méthode de pré sélection, même si elle souffre encore de faux positifs dans son implémentation actuelle, offre la possibilité de supprimer les lignes ultrasonores superflues, essentiellement celles faisant face à l'inclusion ou se trouvant dans le voisinage. Le calcul de la Projection Intégrale Parallèle sur les données RF est donc maintenant possible. Le maximum de projection s'obtient alors quand les réponses ultrasonores de l'inclusion sont parfaitement alignées, un léger écart angulaire impliquant la sommation d'échantillons de signes opposés. L'aspect destructif des sommations de signaux non alignés entraîne donc lors du calcul en RF une amélioration de la sensibilité angulaire et

spatiale, le maximum étant observé pour un parfait alignement des réponses acoustiques de l'inclusion dans chaque ligne RF.

La Figure 7 illustre le résultat de calcul de la PIP sur des données redressées mesurées dans du foie de porc piqué par une micro électrode de tungstène après sélection des lignes par segmentation de la carte d'énergie sur la profondeur  $BC$ . La Figure 8 illustre le résultat sur ce même jeu de données, mais cette fois ci sélectionnées mais non redressées. On observe sur la Figure 7 la formation d'un unique pic de diamètre apparent à  $-6$  dB de  $1500 \mu\text{m}$ . Sur la Figure 8 on observe la formation de plusieurs pics positifs et négatifs. Ces pics sont le résultat de la sommation des réponses ultrasonores le long de la cible. Le plan de la Figure 8 reflète la signature acoustique de l'inclusion. Le calcul de la PIP sur les signaux RF permet donc d'obtenir des informations à l'intérieur de l'enveloppe du pic de la Figure 7. Le petit pic isolé est issu de faux positifs de la méthode de pré sélection. Le diamètre apparent, mesuré selon le même critère que précédemment, est de  $900 \mu\text{m}$  et le gain obtenu est de 2.3 par rapport à celui obtenu sur les données redressées sans pré sélection, et de 1.6 par rapport aux données redressées avec présélection.

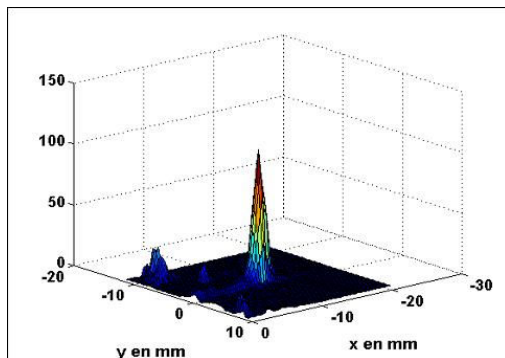


Figure 7 : Plan de maximum de projection pour des données RF redressées mesurées dans du foie de porc piqué par une micro électrode en tungstène. Les valeurs en  $z$  ne sont pas significatives.

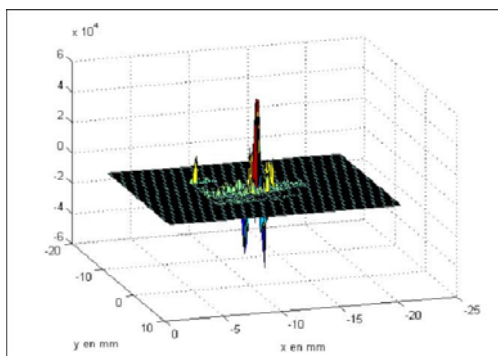


Figure 8 : Plan de maximum de projection pour des données RF mesurées dans du foie de porc piqué par une micro électrode en tungstène. Les valeurs en  $z$  ne sont pas significatives.

Cependant le diamètre apparent étant encore de  $900 \mu\text{m}$ , il est probable que le pic positif ne soit pas la position réelle de la cible et que ce soit le pic négatif de gauche, qui est du côté de l'incidence, qui reflète le mieux la position et le diamètre réel

de l'électrode, ramenant le diamètre apparent à environ  $300 \mu\text{m}$  avec un nouveau gain de 5. Comparé au diamètre apparent obtenu sur les données non triées et redressées, le gain obtenu est de 7.

#### 4. CONCLUSION

La localisation d'une micro inclusion dans des tissus mous par imagerie échographique 3D est une tâche difficile, et ce à cause de la nature singulière de la réflexion des ultrasons sur ce type de cible. La Projection Intégrale Parallèle est une méthode globale qui permet de s'affranchir d'un bon nombre de ces difficultés, mais dont l'aspect global empêche de la calculer sur des volumes radiofréquence entiers. Cependant l'atténuation provoquée par un micro outil permet de sélectionner les seules lignes ayant croisé la cible. Les résultats obtenus démontrent que la sélection par l'atténuation est plus robuste que n'importe quelle méthode utilisant les échos présents dans les mesures, ces échos disparaissant pour certaines incidences sur l'inclusion. De plus notre équipe a montré que la combinaison de la méthode de localisation par Projection Intégrale Parallèle et de la méthode de sélection par l'atténuation permet de traiter directement les données RF ultrasonores et d'améliorer la précision angulaire, spatiale, et sur le diamètre apparent. La sélection des données, et donc l'élimination des signaux issus des seuls tissus biologiques, est une opération de suppression de bruit qui permet de traiter un signal non redressé, contenant encore des informations sur le détail de l'incidence. Les estimations de diamètres apparents sur des données mesurées dans des tissus biologiques piqués d'une inclusion fortement échogène ont montré que le gain obtenu est au minimum de 1.6 si le diamètre est estimé sur le pic positif, mais que le premier pic négatif, qui représente l'incidence sur la cible, reflète mieux la véritable position de celle ci, ramenant le diamètre apparent à  $300 \mu\text{m}$ , ce qui correspond à un gain total de 7.

#### Références

- [1] J.M. Mari, *Localisation échographique d'inclusions fortement échogènes en tissus mous, application à la détection d'électrode*, Thèse de doctorat, 152 pages, Université Claude Bernard Lyon 1, France, décembre 2004.
- [2] Chu and B.K. Rutt, *Polyvinyl Alcohol Cryogel: An Ideal Phantom Material for MR Studies of Arterial Flow and Elasticity*, Magnetic Resonance in Medicine, Vol. 37, pp 314-319 (1997).
- [3] P.W. Glimcher, V.M. Ciaramitaro, M.L. Platt, H.M. Bayer, M.A. Brown, and A. Handel, *Application of neurosonography to experimental physiology*. Journal of Neuroscience Methods. 108:131-44, 2001.
- [4] M. Barva, J.M. Mari, J. Kybic, C. Cachard. *A Radial Radon Transform dedicated to Micro-object Localization from Radio Frequency Ultrasound Signal*, IEEE Ultrasonic Symposium, Montreal, Canada, august 2004.
- [5] M. Barva, JM Mari, J. Kybic, C. Cachard. *Automatic localization of curvilinear object in 3D ultrasound images*, Biomedical Engineering, Czech Technical University, Czech Republic, SPIE 2005.



# Localisation distribuée des activités épileptiques par une analyse vectorielle : Approche expérimentale multi agent

M. L. NDIAYE<sup>1</sup>, J. J. MONTAIS<sup>1</sup>, A. KINIE<sup>1</sup>, F. WENDLING<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire Traitement du Signal et de l'Image, INSERM U642 antenne de Saint-Malo, IUT de Saint Malo, 35409, France

<sup>2</sup>Laboratoire Traitement du Signal et de l'Image, INSERM U642, Université de Rennes1, 35042 Rennes, France

[malamino@hotmail.com](mailto:malamino@hotmail.com), [jean-jacques.montois@univ-rennes1.fr](mailto:jean-jacques.montois@univ-rennes1.fr), [abel.kinie@univ-rennes1.fr](mailto:abel.kinie@univ-rennes1.fr), [fabrice.wendling@univ-rennes1.fr](mailto:fabrice.wendling@univ-rennes1.fr)

**Résumé** — Cet article présente une méthode dynamique d'analyse vectorielle des signaux épileptiques basée sur une approche distribuée collaborative. L'objectif est d'identifier et de localiser les différentes activités pathologiques et/ou normales contenues dans les signaux EEG intra cérébraux (une centaine de voies en général) enregistrés chez des patients souffrant d'une épilepsie partielle sévère (épilepsie temporale). L'approche proposée associe des méthodes de traitement du signal (analyse spectrale, mesures de relations) dans un système multi agents capable de produire une représentation spatio-temporo-spectrale et de décrire le comportement du réseau épileptogène responsable des crises analysées.

**Abstract** — This paper presents a vectorial dynamical analysis method of epileptic signals based on a distributed approach. The objective is to identify and locate the various interictal and ictal epileptiform events (pathological and/or normal) contained in intracerebral EEG signals (one hundred recording channels in general) recorded in patients suffering from partial temporal lobe epilepsy. This approach associates some signal processing methods (spectral analysis, causality measurements) in a multi-agent system able to produce a spatio-temporo-spectral representation and to describe the epileptogenic network organisation of seizures.

## 1. Introduction

L'épilepsie temporale est la forme la plus fréquente des crises partielles (30 à 40% des épilepsies sont partielles). Dans 20 à 25% des épilepsies partielles, le traitement médicamenteux reste inefficace, et la résection chirurgicale peut s'avérer nécessaire [1]. Les nombreuses techniques d'imagerie fonctionnelle développées ces dernières années, sont souvent utilisées dans le diagnostic d'un bilan pré-chirurgical de ces formes d'épilepsies où des résultats encourageants sont déjà réalisés. La principale limite de ces techniques d'investigation non évanescentes est la résolution temporelle. La technique de référence reste l'enregistrement des crises au moyen d'électrodes intracérébrales. Cependant le caractère complexe de ces signaux électrophysiologiques, la méconnaissance de l'organisation anatomo-fonctionnelle et des mécanismes sous-jacents rendent l'extraction des informations contenues dans ces signaux difficile. Des études ont montré que les décharges paroxystiques sont initiées par un réseau distribué de structures anatomiques liées par des connexions anormalement facilitées [2]. Cette notion de réseau épileptogène laisse apparaître l'existence d'une coopération entre aires cérébrales dans le déclenchement des crises ; de plus l'analyse des signaux EEG par l'étude des relations [3] a mis en évidence l'existence d'interactions mutuelles mais le problème combinatoire limite cette voie. Des outils d'analyse de systèmes complexes s'avèrent nécessaires pour une meilleure compréhension de ces phénomènes coopératifs complexes.

Nous abordons dans ce travail, à travers une approche de type "systèmes informatiques distribués coopératifs" ou système multi agents (SMA), le problème de localisation des structures impliquées dans les processus épileptiques et l'étude des relations entre ces structures. Ferber [4] définit un SMA comme une société constituée de différentes entités autonomes, flexibles et indépendantes, appelées agents, qui opèrent dans un environnement et interagissent dans le but de résoudre un problème ou de réaliser une tâche individuelle ou collective. La notion d'organisation concerne l'étude des

relations inter agents et la dynamique des interactions entre ces derniers. De nombreux outils ont été utilisés pour analyser le signal EEG, le SMA apporte ses premières contributions à l'analyse des phénomènes épileptiques. L'analyse de chaque signal EEG par un agent permet une meilleure adaptabilité aux changements erratiques du signal. La structuration agent permet de résoudre le problème combinatoire des mises en relation entre signaux. Le contrôle et le suivi de l'évolution des activités des agents rendent compte de l'évolution des activités des structures cérébrales explorées. Et enfin, derrière chaque agent des méthodes classiques de traitement du signal sont optimisées grâce au contrôle optimal du SMA et à la coopération entre agents [5].

Dans le § 2 nous explicitons l'approche proposée, le § 3 présente les résultats expérimentaux et le § 4 propose une discussion et des perspectives du travail présenté.

## 2. Méthode

### 2.1 Position du problème

Nous considérons un enregistrement EEG comme un signal vectoriel  $S(t)$  enregistré sur  $N$  voies et sur un intervalle  $[0, T]$  ( $T$  = durée de l'enregistrement).  $S(t) = [s_1(t)s_2(t).....s_N(t)]$ ,  $s_i(t) \in \mathbb{R}$ .  $i = 1.....N$ ,  $t = \{0, 1/Fe, ..., T-1/Fe\}$ ,  $N$  = nombre signaux enregistrés et  $Fe$  = fréquence d'échantillonnage.

La méthode mise en œuvre associe l'analyse spectrale (énergie en sous bandes), deux méthodes de mesures de relations (la fonction de cohérence  $\gamma^2$  et le coefficient d'intercorrélation non linéaire  $h^2$ ), et des techniques comportementales SMA. Pour mettre en évidence les sous ensembles de signaux générés par des structures qui interagissent, notre approche associe à chaque signal  $s_i$  un agent de "niveau 1" (agent signal) dont le but est :

- d'identifier les changements dynamiques de rythme de  $s_i$
- d'évaluer ses liens avec les autres agents de "niveau 1"
- de "collaborer" avec les autres agents de "niveau 1".

Ainsi,  $s_i$  et  $s_j$  sont considérés corrélés (1) s'ils reflètent des activités corrélées dans la même bande de fréquence ( $\gamma^2 \geq \lambda_{\gamma^2}$ ) ou bien (2) s'ils sont liés au sens du  $h^2$  ( $h^2 \geq \lambda_{h^2}$ ).  $\lambda_{\gamma^2}$  et  $\lambda_{h^2}$  fixés par l'expérimentation représentent des seuils de satisfaction respectivement de  $\gamma^2$  et  $h^2$ .

## 2.2 Méthode proposée

La méthodologie développée repose sur 4 étapes qui sont :

- la caractérisation des signaux (2.2.1),
- le partitionnement de l'ensemble des signaux en classes de signaux présentant un contenu spectral similaire (2.2.2),
- la formation dans chaque classe de groupes de signaux liés par la cohérence (2.2.3),
- la formation de groupes de signaux liés au sens du  $h^2$  (intercorrélations non linéaires) (2.2.4)

L'approche utilise une fenêtre glissante (durée : 2s) sur laquelle sont analysés en parallèle et de façon synchrone les signaux provenant de N voies (N de l'ordre de 100). Un agent de "niveau 1" associé à chaque voie EEG, suit l'évolution comportementale du signal enregistré au cours du temps. Il effectue les traitements des étapes i, iii et iv. Un agent de "niveau 2" élabore le partitionnement, fournit à chaque agent de "niveau 1" la liste de ses accointants, et contribue dans le contrôle et la supervision des différentes étapes. L'accointance d'agents est basée sur leur appartenance au même groupe homogène selon le contenu spectral. Les agents accointants communiquent ensemble par échange de messages asynchrones c'est-à-dire que l'émetteur n'a pas besoin que le récepteur soit prêt pour recevoir un message (gain de temps). Lorsque  $t$  décrit  $[0, T]$ , dans l'étape ii l'agent "niveau 2" produit une représentation d'ensemble du partitionnement courant sous forme de nappe spatio-temporo-spectrale. Parallèlement, un agent de "niveau 3" supervise dans chaque classe l'étape iii. Enfin un agent de "niveau 4" supervise les agents de "niveau 3" et oriente les agents de "niveau 1" (par sélection) dans la dernière étape (iv). Pour compléter l'application logicielle, un "Serveur" s'occupe de la distribution des échantillons aux agents de "niveau 1" et un agent "LoadAgent" est dédié à l'ordonnancement des tâches des agents du système.

Cette description simplifiée de l'architecture correspond à un cycle (2 x 256 échantillons). La plateforme expérimentale utilisée dans ce travail est MadKit (Multi-agent development Kit)[6]. Le modèle d'un agent est basé sur trois concepts ; l'agent lui-même, son groupe, et son rôle. Dans ce modèle, une organisation est un rapport relationnel entre une collection d'agents. Le SMA s'organise en pyramide irrégulière composé d'agents réactifs.

### 2.2.1 Caractérisation des agents signaux

La caractérisation de chaque signal  $s_i(t)$  se fait en 3 phases :

- 1) Exploration du contenu spectral de  $s_i(t)$
- 2) Construction du vecteur caractéristique  $V_i$  pour  $s_i(t)$
- 3) Codage numérique de  $V_i$  en un vecteur  $B_i$  de booléens et génération du code associé  $C_i$ .

L'agent associé à chaque voie caractérise l'énergie du signal dans différentes bandes de fréquence, estimée à partir de la densité spectrale (méthode du périodogramme FFT sur 256 points avec 50% de recouvrement). Nous avons opté pour les 9 bandes classiquement utilisées dans le domaine voir Tab.1 ( $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma$ ). Un vecteur caractéristique  $V_i$  est alors produit à chaque cycle et pour chaque signal EEG

Tab.1 : bandes de fréquences

0°)	[0 - 1.9]	Hz	$\delta_1$
1°)	[1.9 - 3.4]	Hz	$\delta_2$
2°)	[3.4 - 5.4]	Hz	$\theta_1$
3°)	[5.4 - 7.4]	Hz	$\theta_2$
4°)	[7.4 - 10]	Hz	$\alpha_1$
5°)	[10 - 12.4]	Hz	$\alpha_2$
6°)	[12.4 - 18]	Hz	$\beta_1$
7°)	[18 - 24]	Hz	$\beta_2$
8°)	[24 - 128]	Hz	$\gamma$

$k_j$   $j \in [0, 8]$  énergie dans la jème bande de fréquence.

$k_T$  = énergie totale

$$b_j = \begin{cases} 1 & \text{si } k_j \geq \frac{20 \cdot k_T}{100} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$V_i = \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \\ k_6 \\ k_7 \\ k_8 \\ k_T \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{B}_i} B_i = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \end{bmatrix}$$

$$C_i = 2^0 x_{b_0} + 2^1 x_{b_1} + 2^2 x_{b_2} + 2^3 x_{b_3} + 2^4 x_{b_4} + 2^5 x_{b_5} + 2^6 x_{b_6} + 2^7 x_{b_7} + 2^8 x_{b_8}$$

Les éléments du vecteur caractéristique  $V_i$  sont d'abord convertis en éléments binaires (vecteur  $B_i$ ) et chaque  $B_i$  est converti en valeur décimale en un paramètre  $C_i$ .

### 2.2.2 Partitionnement par contenu spectral

Chaque signal est associé à une classe grâce au paramètre  $C_i$  évalué à l'étape i pour des raisons de simplification des traitements (classification). La règle d'association  $C_i$  - classe est la suivante :

- Classe NC (Non Classé) :  $C_i = 0$  - Classe  $\alpha$  :  $16 \leq C_i < 64$
- Classe  $\delta$  :  $0 < C_i < 4$  - Classe  $\beta$  :  $64 \leq C_i < 256$
- Classe  $\theta$  :  $4 \leq C_i < 16$  - Classe  $\gamma$  :  $C_i \geq 256$ .

Cette étape aboutit à une représentation de la crise sous forme d'une nappe spatio-temporo-spectrale (l'espace des capteurs, le temps et l'énergie dans chaque sous-bande sont connus).

### 2.2.3 Formation des groupes d'agents signaux liés par la fonction de cohérence $\gamma^2$

Dans cette étape nous effectuons sur les agents « classés » suivant leur contenu fréquentiel, une recherche de signaux corrélés, à partir de la fonction de cohérence définie entre  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  par l'équation ci-dessous :

$$\gamma^2(f) = \frac{\|G_{s_1 s_2}(f)\|^2}{G_{s_1 s_1}(f) \cdot G_{s_2 s_2}(f)} \quad (1)$$

$$\text{où } G_{s_1 s_2}(f) = S_1(f) \cdot S_2^*(f) \quad (2)$$

où  $S(f)$  désigne la transformée de Fourier de  $s(t)$

Cette fonction comprise entre 0 et 1, définit dans quelle partie du spectre  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  sont cohérents, c'est-à-dire dans quelles bandes de fréquences  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  sont linéairement corrélés. A partir des valeurs de la cohérence calculée sur chaque paire d'agents de "niveau 1" de chaque classe, des groupes sont formés. Les éléments d'un groupe donné liés par le contenu spectral (ii) et la valeur de cohérence (iii) ont une probabilité élevée de décrire le même comportement d'influence vis-à-vis d'autres agents de "niveau 1" appartenant à d'autres classes. Un leader est donc élu par groupe (meilleure moyenne des  $\gamma^2$ ), il représente l'ensemble des agents de "niveau 1" du groupe de la classe considérée. Cette considération réaliste, simplifie la combinatoire dans iv.

## 2.2.4 Formation de groupe d'agents signaux liés par $h^2$

Cette étape permet de chercher grâce au coefficient d'intercorrélation non linéaire  $h^2$ , les relations entre les agents de "niveau 1" sélectionnés à partir des résultats précédents c'est-à-dire, les membres de la classe NC (étape ii), les agents de "niveau 1" (singletons) non groupés dans les autres classes (étape iii), et les représentants élus dans chaque groupe (étape iii). L'intérêt des agents dans ces traitements réside en la capacité d'orienter les choix par rapport à des critères réalistes (privilégier certaines liaisons par rapport à d'autres, informations anatomiques, positionnement des électrodes...) spécifiés à l'avance. Les recherches de relations entre agents sélectionnés appartenant à des classes différentes sont privilégiées (voir discussion) par rapport aux relations entre agents sélectionnés appartenant à une même classe.

Le coefficient d'intercorrélation non linéaire est défini par :

$$h^2_{xy} = \frac{E\{Y(t) - E\{Y(t)\}\}^2 \} - E\{Y(t) - f(X(t))^2 \}}{E\{Y(t) - E\{Y(t)\}\}^2 \} \quad (3)$$

où  $f(X(t))$  est une forme de régression non linéaire mesurant la similarité entre les processus observés  $X$  et  $Y$ . On cherche ici à approcher l'espérance conditionnelle  $E\{Y/X\}$  de  $Y$  connaissant  $X$  en effectuant dans le plan défini par les deux observations une régression affine par morceaux avec contrainte de continuité de  $Y$  sur  $X$ .

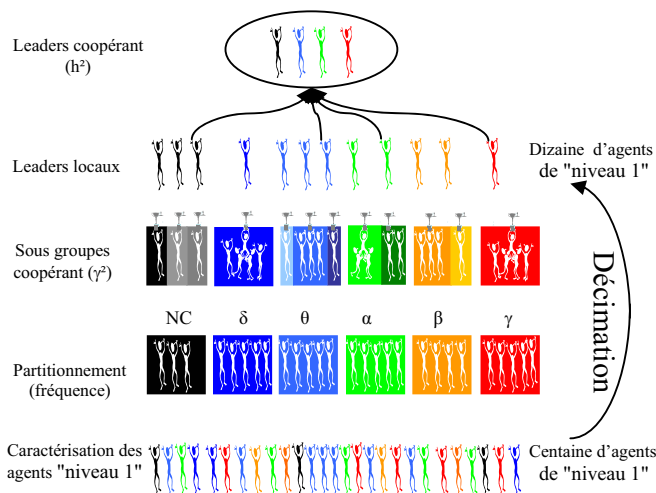


FIG.1 : Décomposition par interactions locales.

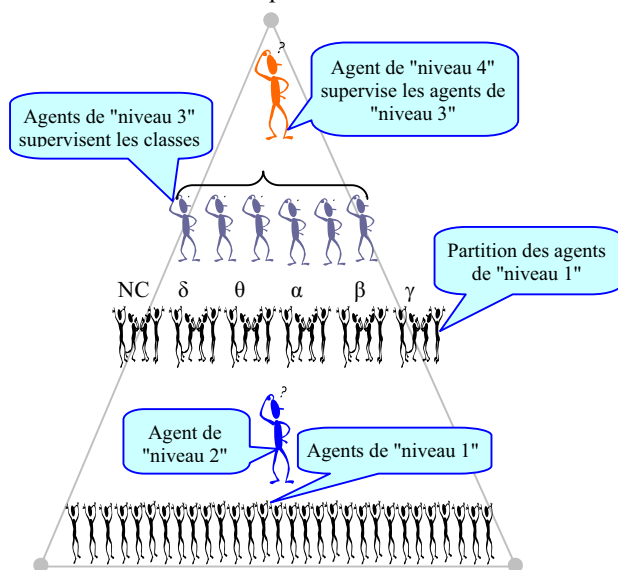


FIG.2 : La pyramide, une société d'agents qui évolue

La figure 1 présente une décomposition par interactions locales de la population agents de "niveau 1" qui optimise et résout le problème combinatoire des mises en relations. La figure 2 présente l'évolution sous forme pyramidale des agents du système.

## 3. Résultats expérimentaux

Les données analysées dans cette étude proviennent de 6 patients (P1 à P6) souffrant d'une épilepsie du lobe temporal, candidats à un traitement chirurgical. Pour chaque patient, 2 crises ont été analysées. Les plots des électrodes sont numérotés de 1 à 15 depuis l'extrémité interne jusqu'à l'extrémité externe. Chaque électrode est repérée par une lettre (A,B,C,...), affectée d'un « prime » (A',B',C'...) si elle est implantée du côté gauche du cerveau. Pour visualiser les résultats, nous avons proposé une plateforme synthétique des informations de chaque analyse de crise des 6 patients. Nous pouvons ainsi visualiser à un instant donné, et pour chaque patient, les signaux impliqués dans les processus épileptiques, ainsi qu'une représentation du partitionnement, et en définitive l'organisation de la dynamique spatio-temporelle du réseau d'interactions formé ainsi que son évolution. Les résultats que nous présentons ici s'intéressent au démarrage de la crise même si le système analyse toute la durée de l'enregistrement. Les seuils de satisfaction  $\lambda_{\gamma^2}$  et  $\lambda_{h^2}$  sont fixés à 0.5 dans toutes les expérimentations.

### 3.1 Résultats du partitionnement

Pour chaque crise analysée, les résultats du partitionnement ont permis une représentation du déroulement de la crise sous forme d'une nappe spatio-temporo-spectrale (voir figure 3). Les images produites (où l'activité dans chaque bande de fréquence est identifiée par une couleur pour chaque signal, et à chaque instant) donnent un aperçu global des crises analysées, et mettent en évidence les structures concernées par les décharges paroxystiques critiques. Les figures 3 et 4 retracent le déroulement de la crise chez les patients P1 et P2 ; chez P1, une crise relativement longue avec une zone initiatrice des crises ( $t = 120s$ ) incluant très certainement l'hippocampe antérieur (Bi), l'hippocampe postérieur (Ci) et le cortex entorhinal (TBi), et une mise en jeu massive des structures cérébrales explorées. Chez P2, la crise est plus brève et moins diffuse. Une étude comparative entre crises chez un même patient montre que même si l'analyse spectrale n'est pas suffisante pour mettre en évidence les phénomènes reproductibles observés chez le comportement du patient durant les crises, elle reste essentielle. Dans 4 sur 6 cas étudiés, les résultats du partitionnement ne sont pas superposables entre crises du même patient. Néanmoins, le partitionnement en fonction du contenu spectral reste déterminant dans la recherche de relations entre structures qui fournit des informations essentielles sur la reproductibilité des phénomènes observés (3.2).

### 3.2 Les structures cérébrales qui coopèrent

Les résultats de l'organisation des structures cérébrales qui coopèrent en début de crise montrent une certaine reproductibilité chez un patient donné. En effet, les forts couplages notés en début de crises, mettent en jeu les mêmes structures cérébrales pour différentes crises du même patient (chez les 6 patients). Les différences constatées par l'étude comparative entre crises résident essentiellement dans les

représentants élus par groupe (étape iii) et au niveau du contenu spectral des signaux issus des structures mises en jeu. Chez chacun des 6 patients, les fortes connections observées entre différentes structures (Tab.2) au début de la première crise analysée se reproduisent également au début de la deuxième. Le tableau 2 regroupe les structures concernées par ces connections (en début de crise) et les structures secondairement atteintes (structures entre parenthèses) par la propagation de la crise. La figure 5 montre un exemple de présentation des signaux corrélés pour le patient P1 à  $t = 128$ s où les structures temporales internes sont mises en évidence. Pour les 6 patients, les résultats mettent en évidence une zone épileptogène initiatrice des crises incluant les structures temporales internes (hippocampe antérieur et postérieur, cortex entorhinal et pôle tempore interne voir tableau 3) et confirment les hypothèses généralement émises sur le rôle clé de ces structures dans les épilepsies du lobe temporal.

#### 4. Discussion et perspectives

L'approche proposée permet de localiser les activités pathologiques ainsi que les sous-ensembles de structures co-activées simultanément durant les crises. Elle permet aussi de suivre l'évolution des interactions entre agents qui rend compte de l'évolution des couplages inter structures durant les crises.

L'intérêt des agents dans ces traitements réside dans la capacité à suivre l'évolution de la dynamique individuelle des "composants" du système et la possibilité d'orienter leur choix par rapport à des critères (réalistes) bien spécifiés à l'avance. Par exemple les relations non privilégiées (dernière étape) ne sont recherchées que si la combinatoire reste relativement faible. De telles informations fournies aux agents permettent de réduire la combinatoire dans les traitements en évitant des recherches présentant moins d'intérêts ou redondants d'où **l'optimisation des mises en relations entre signaux**. Le SMA agit au niveau du contrôle des processus, il évite les opérations inutiles dans le traitement tout en réduisant la complexité.

Les perspectives de ce travail portent sur une exploitation plus importante des potentialités de l'approche "multi-agents". Par exemple, les dialogues entre agents qui sont à la base des interactions peuvent tenir compte des connaissances a priori sur l'anatomie du cerveau que l'on pourra fournir aux agents. La méthodologie met ainsi l'accent sur de nouvelles règles de raisonnement imposées par la nécessité d'une approche heuristique et la connaissance a priori relative aux changements de comportements.

Tab.2 : Structures impliquées dans l'initiation des crises

Patients	Structures activées au démarrage des crises
P1	Bi, Ci, et TBi (TPi, Ai)
P2	Bi et Be (C'i, TB'i, B'e)
P3	TPe et TPi (Ae, Be)
P4	Ai, Bi, Ci, TBi et TPi
P5	B'i, C'i et TB'i (TPi)
P6	Bi, C'i, et TB'i

Tab.3 : Exploration des structures du lobe temporal interne

Electrodes	Structure interne Xi	Structure externe Xe
A	amygdale	Gyrus T2 antérieur

B	hippocampe antérieur	Gyrus T2 moyen
C	hippocampe postérieur	Gyrus T2 postérieur
TP	Pôle tempore interne	PT externe
TB	Cortex-entorhinal	Gyrus T3 postérieur

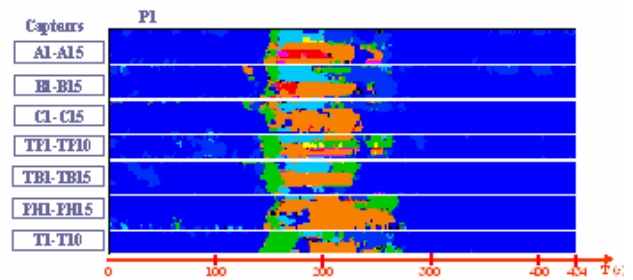


FIG.3 : Nappe spatio-temporo-spectrale chez P1.

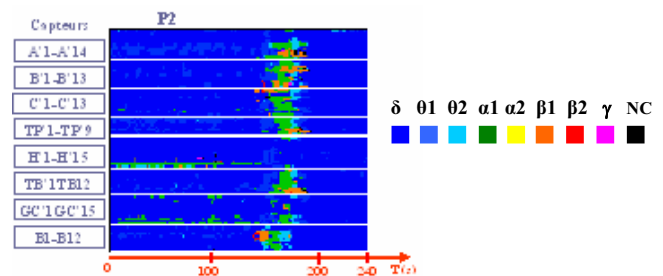


FIG.4 : Nappe spatio-temporo-spectrale chez P2.

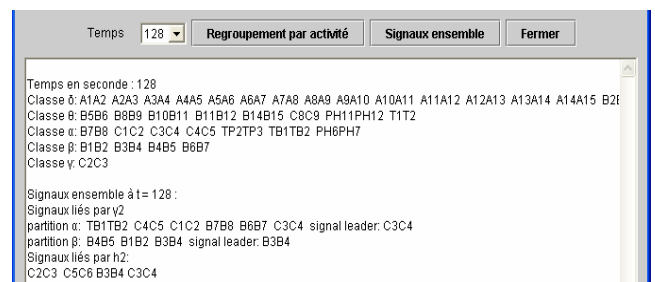


FIG.5 : Signaux qui coopèrent à  $t = 128$ s : TB1TB2 C4C5 C1C2 B7B8 B6B7 C3C4 B4B5 B1B2 B3B4 C2C3 C5C6

#### Références

- [1] I. Merlet. *Analyse dipolaire des paroxysmes inter critiques et critiques en EEG et MEG*. Epileptic Disorders. Volume 3, Numéro 3, 11-36 Décembre 2001.
- [2] P. Chauvel, P. Buser., J.M. Badier, C.Liegeois-Chauvel., P. Marquis et Bancaud *La zone épileptogène chez l'homme : représentation des événements inter critiques par cartes spatio-temporelles*. Revue Neurologique, n° 143, pp. 443-450, 1987.
- [3] F. Wendling. *Modélisation des signaux SEEG et interprétation des mesures de relations dans les crises temporales : une approche de l'étude des réseaux épileptogènes*. Epileptic Disorders Décembre 2001.
- [4] J. Ferber. *Les Systèmes Multi Agents. Vers une intelligence collective*. InterEditions, 1995.
- [5] N. Richard, M. Dojat et C. Garbay *Dynamic adaptation of cooperative agents for MRI brain scans segmentation*. AIME 2001 349-358.
- [6] O. Gutknecht et J. Ferber. *Madkit: a generic multi agent platform*. AGENTS'00 : 4th International Conference on Autonomous Agents, pp. 78-79, 2000.



# Mesure de l'excitation et de l'inhibition dans le tissu neuronal en épilepsie par identification d'un modèle dynamique non linéaire d'activité EEG

JJ BELLANGER, A. HERNANDEZ, F. WENDLING, P. FROGERAIS

Laboratoire Traitement du Signal et de L'Image, INSERM

Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France.

[jean-jacques.bellanger@univ-rennes1.fr](mailto:jean-jacques.bellanger@univ-rennes1.fr)

**Résumé** – Le problème posé est d'identifier un modèle réaliste physiologiquement pour interpréter les signaux EEG rencontrés en épilepsie. Ce modèle présente des non-linéarités, et son identification peut être envisagée suivant différentes approches. Celle qui est présentée passe par la minimisation d'une distance dans un espace de descripteurs, au moyen d'un algorithme évolutionnaire. Des résultats en simulation et sur signaux réels montrent que les valeurs identifiées permettent effectivement de dégager et d'interpréter certaines évolutions caractéristiques en début des crises.

**Abstract**–The topic of this paper is the identification of a physiologically realistic model of EEG signals recorded from epileptic patients. The identification of this non-linear model can be addressed by means of different approaches. The approach presented in this paper is based on the minimization of a distance in a space of descriptors, by means of an evolutionary algorithm. Results from simulated and real EEG signals show that the identified values allow to distinguish and to interpret certain characteristic evolutions at the initiation of EEG crises.

## 1. Introduction et contexte:

Le contexte est celui de l'interprétation physiologique objective d'anomalies constatées dans l'observation des enregistrements SEEG (stéréo-électroencéphalographiques) chez des patients épileptiques, enregistrements obtenus au moyen de capteurs invasifs (introduits chirurgicalement au sein du cerveau). Concernant l'épilepsie, il existe une littérature très étendue sur les aspects micro physiologiques et micro anatomiques au niveau d'un neurone isolé et de ses contacts avec d'autres neurones (modification des transferts ioniques, action des différents neurotransmetteurs pour l'inhibition et l'excitation,...). Cependant les modifications du signal SEEG restent très difficiles à mettre en relation, quantitativement, avec ces "paramètres microscopiques". Leur influence sur le signal d'observation (moments, densité spectrale,...) est impossible à analyser analytiquement et reste très lourde à étudier par simulation étant donné le nombre de variables microscopiques susceptibles d'intervenir. Notons enfin que les seules données in vivo qui puissent être obtenues chez l'homme le sont au moyen des capteurs invasifs avec une résolution spatiale qui ne permet pas d'observer les phénomènes au niveau cellulaire. Croiser les informations entre des modèles fins d'activités neuronales et la vérité terrain chez l'homme est donc très difficile, même si la résolution spatiale des capteurs progresse.

L'approche alternative proposée ici, pour remonter depuis le signal SEEG jusqu'aux phénomènes physiologiques, est de

faire correspondre des variables macroscopiques effectivement mesurables à des hypothèses et faits expérimentaux documentés dans la littérature en neurosciences [1] afin de pouvoir "lire" dans les signaux les modifications physiologiques sous jacentes intervenant lors des transitions d'un état normal intercritique (avant une crise) vers un état critique (la crise). Ces variables sont liées à ce qu'on appelle l'excitation et l'inhibition dans les assemblées neuronales (groupes de plusieurs milliers ou plus de neurones). Nous avons ainsi proposé d'utiliser un modèle macroscopique pour les assemblées neuronales [5], admettant comme paramètres modulables un gain d'excitation et deux gains d'inhibition (une inhibition à constante de temps lente et une inhibition à constante de temps rapide), ces trois derniers étant rassemblés dans cet ordre dans un vecteur paramètre  $P = [A, B, G] \in \mathbb{R}^{+3}$ .

De nombreuses expérimentations nous ont tout d'abord permis, en faisant varier les paramètres de ce modèle, de reproduire de manière très réaliste des activités observées dans les signaux SEEG de patients épileptiques. Nous avons ensuite entrepris d'estimer ces coefficients à partir de signaux réels, ce qui correspond à une procédure d'identification paramétrique. Le but de cette identification est de pouvoir "mesurer", dans telle ou telle région du cerveau d'un patient donné, comment évoluent (pathologiquement) l'excitation et l'inhibition quand on se place respectivement avant, au début et durant une crise d'épilepsie. La méthode présentée ici consiste à minimiser par rapport aux paramètres et au moyen d'un algorithme évolutionnaire une distance entre un vecteur

de caractéristiques spectrales estimées sur le signal observé et un vecteur analogue estimé sur des sorties du modèle.

## 2. Le modèle

La figure 1(a) schématise une population neuronale agissant sur un capteur SEEG. Y apparaissent une sous-population principale (Pyramidal cells) dont l'activité post-synaptique détermine pour l'essentiel le signal capteur, et deux autres sous-populations qui ont un effet de régulation inhibitrice respectivement lente (Peri dendritic) et rapide (Peri somatic) sur la première. Les flèches représentent des influences inhibitrices pour les pointillés et excitatrices pour les traits pleins

Le modèle de population correspond à un système d'équations différentielles comportant des termes non linéaires. Il est représenté par le synoptique de la figure 1(b). Les blocs de type  $h$  correspondent à des systèmes linéaires d'ordre 2 caractérisés par des réponses impulsionnelles représentées en figure 1(c), qui modélisent les phénomènes d'intégration post-synaptiques inhibiteurs ( $h_{FSI}, h_{SDI}$ ) et excitateurs ( $h_{EXC}$ ). Les transformations non linéaires (sigmoïdes)  $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  dans 1(b) modélisent le transfert entre potentiels post-synaptiques et fréquences moyennes des trains de potentiels d'actions axonaux, et représentent des effets non linéaires de seuillage et de saturation. Le signal d'entrée  $p(t)$  correspond à un bruit blanc gaussien non centré et modélise l'influence d'autres populations neuronales. Les paramètres  $A, B, G$  interviennent comme des gains statiques dans, respectivement, les blocs  $h_{EXC}$ ,  $h_{SDI}$ ,  $h_{FSI}$ . C'est la modification de ces paramètres par rapport à des valeurs standard (non pathologiques) qui amène le modèle à générer des activités anormales. Ceci est illustré dans la figure 2 où l'on a représenté des signaux réels et simulés (les valeurs de paramètre ayant été obtenues par la procédure d'identification décrite plus bas) ainsi que les densités spectrales estimées correspondantes, pour une activité normale chez un premier patient (patient 1) et pour une activité en tout début de crise chez un deuxième (patient 2). Il est important de souligner le réalisme des signaux obtenus au moyen d'un modèle dont les seuls a priori sont physiologiques.

## 3. Estimation des paramètres

### 3.1 Principe

#### Principe d'estimation des paramètres

L'estimation se fait à partir d'un signal observé  $X_O$  de durée  $\Delta_1$ , considéré comme stationnaire sur cette durée. Une sortie du modèle peut s'écrire  $X_S = M(P, n_r)$  où  $X_S$  est une tranche de signal de durée notée  $\Delta_2$ , simulée à partir d'une réalisation  $n_r$  du bruit d'entrée  $n$  et de la valeur  $P$  du vecteur de paramètres. On introduit une fonction erreur de modélisation  $\varepsilon(\hat{F}_O, \hat{F}_S(P, n_r)) = \|\hat{F}_O - \hat{F}_S(P, n_r)\|^2$  où  $\hat{F}_O$  et  $\hat{F}_S(P, n_r)$  sont des estimations d'un vecteur  $F = [F_1, F_2, F_3, F_4] \in \mathbb{R}^4$  de caractéristiques calculées respectivement sur le signal SEEG observé  $X_O$  et sur le signal simulé  $X_S$ , chacun étant préalablement centré et normalisé en puissance. La norme  $\|\cdot\|^2$  utilisée est euclidienne pondérée. Les 3 premières coordonnées de  $F$  correspondent à la puissance (intégrale de la densité spectrale) dans trois

sous-bandes d'intersection nulle choisies expérimentalement (en fonction des principales bandes d'intérêt dans l'analyse SEEG classique), et la 4<sup>ème</sup> à la différence entre les premier et dernier déciles afin de mettre en évidence les ondes pointues. La méthode proposée ici pour obtenir une estimation  $\hat{P}$  s'apparente à la méthode des moments [Porat 94] avec  $F$  jouant le rôle des moments. Cependant le calcul explicite de  $F(P)$  en fonction du paramètre  $P$  n'étant pas ici possible, au lieu d'estimer  $P$  par  $\hat{P} = \arg \min_P \|\hat{F}_O - F(P)\|^2$  on utilise  $\hat{P} = \arg \min_P \|\hat{F}_O - \hat{F}_S(P, n_r)\|^2$ . L'estimation  $\hat{F}_S(P, n_r)$ , fonction d'un signal simulé de durée  $\Delta_2$  limitée, comporte donc un erreur aléatoire qui dépend de  $n_r$  et décroît avec  $\Delta_2$ : pour une estimation de  $F$  consistante,  $\hat{F}_S(P, n_r)$  tendra vers  $F(P)$  quand la longueur  $\Delta_2$  du support de la simulation  $X_S = M(P, n_r)$  sera grande. Cependant cette longueur est évidemment limitée pour des raisons de durée des calculs.

#### Analyse des erreurs au voisinage de l'optimum

Supposant que le signal observé correspond effectivement à une production  $X_O = M(P_0, \xi_r)$  du modèle pour une valeur  $P_0$  du paramètre et pour une réalisation de bruit  $\xi_r$  indépendante de  $n_r$ , analysons la sensibilité de  $\hat{P}_0 = \arg \min_P \|\hat{F}_O(P_0, \xi_r) - \hat{F}_S(P, n_r)\|^2$  relativement à  $\xi_r$  et  $n_r$ . La sensibilité par rapport à  $\xi_r$  est classique du point de vue théorie de l'estimation car elle correspond à la nature aléatoire de l'observation. Celle relative à  $n_r$  est quand à elle inhérente ici à l'impossibilité de calculer exactement  $F(P)$  pour obtenir  $\hat{P} = \arg \min_P \|\hat{F}_O(P_0, \xi_r) - F(P)\|^2$ .

En décomposant l'estimation de  $F$  sous la forme  $\hat{F} = \bar{F}(P) + \delta(P, n)$  où  $\bar{F}(P) = E(\hat{F}(P, n))$  il vient  $\hat{P}_0 = \arg \min_P \|\bar{F}_O(P_0) - \bar{F}_S(P_S) + [\delta(P_0, \xi_r) - \delta(P_S, n_r)]\|^2$ . Introduisons les notations  $\lambda = \delta(P_0, \xi_r) - \delta(P_S, n_r)$  et  $f(P_S, \lambda) = \|\bar{F}_O(P_0) - \bar{F}_S(P_S) + \lambda\|^2$ . En considérant que pour  $P_S$  proche de  $P_0$  on a  $\delta(P_S, n_r) \approx \delta(P_0, n_r)$  et en notant  $\hat{P}_0 = \arg \min_{P_S} f(P_S, \lambda) = g(\lambda)$  on a clairement, dans le cas où  $\bar{F}_O(P) = \bar{F}_S(P)$ ,  $P_0 = g(0)$  et  $g(\lambda) = P_0 + \frac{\partial g}{\partial \lambda}(0)\lambda + o(\lambda)$ . Cette

condition sera réalisée si  $\hat{F}_S$  et  $\hat{F}_P$  présentent le même biais en fonction de  $P$ , ce qui sera vrai en particulier si les estimateurs ont la même structure et que, de plus,  $\Delta_1 = \Delta_2$ . Alors, puisque  $\lambda$  est centrée par construction,  $E(\hat{P}_0 - P_0) = o(\lambda)$ . Plus précisément, en développant  $f(P, \lambda)$  suivant Taylor à l'ordre 2 autour de  $(P_0, 0)$  il est possible de montrer que  $\frac{\partial g}{\partial \lambda}(0) = A = -[\frac{\partial^2 f}{\partial^2 P}(P_0, 0)]^{-1} \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial \lambda}(P_0, 0)$ . Ainsi pour  $\lambda$  petit,  $\hat{P}_0 = \arg \min_{P_S} f(P_S, \lambda) \approx P_0 + A[\delta(P_0, \xi_r) - \delta(P_0, n_r)]$ . Ceci met en évidence, pour  $\hat{P}_0 = \arg \min_P \|\hat{F}_O(P_0, \xi_r) - \hat{F}_S(P, n_r)\|^2$ , une symétrie intéressante entre l'influence de  $\delta(P_0, \xi_r)$  et celle de  $\delta(P_S, n_r)$ . Ainsi la dispersion de cet estimateur pour un signal simulé donné et un échantillon de  $K$  signaux observés est comparable à celle obtenue pour un échantillon de  $K$  signaux simulés et un signal observé donné, quand  $P$  est proche de  $P_0$ .

### 3.2 Algorithme évolutionniste d'optimisation

La procédure d'optimisation utilise un algorithme évolutionnaire [2] [3] dans lequel une population initiale  $Pop_0$  de  $N$  individus subit une suite de transformations:  $Pop_{k+1} = TR(Pop_k)$  où  $TR$  est aléatoire. La suite générée est markovienne et les populations restent de même taille après transformation. Un individu correspond à un couple  $(P, n_r)$ . La transformation  $TR$  est construite classiquement à partir d'opérateurs de pré-sélection, de croisement, de mutation et de post-sélection pour créer aléatoirement de nouvelles valeurs pour  $(P, n_r)$  avec un biais favorisant les individus performants (au sens où  $(P, n_r)$  amène à une valeur  $\varepsilon$  faible). Notons la nature doublement stochastique de l'algorithme, du fait d'une part des croisements et mutations aléatoires et, d'autre part, du bruit de modèle  $n_r$ . Différentes stratégies pour instancier  $n_r$  dans chaque individu peuvent être envisagées. Les croisements et mutations peuvent opérer sur la paire  $(P, n_r)$  ou n'opérer que sur  $P$ ,  $n_r$  étant retiré au hasard indépendamment des réalisations antérieures. Nous avons appliqué ici cette 2<sup>ème</sup> stratégie, une seule et même réalisation  $n_r$  étant utilisée, à  $k$  fixé, pour tous les individus de  $Pop_k$ .

### 4. Résultats expérimentaux.

Les résultats présentés ici ont été obtenus, pour chaque segment d'observation d'une durée  $\Delta_1$  de 5 à 10 secondes dans les conditions suivantes: le même algorithme évolutionnaire était lancé  $M$  fois ( $20 \leq M \leq 30$ ) fois,  $\Delta_2 = \Delta_1$ , taille de chaque population maintenue à  $N=150$  individus,  $k=0, \dots, 200$  (200 itérations). Etaient ainsi obtenues les populations finales  $Pop_{200}^l, l=1, \dots, M$  à l'intérieur de chacune desquelles le meilleur représentant  $P^*$  (erreur la plus faible) était présélectionné pour ensuite ne retenir que le meilleur de ces représentants,  $P^*$ . Nous avons identifié A, B et G (notés plus explicitement dans les figures 2 et 3: EXC, SDI et FSI) sur des signaux réels chez cinq patients  $P_1, \dots, P_5$  lors de la transition intercritique-critique (une crise par patient), signaux qui ont été partitionnés visuellement par un expert en segments quasi-stationnaires correspondant à quatre types de dynamiques, significatives dans le type de crises considéré ici (InterICTAL, PreICTAL, ONSET, ICTAL).

Une analyse statistique de la dispersion des  $P^*$  a d'autre part été menée dans la perspective de ce qui a été expliqué à la fin de 3.1. Des tests statistiques de comparaison de moyennes (fonctions Boxplot de matlab), dont les résultats ne sont pas présentés ici, ont pour cela été mis en œuvre. Nous avons ainsi pu montrer que les paramètres A(EXC), B(SDI), G(FSI) estimés présentent des variations significatives et reproductibles d'un patient à un autre lors des transitions intercritique-critique. Ceci est résumé dans le tableau de la figure 3. Les signes +, -, = dans les cases codent respectivement une augmentation significative, une diminution significative et pas de changement significatif, pour chacun des paramètres et dans chacune des périodes caractéristiques du signal (InterICTAL to PreICTAL, PreICTAL to ONSET, ONSET to ICTAL). La corrélation des évolutions pour différents patients y est soulignée (colonnes grisées)

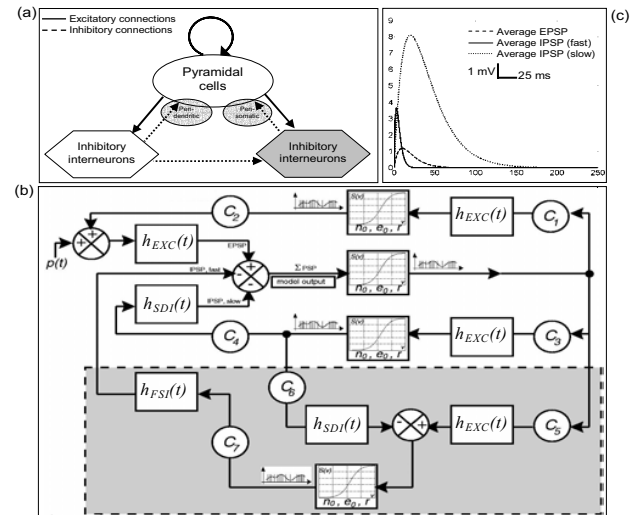


Figure 1: le modèle

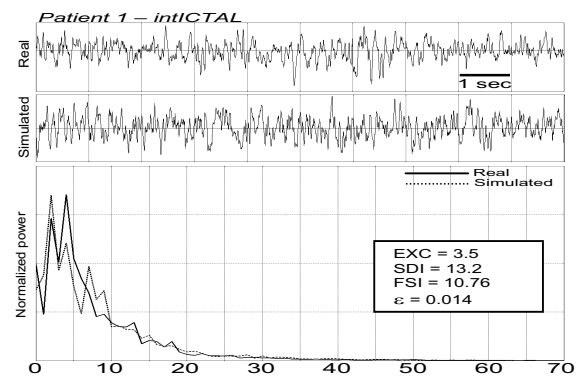


Figure 2.1: signaux et spectres, réels et simulés, patient 1

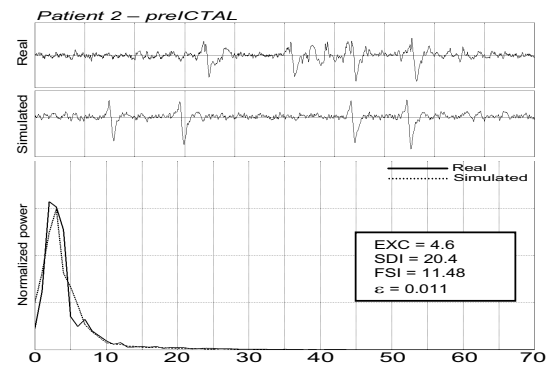


Figure 2.2: signaux et spectres, réels et simulés, patient 2

La figure 4.1 correspond à une visualisation dans  $\mathbb{R}^3$  des  $P^*$  pour quatre segments de signal réel correspondant respectivement à quatre types d'activité, intICTAL chez  $P_1$ , preICTAL chez  $P_2$ , ONSET chez  $P_3$  et ICTAL chez  $P_4$ , et à quatre nuages de points (points liés pour faciliter leur visualisation). On constate tout d'abord que ces nuages sont clairement séparables, ce qui tend à valider l'approche modélisation/identification des signaux proposée ici. Ensuite, les valeurs propres correspondant aux ellipsoïdes d'inertie,

	EXC			SDI			FSI		
	interICTAL to preICTAL	preICTAL to ONSET	ONSET to ICTAL	interICTAL to preICTAL	preICTAL to ONSET	ONSET to ICTAL	interICTAL to preICTAL	preICTAL to ONSET	ONSET to ICTAL
P1	+	+	=	+	-	+	+	=	-
P2	+	+	+	+	-	+	=	=	-
P3	=	+	+	+	-	+	=	+	-
P4	=	+	=	+	-	+	=	=	-
P5	+	+	=	+	-	+	=	=	-

Figure 3: résultats résumés sur 5 patients

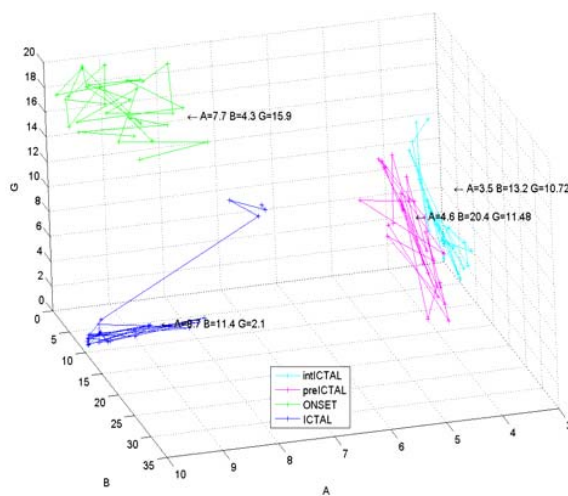


Figure 4.1: estimation sur signaux réels

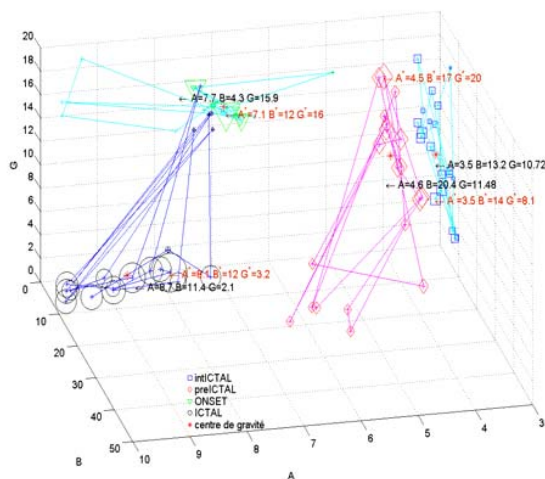


Figure 4.2: estimation sur signaux simulés

reportées dans le Tableau 1, montrent une nette tendance à une localisation des  $P^{*l}$  dans le voisinage d'un plan qui varie d'un type d'activité à un autre. Les flèches noires localisent une valeur typique de  $P^{*l} = (A, B, G)$  obtenue, pour chaque segment, par une passe supplémentaire de l'algorithme d'optimisation. Ces 4 valeurs ont été utilisées pour construire par simulation, avec le modèle, 4 signaux "pseudo-réels" qui

ont été soumis à la même analyse que les signaux réels. Les résultats correspondants sont reportés Figure 4.2, utilisant cette fois des symboles distincts pour chaque type d'activité, avec une taille fonction décroissante de l'erreur  $\|\hat{F}_0 - \hat{F}_s(P^{*l}, n^{*l})\|^2$ . On découvre ainsi, par exemple pour l'activité ICTAL, que des individus moins performants peuvent être assimilés à des outliers (petits cercles) tandis que les autres (grands cercles) sont relativement bien groupés et constituent une ébauche de domaine de confiance (en tenant compte de l'analyse proposée en fin de 3.1). Les triplets  $P^* = (A^*, B^*, G^*)$  sont proches des vraies valeurs  $P = (A, B, G)$ , sauf pour B dans ONSET et pour G dans PREICTAL car ces deux types d'inhibition s'expriment alors faiblement dans le signal d'observation.

Tableau 1: valeurs propres pour Figure 4.1

intICTAL	preICTAL	ONSET	ICTAL
0.0209	0.0073	0.0021	0.0039
0.1000	0.2001	1.3914	0.4598
2.8791	2.7925	1.6065	2.5362

Tableau 2: valeurs propres pour Figure 4.2

intICTAL	preICTAL	ONSET	ICTAL
0.0188	0.0004	0.0149	0.6080
0.9800	0.7565	1.2154	0.9215
2.0012	2.2431	1.7697	1.4705

## 5. Conclusion

Le modèle et la méthode d'identification proposés sont pertinents pour l'interprétation physiologique de signaux épileptogènes. Des erreurs d'estimation non négligeables apparaissent cependant pour l'un ou l'autre des 2 paramètres d'inhibition. Sans remettre en cause la méthode, une amélioration des descripteurs est possible. D'autres efforts sont à porter sur une réduction des temps de calcul, et l'élaboration de domaines de confiance. L'utilisation d'informations a priori ou apprises pour contrôler croisements et mutations pourrait augmenter l'efficacité de l'algorithme.

## Références

- [1] MI Banks, JA White, RA Pearce. Interactions between distinct GABA(A) circuits in hippocampus, *Neuron*, 25(2):449-57, 2000).
- [2] D Beasley, DR Bull, R. Martin. *An Overview of genetic algorithms: Part 2, Research Topics*. University Computing 15:170-181, 1993.
- [3] Z Michalewicz. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. New York: Springer-Verlag, 1994.
- CA Pena-Reyes, M Sipper. *Evolutionary computation in medicine: an overview*. *Artif Intell Med* 19(1):1-23, 2000.
- [4] B Porat, *Digital processing of random signals*, Prentice-Hall, 1994.
- [5] F Wendling, F Bartolomei, JJ Bellanger, P Chauvel. *Epileptic fast activity can be explained by a model of impaired GABAergic dendritic inhibition*, *Eur J Neurosci*. May;15(9):1499-508, 2002.



# Nouvelle approche de modélisation de milieux poreux. Application à l'os trabéculaire

G. AUFORT<sup>1</sup>, R. JENNANE<sup>1</sup>, R. HARBA<sup>1</sup>

A. GASSER<sup>2</sup>, D. SOULAT<sup>2</sup>, C. L. BENHAMOU<sup>3</sup>

<sup>1</sup>LESI, Laboratoire d'Electronique, Signaux, Images, UPRES EA 1715 et GdR ISIS du CNRS

12, rue de Blois, Université d'Orléans, France

[Gabriel.Aufort@univ-orleans.fr](mailto:Gabriel.Aufort@univ-orleans.fr)

<sup>2</sup>LMSP, Laboratoire de Mécanique des Systèmes et des Procédés, UMR CNRS 8106

<sup>3</sup>Equipe INSERM U658, Centre Hospitalier Régional d'Orléans, France

**Résumé** – Dans de nombreux domaines tels que la science des matériaux ou l'imagerie médicale, il est intéressant d'évaluer les propriétés mécaniques d'une structure. Pour ce faire, l'analyse par éléments finis est souvent utilisée. Cependant, son application à des milieux poreux complexes est limitée, car le nombre d'éléments nécessaires pour représenter la structure interne est très grand. Dans cette communication, nous proposons une nouvelle approche par éléments finis qui prend en compte la topologie de la structure étudiée. Pour cela, nous implémentons et améliorons une technique récente basée sur le squelette 3D, permettant de caractériser des milieux poreux complexes. Chaque travée de la structure interne peut alors être représentée par une chaîne de poutres rectilignes auxquelles sont attribuées les propriétés de l'arche. Cette approche permet de réduire considérablement le temps de calcul nécessaire à la simulation mécanique par éléments finis tout en présentant une bonne adéquation avec une technique de référence. Nous avons évalué cette technique sur des vecteurs de test, puis appliqué notre méthode sur des échantillons d'os trabéculaire afin d'en quantifier précisément l'élasticité. Ce nouveau procédé de modélisation donne de meilleurs résultats de rigidité par rapport aux techniques à éléments poutre existantes sur des vecteurs de test. Cette tendance se confirme également lors de son application à l'étude de la microarchitecture de l'os trabéculaire.

**Abstract** – It is very interesting in many fields like material science or medical imaging to evaluate the mechanical properties of a structure. Finite elements analysis is often used for this purpose. However, its application to complex porous media like trabecular bone is limited because of the huge amount of elements that are needed to accurately represent the structure. In this communication, we propose a new finite elements approach which takes in account the topology of the studied structure. For that we implement and improve a recent technique based on the 3D skeleton, which allows characterizing complex porous media. Each trabeculae of the internal structure can then be modelled as a rectilinear-beams-chain with the properties of the arch. This approach significantly reduces the finite elements mechanical simulation's computing time while preserving the accuracy of the results, according to a reference model. We evaluated this technique on test vectors, then applied our method on trabecular bone samples in order to precisely quantify their elasticity. This new model gives better stiffness results on test vectors compared to existing beam-elements techniques. This trend is confirmed when the model is used for trabecular bone microarchitecture analysis.

## 1. Introduction

Les milieux poreux complexes de type éponge formés d'arches ou de travées ont des caractéristiques de rigidité particulières qui ont toujours suscité l'intérêt des chercheurs. Les propriétés mécaniques de ce type de matériaux sont déterminées non seulement par leur porosité, mais aussi par l'arrangement des travées dans l'espace. Evaluer numériquement la rigidité de milieux poreux est un challenge en termes de ressources et de temps de calcul, qui n'est envisageable de nos jours qu'à l'aide des éléments finis [1]. Cependant cette estimation reste difficile car elle requiert des images à haute résolution et un grand nombre d'éléments

nécessaires pour une représentation fidèle du matériau étudié. En effet, la simulation mécanique par éléments finis est un outil qui nécessite des modèles très denses en éléments pour atteindre une précision satisfaisante.

Dans [2], une technique basée sur le squelette 3D permet de segmenter l'architecture interne du matériau sous forme de travées élémentaires et de modéliser cette structure par un réseau de poutres rectilignes. Cette nouvelle approche permet de générer un nouveau modèle pour les éléments finis qui nécessite moins d'éléments et donc moins de ressources. Ce modèle s'est avéré non représentatif des propriétés mécaniques de la structure car il ne tient pas compte de la forme de chaque travée.

Nous avons développé une nouvelle technique elle aussi basée sur le squelette 3D qui permet grâce à un procédé original de découpage géométrique de créer des modèles simplifiés composés d'éléments de type poutre et qui tiennent compte de la courbure des travées. Nous exposons dans ce papier notre nouvelle méthode et validons ses résultats à l'aide de vecteurs de test. Enfin, nous présentons son application à l'analyse de la microarchitecture osseuse.

## 2. Prétraitements

### 2.1 Squelettisation 3D

Les travaux présentés dans cette communication ont été menés sur des volumes numériques représentant des milieux poreux biphasiques. Toutes les images 3D utilisées ici sont donc des images binaires, où les voxels blancs (valeur 255) correspondent à la phase solide, et les voxels noirs (valeur 0) à l'arrière plan, soit la phase de pore. Les voxels sont assimilés à des cubes régulièrement disposés sur un maillage isotrope, ce qui permet de traiter les données de manière géométrique, en parlant de sommets, de faces et d'arêtes. Afin de ne conserver qu'une seule composante solide connexe dans l'échantillon numérique, une version 3D de l'algorithme de Hoshen-Kopelman [3] permet de ne conserver qu'un seul amas solide de voxels 26-connexes (qui ont au moins un sommet en commun). Ensuite, nous procédons au calcul du squelette 3D filaire. Pour cela, nous avons implémenté un algorithme de squelettisation par amincissement [4], car ce type de technique garantit la conservation de la topologie de l'objet, notamment sa connectivité. La préservation de la connectivité de la microarchitecture du matériau analysé est essentielle car elle est fortement liée à sa rigidité. La figure 1 montre un exemple de squelette filaire obtenu avec cette technique pour le vecteur de test n°1.

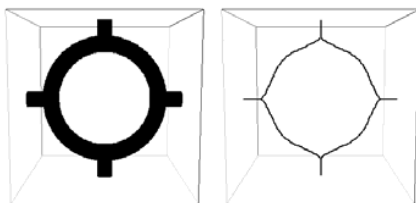


FIG. 1 : Vecteur de test n°1 de taille  $64^3$  et son squelette filaire

### 2.2 Analyse de la structure 3D

L'analyse du squelette 3D est réalisée à l'aide d'un procédé de classification et de labellisation des arches de la structure [5]. La classification des voxels du squelette consiste à marquer chacun des éléments qui le composent en fonction de son rôle dans la structure du volume (voxel isolé, voxel appartenant à une branche, voxel de type nœud ou voxel de terminaison). L'étape de labellisation des arches consiste à affecter un identifiant unique à chacun des chemins 26-connexes du squelette 3D. La structure de l'objet étudié se

décrit alors sous la forme d'un réseau de chemins individualisés interconnectés comme illustré en figure 2.

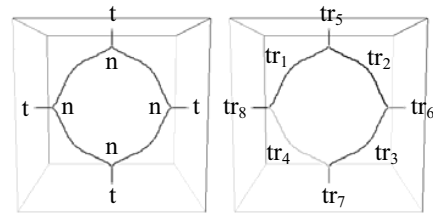


FIG. 2 : Classification et labellisation du vecteur de test n°1 (n : nœud, t : terminaison,  $tr_n$  : travée)

Le squelette labellisé ainsi obtenu peut être utilisé afin de segmenter le volume original par croissance de régions. La figure 3 montre le résultat de la segmentation assistée par le squelette sur le vecteur de test n°1. L'échantillon segmenté est utilisé pour mesurer les paramètres de chaque arche, tels que son volume, sa longueur ou sa section moyenne. Il est également possible de déduire à partir de ce réseau interconnecté des paramètres tels que le nombre d'arches, le nombre de nœuds ou encore la densité de connectivité (caractéristique d'Euler-Poincaré).

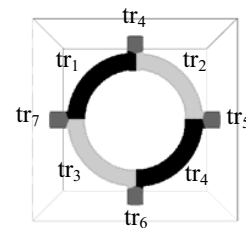


FIG. 3 : Vecteur de test n°1 segmenté (différentes nuances de gris) à l'aide de son squelette labellisé ( $tr_n$  : travée)

## 3. Modélisation par éléments finis

Les Eléments Finis (EF) [1] sont abondamment utilisés dans le domaine des matériaux et de la mécanique comme outil puissant de simulation. Dans cette section, nous décrivons les différents modèles utilisés pour la simulation de compression mécanique sur des milieux poreux. La technique de référence dans ce domaine est la conversion directe de voxel à élément, qui consiste à transformer les voxels de la structure 3D étudiée en briques élémentaires à 8 nœuds. La seconde technique, plus récente, consiste à remplacer chaque travée de la structure par une poutre rectiligne [2]. Enfin, nous présentons notre nouvelle méthode et expliquons le principe du découpage géométrique. Pour chacune de ces trois méthodes, nous avons généré les modèles au format d'entrée du logiciel d'analyse par éléments finis *Abaqus* [6].

### 3.1 Conversion voxel à élément

La conversion de voxel à élément est le procédé le plus simple que l'on puisse utiliser pour transformer un objet 3D discret en un modèle d'éléments finis. C'est également la

technique la plus précise puisqu'il n'y a aucune perte d'information au niveau géométrique. Cependant, pour atteindre une précision satisfaisante, cette approche nécessite des images haute résolution. De plus, la conversion en éléments finis de ces images génère un très grand nombre d'éléments, environ 41 millions par  $\text{cm}^3$  pour une image scanner 3D isotrope de  $12 \mu\text{m}$  de résolution. La taille des modèles et le temps de calcul sont alors considérables. La figure 4 montre un exemple de conversion voxel à élément pour un vecteur de test n°2.

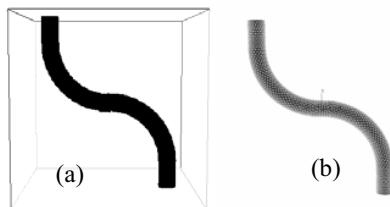


FIG. 4 : vecteur de test n°2 (a) et son modèle équivalent voxel à éléments (b)

### 3.2 Modèle poutre

Une équipe a publié en 2004 des travaux [2] basés sur le squelette permettant de créer un modèle par éléments finis où chaque travée de la structure est représentée par une poutre rectiligne. Ce procédé possède le grand avantage de diminuer de manière significative le temps de calcul, puisque ce dernier est lié au nombre d'éléments, mais s'est avéré non représentatif des propriétés mécaniques de la structure étudiée. Nous avons implémenté cette technique afin de comparer ses performances avec la conversion de voxel à élément et notre nouveau modèle à chaîne de poutres. La figure 5 montre le modèle poutre rectiligne obtenu dans le cas du vecteur n°2, où l'on remarque aisément l'approximation géométrique qui peut fausser les calculs de rigidité mécanique.

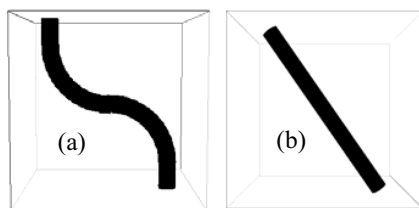


FIG. 5 : Vecteur test n°2 (a) et son modèle poutre rectiligne (b)

### 3.3 Modèle chaîne de poutres

Notre nouvelle approche de modélisation par éléments finis consiste à représenter chaque travée du squelette 3D par une chaîne de poutres qui s'adapte à la géométrie de sa structure. Pour cela, nous avons implémenté une opération de découpage illustrée par la figure 6. Ce procédé peut être appliqué à différents degrés de précision en faisant varier le nombre de découps. Le suivi géométrique de la courbure est

alors affiné à mesure que l'on augmente le nombre de nœuds intermédiaires.

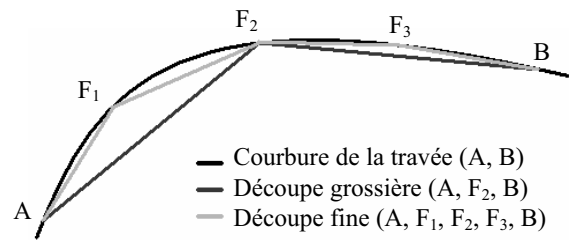


FIG. 6 : Illustration du procédé de découpage de la courbure des travées

Notre nouvelle technique réduit considérablement le temps de calcul et les ressources nécessaires aux simulations par conversion voxel à élément tout en préservant les propriétés topologiques et géométriques de la structure originelle. Chaque élément poutre se voit affecter une section moyenne mesurée sur la travée mère. Cette étape d'optimisation permet non seulement de prendre en compte la courbure des travées non rectilignes mais aussi de tenir compte de chemins multiples qui peuvent exister entre deux nœuds de la structure, ce que la technique [2] ne pouvait pas distinguer. La figure 7 présente deux modèles chaîne de poutres obtenus pour le vecteur n°2, pour deux degrés de précision différents.

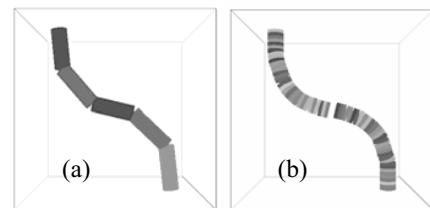


FIG. 7 : Modèles chaîne de poutres du vecteur de test n°2, de précision grossière (a) puis fine (b)

## 4. Comparaison des modèles

Nous avons étudié le comportement mécanique de structures 3D pour les trois modèles expliqués précédemment. En appliquant un faible déplacement en compression sur des faces opposées (ici haut et bas), il est possible de déterminer avec *Abaqus* la rigidité de chaque modèle numérique. Pour les formes simples de test nous avons également comparé ces résultats à une valeur de rigidité de référence obtenue directement à partir de la forme CAO (Conception Assistée par Ordinateur). Enfin, nous présentons une application de notre nouvelle méthode à l'étude de la microarchitecture trabéculaire osseuse.

### 4.1 Vecteurs de test

Le tableau 1 présente les résultats obtenus pour les simulations mécaniques des vecteurs de test n°1 et n°2, avec les rigidités mesurées et le nombre de nœuds des modèles.

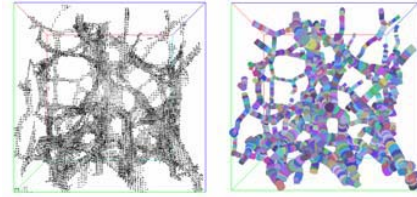
TAB. 1 : Résultats mécaniques pour les vecteurs de test

Modèle EF	Vecteur n°1		Vecteur n°2	
	Rigidité N/mm	Nb. de noeuds	Rigidité N/mm	Nb. de noeuds
Référence Abaqus	101,24	31978	1,69	27553
Voxel à élément haute résolution	106,89	188040	1,65	99414
Voxel à élément faible résolution	130,63	5802	3,09	3099
Chaîne de poutre fin	94,49	238	1,69	128
Chaîne de poutre grossier	127,21	16	2,03	6
Poutre rectiligne	189,18	8	6,16	2

Nous avons comparé les différents modèles sur une même plate-forme PC type Pentium IV biprocesseur à 2.8 GHz avec 1 Go de Ram. La première remarque à faire sur les résultats concerne le nombre d'éléments du modèle. En effet, les modèles qui utilisent le squelette (poutre simple et chaîne de poutre) nécessitent beaucoup moins d'éléments finis que la conversion voxel à élément, ce qui se traduit par une diminution forte du temps de calcul. En guise d'ordre de grandeur, une simulation peut être réduite de quelques heures à quelques dizaines de secondes. On voit également que le modèle à chaîne de poutres améliore nettement les résultats comparé au modèle à poutres rectilignes. C'est à ce niveau que se manifeste la précision géométrique apportée par l'opération de découpage. Le modèle chaîne de poutres fin donne une valeur de rigidité proche de celle des modèles à conversion directe. Plus le découpage est fin, plus la rigidité se rapproche de la valeur de référence obtenue avec la forme CAO ou par le modèle voxel à élément à la plus forte résolution disponible.

## 4.2 Application à l'os trabéculaire

Après avoir observé les améliorations apportées par notre nouveau modèle en termes de précision lors de la simulation mécanique, nous avons appliqué le procédé à l'étude de la microarchitecture de l'os trabéculaire. Les échantillons utilisés ici ont été acquis à l'aide d'un micro-scanner, à la résolution de 12  $\mu\text{m}$  par voxel. Les images ont ensuite été reconstruites en 3D à partir des coupes du scanner, puis filtrées et enfin binarisées afin de travailler avec des milieux biphasiques. La figure 8 montre un exemple d'échantillon d'os numérique et de modèle chaîne de poutre associé. Cette nouvelle technique permet de caractériser la sensibilité des échantillons à une compression mécanique. Dans ce cas précis, les tailles de données mises en jeu sont si grandes qu'il n'est pas envisageable de simuler des modèles voxel à élément sur une station non dédiée à cet usage [6]. Ce nouveau modèle nous permet de mettre en œuvre des simulations mécaniques pour des objets complexes sur une machine de type PC.

FIG. 8 : Illustration d'un échantillon d'os trabéculaire de 3,8 mm<sup>3</sup> et d'un modèle chaîne de poutre correspondant

Malgré le manque de valeurs de référence pour nos échantillons osseux, on retrouve dans le tableau 2 les mêmes tendances que les résultats obtenus dans le cas des 2 vecteurs de test. A savoir, le modèle poutre rectiligne surestime fortement la rigidité de l'échantillon comparé au modèle chaîne de poutres.

TAB. 2 : Résultats mécaniques pour un échantillon d'os

Modèle EF	Rigidité en N/mm	Nombre de noeuds
Chaîne de poutre fin	60,16	5716
Chaîne de poutre grossier	91,11	521
Poutre rectiligne	101,96	412

Les travaux que nous menons actuellement sur ce thème ont pour objectif d'optimiser encore les modèles afin de les rendre plus fidèles aux propriétés réelles des matériaux poreux représentés. Ainsi les futurs modèles pourraient intégrer mieux encore la géométrie des milieux en utilisant différents types d'éléments finis plutôt que de simple poutres. Nous envisageons également de corrélérer les résultats obtenus en simulation avec des tests mécaniques expérimentaux sur des échantillons réels afin de valider le protocole de simulation.

## Références

- [1] J.L. Batoz, G. Dhatt, *Modélisation des structures par éléments finis*, édition Hermès, 1990.
- [2] Pothuau L, B. V. Rietbergen, C. Charlot, E. Ozhinsky, S. Majumdar, *A new computational efficient approach for trabecular bone analysis using beam models generated with skeletonized graph technique*, Computer methods in Biomechanics and biomedical engineering, vol. 7, N° 4, august 2004, pp. 205-213
- [3] J. Hoshen, R. Kopelman, *Percolation and cluster distribution. I. Cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm*, Phys. Rev. B 14, 3438-3445 (1976), Issue 8, October 1976
- [4] C. Min Ma, M. Sonka, *A Fully parallel 3D thinning algorithm and its applications*, Computer vision and image understanding, Vol. 64, n°3, pp. 420-433, November 1996.
- [5] G. Aufort, *Caractérisation de la microarchitecture trabéculaire osseuse par son patron 3D*, rapport de DEA, Université d'Angers, 2004.
- [6] Harun H. Bayraktar, *Nonlinear micro finite element analysis of human trabecular Bone : a study*, Technical Support Engineer, ABAQUS Inc.

# Etude des paramètres d'un modèle de génération de signaux EEG intracérébraux : synchronisation, conductivité cérébrale et surface corticale

D. COSANDIER-RIMÉLÉ<sup>1</sup>, J.M. BADIER<sup>2</sup>, F. WENDLING<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire Traitement du Signal et de l'Image, INSERM, Université de Rennes1, 35042 Rennes, France.

<sup>2</sup> Laboratoire de Neurophysiologie et Neuropsychologie, INSERM, Université de la Méditerranée, 13385 Marseille, France.

delphine.cosandier-rimele@univ-rennes1.fr, jean-michel.badier@medecine.univ-mrs.fr, fabrice.wendling@univ-rennes1.fr

**Résumé** – La stéréo-électroencéphalographie (SEEG) permet d'enregistrer l'activité électrique cérébrale en profondeur (électrodes intracérébrales, signaux EEG de profondeur). Ce travail est centré sur l'étude des relations qui existent entre les dynamiques qui s'expriment dans les signaux SEEG et l'organisation spatio-temporelle des sources neuronales à l'origine de ces signaux. Ce problème est abordé au travers d'un modèle réaliste de génération des signaux SEEG à partir d'un champ de dipôles correspondant à une source néocorticale étendue formée par un ensemble de populations de neurones interconnectées. Les résultats montrent que le modèle est capable de générer des signaux comparables à des signaux SEEG réels enregistrés lors de processus épileptiques (pointes épileptiques). Les signaux simulés permettent alors d'interpréter les signaux réels par rapport aux problèmes liés à la source (surface, synchronisation des populations de neurones) et au milieu (conductivité).

**Abstract** – *Stereo-electroencephalography (SEEG) is a depth recording technique of brain electrical activity (intracerebral electrodes, depth-EEG signals). The present work is focused on the study of the relationship between the SEEG signals and the underlying organization of neuronal populations involved in the generation of such signals. This relationship is established through realistic modeling of SEEG signals, based on a field of dipoles representing an extended neocortical source made up of many interconnected neuronal populations. Results show that the model can generate signals that resemble real SEEG signals recorded during epileptic processes (epileptic spikes). Simulated signals then allow real ones to be interpreted in terms of source parameters (spatial extension, couplings between neuronal populations) and volume conductor model parameters (conductivity).*

## 1. Introduction

Une crise d'épilepsie est l'expression clinique d'un dysfonctionnement de l'activité cérébrale. Elle résulte de l'apparition de décharges électriques soudaines, excessives et transitoires au sein d'un groupe de neurones (décharges paroxystiques). La stéréo-électroencéphalographie (SEEG) [1] est une technique d'enregistrement direct de l'activité cérébrale. A partir d'électrodes intracérébrales (comptant chacune 10 à 15 plots d'enregistrement), elle fournit des signaux vectoriels qui marquent, en temps réel, l'activité électrique dans les structures cérébrales explorées. La SEEG est utilisée dans des cas d'épilepsies partielles pharmacorésistantes où un traitement chirurgical peut être indiqué, et pour lesquelles il est nécessaire de localiser avec précision les zones cérébrales à l'origine des décharges paroxystiques.

De nombreuses questions se posent encore concernant l'interprétation des signaux SEEG enregistrés lors de processus épileptiques. Elles portent essentiellement sur les rapports qui existent entre les propriétés des signaux SEEG et l'organisation spatiale et temporelle des sources neuronales à l'origine de ces signaux : quelle surface corticale est mise en jeu lors de la génération des potentiels recueillis le long de l'électrode ? Quels changements observe-t-on dans la synchronisation des populations de neurones lors du passage d'une activité normale à une activité épileptique ?

Ces questions sont ici abordées à travers la simulation réaliste de signaux SEEG. Ainsi, nous proposons un modèle de source néocorticale étendue, à partir duquel, grâce à la résolution du problème direct entre les sources neuronales et les capteurs intracérébraux, des signaux sont simulés puis comparés à des signaux SEEG réels. Les signaux simulés

permettent alors d'interpréter les signaux réels par rapport aux problèmes liés à la source (surface, degré de synchronisation entre populations de neurones) et au milieu de conduction (conductivité électrique).

Le modèle de génération des signaux SEEG est présenté dans la section 2. Les résultats sont illustrés dans la section 3 par le biais d'un exemple et discutés dans la section 4.

## 2. Le modèle

Le modèle de source que nous avons développé prend en compte à la fois les caractéristiques spatiales et temporelles des sources neuronales. Il repose sur l'association de deux classes de modèles de sources : le modèle dipolaire pour décrire l'organisation spatiale des sources et les modèles de populations de neurones pour décrire leurs dynamiques temporelles. Les signaux recueillis le long d'une électrode intracérébrale sont ensuite reconstruits par la résolution du problème direct, c'est-à-dire par le calcul du potentiel électrique engendré par la source au niveau de chaque capteur de l'électrode.

### 2.1 Configuration spatiale des sources

Le modèle de source le plus communément utilisé pour décrire l'activité cérébrale est le modèle dipolaire. Dans ce modèle, on considère que les groupes de neurones principaux (cellules pyramidales) à l'origine de l'activité électrique sont assimilables à des dipôles de courant du fait, en partie, de leur alignement en palissades [2]. Pour pouvoir rendre compte de façon réaliste des caractéristiques spatiales d'une source d'activité (extension et propriétés géométriques), nous avons choisi d'utiliser un modèle de *source étendue*. Ce type de

modèle représente l'activité électrique d'une zone corticale par un champ formé d'un très grand nombre de dipôles, chaque dipôle représentant l'activité d'une zone élémentaire correspondant à une population de neurones (section 2.2). Ainsi, nous avons considéré une source étendue d'activité électrique formée par un élément de néocortex de surface  $S$  et situé au voisinage d'une électrode intracérébrale.

Un modèle réaliste pour la géométrie de l'élément de néocortex a été construit à partir de la segmentation d'images IRM anatomique. Il est basé sur un maillage surfacique (triangulaire) de la surface interne du cortex (interface entre substance grise et substance blanche). Le maillage a été généré de manière à obtenir une surface moyenne pour les triangles de l'ordre du  $\text{mm}^2$ . La contribution électrique de chaque triangle du maillage est représentée par un dipôle de courant élémentaire (FIG. 1). Chaque dipôle élémentaire est placé au barycentre du triangle correspondant et est orienté orthogonalement à sa surface. L'intensité d'un dipôle représente le moment dipolaire du petit élément de néocortex correspondant. Elle est obtenue en multipliant la surface du triangle par la densité surfacique de moment dipolaire, cette dernière ayant été fixée à  $525 \text{ nA/mm}$  pour une activité électrique normale (valeur calculée pour une densité volumique de moment dipolaire de  $175 \text{ nA/mm}^2$  [3] et une épaisseur de cortex de 3 mm). L'intensité de chaque dipôle est ensuite pondérée par un coefficient dont la valeur varie au cours du temps, et qui traduit l'évolution temporelle de l'activité de chaque source élémentaire (section 2.2).

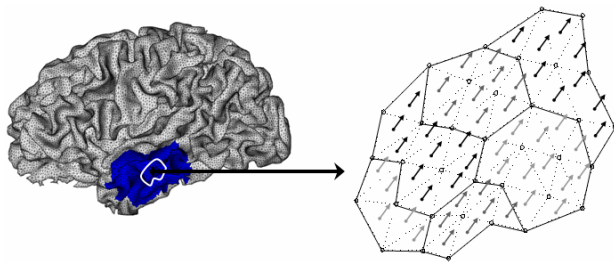


FIG. 1 : Le modèle de source néocorticale étendue. Un modèle réaliste pour la géométrie de l'élément de néocortex considéré est construit à partir d'un maillage triangulaire surfacique de la surface interne du cortex. Une population neuronale est associée à chaque triangle et sa contribution est représentée par un dipôle élémentaire, orienté orthogonalement à la surface.

## 2.2 Dynamiques temporelles des sources

L'activité EEG reflète principalement la sommation des potentiels post-synaptiques des neurones pyramidaux. Pour décrire l'activité des populations de neurones, nous avons donc choisi d'utiliser un modèle de population neuronale dit « condensé », basé sur des données neurophysiologiques. En effet, il a été démontré [4] que ce modèle peut générer des signaux à partir de plusieurs populations couplées et que la modification pertinente des paramètres du modèle (liés à des mécanismes tels que l'excitation, l'inhibition et le couplage) conduit à la simulation de signaux épileptiformes dont les dynamiques sont comparables à celles des signaux enregistrés par la SEEG au cours des périodes critiques et intercritiques.

Nous avons donc considéré un modèle à  $n$  populations couplées. Les interconnexions entre les populations sont modélisées par des coefficients  $K_{ij}$ , représentant l'intensité et la direction des couplages ( $K_{ij}$  : couplage entre la population  $i$  et la population  $j$ , orienté de  $i$  vers  $j$ ). Ces paramètres sont ici supposés bidirectionnels et égaux à une même valeur  $K$ .

Chaque population génère un signal. Les paramètres du modèle ont été ajustés pour que le signal simulé au niveau de chaque population et représentant son activité de fond (bruit) corresponde, en valeur absolue, à la valeur du moment dipolaire choisie à partir des données issues de la littérature (section 2.1). Ainsi, tous les signaux simulés par le modèle de populations neuronales couplées ont été normalisés, de manière à ce que l'amplitude de l'activité de fond de chaque population soit comprise entre -1 et +1.

Chaque dipôle de l'élément de néocortex est supposé représenter la contribution d'une population de neurones. Afin de réduire le nombre de signaux simulés pour décrire l'activité globale de l'élément de néocortex, nous avons considéré que les populations de neurones proches spatialement ont des activités temporelles voisines. Ainsi, les  $N$  dipôles de l'élément de néocortex ont été regroupés en  $n$  sous-groupes (FIG. 1), au sein desquels les dipôles élémentaires ont la même dynamique temporelle. La surface moyenne d'un sous-groupe a été fixée arbitrairement à  $10 \text{ mm}^2$ . Le regroupement des triangles a été effectué à l'aide d'un algorithme de classification de type  $k$ -means, en respectant les contraintes de voisinage liées au maillage.

## 2.3 Calcul du potentiel électrique

Le calcul du potentiel électrique généré par une source dans un milieu donné implique également la définition d'un modèle de milieu. Ce modèle doit rendre compte des propriétés électriques et géométriques du milieu considéré (ici, le cerveau). Nous avons travaillé avec deux modèles de milieu : dans un premier temps, nous nous sommes placés dans un milieu conducteur infini, puis nous avons considéré un modèle de tête à trois sphères concentriques. Dans les deux cas, la fréquence maximale des signaux correspondant à l'activité électrique neuronale ne dépassant pas quelques centaines de Hertz, les effets de la propagation sont négligeables et les sources peuvent être considérées comme stationnaires (modèle quasi-statique). Sous ces conditions, l'expression du potentiel électrique engendré par la source néocorticale étendue peut être établie à partir des formules classiques de l'électrostatique.

### Modèle de milieu infini

On considère un milieu conducteur  $\Omega$  infini. Il est caractérisé par sa conductivité  $\sigma$ , supposée homogène et isotrope. Dans un premier temps, on considère un point  $P$  quelconque de  $\Omega$  et un dipôle caractérisé par son vecteur moment dipolaire  $\mathbf{m}$  (source ponctuelle). À partir de [5], nous pouvons établir l'expression du potentiel élémentaire créé par le dipôle au point  $P$  comme suit :

$$V(P) = \frac{\langle \mathbf{m}, \mathbf{u}_r \rangle}{4\pi\sigma r^2} \quad (1)$$

où  $\mathbf{u}_r$  est le vecteur unitaire de l'axe orienté de la source vers le point de mesure et  $r$  est la distance entre la source et le point de mesure.

On considère maintenant une source étendue, composée de  $N$  dipôles et située au voisinage d'une électrode intracérébrale. L'électrode est composée de  $M$  capteurs (cylindres de 2 mm de long et de 0.8 mm de diamètre), tous distants de 1.5 mm (caractéristiques imposées par la clinique). En vertu du théorème de superposition linéaire, le potentiel créé en un point  $P$  par  $N$  dipôles est égal à la somme des potentiels élémentaires créés par chacun de ces dipôles. La



démarche appliquée pour calculer le potentiel créé par la source étendue au niveau de chaque capteur est donc la suivante : chaque capteur  $c_j$  est discrétisé en  $L$  points de mesure. Le potentiel recueilli au niveau du capteur est alors la valeur moyenne des potentiels créés par la source étendue aux  $L$  points de mesure, soit :

$$V_j = \frac{1}{L} \cdot \sum_{k=1}^L \left[ \sum_{i=1}^N \frac{\langle \mathbf{m}_i, \mathbf{u}_{ik} \rangle}{4\pi\sigma_i r_{ik}^2} \right] \quad (2)$$

où  $\mathbf{m}_i$  est le vecteur moment dipolaire associé au  $i^{\text{ème}}$  dipôle de la source,  $\mathbf{u}_{ik}$  est le vecteur unitaire de l'axe orienté du  $k^{\text{ème}}$  point de mesure vers le  $i^{\text{ème}}$  dipôle et  $r_{ik}$  est la distance entre le  $k^{\text{ème}}$  point de mesure et le  $i^{\text{ème}}$  dipôle.

#### Modèle de tête sphérique

La tête est représentée par un ensemble de trois sphères concentriques, de conductivités différentes. Les trois couches représentent, de l'intérieur vers l'extérieur, le cerveau, l'os du crâne et la peau du scalp. Les rayons des trois sphères sont adaptés en fonction de l'anatomie du patient (recalage des sphères sur l'IRM). Les trois conductivités sont supposées homogènes et isotropes, et vérifient les deux conditions suivantes :  $\sigma_{\text{cerveau}} = \sigma_{\text{scalp}}$  et  $\sigma_{\text{cerveau}} = 40 * \sigma_{\text{crâne}}$  [6].

La démarche générale du calcul du potentiel engendré par la source étendue au niveau d'un capteur intracérébral reste la même ; seule l'expression du potentiel élémentaire  $V$  change. Le champ électrique cérébral est régi par les équations de Maxwell. De plus, tous les courants sources sont confinés dans la sphère du cerveau  $\Omega$  (de rayon  $R$  et de conductivité  $\sigma$ ). On sait alors qu'en tout point de  $\Omega$ , le potentiel scalaire  $V$  vérifie l'équation de Poisson et qu'il vérifie l'équation de Laplace partout ailleurs. Il s'agit donc de résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \sigma \Delta V = \text{div}(\mathbf{j}_s) & \text{dans } \Omega \\ \Delta V = 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3)$$

où  $\mathbf{j}_s$  est la densité de courant induite par les sources.

On considère un dipôle  $\mathbf{m}$  et un point de mesure  $P$ , tous deux situés dans la sphère  $\Omega$ . Pour calculer le potentiel créé par le dipôle au point  $P$ , il faut résoudre l'équation de Poisson (équation aux dérivées partielles du second ordre). La solution  $V$  est obtenue en additionnant la solution générale  $V_1$  de l'équation sans second membre et une solution particulière  $V_2$  de l'équation complète.

En coordonnées sphériques, le laplacien de  $V$  s'écrit :

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [rV] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

La solution générale  $V_1$  est recherchée sous la forme :

$$V(r, \theta, \varphi) = F(r)G(\theta)H(\varphi)$$

où  $F, G, H$  sont des fonctions à une seule variable. On montre que dans le volume  $\Omega$ , le potentiel  $V_1$  peut s'écrire de la façon suivante [7] :

$$V_1(r, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \alpha_{km} r^k P_k^m(\cos \theta) \cos(m\varphi) \quad (4)$$

où  $P_k^m$  sont les fonctions associées de Legendre.

La solution particulière  $V_2$  est l'expression du potentiel créé par un dipôle dans un milieu infini de conductivité  $\sigma$ . Il a été montré [8] que le potentiel dû à un dipôle de moment  $\mathbf{m}$  parallèle à l'axe Oz, placé en  $(r_0, \theta_0, 0)$  est donné par :

- pour  $0 \leq r < r_0$  :

$$V_2(r, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k M_{\text{inf}} r^k P_k^m(\cos \theta) \cos(m\varphi) \quad (5)$$

$$\text{avec } M_{\text{inf}} = \frac{\|\mathbf{m}\|}{4\pi\sigma r_0^2} (2 - \delta_m^0) (m-k-1) \frac{(k-m)!}{(k+m)!} r_0^{-k} P_{k+1}^m(\cos \theta_0)$$

- pour  $r_0 < r \leq R$  :

$$V_2(r, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k M_{\text{sup}} r^{-(k+1)} P_k^m(\cos \theta) \cos(m\varphi) \quad (6)$$

$$\text{avec } M_{\text{sup}} = \frac{\|\mathbf{m}\|}{4\pi\sigma r_0^2} (2 - \delta_m^0) (m+k) \frac{(k-m)!}{(k+m)!} r_0^{k+1} P_{k-1}^m(\cos \theta_0)$$

Finalement, l'expression du potentiel  $V$  est la suivante :

- pour  $0 \leq r < r_0$  :

$$V(r, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \{ \alpha_{km} + M_{\text{inf}} \} r^k P_k^m(\cos \theta) \cos(m\varphi) \quad (7)$$

- pour  $r_0 < r \leq R$  :

$$V(r, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \{ \alpha_{km} r^k + M_{\text{sup}} r^{-(k+1)} \} P_k^m(\cos \theta) \cos(m\varphi) \quad (8)$$

où les coefficients  $\alpha_{km}$  sont déterminés par les conditions aux interfaces et aux limites (continuité du potentiel électrique et de la composante normale de la densité de courant à l'interface entre chaque couche, et non conductivité de l'air).

## 2.4 Simulation des signaux SEEG

L'étude du modèle selon  $S$  (surface de la source),  $K$  (coefficient de couplage) et  $\sigma$  (conductivité cérébrale) est effectuée de manière exhaustive en discrétisant chacun des trois paramètres et en explorant l'espace des valeurs. En ce qui concerne l'étendue de la source, nous avons considéré un élément de néocortex de surface allant de 1 à 30 cm<sup>2</sup>. Cet élément de néocortex est construit à l'aide d'un algorithme de type croissance de région qui, à partir d'un triangle initial, ajoute les triangles par ordre de voisinage jusqu'à atteindre la surface  $S$  voulue. Les valeurs de couplage varient entre 0 (les populations de neurones ont des activités indépendantes) et 100 (les populations de neurones ont des activités très corrélées). Pour la conductivité cérébrale, nous avons considéré des valeurs allant de 10 à 50x10<sup>-5</sup> S/mm, en accord avec les valeurs issues de la littérature.

Les signaux simulés sont ensuite comparés à des données réelles provenant d'enregistrements SEEG effectués chez des patients souffrant d'épilepsie du lobe temporal et candidats à la chirurgie.

## 3. Résultats

La figure 2 présente les résultats des simulations d'une activité épileptique, pour un modèle de milieu infini et pour un modèle de milieu sphérique. Dans les deux cas, on constate que les signaux simulés ressemblent qualitativement aux signaux réels et que les valeurs des signaux simulés sont du même ordre de grandeur que celles des signaux réels. En considérant une valeur de conductivité cérébrale  $\sigma = 30 \times 10^{-5}$  S/mm (valeur communément admise dans la littérature), on constate que pour générer des potentiels comparables aux potentiels réels, il faut une surface corticale de 28 cm<sup>2</sup> dans le cas du milieu infini et de 15 cm<sup>2</sup> dans le cas du modèle sphérique.

Pour étudier les gradients d'amplitude observés le long de l'électrode, nous avons représenté les profils des amplitudes réelles et simulées obtenues pour les simulations précédentes, à l'instant de mesure correspondant au sommet de la pointe (FIG. 3). Pour les deux modèles de milieu, on observe une forte similarité des gradients d'amplitude entre les données réelles et les données simulées. On note également l'allure parabolique du profil des amplitudes réelles, qui confirme l'hypothèse d'une atténuation du potentiel en  $1/r^2$  dans le modèle dipolaire.

On constate également que dans le modèle de populations neuronales couplées, les activités épileptiques transitoires (pointes) sont obtenues pour des valeurs de couplage  $K$  très élevées (les populations neuronales de la source ont des dynamiques temporelles très corrélées). Cela confirme l'hypothèse physiologique d'hypersynchronisation des populations neuronales souvent avancée dans l'étude des processus de génération des activités épileptiques.

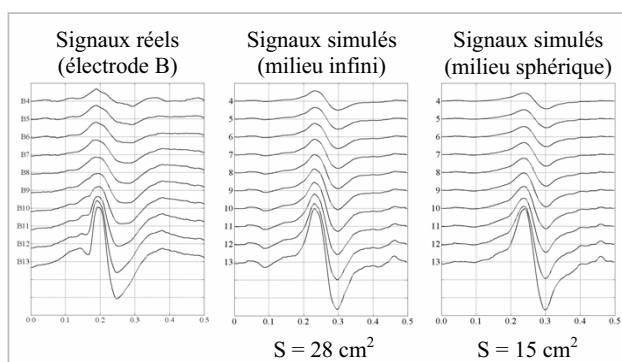


FIG. 2 : Exemples de signaux SEEG simulés à partir du modèle, pour une activité épileptique et pour une conductivité cérébrale de  $30 \times 10^{-5}$  S/mm. Les signaux ont été obtenus pour une source étendue de surface  $S = 28 \text{ cm}^2$  pour le modèle de milieu infini, et  $S = 15 \text{ cm}^2$  pour le modèle de milieu sphérique.

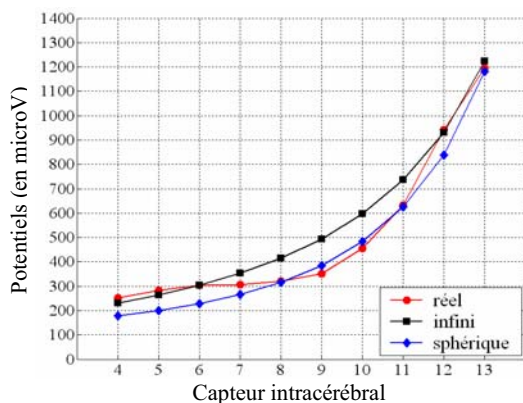


FIG. 3 : Profils des amplitudes réelles et simulées le long de l'électrode à l'instant de mesure correspondant au maximum de la pointe épileptique.

## 4. Discussion et conclusion

Nous avons développé un modèle réaliste de génération de signaux SEEG basé sur un modèle de source néocorticale étendue combinant deux classes de modèles : le modèle dipolaire pour décrire la configuration spatiale des sources neuronales, et un modèle de populations neuronales couplées pour simuler leurs dynamiques temporelles. L'association de ces deux niveaux de modélisation assure une description réaliste des propriétés spatiales et temporelles des sources neuronales à l'origine de l'activité SEEG. Le modèle complet

est capable de générer des signaux comparables à des signaux SEEG enregistrés dans des structures néocorticales lors de processus épileptiques. Les signaux simulés permettent alors d'interpréter les signaux réels par rapport aux problèmes liés à la source (surface, organisation spatiale, degré de couplage entre populations neuronales). Le modèle permet également de confirmer certaines hypothèses physiologiques, comme l'hypersynchronisation d'un vaste ensemble de populations neuronales lors de la génération d'une activité épileptique transitoire (pointe).

Concernant les calculs du problème direct, on observe une importante différence entre les résultats obtenus pour les deux modèles de milieu. En effet, nous avons constaté que les calculs en milieu infini sous-estiment la valeur des potentiels recueillis le long d'une électrode intracérébrale. Pour compenser ce phénomène, il faut soit surestimer la surface de la source d'activité (ie augmenter le nombre de contributions élémentaires), soit sous-estimer la conductivité cérébrale (facteur multiplicatif au dénominateur de l'expression du potentiel). En revanche, les résultats obtenus pour le modèle sphérique semblent plus réalistes, en termes de surface corticale, et sont comparables à ceux publiés dans la récente étude de Kobayashi et al. [9] où les auteurs s'intéressent à l'extension spatiale des sources d'activité mises en jeu dans la génération des potentiels EEG observés sur le scalp.

Sur un plan méthodologique, les perspectives de ce travail concernent l'identification automatique des paramètres « optimaux » du modèle permettant de reproduire le plus fidèlement possible les signaux observés (nombre de sources, configuration et extension spatiale, synchronisation des populations neuronales et conductivité du cerveau). Sur un plan neurophysiologique, nous allons également tenter d'expliquer, au travers de tels modèles, les activités apparaissant en début des crises d'épilepsie (en particulier les oscillations rapides). Le modèle de source pourra également être utilisé pour générer des potentiels de scalp, et permettre ainsi d'étudier les relations surface-profondeur.

## Références

- [1] J. Talairach and J. Bancaud, *Stereotactic approach to epilepsy. Methodology of anatomo-functional stereotaxic investigations*, Progr. Neurol. Surg., vol. 5, pp 297-354, 1973.
- [2] F. Lopes da Silva and A. Van Rotterdam, *Biophysical aspects of EEG and magnetoencephalogram generation*, in *Electroencephalography: basic principles, clinical applications, and related fields*, 4<sup>th</sup> ed., Baltimore : Williams and Wilkins, pp 93-109, 1999.
- [3] M. Hämäläinen, R. Hari, R.J. Ilmoniemi, J. Knuutila and O.V. Lounasmaa, *Magnetoencephalography – theory, instrumentation, and applications to non-invasive studies of the working human brain*, Rev. Mod. Phys., vol. 65, no. 2, pp 413-497, 1993.
- [4] Wendling F., Bellanger J.J., Bartolomei F. and Chauvel P., *Relevance of nonlinear lumped-parameter models in the analysis of depth-EEG epileptic signals*, Biol. Cybern., vol. 83, pp 367-378, 2000.
- [5] J. Malmivuo and R. Plonsey, *Bioelectromagnetism: principles and applications of bioelectric and biomagnetic fields*, Oxford University Press, New York, 1995.
- [6] S.I. Gonçalves, J.C. de Munck, J.P. Verbunt, F. Bijma, R.M. Heethaar and F. Lopes da Silva, *In vivo measurement of the brain and skull resistivities using an EIT-based method and realistic models for the head*, IEEE Trans. Biomed. Eng., vol. 50, no. 6, pp 754-767, 2003.
- [7] J.D. Jackson, *Électrodynamique classique*, Dunod, Paris, 2001.
- [8] W.R. Smythe, *Static and dynamic electricity*, 3<sup>rd</sup> ed., Mac Graw-Hill Book Company, 1968.
- [9] K. Kobayashi, H. Yoshinaga, Y. Ohtsuka and J. Gotman, *Dipole modeling can be accurate or misleading*, Epilepsia, vol. 46, no. 3, p 397-408, 2005.



# Vers un codage numérique de l'activité épileptique

A. KINIE, M. L. NDIAYE, J.J. MONTOIS, Y. JACQUELET.

Laboratoire Traitement du Signal et de l'Image, INSERM U642 antenne de Saint Malo, IUT de Saint Malo, 35409, France

FAX : 02 99 21 95 41 TEL : 02 99 21 95 52

{ [abel.kinie](mailto:abel.kinie), [mamadou.ndiaye](mailto:mamadou.ndiaye), [jean-jacques.montois](mailto:jean-jacques.montois), [yann.jacquelet@univ-rennes1.fr](mailto:yann.jacquelet@univ-rennes1.fr) }

**Résumé** Dans ce travail on propose une transformation du signal épileptique en une suite de booléens en exploitant la répartition de la densité spectrale de puissance dans 9 bandes de fréquences  $\delta 1$ ,  $\delta 2$ ,  $\theta 1$ ,  $\theta 2$ ,  $\alpha 1$ ,  $\alpha 2$ ,  $\beta 1$ ,  $\beta 2$ ,  $\gamma$  classiquement utilisées dans l'analyse du signal Stéréo-EEG. Cette transformation produit un indicateur scalaire dont l'exploitation judicieuse, associée à un système informatique dédié (ici un système multi-agent) et appliquée à l'analyse de d'une crise d'épilepsie fait émerger une représentation très réaliste du contenu spectral des aires cérébrales impliquées dans la crise d'épilepsie.

**Abstract** – In this paper a depth SEEG signal recorded is transform in bytes using the spectral density in 9 epileptic frequency bands  $\delta 1$ ,  $\delta 2$ ,  $\theta 1$ ,  $\theta 2$ ,  $\alpha 1$ ,  $\alpha 2$ ,  $\beta 1$ ,  $\beta 2$ ,  $\gamma$ . This transformation gives rise to a scalar indicator which is included in a multiagent system approach in order to analyze the propagation of the epileptic seizure. This new method gives a relevant spatio-temporo-spectral representation of brain areas included in the epileptic seizure.

## 1. Introduction

Pour L'analyse du signal épileptique il est souvent essentiel d'éclairer comment se recompose, fonctionnellement le système d'intercommunications entre les différentes structures du cerveau et comment y évolue la dynamique des activités neuro - électriques attachées à chacune de ces structures

En électroencéphalographie, il est admis que le signal stéréo - électroencéphalographique (Stéréo-EEG) critique est un "marqueur temporel" des interactions entre les structures cérébrales enregistrées, interactions qui naissent, perdurent puis s'éteignent au cours des crises d'épilepsie. Le signal SEEG se compose alors d'une suite de plages temporelles durant lesquelles les structures cérébrales enregistrées présentent un "état dynamique stable". La description de ces états de stabilité et leurs caractérisations pour différentes crises d'épilepsie d'un même patient, doit permettre la mise en évidence de la dynamique spatio-temporelle du réseau épileptogène chez ce même patient. Cette notion de réseau développée par le professeur Chauvel[1] peut être vue comme l'ensemble des structures cérébrales et des voies de propagation qui sont systématiquement mise en jeu durant les crises et suivant un ordonnancement temporel.

Etudier l'évolution des mises en jeu progressive des structures cérébrales impliquées dans l'épilepsie amène à analyser le comportement des groupes de neurones à travers les signaux recueillis au sein même de ces groupes.

De nombreuses études ont été consacrées à la mise en évidence d'interactions mutuelles entre les aires cérébrales impliquées dans la génération de la crise d'épilepsie soit au travers de la segmentation du signal SEEG[2], soit au travers du calcul d'un temps de retard de propagation [3]. D'autres études plus récentes utilisent des modèles réalistes de

génération du signal épileptique pour expliquer le paradigme du réseau épileptogène responsable des crises d'épilepsie [4]. Toutes ces approches paramétriques et non paramétriques utilisent pour la majorité d'entre elles l'information temporelle (corrélation) ou fréquentielle (Transformée en ondelettes, analyse temps-fréquence, rythme du signal [5] pour rendre compte des interactions entre structures cérébrales impliquées dans la crise d'épilepsie.

Dans ce travail nous proposons de transformer l'énergie en sous-bandes du signal SEEG en une suite de booléens dont l'exploitation au travers d'un système informatique dédié ici le système multi-agents produit une représentation d'une crise d'épilepsie en nappes spatio-temporo-spectrales faisant émerger de manière très réalistes les implications des structures cérébrales initiatrices de la crise d'épilepsie.

Dans le paragraphe 2 nous explicitons la démarche conduisant au codage numérique de l'activité épileptique. Le paragraphe 3 sera consacré à l'exploitation du codage numérique dans la production de nappes spatio-temporo-spectrales et le dernier paragraphe discute des bénéfices attendus de cette nouvelle représentation du signal Stéréo-EEG dans l'analyse de l'épilepsie et le suivi des patients épileptiques.

## 2. Codage numérique de l'activité épileptique

Nous considérons un signal aléatoire réel  $X_1(t)$  observé pour des valeurs de  $t$  dans un intervalle  $[0, T_e]$  où  $T_e$  est la durée de l'enregistrement Ce signal suivant les 9 bandes de fréquences classiquement utilisées dans le domaine de l'épilepsie, à savoir les activités basses fréquences ( $\delta 1$ ,  $\delta 2$ ,  $\theta 1$ ,  $\theta 2$ ,  $\alpha 1$ ,  $\alpha 2$ ,  $\beta 1$ ,  $\beta 2$ ,  $\gamma$ ) compris dans l'intervalle  $[0, 128\text{Hz}]$  est codé sur 9 bits.

On définit ensuite  $C\Delta m$  comme étant le contenu spectral à l'intervalle  $\Delta m = [mb, mb+L] \in [0, Te]$ . Ce contenu fréquentiel est calculé à partir de la densité spectrale de puissance estimée, elle, à partir de la méthode du périodogramme (FFT sur 256 échantillons avec 50% de recouvrement).

La suite  $\Delta m$ ,  $m=0, 1, \dots, M$  correspond à une suite de fenêtres temporelles de 512 échantillons débutants aux instants  $mb$  avec  $mb+L \leq Te$ .  $C\Delta m$  varie avec  $m$  et on désire calculer à partir des échantillons de signal contenu dans  $\Delta m$  la contribution au cours du temps de chaque descripteur  $\delta 1, \delta 2, \theta 1, \theta 2, \alpha 1, \alpha 2, \beta 1, \beta 2, \gamma$  dans l'activité critique ou intercritique de la crise d'épilepsie. La table 1 ci-dessous présente les bandes de fréquences retenues dans l'analyse du contenu fréquentiel d'un signal épileptique.

TAB.1 : Bandes de fréquences du signal SEEG

0°)	[0 - 1.9]	Hz	$\delta 1$
1°)	[1.9 - 3.4]	Hz	$\delta 2$
2°)	[3.4 - 5.4]	Hz	$\theta 1$
3°)	[5.4 - 7.4]	Hz	$\theta 2$
4°)	[7.4 - 10]	Hz	$\alpha 1$
5°)	[10 - 12.4]	Hz	$\alpha 2$
6°)	[12.4 - 18]	Hz	$\beta 1$
7°)	[18 - 24]	Hz	$\beta 2$
8°)	[24 - 128]	Hz	$\gamma$

## 2.1 Calcul d'un indicateur scalaire par codage numérique

Le signal SEEG enregistré sur une durée  $Te$  (3 mn d'enregistrement) est analysé par segments stationnaires d'une durée moyenne de 2s soit 512 échantillons du signal. Pour les bandes de fréquences retenues on va alors construire un vecteur  $\vec{S}i$  ( $i$  représente ici le nombre de signaux SEEG à analyser, 128 en générale) dont les éléments sont donnés par la quantité d'énergie dans les 9 bandes de fréquences utilisées. On a donc :

$$\vec{S}i = [e0, e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8]^T$$

l'exposant  $T$  est mis pour le vecteur transposé et  $en$ ,  $n=0, \dots, 8$  représente l'énergie calculée dans la sous-bande  $n$ .

- ❖ Les éléments du vecteur  $\vec{S}i$  sont ensuite transformés en une suite de booléens par l'équation suivante qui tient compte des quantités d'énergie calculées dans les sous-bandes

$$bn = \begin{cases} 1 & \text{si } en \geq \eta e E_T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$bn$  est un booléen appartenant au nouveau vecteur de

$$\text{booléens } \vec{B}i = [b0, b1, b2, b3, b4, b5, b6, b7, b8]^T$$

$E_T$  représente l'énergie totale dans les 9 bandes de fréquences retenues et  $\eta e$  est un seuil en dessous duquel l'énergie

calculée dans la sous-bande de fréquences est jugée expérimentalement non satisfaisante.

- ❖ La suite de booléens  $bn$  est ensuite convertie en valeur décimale pour produire un indicateur scalaire  $Di$  selon la formule :

$$Di = 2^0xb_0 + 2^1xb_1 + 2^2xb_2 + 2^3xb_3 + 2^4xb_4 + 2^5xb_5 + 2^6xb_6 + 2^7xb_7 + 2^8xb_8$$

- ❖ L'exploitation judicieuse de cet indicateur scalaire permet de procéder à un regroupement (classification) de signaux d'intérêts par contenu fréquentiel similaire.

## 2.2 Classification des signaux SEEG par l'indicateur scalaire $Di$

Afin d'illustrer la pertinence et la mise en pratique de la transformation obtenue au paragraphe précédent nous avons dans les travaux de recherche développés dans notre laboratoire introduit l'indicateur scalaire  $Di$  dans le mécanisme de coordination d'un système multi-agent [6]. En effet comme le souligne WEISS[7], un **agent** est une "entité computationnelle" ; un programme informatique ou un robot, qui peut être vue comme percevant et agissant de façon autonome sur son environnement. Un système multi-agents (SMA) est alors constitué d'un ensemble de processus informatiques se déroulant en même temps, donc de plusieurs agents vivant au même moment, partageant des ressources communes et communiquant entre eux. Le point clé des systèmes multi-agents réside dans la formalisation de la **coordination** entre les agents. De même il est admis que la recherche sur les agents est une recherche sur :

- 1) **la décision** -quels sont les mécanismes de la décision de l'agent? Quelle est la relation entre les perceptions, les représentations et les actions des agents ? Comment décomposent-ils leurs buts et tâches ? Comment construisent-ils leurs représentations ?
- 2) **le contrôle** - quelles sont les relations entre les agents?, Comment sont-ils coordonnés ? Cette coordination peut être décrite comme une coopération pour accomplir une tâche commune ou comme une négociation entre des agents ayant des intérêts différents.
- 3) **la communication** - quels types de message s'envoient-ils? à quelle syntaxe obéissent ces messages? Différents protocoles sont proposés en fonction du type de coordination entre les agents.

Le travail présenté ici ne traite pas les trois domaines de recherche cités mais l'activité de recherche s'appuie sur une organisation des agents en pyramide irrégulière [8] et exploite le point 2) pour rendre compte dans l'analyse d'une crise d'épilepsie de l'organisation spatio-temporelle de la propagation de l'activité paroxystique critique et dégager les éléments d'une modélisation de la dynamique d'interactions entre les structures cérébrales impliquées dans la crise d'épilepsie. Nous allons ainsi pouvoir associer à chaque signal SEEG analysé un

agent suivant le tableau ci-dessous où l'on applique une pondération à chacune des activités fréquentielles pour produire l'indicateur scalaire  $D_i$ . 4 des 5 activités basses fréquences principales du signal épileptiques sont découpées en 2 sous activités afin de proposer un codage numérique sur 9 bits.

TAB.2 : Activités fréquentielles principales et Classes d'activité (CA)

CA	b0	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7	b8
PC	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\delta 1$	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$\delta 2$	0	0	0	0	0	0	0	1	x
$\theta 1$	0	0	0	0	0	0	1	x	x
$\theta 2$	0	0	0	0	0	1	x	x	x
$\alpha 1$	0	0	0	0	1	x	x	x	x
$\alpha 2$	0	0	0	1	x	x	x	x	x
$\beta 1$	0	0	1	x	x	x	x	x	x
$\beta 2$	0	1	x	x	x	x	x	x	x
$\gamma$	1	x	x	x	x	x	x	x	x

avec  $x=0$  ou  $1$ .

Dans ce tableau il apparaît ainsi que un agent signal (AS) appartiendra à l'une ou l'autre des classes d'activité de fréquence selon la valeur de l'indicateur scalaire  $D_i$  de la manière suivante :

- Pas Classée(PC) :  $D_i = 0$ .
- Classe d'activité (CA)  $\delta 1$  :  $D_i=1$
- Classe d'activité  $\delta 2$  :  $D_i \in [2,3]$
- Classe d'activité  $\theta 1$  :  $D_i \in [4,7]$
- Classe d'activité  $\theta 2$  :  $D_i \in [8,15]$
- Classe d'activité  $\alpha 1$  :  $D_i \in [16,31]$
- Classe d'activité  $\alpha 2$  :  $D_i \in [32,63]$
- Classe d'activité  $\beta 1$  :  $D_i \in [64,127]$
- Classe d'activité  $\beta 2$  :  $D_i \in [128,255]$
- Classe d'activité  $\gamma$  :  $D_i \in [256,511]$

Cette classification terminée nous obtenons pour l'ensemble des signaux SEEG analysés une représentation de la crise d'épilepsie sous forme d'une nappe spatio-temporo-spectrale mettant clairement en évidence les structures cérébrales impliquées dans le processus de génération de l'activité paroxystique.

Nous présentons dans le dernier paragraphe de ce travail les résultats obtenus en application de la méthodologie développée dans son ensemble au laboratoire lorsque celle-ci est appliquée dans le mécanisme de traitement d'un système multi-agent dédié.

### 3. Résultats

Nous avons appliqués notre démarche sur 3 crises d'épilepsie enregistrées sur un patient (CAN) présentant une crise

d'épilepsie du lobe temporal d'après le clinicien ; les structures impliquées dans l'initiation des crises sont le pôle tempore interne (TP), l'hippocampe antérieur (B), l'hippocampe postérieur. (C) et le cortex entorhinal (TB).

Les résultats obtenus pour 3 valeurs de seuil  $\eta_e$  sont présentés dans la figure 1.

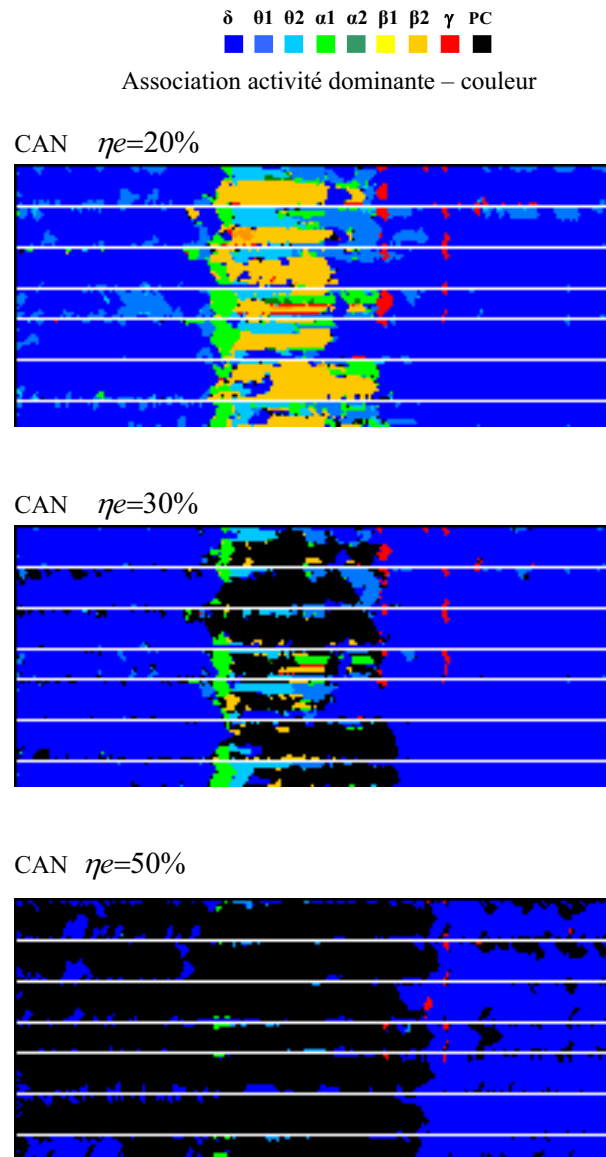


FIG.1 : Nappes spatio-temporo-spectrales sur une crise du patient CAN.

Ces résultats (nous avons attribué une couleur à chaque activité SEEG) laissent apparaître de manière très réaliste le contenu spectral sur les voies SEEG analysées. Cette représentation laisse clairement émerger différentes interactions entre structures cérébrales. Ces interactions restent très localisées pour  $\eta_e=20\%$  et moins convaincantes pour  $\eta_e=50\%$ . Cette représentation laisse aussi apparaître les seuils limites d'utilisation de  $\eta_e$  pour avoir les bandes de fréquences d'intérêts.

## 4. Conclusion

Nous avons proposé et exploité dans ce travail une transformation en éléments binaires, puis en un indicateur scalaire des activités de fréquences du signal épileptique. Les résultats obtenus dans la représentation de la crise d'épilepsie en nappes spatio-temporo-spectrales renseignent sur la pertinence de notre choix. La transformation de l'activité épileptique en une suite de booléens dégage aussi d'autres perspectives pour le traitement et le suivi des patients épileptiques. Nous envisageons ainsi au niveau du laboratoire des recherches sur :

- ❖ les systèmes de transmission sans fils de l'information relative à l'activité épileptique en utilisant les nouvelles technologies de l'information GSM, Wi-Fi, Bluetooth.
- ❖ le suivi des patients épileptiques en étudiant un système de capteurs radios répartis sur le scalp et permettant de relayer les signaux symptomatiques, via terminaux mobiles légers (téléphones portables PDA etc) vers des bases de données situant le niveau d'alarme et l'information temps réel à donner au clinicien.

## Références

- [1] P.Chauvel *La zone épileptogène chez l'homme : représentation des événements intercritiques par cartes spatio-temporelles* Revue Neurologique, n° 143, pp. 443-450, 1987.
- [2] F.Wendling *Mise en correspondance d'observations EEG de profondeur pour la reconnaissance de signatures spatio-temporelles dans les crises d'épilepsie* thèse, université de Rennes1, Rennes 1996
- [3] A. Kinié. *Détection de relations de causalités et estimation de temps de retard en épilepsie* : thèse, université de Rennes1, Rennes 1996
- [4] F. Wendling. *Modélisation des signaux SEEG et interprétation des mesures de relations dans les crises temporales : une approche de l'étude des réseaux épileptogènes*. Epileptic Disorders Décembre 2001
- [5] M.Shamsohalli. *Revue bibliographique d'applications de représentations temps-fréquence aux signaux biomédicaux*. Innov. Techn. Biol. Méd., 1998, 19(3) : 151-165.
- [6] M.L. Ndiaye. *Localisée distribuée des activités épileptiques par une analyse vectorielle : approche expérimentale multi-agent*. 20 ème colloque GRETSI Louvain la Neuve 2005.
- [7] G. Weiss. *Multiagent System. A Modern Approach to Distributed Artificial Intelligence*, The MIT Press, Cambridge, Massachussetts (Ed) 1999
- [8] E Duschénay. *Architecture intelligente distribuée pour la segmentation d'images*, rapport de DEA, Université de Rennes1 1998.

# Filtrage des échos ultrasonores en CND par la fonction de Cross Validation Généralisée (GCV)

F. TAFININE<sup>1</sup>, B. OUAZINE<sup>1</sup> et A. HOUACINE<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Département d'Electronique, Faculté des sciences et sciences de l'ingénieur, Laboratoire (LTII), Université A/Mira Bejaia, Algérie.

<sup>2</sup> Département de télécommunication, Faculté d'Electronique et d'Informatique, Laboratoire (LTS), USTHB Alger, Algérie.

[ftafinine@hotmail.com](mailto:ftafinine@hotmail.com), [boualemh2000@yahoo.fr](mailto:boualemh2000@yahoo.fr), [a\\_houacine@lycos.com](mailto:a_houacine@lycos.com)

**Résumé** – Le Contrôle Non Destructif (CND) a pour objectif de répondre à plusieurs problèmes posés dans l'industrie à savoir : *i*) le problème de sensibilité liées à la détection de petits défauts noyés dans le bruit, *ii*) le problème de caractérisation qui concerne la classification des défauts détectés, *iii*) enfin le problème de résolution dans la séparation de défauts très rapprochés. Dans ce contexte, la détection des petits défauts noyés dans du bruit est le but principal des plus grands laboratoires de recherche en matière de CND. Dans ce travail nous introduisons l'opération de filtrage de bruit d'échos ultrasonores réels, provenant de pièces de différentes matières, dans le domaine temps-échelle. Le filtrage par seuillage est l'une des applications majeures de la transformée en Ondelettes (*T.O*) dans le domaine du traitement du signal. Les méthodes sous-jacentes remplacent les coefficients au-dessous d'un certain seuil par zéro et gardent ou rétrécissent le reste. Pour le choix du seuil, plusieurs méthodes existent. Nous présenterons ici, une méthode qui suppose le modèle de bruit blanc gaussien additif, cherchant un seuil qui minimise la fonction de cross validation généralisée (*GCV*), cette méthode présente l'avantage de ne pas avoir besoin de connaissance a priori sur la puissance du bruit qui affecte l'écho ultrasonore.

**Abstract** – The aim of Non Destructive Testing (NDT) is to overcome several problems arising in industry as: *i*) problem of sensitivity, especially when detecting the small defects drowned in noise, *ii*) characterization problem of detected defects, *iii*) the last, is the problem of separation resolution of closer defects. Nowadays, detection of small defects drowned in noise is the subject of several research activities in many NDT laboratories. Our work deals with this problem. It is based on a time-scale space denoising of real ultrasonic echoes coming from pieces parts with different kinds of materials. The denoising by thresholding in wavelet domain is adopted. The principle of this method is to replace the wavelet coefficients below a certain threshold by zeros and keep or shrink the remainder. Several methods, based on the assumption of additive white Gaussian noise, are proposed. All of them seek for the threshold which minimizes a certain criterion. That using the Generalized Cross Validation function (*GCV*). The advantage of this method comes from the fact that it doesn't need prior information about power of noise affecting the ultrasonic echo.

## 1. Introduction

Le souci de tout chef d'entreprise est de pouvoir contrôler périodiquement son installation industrielle en service et d'éviter tout risque d'accident économiquement ruinant. L'un des moyens les plus utilisés est le Contrôle Non Destructif, qui permet le contrôle des matériaux ou des structures afin d'en vérifier l'état et détecter les défauts sans les endommager. Après détection, on peut être amené à les identifier pour en déduire le degré de nocivité.

De nombreux domaines ont recours à ce type de contrôle, parmi lesquels on peut citer : l'industrie des canalisations et du stockage dans les secteurs du pétrole et du gaz, le nucléaire, l'automobile, l'aéronautique, l'aérospatial, etc.

Les ultrasons correspondent à des vibrations mécaniques de même nature que le son, mais de fréquence élevée (20 Khz à plusieurs centaines de Mhz). Ils peuvent se propager dans les gaz, les liquides et les solides, c'est-à-dire, dans toute substance possédant des propriétés élastiques. Les ondes ultrasonores ont des propriétés intéressantes : amortissement dans les métaux généralement faible, longueur d'onde de l'ordre de grandeur des hétérogénéités à découvrir et les discontinuités brusques sur leur trajet ne sont pas

contournées, ce qui renvoie l'onde partiellement vers la source [1].

Toutefois l'exploitation des techniques de traitement du signal offre un moyen de mettre en évidence les informations données par les échos ultrasonores afin de détecter des irrégularités (défauts) et par la suite effectuer une caractérisation [2], [3]. Cependant, l'amélioration de la qualité du contrôle par les techniques de traitement du signal, n'est pas un concept nouveau. Plusieurs techniques ont été déjà utilisées telles que : l'autocorrélation, l'analyse spectrale, l'analyse paramétrique, etc. Dans ces méthodes le signal est analysé soit dans le domaine temporel, soit dans le domaine fréquentiel. Or, plusieurs études ont montré que l'utilisation de l'analyse temps-échelle est la plus appropriée, à cause de la non-stationnarité des signaux mis en jeu [4].

## 2. Description

L'écho ultrasonore est de nature *non-stationnaire*, ceci est dû au milieu de propagation non uniforme qui contient des discontinuités provoquant la variation de la fréquence de l'onde reçue par rapport à l'onde émise [5], [6].

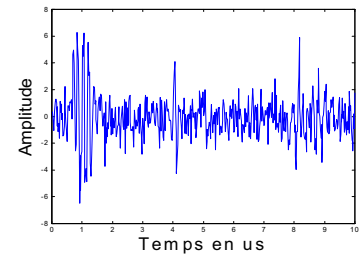
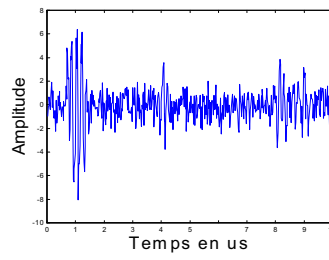
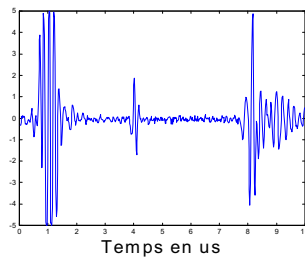


FIG. 1 : Echo d'acier contenant un défaut. FIG. 2 : Echo de laiton contenant un défaut. FIG. 3 : Echo de fonte contenant un défaut.

Cette dépendance vis-à-vis du temps du contenu spectral des échos est qualifiée de non-stationnaire, pour cela plusieurs études ont montré que l'utilisation de l'analyse temps-échelle est la plus appropriée pour l'analyse des signaux mis en jeux [3], [4].

Plusieurs expériences ont été réalisées sur des pièces et joints soudés contenant des défauts, grâce au concours apporté par le Centre de Soudage de Chéraga (CSC- Alger). Les figure (FIG.1 à 3 ) montrent quelques exemples d'échos obtenus expérimentalement.

### 3. Le filtrage dans le domaine Temps-Echelle

Plusieurs méthodes, basées sur la manipulation des coefficients en ondelettes, ont émergées. Elles sont, en général, vues comme une opération de classification binaire : les coefficients sont classés en deux groupes. Le premier groupe contiendra les coefficients dits « réguliers » dus au signal sous-jacent (propre). Le second contiendra ceux catalogués comme du bruit pur. Plusieurs critères de classification sont possibles :

1. Certaines méthodes se basent sur le calcul des exposants de Hölder, elles proposent que le bruit soit moins régulier que les signaux naturels donc caractérisé par des exposants plus petits [7].

2. D'autres utilisent la valeur absolue des coefficients comme mesure de régularité : les coefficients d'amplitudes les plus importants sont les plus réguliers [8].

Le présent travail traite des méthodes basées sur le deuxième critère, dites par seuillage. Deux types de seuillage existent :

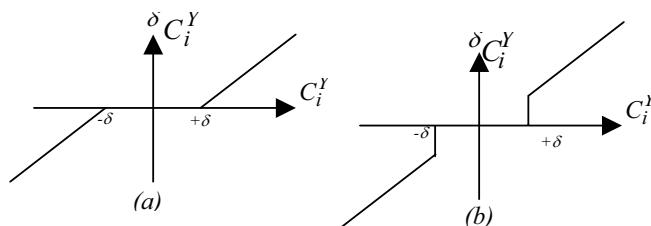


FIG. 4 : (a) Seuillage « soft », (b) Seuillage « hard ».

a. *Le seuillage soft* : Si un coefficient du signal de l'observation soit inférieur à un certain seuil, il est considéré comme étant du bruit pur et est remplacé par zéro, sinon il est rétréci de la valeur du seuil (FIG. 4.a)

$$\begin{cases} \delta C_i^Y = \text{sgn}(C_i^Y) (|C_i^Y| - \delta), & \text{si } |C_i^Y| \geq \delta ; \\ \delta C_i^Y = 0, & \text{si } |C_i^Y| < \delta. \end{cases} \quad (1)$$

b. *Le seuillage hard* : Si un coefficient du signal de l'observation soit inférieur à un certain seuil, il est considéré comme étant du bruit pur et est remplacé par zéro, sinon il est gardé tel qu'il est (FIG. 4.b).

$$\begin{cases} \delta C_i^Y = C_i^Y, & \text{si } |C_i^Y| \geq \delta ; \\ \delta C_i^Y = 0, & \text{si } |C_i^Y| < \delta. \end{cases} \quad (2)$$

Une question naturelle se pose cependant : Comment est-elle choisie la valeur du seuil de décision ? C'est par la réponse à cette question que diffère une méthode d'une autre. Dans ce travail, la méthode présentée est basée sur la fonction (GCV) « Generalized Cross Validation » [9].

### 4. Filtrage des échos par la méthode GCV

Le but recherché ici est de retrouver le signal  $f$ , déterministe mais inconnu, noyé dans un bruit  $n$  après avoir observé le signal  $y$ . Le modèle d'observation considéré est de la forme :

$$y(k) = f(k) + n(k), \quad k = 1, \dots, N \quad (3)$$

Du fait de sa linéarité, la TOD de  $y$  s'écrit :

$$C_i^Y = C_i^f + C_i^n, \quad i = 1, \dots, N \quad (4)$$

Le problème de filtrage dans le domaine temporel est donc ramené à un problème similaire dans le domaine ondelettes : écarter les coefficients  $C_i^n$  du bruit, ne garder que les coefficients  $C_i^f$  représentant le signal propre [10].

Les méthodes de filtrage par seuillage se proposent de trouver le seuil  $\delta$  qui optimise un certain critère  $C(f, \hat{f}_\delta)$  avec  $\hat{f}_\delta$  l'estimé de  $f$ . Par exemple, l'estimateur *SURE* (Stein Unbiased Risk Estimate), proposé par Donoho et Johnstone [11], choisit un seuil qui minimise la fonction risque  $R(\delta)$ .



$$R(\delta) = R(f, \hat{f}_\delta) = E\{\|f - \hat{f}_\delta\|^2\} \quad (5)$$

Soit :  $\delta = \arg \min_{\delta} \{R(\delta) : \delta \in \mathfrak{R}^+\}$ .

Puisque  $f$  est inconnu, il est impossible de minimiser la fonction risque  $R$ . La solution est d'utiliser un estimateur de cette fonction. On considère le problème posé avec les hypothèses suivantes : le bruit est blanc gaussien (théorème limite centrale), de variance  $\sigma^2$ , de réalisations indépendantes et identiquement distribuées  $n(k) \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma)$ .

Après avoir appliqué le seuillage aux coefficients de l'observation, on obtient les coefficients modifiés sur lesquels l'application de la TOD inverse donne le signal filtré. La valeur du seuil est choisie de sorte à minimiser la fonction GCV définie comme suit [9] :

$$GCV(\delta) = \frac{\frac{1}{N} \|\delta C_i^y - C_i^y\|^2}{\left| \frac{N_0}{N} \right|^2} \quad (6)$$

Où  $N_0$  est le nombre de coefficients remplacés par zéro et  $N$  le nombre de coefficients total.

Soit :  $\delta^* = \arg \min_{\delta} \{GCV(\delta) : \delta \in \mathfrak{R}^+\}$ , Le théorème suivant

montre que cette méthode est asymptotiquement optimale, i.e., lorsque  $N$  est grand, le seuil  $\delta^*$  minimise également la fonction risque :  $R(\delta) = E\{\|f - \hat{f}_\delta\|^2\}$ .

**Théorème.** Si  $\delta^* = \arg \min_{\delta} \{GCV(\delta) : \delta \in \mathfrak{R}^+\}$  et

$\tilde{\delta} = \arg \min_{\delta} \{R(\delta) : \delta \in \mathfrak{R}^+\}$ , alors  $\frac{E\{R(\tilde{\delta})\}}{E\{R(\delta^*)\}} \rightarrow 1$ , lorsque  $N \rightarrow \infty$ .

Au voisinage de  $\delta^*$ , on a [8] :  $E\{GCV(\delta)\} = E\{R(\delta)\} + \sigma^2$ .

L'estimateur GCV est construit autour du fait qu'un estimateur du risque  $R$  est donné par :

$$SURE(\delta) = \frac{1}{N} \|\delta C_i^y - C_i^y\|^2 + \frac{N - 2N_0}{N} \sigma^2 \quad (7)$$

L'utilisation propre de l'estimateur GCV impose donc que le bruit soit stationnaire dans le domaine ondelettes. Par conséquent, la TOD doit être orthogonale, du moment que la TOD non orthogonale d'un bruit stationnaire est un bruit non stationnaire [12]. Lorsque le taux du bruit est différent pour chaque coefficient, il est clair que cette méthode échoue, c'est le cas d'un bruit corrélé. La procédure GCV a été modifiée selon le lemme suivant :

**Lemme.** Si  $C_{i,j}^n$  est un coefficient en ondelettes d'un bruit  $n$  à la position  $i$ , à la résolution  $j$ , sa variance ne dépend que de  $j$ .

Ce lemme suggère d'utiliser à chaque niveau de résolution un seuil différent, choisi de sorte à minimiser la GCV modifiée [9] :

$$GCV_j(\delta_j) = \frac{\frac{1}{N_j} \|\delta C_{i,j}^y - C_{i,j}^y\|^2}{\left| \frac{N_{0j}}{N_j} \right|^2} \quad (8)$$

Soit :  $\delta_j^* = \arg \min_{\delta_j} \{GCV_j(\delta_j) : \delta_j \in \mathfrak{R}^+\}$ .

## 5. Algorithme final de filtrage

L'algorithme pratique de programmation de la méthode GCV est le suivant :

1. Calculer la TOD par l'algorithme en multirésolution (S-Mallat) de l'écho ultrasonore ;
2. Affecter arbitrairement les valeurs pour le seuil  $\delta$  ;
3. Pour la première échelle de décomposition, on applique le seuillage Soft sur les coefficients d'ondelettes obtenues dans (1) ;
4. Calculer la GCV ;
5. Chercher le seuil optimal qui minimise la fonction GCV ;
6. Appliquer ce seuil optimal aux coefficients de la première échelle (si le signal est trop bruitée, on cherche d'autres seuils optimaux aux autres échelles) ;
7. Reconstruire le signal filtré à base des nouvelles données.

## 6. Résultats et discussion

Les résultats obtenus par l'utilisation de l'algorithme de S. Mallat sur les échos filtrés par la méthode GCV (FIG.5 et FIG.6), montrent que cette approche donne une meilleure représentation du signal analysé. On constate que le bruit affectant le signal est pratiquement réduit. Par conséquent la GCV améliore considérablement le rapport signal sur bruit (RSB). Donc cette méthode permet la séparation du bruit et le reste du signal utile (propre). Ce qui aide considérablement à la localisation du défaut.

Le bruit affecte tous les coefficients, sa structure est irrégulière, de plus son énergie se concentre aux premiers niveaux de résolution, seuls ces niveaux sont alors seuillés, car ce bruit est de type haute fréquence.

L'avantage majeur de la méthode GCV c'est qu'elle n'a guère besoin d'a priori sur l'énergie du bruit. Son problème, c'est qu'elle a besoin d'un grand nombre d'échantillons et ne convient donc pas aux échelles grossières.

Les résultats de ce filtrage nous ouvrent la voie à traiter ce type d'échos pour d'autres applications ultérieures à savoir la classification des défauts détectés, ceci après construction d'une base de données type (échos filtrés).

La localisation des défauts est faite selon le théorème des moments [3] : La transformée en ondelettes permet de révéler l'aspect irrégulier des signaux. Pour cela, elle exhibe aux petites échelles, des coefficients de grande amplitude là où le signal est irrégulier, et des coefficients nuls ou quasi nuls là où il est régulier. En exploitant ce principe, on remarque que le pic de l'écho de défaut est maximal à l'échelle 3 : [ 3.1, 6.25] Mhz, sachant que cette échelle contient la fréquence d'excitation (5 Mhz), c'est à cette échelle que la probabilité de détecter le défaut est maximale. Comme cette échelle correspond à une bande de fréquence, on peut localiser ce défaut simultanément en fréquence et en temps.

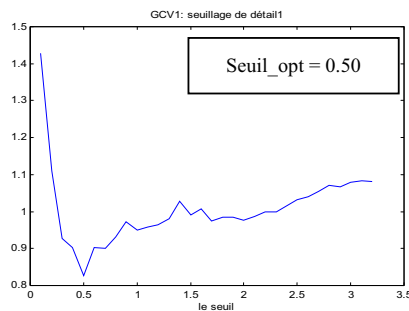


FIG. 5 : La courbe GCV du 1<sup>er</sup> détail de l'écho de fonte en fonction du seuil  $\delta$ .

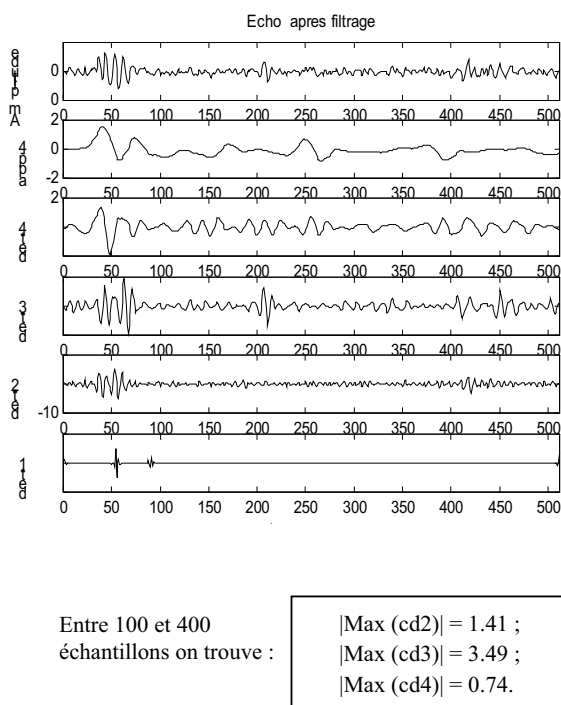


FIG. 6 : Analyse par l'algorithme de S-Mallat de l'écho de fonte après filtrage.

## 7. Conclusion

L'objectif principal de ce travail est d'expérimenter des outils de traitement numériques des signaux pour une caractérisation ultrasonore des matériaux, pour cela, nous avons utilisé des méthodes basées sur l'analyse et le filtrage dans le plan temps-échelle. Nous avons appliqué les approches proposées, sur les échos provenant des pièces et joints soudés présentant des défauts noyés dans du bruit de structure et de la chaîne d'acquisition. Les résultats obtenus ont donné satisfaction, au vu de l'avis d'experts en CND.

Par ailleurs, nous avons vu que les coefficients en Ondelettes tendent à se propager à travers les échelles, ils sont départagés en deux groupes. Le premier contient les coefficients dits réguliers dus au signal propre, le second contient ceux catalogués comme du bruit pur. Le bruit est une structure irrégulière, son énergie se trouve essentiellement aux premiers niveaux de décomposition, pour cela, seul ces niveaux sont alors seuillés. La procédure GCV est la plus

adéquate pour le filtrage de ce type d'écho, elle est plus recommandée, car elle possède l'avantage d'estimer la valeur du seuil optimal sans avoir recours à l'estimation de la puissance du bruit. Ces résultats nous encouragent à tester d'autres technique de filtrage toujours dans le plan temps-échelle à savoir la méthode MMDL (Minimax Description Length) et par seuil universel de Donoho, ainsi que mener d'autres expériences sur une base de données plus riche, afin d'intégrer cette procédure dans le contrôle industriel.

## Références

- [1] M.Lacroix. *Essais non destructifs*. Techniques de l'ingénieur Vol. M1 Métallurgie PM 110-1 PM 110-21, 1986.
- [2] F.Tafnine, A.Houacine. *L'apport des techniques de traitement numérique du signal dans le contrôle ultrasonore des matériaux*. CGE'02 EMP- Alger, Décembre 2002.
- [3] F.Tafnine, A.Houacine. *Amélioration de la caractérisation de matériaux en CND par l'introduction de l'algorithme à Trous en analyse des échos ultrasonores*. IEEE, Conférence Internationale SETIT'04 (Sousse)- TUNISIE, 15-20 Mars 2004.
- [4] A.Abbate, J.Koay, J.Frankel, S.Schroeder. *Signal detection and noise suppression using a wavelet transform signal processor : Application to ultrasonic Flaw detection*. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency control, Vol. 44, No 1, pp. 14 – 25, January 1997.
- [5] C.H.Chen, G.G.Lee. *Neural Networks for ultrasonic NDE signal classification using Time-Frequency analysis*. IEEE, ICASSP, pp. I.493 - I.496, USA 1993.
- [6] R.Drai, M.Khelil, A.Benchaala. *Flaw detection in ultrasonics using wavelets transform and Split spectrum processing*. 15<sup>th</sup> WCNDT Roma, Octobre 2000.
- [7] S.Mallat, W.L.Hwang. *Singularity detection and processing with wavelets*. IEEE Trans. Theory, Vol.38, No 2, pp. 617- 643, 1992.
- [8] Q.Pan, L.Zhang. *Two denoising methods by wavelet transform*. IEEE Trans. Signal Proc. Vol.47, No 12, 1999.
- [9] N.Meyrich, G.T.Warhola. *Wavelet shrinkage and generalized cross validation for image denoising*. IEEE Trans. Image Proc. Vol.7, No 1, pp. 82- 90, 1998.
- [10] H.Krim, I.C.Schik. *Robust wavelet thresholding for noise suppression*. ICASSP'97, IEEE 1997.
- [11] D.L.Donoho. *Denoising by soft thresholding*. IEEE Trans. Info Theory, Vol. 41, No 3, pp. 613-627, 1995.
- [12] Y.T.Chan. *Wavelet basics*. Edition, Kluwer Academic Publishers, USA 1996.



# Une Nouvelle Approche pour la Caractérisation de Mesures Corrélées. Le Cas SAR.

Carlos LOPEZ-MARTINEZ<sup>1</sup>, Eric POTTIER<sup>1</sup>

<sup>1</sup> IETR UMR CNRS 6164, Equipe S.A.P.H.I.R, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu - Bat. 11D - Bureau 101  
263 Avenue General Leclerc, 35042 Rennes Cedex, France  
carlos.lopez@univ-rennes1.fr, eric.pottier@univ-rennes1.fr

**Résumé** – L’analyse et la caractérisation des données Corrélées est important pour des différentes techniques et applications dans le traitement du signal. Ce papier considère le cas particulier de données multidimensionnelles de Radar d’Oberture de Synthèse. La première partie du papier présente un model du bruit speckle qui permet caractériser des mesures Corrélées. Ce model est emploie pour déterminer les effets du bruit speckle sûr l’estimation d’information physique à travers de la décomposition en valeurs et vecteurs propres des matrices complexes Hermitiens. Le model du bruit speckle multidimensionnel permet démontrer que les valeurs propres sont biaises à cause de la présente de sources du bruit additive.

**Abstract** – The analysis and characterization of correlated data is important for different signal processing techniques and applications. This paper considers the particular case of multidimensional Synthetic Aperture Radar data. The first part of the paper presents a speckle noise model able to characterize correlated measurements. This model is next employed to determine the effects of speckle noise on the estimation of physical information by considering the eigen decomposition of complex Hermitian matrices. The multidimensional speckle noise model allows demonstrating that the eigenvalues are biased due to the presence of additive noise sources.

## 1. Introduction

Aujourd’hui, le Radar d’Oberture de Synthèse (SAR en anglais) peut être considéré comme une technique mature pour la caractérisation de la surface de la Terre et de sa dynamique. Dans un premier période, les systèmes SAR monodimensionnels avait démontré leurs capacités pour acquière information de la surface de la Terre avec une très haute résolution spatial et d’une façon indépendante aux condition météorologiques et au cycle jour nuit [1]. Néanmoins, l’arrive des systèmes SAR multidimensionnels dans la dernière décade a montrée réellement l’intérêt de cette technologie.

Les systèmes SAR multidimensionnels ont ouvert la possibilité d’augmenter la quantité d’information qui peut être acquis d’une scène observe par le radar, et conséquemment améliorer sa caractérisation quantitative. La croissance d’information que le systèmes SAR peut fournir a son origine au fait que plusieurs canaux d’information sont acquis, mais principalement à la possibilité d’utiliser l’information de corrélation entre les différent canaux. Dans la littérature, il y a beaucoup des exemples qui montrent les capacités des systèmes SAR multidimensionnels: Interférométrie SAR (InSAR) qui permet d’obtenir la topographie du terrain [2], Polarimétrie SAR (PolSAR) qui permet caractériser les propriétés de retrodiffusion du terrain [3] et finalement la combinaison des deux en Polarimétrie Interférométrie SAR qui est utilise pour obtenir l’hôteur du végétation [4] et de là, récupérer la biomasse.

Une des principales caractéristiques des systèmes SAR est leur capacité de récupérer l’information de retrodiffusion avec une très haute résolution spatiale. Cette amélioration, par rapport aux radar d’oberture réelle, est obtenu par moyen d’analyse Doppler des ondes retrodiffuses. Cet analyse cohérent est aussi à l’origine d’un de gros problèmes dans les images SAR, le bruit speckle [5][6]. Malgré que cette source du bruit est bien caractérisé dans les systèmes

monodimensionnels, son analyse dans les systèmes multidimensionnels est encore ouvert.

L’étude et l’analyse des données SAR multidimensionnels doivent être faits avec des descripteurs statistiques matriciels de deuxième ordre. Dans le domaine SAR, les matrices les plus utilisées sont la matrice de cohérence  $\mathbf{C}$  et la matrice de covariance  $\mathbf{T}$ . Dans ce papier, les auteurs présentent un model du bruit speckle multidimensionnel pour la matrice  $\mathbf{C}$  que permet analyser les effets de cette source du bruit dans l’estimation d’information physique. L’avantage de ce model est qu’il peut être généralisé dans des autres domaines du traitement du signal parce qu’il n’est pas construit sûr le cas particulier du SAR, mais sûr la description statistique des données SAR.

## 2. Model Multidimensionnel du Bruit Speckle

Un système SAR multidimensionnel mesure le vecteur cible

$$\mathbf{k} = [S_1, S_2, \dots, S_m]^T \quad (1)$$

ou  $S_p$ , for  $p=1..m$  représentent les images SAR complexes et  $m$  dénote la dimensionnalité du système. Comme exemple,  $m=2$  pour InSAR,  $m=3$  pour PolSAR et  $m=6$  pour PolINSAR, ou les deux derniers sont sous l’hypothèse monostatic. Sous l’hypothèse de retrodiffusion Gaussienne et des données stationnaires, le vecteur  $\mathbf{k}$  est caractérisé par une loi de distribution multidimensionnelle Gaussienne complexe de moyenne zéro,  $\mathbf{k} \sim \mathcal{N}_c(\mathbf{0}, \mathbf{C})$  [5][6]. Comme résultat, il n’est pas possible d’extraire d’information à partir des moments de premier ordre car ils sont égal à zéro. Le comportement aléatoire du vecteur  $\mathbf{k}$  doit être alors étudié à partir des moments d’ordre supérieur. Comme il a été montré à l’introduction, il y a des différents descripteurs de deuxième ordre qui peut être utilisés. Entre eux, il y a la matrice de cohérence  $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = E\{\mathbf{k}\mathbf{k}^H\} = \begin{bmatrix} E\{S_1 S_1^H\} & E\{S_1 S_2^H\} & \cdots & E\{S_1 S_m^H\} \\ E\{S_2 S_1^H\} & E\{S_2 S_2^H\} & \cdots & E\{S_2 S_m^H\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\{S_m S_1^H\} & E\{S_m S_2^H\} & \cdots & E\{S_m S_m^H\} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Un des paramètres plus importants qui peut être extrait du eq. (2) est le coefficient de corrélation complexe normalisé

$$\rho_{pq} = |\rho_{pq}| \exp(j\phi_x^{pq}) = \frac{E\{S_p S_q^*\}}{\psi} = \frac{E\{S_p S_q^*\}}{\sqrt{E\{|S_p|^2\}} \sqrt{E\{|S_q|^2\}}} \quad (3)$$

pour  $p, q = 1..m$  et où l'amplitude  $|\rho_{pq}|$  reçoit le nom de cohérence. Il a été montré dans la littérature que ce paramètre est une source importante d'information physique. Dans les cas des applications InSAR, la phase  $\phi_x^{pq}$  peut être liée à la topographie du terrain et  $|\rho_{pq}|$  détermine la qualité de cette information d'une façon telle que des hautes valeurs de  $|\rho_{pq}|$  indiquent que la phase  $\phi_x^{pq}$  n'est pas presque affectée par du bruit speckle [2]. La matrice  $\mathbf{C}$  doit être estimée à partir d'échantillons du vecteur cible, eq. (1), à cause de la présence du bruit speckle. Une première option est d'utiliser l'estimateur de maximum ressemblance (MLE en anglais)

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i \mathbf{k}_i^H. \quad (4)$$

Le principal problème du eq. (4) est que la précision en l'estimation du  $\mathbf{C}$  est obtenue aux frais d'une perte de résolution spatiale, et conséquemment d'une perte de détails des images SAR. Alors, pour faire face à ce compromis entre précision et perte d'information, il faut étudier des nouvelles approches pour estimer  $\mathbf{C}$ . Une possibilité est de déterminer un modèle du bruit pour les données acquises pour le SAR, qui sera utilisé pour l'éliminer. Le système SAR mesure le vecteur cible  $\mathbf{k}$  d'où il faut estimer  $\mathbf{C}$ . Pour chaque échantillon ou pixel de l'image SAR, il est possible de créer la matrice de cohérence mono look

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 = \mathbf{k}\mathbf{k}^H. \quad (5)$$

L'objectif du modèle du bruit qui va être présenté est de déterminer comment l'information du  $\mathbf{C}$  est contenue dans  $\mathbf{Z}$ , c'est à dire, déterminer les possibles sources du bruit qui masquent  $\mathbf{C}$ . Comme il peut être observé dans eq. (2), tous les éléments du  $\mathbf{C}$ , et pourtant les éléments de la matrice de cohérence mono look  $\mathbf{Z}$ , sont formés à partir des produits Hermitiens des éléments du vecteur cible  $\mathbf{k}$ . Alors, il faut que dériver un modèle pour le produit Hermitien des éléments du  $\mathbf{k}$ , et après étendre ce modèle à tous les éléments du  $\mathbf{Z}$ . Sous l'hypothèse que  $\mathbf{k}$  est déterminé par une loi de distribution multidimensionnelle Gaussienne complexe de moyenne zéro, il a été montré que le produit Hermitien  $S_p S_q^*$  peut être approximé d'une façon très précise par le suivant modèle de bruit speckle [7]

$$S_p S_q^* = z \exp(j\phi_x) = \underbrace{\psi \bar{z}_n n_m N_c \exp(j\phi_x^{pq})}_{\text{Terme multiplicative}} + \underbrace{\psi \left( |\rho_{pq}| - N_c \bar{z}_n \right) \exp(j\phi_x^{pq}) + \psi (n_{ar} + j n_{ai})}_{\text{Terme additive}} \quad (6)$$

pour  $p, q = 1..m$ . Les différents paramètres du eq. (6) sont détaillés à la suite. Comme il peut être observé dans eq. (6), chaque produit Hermitien présente deux sources de bruit speckle

- $n_m$ : Cette composante représente un terme du bruit speckle du caractère multiplicatif, car il introduit du bruit seulement dans l'amplitude du produit  $S_p S_q^*$ . Cette composante est caractérisée par

$$E\{n_m\} = 1 \quad \text{var}\{n_m\} = 1. \quad (7)$$

- $n_{ar} + j n_{ai}$ : Cette composante dénote un terme du bruit speckle du caractère additif et complexe. Car il est du nature complexe, ce terme est responsable du bruit de phase. Les termes réel et imaginaire sont caractérisés par

$$E\{n_{ar}\} = E\{n_{ai}\} = 0$$

$$\text{var}\{n_{ar}\} = \text{var}\{n_{ai}\} = \frac{1}{2} (1 - |\rho_{pq}|^2)^{1.32}. \quad (8)$$

La reste des termes du eq. (6) sont déterminés de la manière suivante

$$\bar{z}_n = \frac{\pi}{4} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1; |\rho_{pq}|^2\right) \quad (9)$$

$$N_c = \frac{\pi}{4} |\rho_{pq}| {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; |\rho_{pq}|^2\right). \quad (10)$$

où  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  est la fonction hypergéométrique Gaussienne.

Comme il peut être observé dans eq. (6), quand le produit hermitien  $S_p S_q^*$  est caractérisé par une haute cohérence, c'est à dire, proche à un, le terme multiplicatif du speckle domine  $S_p S_q^*$ . Dans le cas extrême que  $S_p = S_q$ , le produit  $S_p S_q^*$  présente que le terme multiplicatif  $n_m$ . Ce résultat représente le modèle multiplicatif du bruit speckle qui caractérise l'intensité des images SAR [5]. Alors eq. (6) représente une extension du modèle multiplicatif classique du bruit speckle. Au contraire, quand le produit Hermitien  $S_p S_q^*$  présente une très basse cohérence, il est dominé par la composante  $n_{ar} + j n_{ai}$ . Alors, il peut être conclu, que la nature du bruit speckle dans le cas général d'un produit hermitien  $S_p S_q^*$  est non stationnaire car il dépend de  $|\rho_{pq}|$ , qui est aussi non stationnaire dans des images SAR. Finalement, il faut indiquer aussi que le terme multiplicatif du eq. (6) est modulé par le terme de phase  $\exp(j\phi_x^{pq})$  qui induit aussi une modulation du terme

multiplicatif du speckle. Cette modulation provoque que, même, dans les cas d'une très haute cohérence, les parties réel ou imaginaire du eq. (6) peuvent être dominées par un comportement additif du bruit speckle.

Finalement, le modèle du bruit speckle pour la matrice de cohérence mono look  $\mathbf{Z}$  est dérivé par une extension du eq. (6) à tous les éléments de cette matrice. Alors,

$$\text{vec}(\mathbf{Z}) = \text{diag}(\text{vec}(\mathbf{N}_m)) \text{vec}(\mathbf{C}_m) + \text{vec}(\mathbf{C}_a) + \text{vec}(\mathbf{N}_a) \quad (11)$$

où  $\text{vec}(\mathbf{X})$  représente un vecteur de dimension  $m^2 \times 1$  formé par empiler les colonnes de  $\mathbf{X}$ , et  $\text{diag}(\mathbf{x})$  forme une matrice diagonale  $m^2 \times m^2$  avec les éléments du vecteur  $\mathbf{x}$ . Dans eq. (11), les différentes matrices présentes dans la formule représentent l'extension naturelle des différentes composantes du eq. (6).

### 3. Effets dans l'Estimation d'Information Physique.

Une des plus importantes applications de données SAR polarimétriques, est la possibilité d'identifier le mécanisme de retrodiffusion observé par le radar, et portant d'obtenir d'information quantitative de la surface de la Terre. Cette caractérisation peut être mise en place à travers de la décomposition  $H/A/\alpha$  [8], qui est basée à la décomposition en valeurs et vecteurs propres de la matrice de cohérence  $\mathbf{C}$

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{Q}^H \mathbf{C} \mathbf{Q} \quad (12)$$

où la matrice diagonale  $\mathbf{\Sigma}$  contient les valeurs propres de  $\mathbf{C}$ , et  $\mathbf{Q}$  est une matrice  $m \times m$ , complexe et unitaire tel que ses colonnes représentent les vecteurs propres du  $\mathbf{C}$ .

Les valeurs propres sont indiquées par  $\{l_1, l_2, \dots, l_m\}$ , ou  $m=3$ , pour des données SAR polarimétriques dans les cas monostatic, alors que  $m=4$ , dans le cas bistatic. A partir des valeurs propres, il est possible de définir l'Entropie  $H$  [8]

$$H = -\sum_{i=1}^3 p_i \log_3(p_i) \quad p_i = \frac{l_i}{\sum_{j=1}^3 l_j}. \quad (13)$$

L'entropie  $H$  est un indicateur du caractère aléatoire des données, et pourtant il indique la quantité d'information contenue dans les données. Pour  $H$  proches de zéro, les données sont caractérisées pour présenter un mécanisme de retrodiffusion principale. Pour des entropies proche de un, les données sont caractérisées par présenter trois mécanismes de retrodiffusion complètement aléatoires. Le résultat de ce caractère complètement aléatoire est que aucune information ne peut pas être extraite des données SAR polarimétriques. L'importance du deuxième mécanisme de retrodiffusion par rapport au troisième est mesuré par l'Anisotropie  $A$  [8]

$$A = \frac{l_2 - l_3}{l_2 + l_3}. \quad (14)$$

Dans la Section 2, il a été montré que la matrice de cohérence  $\mathbf{C}$  doit être estimée à partir des données mesurées par le radar à cause de la présence du bruit speckle. Les eqs. (6) et (11) montrent les effets du bruit speckle sur l'estimation du  $\mathbf{C}$  à partir de  $\mathbf{Z}_n$ . Néanmoins, les effets du bruit speckle sur la décomposition en valeurs et vecteurs propres du  $\mathbf{C}$ , et finalement sur la décomposition  $H/A/\alpha$ , ne sont pas connus.

### 3.1 Estimation d'Information Basse en la Décomposition en Valeurs et Vecteurs Propres

Pour déterminer les effets du bruit speckle sur l'estimation d'information à partir de la décomposition  $H/A/\alpha$  il est nécessaire de déterminer ces effets sur les valeurs propres de  $\mathbf{Z}_n$ . Il est possible de démontrer que si le vecteur cible, eq. (1), est déterminé par une loi de distribution multidimensionnelle Gaussienne complexe de moyenne zéro,  $\mathbf{k} \sim \mathcal{N}_c(\mathbf{0}, \mathbf{C})$ , la matrice de cohérence  $\mathbf{Z}_n$  est décrite par une loi de distribution Wishart  $\mathbf{Z}_n \sim \mathcal{W}_c(\mathbf{C}, n)$  [9], qui pour  $n \geq m$

$$p_{\mathbf{Z}_n}(\mathbf{Z}_n) = \frac{n^m |\mathbf{Z}_n|^{n-m}}{|\mathbf{C}|^n \tilde{\Gamma}_m(n)} \text{etr}(-n\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}_n) \quad (15)$$

ou  $\text{etr}(\mathbf{X})$  est l'exponentiel de la trace du  $\mathbf{X}$ , et la fonction gamma multivariée est défini par

$$\tilde{\Gamma}_m(n) = \pi^{m(m-1)/2} \prod_{i=1}^m \Gamma(n-i+1). \quad (16)$$

La décomposition en valeurs et vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{Z}_n$  représente un changement des variables entre les termes indépendants du  $\mathbf{Z}_n$  et ses valeurs propres et les paramètres indépendants qui représentent les vecteurs propres. Alors, la loi conjointe de distribution des valeurs et vecteurs propres peut être obtenue à partir d'eq. (15) en utilisant le Jacobien associé avec la transformation en valeurs et vecteurs propres. Finalement, pour obtenir la loi marginale des valeurs ou des vecteurs propres, il faut intégrer sur les vecteurs ou les valeurs propres respectivement. Ce processus d'intégration ne peut pas être fait par des méthodes traditionnelles basées à une intégration terme à terme. Alors, si on considère que la matrice de cohérence estimée  $\mathbf{Z}_n$  présente les valeurs propres données par  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ , il est nécessaire de trouver une relation avec les valeurs propres  $\{l_1, l_2, \dots, l_m\}$  pour déterminer les effets du bruit speckle. Dans [10], les auteurs ont effectué une étude approfondie qui avait permis d'obtenir la

loi de distribution des vecteurs propres estimés  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$  et d'établir la relation avec les véritables valeurs propres  $\{l_1, l_2, \dots, l_m\}$ .

Le Jacobien de la transformation en valeurs et vecteurs propres du  $\mathbf{Z}_n$  peut être écrit de la forme suivante [11]

$$(d\mathbf{Z}_n) = \prod_{i < j}^m (\lambda_i - \lambda_j)^2 (\mathbf{Q}^H d\mathbf{Q})(d\Xi) \quad (17)$$

ou le symbole  $(d\mathbf{X})$  représente le produit extérieur des paramètres indépendants de la matrice  $\mathbf{X}$ , et  $(\mathbf{Q}^H d\mathbf{Q}) = \Lambda_{i=1}^m \Lambda_{j=1}^m \mathbf{q}_i^H \mathbf{q}_j$  est le différentiel de volume dans le groupe  $U(m)$ , connu comme mesure de Haar. Cette forme est très importante lorsque elle permet d'intégrer les vecteurs propres. Ce processus d'intégration, qui est basé à la définition de fonctions hypergéométriques des arguments matriciels et le concept de fonctions *tau* [12], permet d'établir une expression matricielle pour la loi de distribution des valeurs propres de la matrice  $\mathbf{Z}_n$  [10]

$$p_{\Xi}(\Xi) = \frac{\pi^{m(m-1)/2} n^{\frac{m}{2}(2n-m+1)}}{\tilde{\Gamma}_m(m) \tilde{\Gamma}_m(n)} \prod_{k=1}^{m-1} k^{m-k} \frac{\prod_{i=1}^m \lambda_i^{n-m} \prod_{i < j}^m (\lambda_i - \lambda_j)}{\prod_{i=1}^m l_i^n \prod_{i < j}^m (l_i^{-1} - l_j^{-1})} \exp\left(-n \frac{\lambda_i}{l_i}\right) \Bigg|_{i,j=1}^m \quad (18)$$

Comme il peut être observé, cette loi de distribution est très complexe. Alors, pour obtenir des informations sur un des valeurs propres  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$  en particulier, il faut intégrer la reste des valeurs propres. A ce moment, ce processus est seulement possible à travers des processus numériques d'intégration. Avec cet esprit, et si on considère des données SAR polarimétriques dans le cas monostatic la fig. 1 représente la moyenne des valeurs propres  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$  en fonction des échantillons moyennes  $n$  si on considère que les vraies valeurs propres prennent les valeurs  $l_1=3, l_2=2$  et  $l_3=1$ .

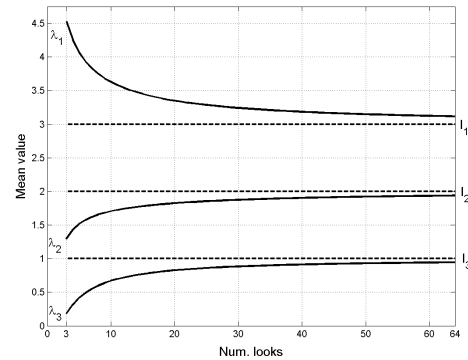


FIG. 1 Moyen des valeurs propres  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$   $n=3..64$  et  $\{l_1, l_2, l_3\} = \{3, 2, 1\}$ .

Comme il peut être observé dans la fig. 1, les valeurs propres  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$  sont biaisées par rapport aux vraies valeurs  $\{l_1, l_2, \dots, l_m\}$ . A partir de la loi de distribution du eq. (18) il est possible de dériver une expression de premier ordre pour les valeurs propres  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$  [10]

$$\lambda_i = l_i + \frac{l_i}{n} \sum_{j \neq i}^m \frac{l_j}{l_i - l_j} + O(n^{-1}) \quad i=1..m \quad (19)$$

Le comportement des courbes données dans la fig. 1 correspond avec le comportement indiqué par eq. (19).

Les biaisés sur les valeurs propres introduit aussi un biais sur les paramètres d'entropie, eq. (13), et anisotropie, eq. (14). En conséquence, comme ces paramètres sont utilisés pour extraire des paramètres physiques, ces paramètres seront aussi biaisés par rapport aux vraies valeurs.

### 3.2 Effets du Bruit Speckle sûr L'estimation des valeurs propres

Dans la Section 2 de cet papier, il a été démontré que le bruit speckle est produit par une combinaison des termes multiplicatives et additives de bruit. Egalement, il a été montré que cette combinaison est déterminée par la structure de corrélation des données, de telle façon que la partie multiplicative est dominante pour des données très Corrélées, alors que la partie additive est dominante pour des données très peu Corrélées. Dans la suite, le modèle de bruit speckle présenté dans les eqs. (6) et (11) est utilisé pour démontrer les effets des différents termes du bruit speckle sûr l'estimation des valeurs propres  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ . Cette démonstration est faite d'une façon très générale, sans être restreinte au cas particulier des données SAR polarimétriques. La démonstration est basée au théorème des cercles de Gerschgorin [13][14].

Selon le théorème des cercles de Gerschgorin, les valeurs propres d'une matrice  $\mathbf{Z}$  sont contenues dans une région du plan complexe formée par l'union des disques

$$|z - \mathbf{Z}_{pp}| \leq R_p \quad p = 1..m \quad (20)$$

qui sont définis par les centres

$$|z - \mathbf{Z}_{pp}| \quad z \in \mathbb{C} \quad p = 1..m \quad (21)$$

Et par les rayons

$$R_p = \sum_{\substack{q=1 \\ p \neq q}}^m |\mathbf{Z}_{pq}| \quad p, q = 1..m \quad (22)$$

Donnée la matrice de cohérence  $\mathbf{Z}$ , l'eq. (21) indique que les centres des  $m$  disques sont déterminés par les éléments de la diagonale de la matrice  $\mathbf{Z}$ . Ces éléments représentent la puissance dans chaque un des éléments du vecteur cible  $\mathbf{k}$  qui sont seulement affectés par le terme multiplicatif du bruit speckle. Alors,

$$E\{\mathbf{Z}_{pp}\} = E\{\psi n_p\} = \psi \quad p = 1..m. \quad (23)$$

Eq. (23) indique que les centres des disques sont pas affectés par les sources de bruit speckle, car la puissance des différents canaux est estimée sans biais. Par contre, comme il est indiqué par l'eq. (22), les valeurs des rayons des disques dépendent de l'amplitude des éléments de dehors de la diagonale de la matrice  $\mathbf{Z}$ . En prenant eq. (22), l'espérance des rayons se trouve selon

$$E\{R_p\} = \sum_{\substack{q=1 \\ p \neq q}}^m E\{|\mathbf{Z}_{pq}|\} \quad p, q = 1..m. \quad (24)$$

Si on considère l'inégalité du triangle, pour un élément particulier de dehors de la diagonale de la matrice  $\mathbf{Z}_n$ , la moyenne de l'amplitude présente la suivante expression

$$\begin{aligned} E\{|\mathbf{Z}_{pq}|\} &\leq \psi \bar{z}_n N_c + \psi (|\rho_{pq}| - N_c \bar{z}_n) + \\ &= \psi |\rho_{pq}| + E\{|\mathbf{Z}_{pq}|\} \quad p, q = 1..m \end{aligned} \quad (25)$$

A partir de la loi de distribution Wishart, eq. (15), il n'est pas possible de trouver une expression directe pour le terme  $E\{|\mathbf{Z}_{pq}|\}$  du eq. (25). Néanmoins, si on considère eq. (8) on trouve

$$E\{|\mathbf{Z}_{pq}|^2\} = \left(1 - |\rho_{pq}|^2\right)^{1.32}. \quad (26)$$

Eq. (26) indique que dans les cas de données complètement Corrélées les rayons des différents disques sont pas biaisés par rapport à ses vraies valeurs, qui sont  $\psi |\rho_{pq}|$ . Par contre, les

rayons présentent un biais quand la cohérence  $|\rho_{pq}|$  est plus petite que un. D'une façon générale, si on inclut le résultat dérivé dans eq. (26) dans eqs. (24) et (25), une perte de corrélation entre les différents canaux implique un agrandissement de la région qui contient les valeurs propres  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ , par rapport à la région qui contient les vraies valeurs propres  $\{l_1, l_2, \dots, l_m\}$ . Comme  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ , et aussi  $\{l_1, l_2, \dots, l_m\}$ , sont réels et positifs, alors que les matrices  $\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{C}$  sont des matrices Hermitiennes définies semipositives, l'agrandissement de la région qui contient les valeurs propres indique que le terme additive de bruit speckle est le responsable des biais sûrs des valeurs propres.

### 4. Conclusions

Le comportement aléatoire des mesures Corrélées, connu comme bruit speckle dans le domaine de mesures multidimensionnelles avec des Radars d'Oberture de Synthèse, peut être caractérisé par une combinaison de termes du bruit avec des caractères multiplicatif et additif. Le modèle de bruit speckle proposé a permis démontrer que les valeurs propres de la matrice de cohérence  $\mathbf{Z}$ , qui caractérise les mesures Corrélées, sont biaisées par rapport aux vraies valeurs. Ce biais est induit principalement par des sources additives du bruit speckle.

### Références

- [1] J. C. Curlander and R. N. McDonough, *Synthetic Aperture Radar: Systems and Signal Processing*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1991.
- [2] R. Bamler and P. Hartl, "Synthetic Aperture Radar Interferometry," *Inverse Problems*, vol. 14, pp. R1-R54, 1998.
- [3] F. T. Ulaby and C. Elachi, *Radar Polarimetry for Geoscience Applications*. Norwood, MA: Artech House, 1990.
- [4] S. R. Cloude and K. P. Papathanassiou, "Polarimetric SAR Interferometry," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 36, no. 5, pp. 1551 – 1565, Sept. 1998.
- [5] J. S. Lee, "Speckle Analysis and Smoothing of Synthetic Aperture Radar Images," *Comput. Graph. Image Process.*, vol. 17, pp. 24-32, 1981.
- [6] F. M. Henderson and A. J. Lewis, *Principles & Applications of Imaging Radar Vol. 2*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- [7] C. López-Martínez and X. Fábregas, "Modelling and Reduction of SAR Interferometric Phase Noise in the Wavelet Domain," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 40, no. 12, pp. 2553 – 2566, Dec. 2002.
- [8] S. R. Cloude and E. Pottier, "A Review of Target Decomposition Theorems in Radar Polarimetry," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 34, no. 2, pp. 498 – 518, March 1996.
- [9] N. R. Goodman, "Statistical Analysis Based on a Certain Multivariate Complex Gaussian Distribution (an Introduction)," *Ann. Math. Statist.*, vol. 34, pp. 152-177, 1963.
- [10] C. Lopez-Martínez, E. Pottier, "Statistical Assessment of Eigenvector-Based Target Decomposition Theorems in Radar Polarimetry" in *Proc. IGARSS, Anchorage, Alaska*, Sept. 2004.
- [11] C. E. Porter, *Statistical Theories of Spectra: Fluctuations*. Academic Press, New York, 1965.
- [12] E. Data, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, "Transformation groups for soliton equations" in: *Nonlinear integrable systems – classical theory and quantum theory*. World Scientific, 29-120, 1983.
- [13] R. A. Brualdi, S. Mellendorf, "Regions in the complex plane containing the eigenvalues of a matrix," *The Am. Mathematical Monthly*, Vol. 101, no. 10, pp. 975-985, Dec 1994.
- [14] E. W. Weisstein, "Gerschgorin Circle Theorem." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/GerschgorinCircleTheorem.html>

# Localisation de source par filtrage modal : Application à des données petites échelles en ASM

Barbara NICOLAS<sup>1</sup>, Philippe ROUX<sup>2</sup>, Jean-Louis LACOUME<sup>1</sup>, Jérôme MARS<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire des Images et des Signaux  
INPG/ENSIEG, BP 46, 38402 St Martin d'Hères, France

<sup>2</sup> Marine Physical Laboratory  
8820 Shellback Way, La Jolla CA 92093-0238, Etats Unis  
barbara.nicolas@lis.inpg.fr, proux@ucsd.edu  
jean-louis.lacoume@lis.inpg.fr, jerome.mars@lis.inpg.fr

**Résumé** – Dans les environnements océaniques peu profonds, la propagation peut être modélisée, à grande distance, par une somme de modes. En utilisant les coefficients d'excitation de ces modes, le filtrage modal permet de localiser une source acoustique située dans le guide d'ondes océanique. Une méthode permettant l'extraction de ces coefficients à partir d'un réseau horizontal de capteurs a été développée [6]. Celle-ci est appliquée sur un ensemble de données "petites échelles" réalisées en cuve et reproduisant un guide d'ondes océanique. Ses performances sont étudiées et une amélioration est proposée.

**Abstract** – In shallow water environments, the acoustic field propagates at long range as depth dependent modes. Using these modes and particularly their excitation factors, modal filtering achieves source localization in oceanic waveguides. A method estimating these coefficients using a Horizontal Array of Sensors has been developed [6]. This method is applied to ultrasonic data recorded in a tank which emulates a shallow water waveguide and we propose an improvement of the method.

## 1 Introduction

Dans les environnements océaniques peu profonds, les méthodes classiques de **localisation de source** par formation de voies ne pouvant pas être appliquées, le **filtrage modal** constitue une alternative fréquemment utilisée [1, 7, 10]. A grande distance, de tels environnements peuvent être considérés comme des guides d'ondes permettant une propagation modale des ondes. Le filtrage modal consiste alors à utiliser les modes pour localiser la source. L'information de profondeur de source est contenue dans les coefficients d'excitation des modes. Ceux-ci sont extraits par filtrage puis comparés à des coefficients théoriques obtenus pour différentes profondeurs de sources (généralement à partir des équations analytiques de la propagation dans un guide parfait [7, 11], ou en utilisant un modèle de propagation basé sur les modes normaux [10]). La profondeur estimée est alors celle pour laquelle les coefficients d'excitation des modes théoriques sont les plus proches des coefficients réels.

Nous souhaitons ici estimer la profondeur  $z_s$  d'une source acoustique Ultra Basse Fréquence (1-100 Hz) à partir d'un **réseau horizontal de capteurs**, posés sur le fond, et enregistrant le champ de pression à grande distance. Dans cette configuration spécifique, la généralisation du filtrage modal [7] n'est pas applicable et il faut adopter une nouvelle approche pour extraire les coefficients d'excitation des modes de la section enregistrée. L'**espace fréquence - nombre d'onde**  $f - k$ , issu de la double transformée de Fourier en temps et distance de la section enregistrée, con-

stitue une alternative intéressante : il permet de séparer les modes, localisés sur les courbes de dispersion, du bruit réparti sur l'ensemble du plan  $f - k$ . Nous proposons donc une approche dans ce plan, basée sur un filtrage par masque, pour réaliser l'extraction des coefficients d'excitation des modes et l'estimation de la profondeur de la source.

Après une présentation de la méthode de filtrage modal dans le plan  $f - k$ , nous validons ce filtrage sur un jeu de données réelles "petites échelles", réalisée en cuve au Marine Physical Laboratory (SCRIPPS, San Diego), dans un guide constitué d'une couche d'eau sur un socle d'acier. Sur cet ensemble de données, nous évaluons les performances de la méthode d'estimation de la profondeur de source et nous montrons que la connaissance du signe des coefficients d'excitation des modes permet d'améliorer de manière significative les résultats obtenus.

## 2 Localisation par filtrage modal dans le plan $f - k$

La méthode de filtrage modal employée pour estimer la profondeur de la source a été présentée en détail dans [4, 6]. Nous nous contentons ici de décrire les principales étapes. Les signaux traités sont la sortie d'une antenne rectiligne de capteurs de pression. Nous appelons "section sismique" la matrice contenant l'ensemble des signaux enregistrés.

**Correction de vitesse :** Cette étape préliminaire consiste à appliquer une correction de vitesse sur l'ensemble des signaux de la section sismique afin que l'onde directe arrive au même instant sur l'ensemble des capteurs. Ce pré-traitement, classique en sismique, évite le repliement [3] et permet la séparation des modes dans le plan  $f - k$ .

**Construction des masques des modes dans le plan  $f - k$  :** Nous considérons un guide d'ondes de Pekeris constitué d'une couche de fluide représentant le milieu océanique, de hauteur  $D$  de vitesse  $V_1$  et de densité  $\rho_1$  et d'une couche de fluide représentant le fond de vitesse  $V_2$  et de densité  $\rho_2$ . Dans cette configuration, l'étude de la propagation [8, 2] a montré que l'énergie des signaux reçus se répartit sur des courbes, appelées courbes de dispersion de modes.

Pour chaque mode, il est possible de tracer ces courbes dans le plan  $f - k$  à partir de l'équation qui relie la fréquence  $f_m$  du mode  $m$  au nombre d'onde horizontal  $k_{rm}$  [2]. Dans la pratique, les modes ne sont pas situés sur une ligne unique mais sur une région, il est donc nécessaire d'effectuer une dilatation du masque correspondant au tracé théorique des courbes de dispersion. De plus, cette dilatation permet d'améliorer la robustesse de la méthode vis-à-vis des erreurs d'identification du milieu [4]. La figure 1 présente les masques des modes obtenus pour les données petites échelles présentées par la suite.

Il est important de noter que pour le cas particulier d'un guide d'ondes eau/acier, la vitesse des ondes de cisaillement (S) dans l'acier étant supérieure à la vitesse des ondes de compression (P), le modèle du guide de Pekeris (constitué de deux couches de fluides) ne représente plus une bonne approximation du milieu et doit être adapté. Une solution simple mais réaliste consiste à considérer le guide eau/acier comme un guide de Pekeris en utilisant comme vitesse des ondes dans le fond celle des ondes S dans l'acier (et non pas celle des ondes P dans l'acier).

**Coefficients d'excitation des modes des données réelles :** Une fois, les masques correspondant à chaque mode construits, il est possible, grâce à un filtrage par masque sur la transformée  $f - k$  de la section sismique, d'extraire chacun des modes dans le plan  $f - k$  et de calculer l'énergie associée. Ces coefficients conduisent à une estimation des modules des coefficients d'excitation des modes des données réelles.

**Simulations et extraction des coefficients sur les données simulées :** L'étape suivante consiste à réaliser un ensemble de simulations pour différentes profondeurs de sources dans un environnement le plus proche possible de l'environnement réel. L'identification de l'environnement a été réalisée dans [5] et les simulations sont réalisées à partir d'un logiciel par différences finies permettant de prendre en compte l'ensemble des ondes existant dans l'eau et le sous-sol [9]. Pour chacune de ces simulations, les coefficients d'excitation des modes sont extraits de manière similaire à celle utilisée sur les données réelles.

**Fonction de contraste :** La dernière étape consiste à

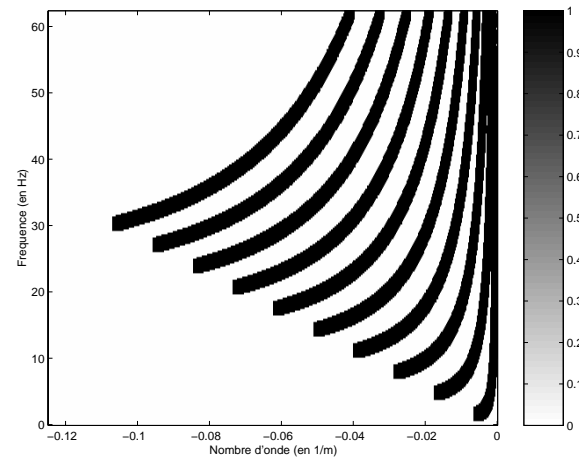


FIG. 1 – Masques des modes dans le plan  $f - k$

comparer, à l'aide d'une fonction de contraste, les coefficients extraits des données réelles à l'ensemble des coefficients extraits des données simulées. La profondeur estimée est alors celle pour laquelle la fonction de contraste est maximale, c'est à dire la profondeur pour laquelle les coefficients d'excitation réels et simulés sont les plus proches.

### 3 Application sur des données "petites échelles"

#### 3.1 Contexte expérimental

Le principe des expériences "petites échelles" est le suivant : en multipliant la fréquence du signal source par un facteur  $x$ , on divise les distances par ce même facteur. Les phénomènes physiques de propagation des ondes n'étant pas affectés par ce changement d'échelle, il est possible de réaliser une propagation océanique à grande distance dans une cuve de faibles dimensions. La cuve ayant une longueur de 1 m, le facteur d'échelle choisi est de  $10^4$  ce qui permet de simuler une propagation océanique d'environ 10 km. Nous parlerons d'échelle "réduite" pour les grandeurs utilisées au cours de l'expérience et d'échelle "réelle" pour les valeurs correspondantes dans un guide océanique. Les grandeurs seront données par défaut en échelle réelle.

Le **guide** est constitué d'une couche d'eau de 266 m et d'un fond constitué d'acier (ce qui diffère d'un fond océanique réel mais permet tout de même d'étudier les principales propriétés des guides d'ondes océaniques). La **source** est située dans la colonne d'eau et émet une modulation linéaire de fréquence entre 10-50 Hz. Le **système de réception** est constitué d'une antenne linéaire de 514 capteurs, espacés de 10 m, et commençant à 4 km de la source. Nous disposons de 22 sections sismiques pour des profondeurs de source comprises entre 30 et 240 m avec un pas de 10 m.

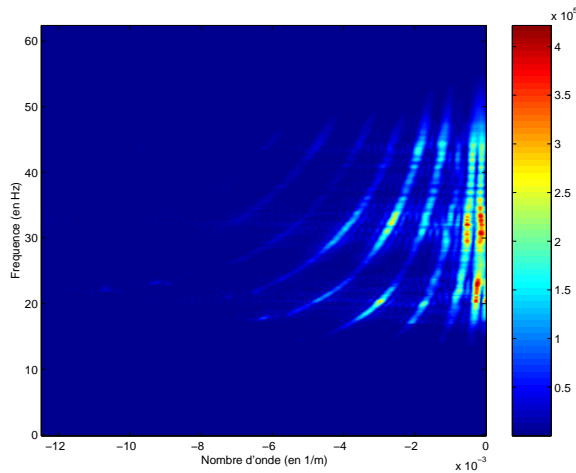


FIG. 2 – Transformée  $f - k$  de la section sismique enregistrée pour  $z_s = 70$  m

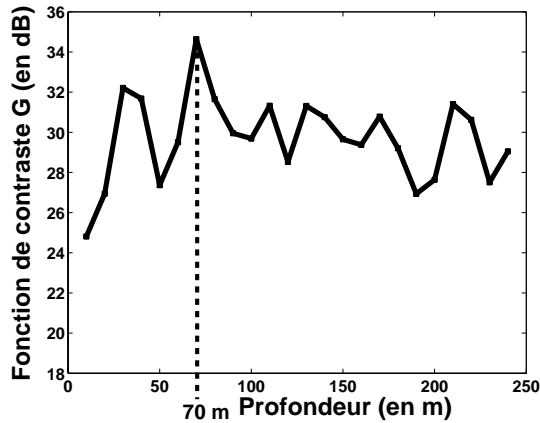


FIG. 3 – Fct. de contraste pour une source située à  $z_s = 70$  m

### 3.2 Résultats obtenus

Étudions tout d'abord en détail le cas d'une source située à une profondeur  $z_s = 70$  m. La vitesse  $V_1$  des ondes dans la cuve a été mesurée et vaut 1487 m/s. Nous appliquons donc une correction de vitesse  $V_1$ . Par ailleurs, la construction des masques des modes est réalisée et permet d'obtenir les masques présentés sur la figure 1. Puis la transformée  $f - k$  de la section sismique est calculée (figure 2) et les coefficients d'excitations des modes extraits des données réelles. Un ensemble de simulations est réalisé pour des profondeurs de source allant de 10 à 240 m, et les coefficients d'excitation des données simulées sont extraits. La fonction de contraste est calculée (figure 3) et permet d'estimer une profondeur de source de 70 m ce qui correspond à la valeur mesurée en pratique.

Le traitement est répété sur l'ensemble des données et les résultats sont présentés dans le tableau 1 (colonne 2). La taille de l'émetteur en échelle réelle étant de 10 m, l'estimation de la profondeur de source est considérée comme

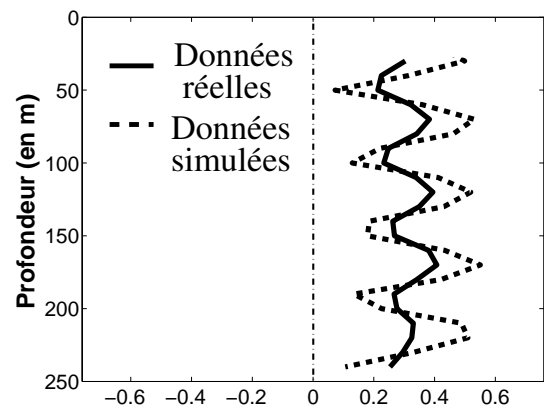


FIG. 4 – Module du coef. d'excitation du mode 6 (trait plein : données réelles ; tiret : données simulées)

correcte tant que l'erreur d'estimation reste entre 0 et 10 m soit dans 15 cas sur 22. Ces résultats n'étant pas totalement satisfaisants, nous étudions l'apport du signe des coefficients d'excitation des modes sur les performances de la méthode.

### 3.3 Apport du signe des coefficients d'excitation

La méthode proposée utilise les modules des coefficients d'excitation des modes pour estimer la profondeur de la source. Dans l'expérience présentée ici, il est possible d'extraire le signe de ces coefficients (car nous disposons d'un ensemble de profondeurs de source, ce qui ne serait pas le cas en pratique pour la localisation d'une unique source). Cette extraction a été réalisée [4] : la figure 4 présente le module du coefficient d'excitation du mode 6 pour l'ensemble des profondeurs de sources (données réelles et simulées) et la figure 6 présente le coefficient d'excitation avec son signe pour ces mêmes profondeurs de source.

En utilisant les coefficients d'excitation avec leur signe, il est alors possible de calculer la fonction de contraste entre un jeu de coefficients réels et l'ensemble des coefficients simulés : la figure 5 présente la fonction de contraste obtenue pour une source réelle située à 70 m de profondeur. La dynamique est identique à celle de la fonction de contraste obtenue à partir des modules des coefficients d'excitation (figure 3). La fonction de contraste obtenue en tenant compte du signe présente un pic plus prononcé à 70 m et pas de pics secondaires (pouvant conduire à une mauvaise estimation de la profondeur). De plus, en traitant l'ensemble des données (tableau 1, colonne 3), nous obtenons 21 estimations correctes sur 22 soit une amélioration importante par rapport aux résultats précédents. La prise en compte du signe des coefficients d'excitation des modes permet donc une amélioration significative de l'estimation de la profondeur de source. Des travaux doivent être développés pour extraire cette information à partir de la représentation  $f - k$  ou de représentations temps-fréquence.

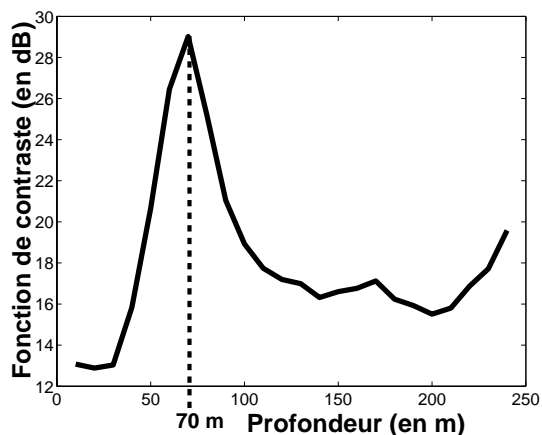


FIG. 5 – Fct. de contraste pour une source située à  $z_s = 70$  m avec utilisation du signe des coefficients d'excitation

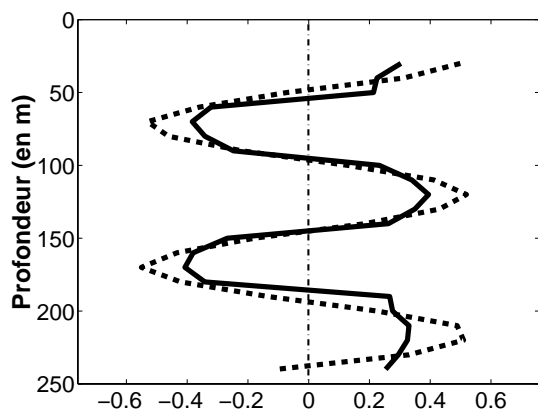


FIG. 6 – Coef. d'excitation du mode 6 avec son signe (trait plein : données réelles ; tiret : données simulées)

	Sans signe	Avec signe
Erreur d'estimation	Nb d'estimations ayant une erreur donnée	Nb d'estimations ayant une erreur donnée
< 10 m	9	16
= 10 m	6	5
> 10 m	7	1

TAB. 1 – Erreur d'estimation de la profondeur de source sans et avec utilisation du signe des coefficients d'excitation

## 4 Conclusion

Dans des environnements océaniques peu profonds, le filtrage modal utilise les coefficients d'excitation des modes, extraits à partir d'un réseau vertical de capteurs, afin de localiser une source acoustique située dans la colonne d'eau. Dans le cas d'un réseau horizontal de capteurs, les méthodes classiques ne peuvent pas être appliquées, nous avons proposé une méthode permettant cette extraction, basée sur la physique de la propagation et la transformée fréquence - nombre d'onde.

Cette méthode a été appliquée à des données "petites échelles", reproduisant une guide d'ondes océanique, pour lesquelles la profondeur de source était connue de manière précise. Ses performances ont été étudiées et nous avons montré que l'estimation de la profondeur de source pouvait être améliorée grâce à la connaissance du signe des coefficients d'excitation des modes.

## Références

- [1] C.W. Bogart and T. C. Yang. Comparative performance of matched-mode and matched-field localization in a range-dependent environment. *J. Acoust. Soc. Am.*, 92(4) :2051–2068, 1992.
- [2] F. B. Jensen, W. A. Kuperman, M. B. Porter, and H. Schmidt. *Computational ocean acoustics*. AIP press, NY, 1994.
- [3] J.-L. Mari, F. Glangaud, and F. Coppens. *Traitement du signal pour géologues et géophysiciens : techniques de base*. Editions Technip, Paris, 2001.
- [4] B. Nicolas. *Identification du milieu océanique et localisation de source en Ultra Basse Fréquence (1-100 Hz)*. PhD thesis, INPG, Grenoble, 2004.
- [5] B. Nicolas, J. Mars, and J.-L. Lacoume. Geoaoustical parameters estimation with impulsive and boat noise sources. *IEEE J. Oceanic Eng.*, 28(3) :494–501, 2003.
- [6] B. Nicolas, J. Mars, and J.-L. Lacoume. Source depth estimation using modal decomposition and frequency-wavenumber transform. In *12th European Signal Processing Conference*, Vienne, 2004.
- [7] E. C. Shang. Source depth estimation in waveguides. *J. Acoust. Soc. Am.*, 77(4) :1423–1418, 1985.
- [8] R. J. Urick. *Principles of underwater sound for engineers*. MacGraw Hill, New York, 1967.
- [9] J. Virieux. P-SV wave propagation in heterogeneous media : velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, 51(4) :889–901, 1986.
- [10] G. R. Wilson, R. A. Koch, and P. J. Vidmar. Matched mode localization. *J. Acoust. Soc. Am.*, 84(1) :310–320, 1988.
- [11] T. C. Yang. A method of range and depth estimation by modal decomposition. *J. Acoust. Society America*, 82(5) :1736–1745, 1987.



# Application d'opérateurs de fusion floue à la classification automatique de cibles réalisée par un radar polarimétrique

E. RADOI<sup>1</sup>, A. QUINQUIS<sup>1</sup>, F. TOTIR<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>ENSIETA, 2 rue François Verny, 29806 Brest, France

radoiem@ensieta.fr, quinquis@ensieta.fr

<sup>2</sup>METRA, Bucarest, Roumanie

totirfe@ensieta.fr

**Résumé** – L'article décrit l'application de quelques opérateurs de fusion floue pour la classification automatique de profils de distance mesurés par un radar polarimétrique. L'acquisition des signatures radar réelles est réalisée dans la chambre anéchoïde de l'ENSIETA, pour 5 modèles d'avions réduits à l'échelle et 3 combinaisons de polarisation. L'analyse des résultats en classification obtenus au travers des intégrales de Sugeno et de Choquet, ainsi que de la théorie des possibilités, permet de conclure sur les opérateurs de fusion floue les mieux adaptés dans le contexte de l'application visée.

**Abstract** – The paper describes the application of some fuzzy fusion operators in the framework of automatic classification of polarimetric radar range profiles. Real radar signature acquisition has been performed in the anechoic chamber of ENSIETA, for 5 scale reduced aircraft models and 3 polarization combinations. The analysis of the classification results obtained using Sugeno's and Choquet's integrals, as well as the possibility theory allows to conclude about the best suited fuzzy fusion operators in the context of the application we have dealt with.

## 1. Introduction

Les profils de distance représentent une des signatures des cibles radar les plus utilisées pour leur classification automatique [1]. Le profil de distance d'une cible peut être obtenu par son illumination avec un signal à large bande et représente la projection de ses points brillants sur la ligne de visée.

Pour un système de classification donné, les performances sont d'autant meilleures que le volume d'information disponible est important. La solution idéale, constituée par la fusion des données issues de plusieurs capteurs, ne peut pas être envisagée pour un système autonome, d'un niveau de complexité moyen, comme c'est le cas de la plupart des radars actuels.

Cependant, une réponse intéressante à ce problème peut être imaginée dans le cas du radar polarimétrique, qui représente aujourd'hui une solution technologique de plus en plus utilisée. Avec ce radar il est possible d'obtenir simultanément trois signatures pour une même cible, correspondant aux combinaisons de polarisation HH, VV et HV (ou VH). Ces signatures étant partiellement complémentaires on peut s'attendre à obtenir de meilleures performances après leur fusion que dans le cas où chacune d'elles est classifiée séparément.

Afin de réaliser la fusion des profils de distance obtenus pour les trois combinaisons de polarisation, nous avons utilisé les intégrales floues de Sugeno et de Choquet et la théorie des possibilités. Le choix de ces opérateurs de fusion floue a été motivé par trois raisons principales. Tout d'abord, ces opérateurs permettent de prendre en compte, à la fois, l'incertitude et l'imprécision associées aux données réelles. Deuxièmement, ils présentent une grande flexibilité, grâce au

choix des fonctions d'appartenance floue et des opérateurs de combinaison. Troisièmement, leur mise en œuvre passe par des opérations relativement simples et rapides, ce qui les rend particulièrement adaptés pour les applications pratiques.

L'article est organisé de la manière suivante. La procédure de classification est présentée dans la section 2, ainsi que le choix des fonctions d'appartenance et les opérateurs de fusion. La section 3 décrit le cadre expérimental et les cibles utilisées, montre les résultats obtenus en classification et permet de comparer les différents opérateurs de fusion utilisés. Enfin, quelques conclusions et perspectives sont discutées dans la section 4.

## 2. Procédure de fusion

Les fonctions d'appartenance floue pour chaque profil de distance sont déterminées en fonction des coefficients d'appartenance de ses plus proches voisins appartenant à l'ensemble d'apprentissage et des distances par rapport à ceux-ci. Ainsi, si  $V_K(x)$  désigne le voisinage, à l'ordre  $K$ , du profil de distance de test  $x$ , alors son coefficient d'appartenance à la classe  $C_j$  est défini sous la forme :

$$u_j(x) = \frac{\sum_{x_m \in V_K(x)} u_{jm} \|x - x_m\|^{-2}}{\sum_{x_m \in V_K(x)} \|x - x_m\|^{-2}} \quad (1)$$

où  $u_{jm}$  représente le coefficient d'appartenance du profil de distance d'apprentissage  $x_m$  à la classe  $C_j$ .

Le coefficient d'appartenance d'un profil de distance d'apprentissage à une certaine classe est calculé à partir du nombre relatif de ses voisins issus de cette classe :

$$u_{jm} = \frac{K_j^{(m)}}{K_F}, \quad K_j^{(m)} = \text{card}\{\mathbf{x}_n^{(j)} \mid \mathbf{x}_n^{(j)} \in V_{K_F}(\mathbf{x}_m)\} \quad (2)$$

où  $V_{K_F}(\mathbf{x}_m)$  représente le voisinage à l'ordre  $K_F$  du profil de distance d'apprentissage  $\mathbf{x}_m$ .

Les coefficients d'appartenance ainsi définis varient de 0 à 1 et peuvent être vus comme une mesure de la capacité des profils de distance à être plus ou moins représentatifs pour une classe. La somme des coefficients d'appartenance d'un profil de distance à toutes les classes doit être égale à 1.

Définir l'appartenance aux classes de cette manière floue est moins contraignant et correspond mieux à la réalité physique, puisque les transitions d'une forme à l'autre sont souvent continues.

Les intégrales floues de Sugeno [2] et de Choquet [3] permettent de combiner les fonctions d'appartenance floue définies précédemment en utilisant les relations :

$$S_j = \max_{i=1,3} [\min(u_j(p_i), g(A_i))] \quad (3)$$

$$C_j = u_j(p_3) + \sum_{i=1}^2 [u_j(p_i) - u_j(p_{i+1})] g(A_i) \quad (4)$$

Dans les relations ci-dessus,  $\{p_i\}_{i=1,3}$  représentent les trois combinaisons de polarisation prises dans l'ordre qui correspond à la relation suivante :

$$u_j(p_1) \geq u_j(p_2) \geq u_j(p_3) \quad (5)$$

La fonction  $g$  définit la densité floue calculée pour les ensembles  $A_1 = \{p_1\}$ ,  $A_2 = \{p_1, p_2\}$  et  $A_3 = \{p_1, p_2, p_3\}$ , en utilisant l'expression de la mesure  $g_\lambda$  floue :

$$\begin{cases} g(A_1) = g(\{p_1\}) = g^1 \\ g(A_i) = g^i + g(A_{i-1}) + \lambda \cdot g^i \cdot g(A_{i-1}) \end{cases} \quad (6)$$

avec  $\lambda$  obtenue comme solution de l'équation :

$$\lambda + 1 = \prod_{i=1}^3 (1 + \lambda g^i) \quad (7)$$

Les valeurs  $g^i = g(\{p_i\})$  représentent une mesure de l'imprécision des données et sont évaluées pendant l'étape d'apprentissage.

La théorie des possibilités a été développée par Zadeh [4], Dubois et Prade [5]. Elle permet de représenter à la fois l'imprécision et l'incertitude au moyen d'une distribution de possibilités et de deux fonctions caractérisant les événements : la possibilité et la nécessité.

Dans le cas de notre application, la distribution de possibilités est obtenue à partir des fonctions d'appartenance définies ci-dessus. Ensuite, quatre opérateurs de combinaison sont utilisés afin de calculer les coefficients d'appartenance aux classes des profils de distance de test : t-norme, t-conorme, moyenne et médiane [6].

Quel que soit l'opérateur de fusion utilisé, la décision finale est prise selon la règle du maximum du coefficient d'appartenance :

$$\mathbf{x} \in C_k \Leftrightarrow u_k(\mathbf{x}) = \max_j [u_j(\mathbf{x})] \quad (8)$$

### 3. Résultats des simulations

Les profils de distance que nous avons utilisés ont été mesurés en bande X (8 GHz - 12 GHz) dans la chambre anéchoïque de l'ENSIETA, pour 5 maquettes de cibles réduites à l'échelle 1/48 : Mirage, Tornado, Rafale, F16 et DC3. Leurs images sont présentées sur la figure 1.

180 profils de distance ont été enregistrés pour chaque cible dans le domaine angulaire compris entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$ , correspondant à des angles de visée successifs, espacés de  $0.5^\circ$ . L'ensemble des signatures ainsi obtenues a été divisé de façon aléatoire en un sous-ensemble d'apprentissage et un sous-ensemble de test, comptant le même nombre de profils de distance.

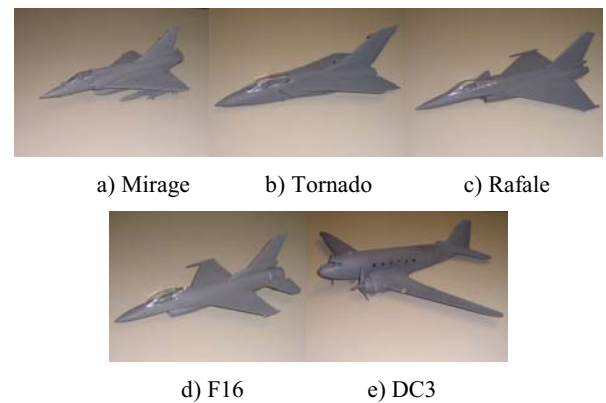


FIG. 1 : Maquettes des cibles mesurées dans la chambre anéchoïde

Les résultats correspondant à chaque opérateur de fusion sont comparés sur la figure 2 aux performances en classification obtenues à partir de chaque type de signature, qui sont aussi reprises, de manière plus synthétique, par le tableau 1.

TAB. 1 : Taux moyens de bonne classification correspondant aux différentes combinaisons de polarisation

Combinaison de polarisation	HH	VH	VV
TBC moyen	0.769	0.772	0.799

Il est ainsi possible de constater, de manière globale, l'amélioration du taux de bonne classification pour les classes considérées.

Une comparaison des opérateurs de fusion est réalisée sur la figure 3. Bien que leurs performances soient assez proches, il est à noter le meilleur comportement de l'opérateur de compromis « moyenne » dans le cadre de la méthode de fusion par théorie des possibilités.

La même conclusion peut être tirée par l'analyse du tableau 2, qui indique les taux de bonne classification, moyennés sur toutes les classes et pour chaque opérateur de fusion. Il est à noter un gain en taux moyen de bonne classification d'environ 10 %.

TAB. 2 : Taux moyens de bonne classification correspondant aux différents opérateurs de fusion floue

Opérateur de fusion floue	IF de Sugeno	IF de Choquet	T norme	T co-norme	Moy.	Méd.
TBC moyen	0.872	0.878	0.871	0.882	<b>0.904</b>	0.873

#### 4. Conclusions

Le travail de recherche présenté brièvement dans cet article a eu pour but d'étudier le comportement de quelques opérateurs de fusion floue pour la classification automatique des profils de distance obtenus au moyen d'un radar polarimétrique. L'intérêt d'une telle étude vient d'une des évolutions technologiques récentes des systèmes radar, qui sont devenus capables de mesurer des signatures électromagnétiques large bande, simultanément pour plusieurs combinaisons de polarisation.

L'information disponible est plus riche que dans le cas où un seul type de signature est utilisée. En effet, certains détails de la structure de la cible, essentiels pour la classification, ne sont visibles que lorsque celle-ci est illuminée avec une certaine combinaison de polarisation.

La difficulté du problème vient de la très forte dépendance des signatures polarimétriques large bande de l'angle de visée. Ainsi, un même type d'élément structurel de la cible n'est pas toujours mis en évidence par la même combinaison de polarisation. En fonction de la position relative entre la cible et le radar il peut être mis en évidence et représenté avec un degré variable de complétude par une ou plusieurs signatures différentes.

Le rapport signal/bruit associé à ces signatures a aussi un niveau variable en fonction de l'angle de visée et parfois très différent d'une signature à l'autre. Ce phénomène introduit à la fois de l'imprécision et de l'incertitude dans le processus de classification.

Nous avons donc un problème où l'information concernant la forme d'un objet analysé est représentée de façon non-orthogonale par plusieurs signatures, caractérisées par des niveaux différents et variables d'imprécision, incertitude et incomplétude. Leur modélisation par une approche analytique nous semble complètement irréaliste en raison de la complexité du phénomène de réflexion électromagnétique et de la grande diversité de formes structurelles possibles.

Par contre, l'approche floue que nous proposons trouve ici toute sa place, grâce à sa capacité de prendre en compte, de manière adéquate et relativement simple, les informations apportées par l'ensemble de signatures polarimétriques, en présence d'imprécision, incertitude et incomplétude.

Notre principale contribution consiste dans l'application de ce type d'opérateurs de fusion dans un contexte large bande, sur des signatures mesurées en laboratoire.

En conclusion, deux idées sont défendues et démontrées dans cet article, au travers de quelques résultats, obtenus pour un nombre très limité de cibles.

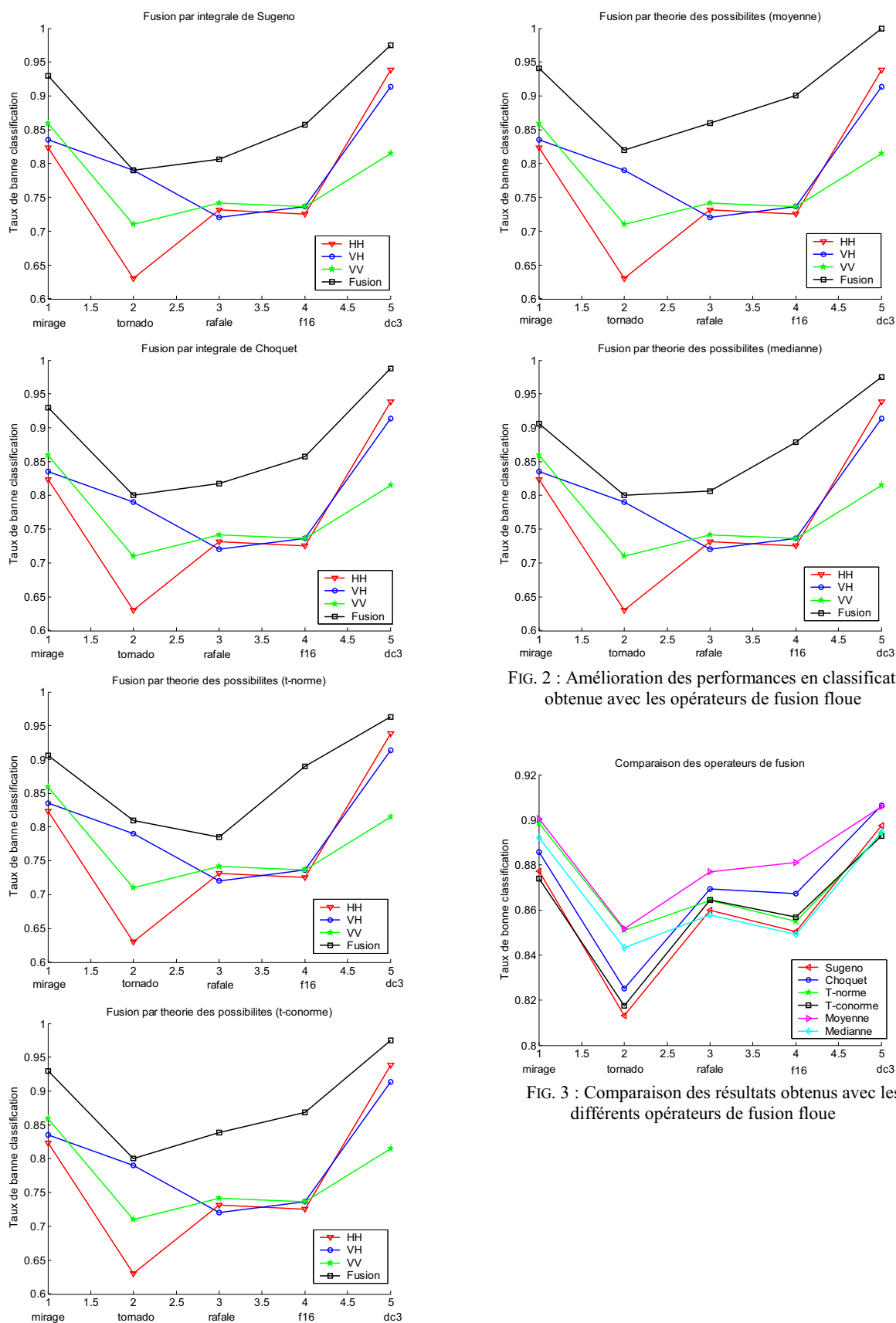
La première est que l'accès à une information plus complète sur la forme de la cible, dans le but de sa classification, passe par l'utilisation conjointe de plusieurs combinaisons de polarisation.

La seconde est qu'une manière efficace et rapide de le faire consiste à utiliser les opérateurs de fusion floue, parmi lesquels celui qui correspond à la « moyenne » dans la théorie des possibilités semble donner les meilleurs résultats.

Bien évidemment, cette dernière conclusion est provisoire est reste à confirmer sur un ensemble de données plus important, lors d'une prochaine campagne d'acquisition de signatures polarimétriques.

#### Références

- [1] V.G. Nebabin, *Methods and Techniques of Radar Recognition*, Artech House, London, 1994.
- [2] M. Sugeno, *Fuzzy Measures and Fuzzy Integrals – A Survey, Fuzzy Automata and Decision Processes*, Amsterdam, North Holland, pp. 89-102, 1977.
- [3] C. Labreuche, M. Grabisch, The Choquet integral for the aggregation of interval scales in multicriteria decision making, *Fuzzy Sets and Systems*, pages 11-26, 2003.
- [4] L. Zadeh, Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, *Fuzzy Sets and Systems*, no.1, pp. 3-28, 1978.
- [5] D. Dubois, H. Prade, *Théorie des possibilités : applications à la représentation des connaissances en informatique*, Masson, 1985.
- [6] I. Bloch, *Fusion d'informations en traitement du signal et des images*, Hermes, Paris, 2003.



# Pollution de milieux poreux : identifiabilité et identification de modèles paramétriques de sources

Aurélien HAZART<sup>1,2</sup>, Jean-François GIOVANNELLI<sup>2</sup>, Stéphanie DUBOST<sup>1</sup>, Laurence CHATELLIER<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Electricité De France - R&D  
6, quai Watier, 78401 Chatou Cedex, France

<sup>2</sup>Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS-Supélec-UPS)  
Supélec, Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France  
aurelien.hazart@edf.fr, giova@lss.supelec.fr  
stephanie.dubost@edf.fr, laurence.chatellier@edf.fr

**Résumé** – Cette communication concerne le problème d'identification de sources de pollution à partir d'un faible nombre de mesures de concentrations. Il s'agit d'un problème inverse. Plusieurs facteurs le rendant fortement mal posé, nous étudions l'identifiabilité et la stabilité de sa solution avant d'inverser. Pour cela, la source est modélisée par une fonction paramétrique de type impulsienne. Notre objectif est de caractériser l'incertitude sur l'estimation des paramètres de la source.

**Abstract** – This communication deals with the problem of identification of pollution sources based on few concentration measurements. As several factors make the problem ill-posed, we study the identifiability and the stability of its solution before inversion. The source is modeled by a parametric function. Our goal is to characterize uncertainty on the estimate of the source parameters.

## 1 Introduction

Dans le cadre de la maîtrise de l'impact environnemental de ses installations de production, EDF a développé de nombreux moyens de mesure et de calcul permettant la détection et l'évaluation d'une éventuelle pollution. Dans le cas supposé d'une pollution industrielle, les phénomènes physiques qui interviennent dans le transport de polluant sont modélisés par une équation aux dérivées partielles à coefficients constants (appelée équation de *convection-dispersion*). Pour un milieu bidimensionnel infini sans profondeur, la concentration  $c(x, y, t)$  et la source sous la forme de son débit  $f(x, y, t)$  vérifient l'équation :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} - D_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - D_t \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = f(x, y, t) \quad (1)$$

où  $v, D_1, D_t$  désignent les constantes physiques (respectivement la vitesse de convection, les coefficients de dispersion longitudinal et transverse). La solution du système de transport avec des conditions initiales et aux limites nulles s'exprime comme un produit de convolution

$$c = h * f \quad (2)$$

où  $h$  est la réponse impulsienne du système donnée par [1] :

$$h(x, y, t) = \frac{1}{4\pi t \sqrt{D_1 D_t}} \exp \left( -\frac{[x - vt]^2}{4D_1 t} - \frac{y^2}{4D_t t} \right). \quad (3)$$

La concentration n'est mesurée en réalité qu'en un nombre limité de points  $P$  correspondant au nombre de capteurs disponibles, localisés en  $(x_p, y_p)$ . Chaque capteur effectue  $N_p$  mesures temporelles conduisant aux concentrations effectivement mesurées  $c_{p,n_p}$ . L'enjeu est donc d'estimer la fonction  $f$  à partir du système de transport (2) et des concentrations mesurées.

La difficulté du problème inverse résulte des trois aspects suivants :

- le système convolutif (2) se comporte comme un filtre passe-bas qui retire une partie de l'information haute fréquence contenue dans la fonction source  $f$ ,
- le système de mesures effectue un sous-échantillonnage spatial et temporel des données,
- les incertitudes sur les mesures (erreurs de mesures ou erreurs de modélisation) peuvent être importantes.

Le problème inverse est mal posé : l'existence et l'unicité de solutions ne sont pas garanties. L'information sur la source contenue dans les données n'étant pas suffisante pour inverser, le problème est «régularisé» par la prise en compte d'informations supplémentaires. Il s'agit de restreindre l'espace des solutions afin de rendre la solution unique. On recense globalement deux approches de régularisation.

- *L'approche non-paramétrique pénalisée* consiste à rechercher la solution qui respecte certaines conditions (continuité,...). [2] et [3] proposent la régularisation de Tikhonov.
- *L'approche paramétrique* consiste à modéliser la distribution temporelle par une fonction paramétrique : l'impulsion [4], l'échelon [5], la somme d'impulsions ou la somme de gaussiennes [6], une fonction quelconque supposée connue [7].

Pour identifier une source de pollution, toutes ces méthodes prennent en compte le caractère mal posé du problème, mais sans en étudier les caractéristiques. Notre objectif est ici de caractériser l'identifiabilité du problème inverse. Pour cela, la seconde classe de méthodes est intéressante car elle permet d'étudier séparément l'influence de chacun des paramètres de la

source. La spécificité de l'étude réside dans la prise en compte d'un faible nombre de données.

Dans ce document, l'intérêt est plus particulièrement porté sur la paramétrisation de type impulsionnelle. Le terme source  $f$  de l'équation (1) prend la forme paramétrique

$$f(x, y, t) = q_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(t - t_0) \quad (4)$$

où  $q_0$  représente la quantité de polluant injectée,  $(x_0, y_0)$  la localisation de la source et  $t_0$  l'instant d'émission. Une telle source correspond à un éventuel scénario de rejet instantané et entraîne le panache de pollution de concentration

$$c(x, y, t) = q_0 h(x - x_0, y - y_0, t - t_0). \quad (5)$$

Pour la suite, en posant  $M_{p,N_p}(x_0, y_0, t_0) = h(x_p - x_0, y_p - y_0, t_p - t_0)$ , les concentrations mesurées sont exprimées sous forme discrète :

$$c_{p,n_p} = q_0 M_{p,n_p}(x_0, y_0, t_0) \quad (6)$$

pour  $p = 1 \dots P$ , pour  $n_p = 1 \dots N_p$ . Dans le cas expérimental traité à la section suivante, deux puits ( $P = 2$ ) effectuant une mesure par jour pendant 28 jours ( $N_1 = N_2 = 28$ ) sont pris en compte.

## 2 Estimations et incertitudes

Dans le but d'identifier la source impulsionnelle à partir des données, notre approche repose sur le critère des moindres carrés :

$$J(q_0, x_0, y_0, t_0) = \sum_{p=1}^P \sum_{n_p=1}^{N_p} [c_{p,n_p} - q_0 M_{p,n_p}(x_0, y_0, t_0)]^2. \quad (7)$$

Même en présence de données bruitées, la minimisation de ce critère peut être suffisante pour estimer les paramètres de la source (et donc résoudre le problème inverse). La condition est que le minimum global du critère soit unique, le modèle paramétrique est alors identifiable. Cependant deux facteurs peuvent perturber l'estimation : l'incertitude sur l'estimation peut être grande si le critère est plat autour de son minimum et la présence de minima locaux peut tromper un algorithme de minimisation. Dans [5], des minima locaux sont constatés dans le cas d'une source indiciaire et une technique d'obtention du minimum global du critère est proposée. L'objectif n'étant pas ici de développer une méthode d'identification, le critère (7) est simplement calculé sur une grille de valeurs des paramètres  $[q_0, x_0, y_0, t_0]$ . La visualisation du critère est alors utilisée comme un premier élément pertinent pour caractériser les incertitudes sur l'estimation des paramètres du modèle.

### 2.1 Analyse de données expérimentales

Les mesures expérimentales dont nous disposons, présentées à la figure 1, sont effectuées par deux capteurs alignés dans le sens d'écoulement  $x$  du milieu et distants de 55 mètres. Les coordonnées du capteur 1 sont fixées à  $(x, y) = (0, 0)$ , le capteur 2 est localisé en  $(55, 0)$ . Enfin l'instant de la première mesure est choisie comme origine de l'axe des temps.

Le tableau 1 indique les paramètres physiques du modèle de transport considéré. Dans ce cas expérimental de pollution, la

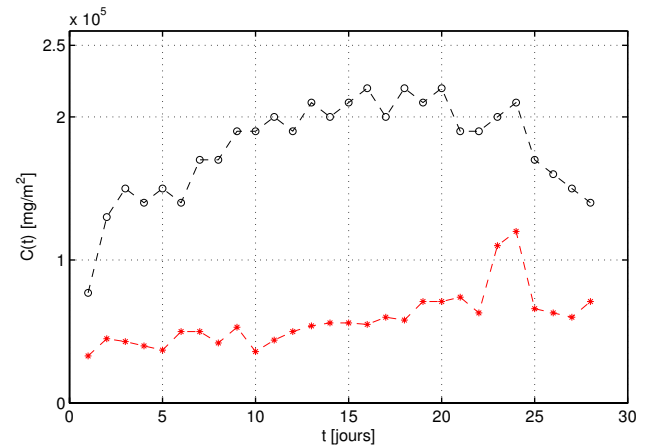


FIG. 1: Données expérimentales : capteur 1 (o), capteur 2(\*).

source n'est pas connue et le modèle impulsionnel n'est pas nécessairement le meilleur modèle. Nous sommes donc en présence de données bruitées (erreurs de mesures, erreurs de modélisation). L'intérêt de l'approche réside dans l'estimation des paramètres de la source impulsionnelle mais surtout dans l'incertitude sur cette estimation. Les paramètres estimés, minimisant le critère (7), sont indiqués au tableau 2.

TAB. 1: constantes physiques du modèle de transport

$v$	$D_l$	$D_t$
$2.3 \text{ m/j}$	$11 \text{ m}^2/\text{j}$	$2 \text{ m}^2/\text{j}$

TAB. 2: paramètres estimés de la source impulsionnelle.

$\hat{q}$	$\hat{x}$	$\hat{y}$	$\hat{t}$
$10^9 \text{ mg}$	$-210 \text{ m}$	$0 \text{ m}$	$-69 \text{ j}$

Deux tracés du critère autour de son minimum sont représentés.

- La figure 2 montre les coupes du critère en fonction de chacun des paramètres, les autres paramètres étant fixés à leur valeur estimée. On observe que le minimum est toujours bien défini.
- La figure 3 représentant le critère de moindres carrés en fonction des paramètres  $x_0$  et  $t_0$  ( $q_0$  et  $y_0$  sont fixés à leur valeurs estimées) montre en revanche que ces deux paramètres sont liés : le critère comporte une direction privilégiée pour laquelle la valeur du critère est relativement constante. Bien que le minimum du critère soit unique, l'estimation conjointe de la localisation dans le sens d'écoulement et de l'instant d'émission est incertaine.

### 2.2 Analyse de données simulées

Afin de confirmer les résultats obtenus sur des données expérimentales, l'approche est appliquée de manière similaire sur un jeu de données simulées à partir d'une source impulsionnelle connue. Pour la simulation, la source a pour paramètres

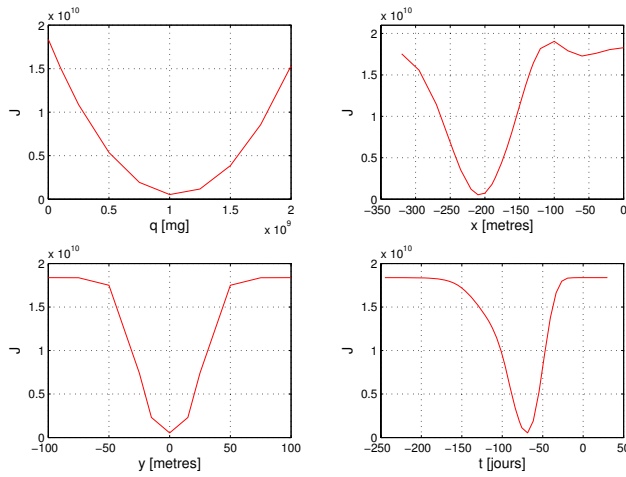


FIG. 2: Coupes monodimensionnelle du critère des moindres carrés. Les trois paramètres restants sont fixés aux valeurs estimées (tableau 2).

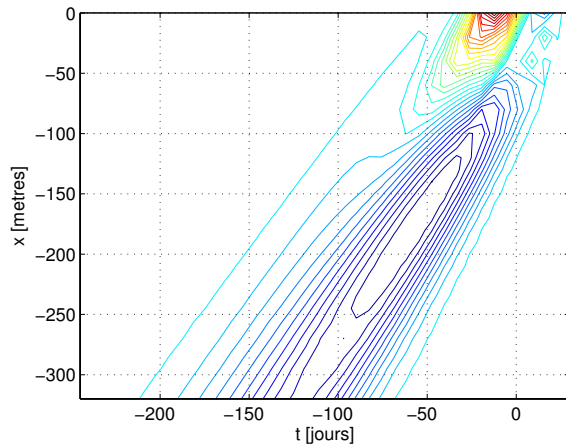


FIG. 3: Critère de moindres carrés dans le plan des paramètres  $xt$ . Les paramètres  $q$  et  $y$  sont fixés aux valeurs estimées (tableau 2).

$(x_0, y_0, t_0, q_0) = (0, 0, 0, 10^{10})$ . La figure 4 représente les concentrations mesurées au cours du temps par trois capteurs localisés en  $(x_c, y_c) = (120, 10), (90, 30), (80, -40)$ . Parmi ces valeurs, il est supposé que chaque capteur effectue deux mesures temporelles en  $t_c = 40$  jours et  $t_c = 60$  jours, marquées par les cercles sur la figure 4, constituant un jeu de six données.

Dans ce cas, la minimisation du critère  $J(q, x, y, t)$  sur une grille de valeurs des paramètres  $q, x, y, t$  conduit à l'estimation exacte des paramètres de la source : les données sélectionnées caractérisent la source de manière unique. Comme dans le cas expérimental présenté ci-dessus, l'étude du critère paramètre par paramètre (figure 5) puis dans le plan  $xt$  (figure 6) indique :

- un minimum unique et bien défini pour chaque estimée,
- une direction privilégiée dans l'espace  $xt$ , selon laquelle les valeurs minimales du critères sont proches.

L'objectif du paragraphe suivant est de caractériser analytiquement l'incertitude de l'estimation des paramètres  $x$  et  $t$ .

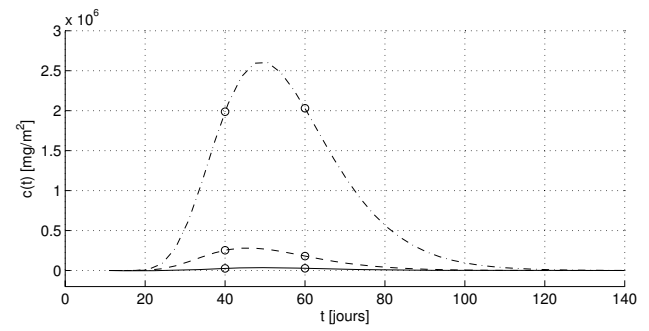


FIG. 4: Données simulées aux capteurs localisés en  $(120, 10)$ (--),  $(90, 30)$ (—),  $(80, -40)$ (-). Les cercles indiquent les mesures retenues aux instants 40 et 60 jours.

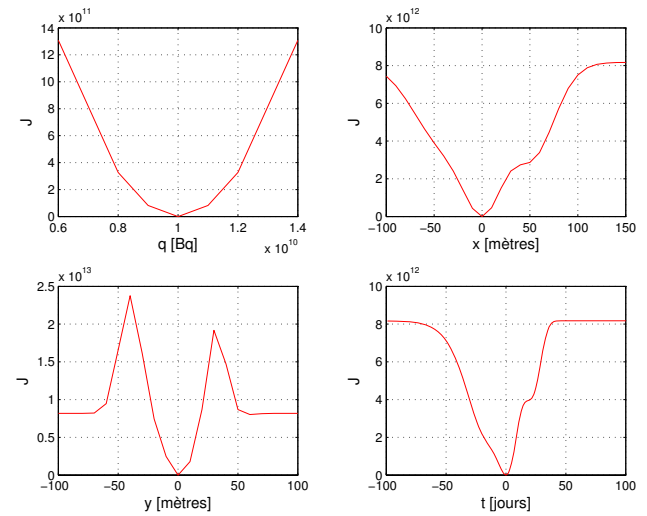


FIG. 5: Coupes monodimensionnelle du critère des moindres carrés. Les trois paramètres restant sont fixés aux valeurs estimées ( $\hat{q} = 10^{10}, \hat{x} = 0, \hat{y} = 0, \hat{t} = 0$ ).

### 2.3 Caractérisation des indéterminations

Pour expliquer les incertitudes sur les paramètres minimisant le critère, l'identifiabilité est étudiée du point de vue analytique [8]. L'approche consiste à caractériser l'unicité du modèle paramétrique en cherchant l'ensemble des paramètres  $(q, x, y, t)$  tels que pour  $p = 1 \dots P$ , pour  $n_p = 1 \dots N_p$

$$q_0 M_{p,n_p}(x_0, y_0, t_0) = q M_{p,n_p}(x, y, t) \quad (8)$$

où  $q_0, x_0, y_0, t_0$  sont les paramètres de la «vraie» source. Cette analyse est possible dans le cas sous-déterminé où une seule donnée est disponible. La position du capteur et l'instant de mesure sont notés respectivement  $x_c, y_c$  et  $t_c$ . Avec l'expression (3) du modèle de transport, le quadruplet de paramètres  $(q, x, y, t)$  permettant de générer la même mesure vérifie l'équation :

$$\frac{q}{(t_c - t)4\pi\sqrt{D_1 D_t}} \exp\left(-\frac{[(x_c - x) - v(t_c - t)]^2}{4D_1(t_c - t)} - \frac{(y_c - y)^2}{4D_t(t_c - t)}\right) = \text{cst.} \quad (9)$$

Afin d'étudier la relation entre les paramètres  $x$  et  $t$ , l'équation (9) est considérée à  $q$  et  $y$  fixés (à leur vraie valeur  $q_0$  et  $y_0$ ) et



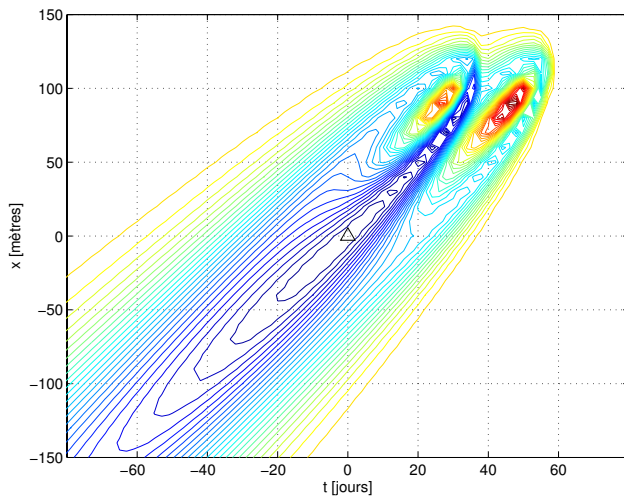


FIG. 6: Contour du critère de moindres carrés dans le plan  $xt$ . Les paramètres  $q$  et  $y$  sont fixés aux valeurs estimées ( $\hat{q} = 10^{10}$ ,  $\hat{y} = 0$ ).

réécrite sous la forme

$$\alpha(x_c - x)^2 + \beta(t_c - t)^2 + \gamma(x_c - x)(t_c - t) + t \ln t + \omega = 0 \quad (10)$$

où les coefficients sont des réels qui dépendent des paramètres physiques et de  $q$ ,  $y$ . La corrélation entre les paramètres  $x$  et  $t$  est contenue dans le terme  $\gamma(x_c - x)(t_c - t)$ . Il ne s'agit pas de l'équation d'une conique en raison de la présence du terme en  $\ln t$ . La figure 7 représente cette équation pour la donnée simulée au capteur localisé en  $(120, 10)$  et à l'instant 40 à partir de la source définie au paragraphe précédent  $(x_0, y_0, t_0, q_0) = (0, 0, 0, 10^{10})$ . Les paramètres  $q$  et  $y$  sont fixés aux vraies valeurs  $q_0$  et  $y_0$ . On observe que les indéterminations du couple  $(x, t)$  sont réparties autour d'un axe dont l'équation est proche de la droite  $x = vt + \text{cst}$ . L'étude des indéterminations dans le cas d'une seule donnée permet donc de comprendre l'allure des critères obtenus sur les données expérimentales et simulées (figures 3 et 6). Lorsque le nombre de données est supérieur, l'indétermination stricte disparaît mais le critère des moindres carrés conserve une direction  $x = vt$  pour les ellipses. Le phénomène de convection transportant la pollution supposée à la vitesse  $v$  est à l'origine de l'incertitude sur l'estimation conjointe de la localisation dans le sens d'écoulement et de l'instant d'injection. Dans un milieu où la dispersion est négligeable et où seule la convection intervient, cette incertitude devient une indétermination quelque soit le nombre de données : les sources dont les paramètres vérifient l'équation  $x = vt + \text{cst}$  engendrent les mêmes concentrations.

### 3 Conclusion

L'identifiabilité de sources de pollution impulsionnelle est étudiée, d'abord à partir de données expérimentales et simulées puis de manière analytique, en considérant un faible nombre de données. L'allure des critères de moindres carrés obtenus sur des données expérimentales est confirmée et justifiée par l'étude analytique dans le cas où une seule mesure est disponible. Les résultats présentés montrent que la source impulsionnelle est généralement déterminée de manière unique mais

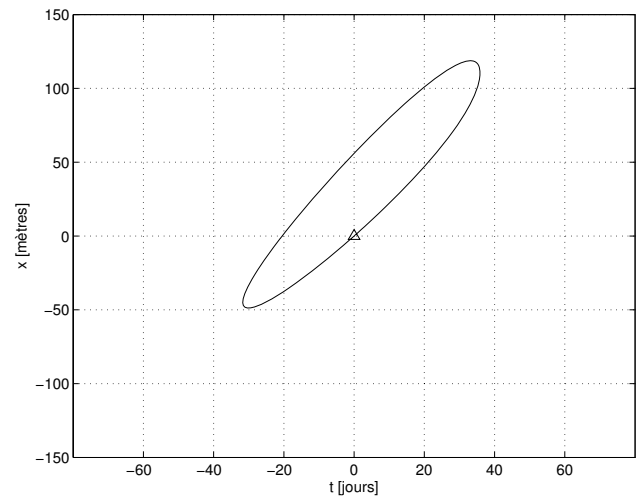


FIG. 7: Indétermination du couple de paramètres  $(x, t)$  de la source impulsionnelle pour la mesure en  $(x_c, y_c) = (120, 10)$  à l'instant  $t_c = 40$ .  $q$  et  $y$  sont fixés à leur vraie valeur  $q_0$  et  $y_0$ . L'ellipse passe par la vraie source  $(x_0, t_0) = (0, 0)$ .

que l'estimation de ses paramètres est perturbée par une incertitude importante sur l'estimation conjointe de la localisation dans le sens d'écoulement et de l'instant d'émission. Pour la suite, nous envisageons de quantifier l'incertitude et d'estimer les paramètres de la source en nous basant sur le calcul du gradient et du hessien du critère.

### Références

- [1] D. Bleecker and G. Csordas. *Basic partial differential equations*. International Press, 1996.
- [2] Todd H. Skaggs and Z. J. Kabala. Recovering the history of a groundwater contaminant plume. *Water Resource Research*, 30(1):71–79, november 1994.
- [3] P. Kathirgamanathan, R. McKibbin, and R.I. McLachlan. Source term estimation of pollution from an instantaneous point source. *Res. Lett. Inf. Math. Sci.*, 3:59–67, 2002.
- [4] P. Sidauruk, A.H-D. Cheng, and D. Ouazar. Ground water contaminant source and transport parameter identification by correlation coefficient optimization. *Ground Water*, 36(2):208–214, Mars-Avril 1998.
- [5] Jörg Matthes, Lutz Gröll, and Hubert B. Keller. Source localization based on pointwise concentration measurements. *Sensors and Actuator A (Physical)*, 115:32–37, 2004.
- [6] S. Alapati and Z. J. Kabala. Recovering the release history of a groundwater contaminant using a non-linear least-squares method. *Hydrological Processes*, 14(1003):1016, 2000.
- [7] Mehmet E. Alpay and Molly H. Shor. Model-based solution techniques for the source localization problem. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 8(6):895–904, Novembre 2000.
- [8] Eric Walter and Luc Pronzato. *Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales*. Masson, Paris, FRANCE, 1994.



# Calcul Rapide du Kurtogramme et Applications

Jérôme ANTONI

Université de Technologie de Compiègne

Centre de Recherche de Royallieu, BP 20529, 60205 Compiègne Cedex, France

jerome.antonio@utc.fr

## Résumé –

Le kurtogramme est un outil récent d'analyse spectrale à l'ordre quatre qui permet de détecter dans un signal la présence de structures non-stationnaires, de les localiser en fréquence et, d'une certaine manière, de les caractériser. Le paradigme se base sur l'observation qu'à chaque type de transitoire correspond une dyade {fréquence / résolution fréquentielle} qui maximise son kurtosis, et donc sa détection. L'exploration de toutes les dyades  $\{f, \Delta f\}$  est un travail considérable sur un signal donné, peu réaliste en pratique. Dans cette communication nous proposons un algorithme rapide qui échantillonne le plan  $(f, \Delta f)$  suffisamment finement pour trouver la dyade qui maximise le kurtosis, avec une complexité maximale de l'ordre de  $N \log N$ . Son efficacité est illustrée sur deux exemples industriels.

## Abstract –

The kurtogram is a fourth-order spectral analysis tool recently introduced for detecting and characterising non-stationarities in a signal. The paradigm relies on the assertion that each type of transient is associated with an optimal (frequency/frequency resolution) dyad  $\{f, \Delta f\}$  which maximises its kurtosis, and hence its detection. However, the complete exploration of the whole plane  $(f, \Delta f)$  is a formidable task hardly amenable to on-line industrial applications. In this communication we describe a fast algorithm for computing the kurtogram over a grid that finely samples the  $(f, \Delta f)$  plane. Its complexity is on the order of  $N \log N$ , similarly to the FFT. Its efficiency is illustrated on two industrial cases.

## 1 Du KS au kurtogramme

### 1.1 Le KS des signaux non-stationnaires

Le kurtosis spectral (KS) est un descripteur fréquentiel initialement introduit par Dwyer pour pallier l'incapacité de la densité spectrale de puissance (DSP) à détecter et à caractériser des non-stationnarités dans un signal [1]. L'idée consiste à calculer le kurtosis du signal analysé à "chaque fréquence" afin de discerner les structures non-stationnaires et d'indiquer dans quelle(s) bande(s) de fréquences celles-ci se réalisent. Cette manière de faire s'avère relativement robuste par rapport au bruit additif stationnaire, contrairement au kurtosis global. Dans [2] nous avons donné une définition formelle du KS des signaux non-stationnaires partir de la décomposition de Wold-Cramér. Rappelons que cette décomposition stipule que, sous des conditions relativement faibles, tout processus non-stationnaire centré  $X(n)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  se décompose sous la forme :

$$X(n) = \int_{-1/2}^{+1/2} H(n, f) e^{j2\pi f n} dZ_x(f) \quad (1)$$

où  $dZ_x(f)$  est un incrément spectral orthogonal et où  $H(n, f)$  s'interprète comme l'enveloppe complexe de  $X(n)$  à la fréquence  $f$ . Le KS de  $X(n)$  se formule alors<sup>1</sup> :

$$K_X(f) = \frac{|H(n, f)|^4}{\langle |H(n, f)|^2 \rangle^2} - 2 \quad (2)$$

où  $\langle f(n) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_N f(n)$  symbolise la moyenne temporelle d'une fonction  $f(n)$ . Cette définition jouit de nombreuses propriétés dont nous rappelons brièvement les plus importantes :

- i) le KS des processus stationnaires réguliers est une fonction constante de la fréquence,
- ii) le KS des processus stationnaires gaussiens est une fonction identiquement nulle,
- iii) en présence de bruit stationnaire additif  $N(n)$ , le KS d'un processus non-stationnaire  $X(n)$  s'exprime

$$K_{(X+N)}(f) = K_X(f) / [1 + \rho(f)] \quad (3)$$

où  $\rho(f)$  est le rapport bruit-à-signal en fonction de la fréquence.

Les propriétés (i)-(iii) suffisent à comprendre la capacité du KS à détecter, caractériser et localiser en fréquence des non-stationnarités.

### 1.2 Le kurtogramme : une dimension supplémentaire

L'estimation du KS tel que défini par l'équation (2) se conçoit sans trop de difficulté par extension des estimateurs de la DSP à l'ordre 4. Les estimateurs potentiels se ramènent alors, d'une manière ou d'une autre, à calculer les kurtosis d'enveloppes complexes en sortie d'un banc de filtres. Nous avons montré que ces estimateurs ne sont stables – dans le sens où ils fournissent des estimations relativement invariantes par rapport au choix des paramètres d'analyse – que pour des processus localement stationnaires [2], [3]. A contrario dans le cas de processus fortement non-stationnaires (typiquement des impulsions), le KS affiche des valeurs qui dépendent sensiblement du choix de la résolution fréquentielle, c'est à dire de la largeur des bandes du banc de filtres. Par exemple, le cas extrême où la largeur des bandes devient infiniment étroite implique un KS nul en raison du théorème de la Limite Centrale. Cet état de fait n'est pas forcément un inconvénient, mais veut simplement dire que pour un processus non-stationnaire quelconque, le KS dépend à la fois de la fréquence *et* de la résolution fréquentielle. A titre

<sup>1</sup>la constante -2 au lieu de -3 vient du fait que  $H(n, f)$  est supposé complexe circulaire.

d'exemple le KS d'un signal composé d'impulsions brèves en temps sera mieux estimé à partir d'un banc de filtres à bandes larges et donc associé à une résolution fréquentielle grossière. À l'inverse un signal non-stationnaire crée par des modulations lentes de certaines de ses composantes harmoniques devra être analysé avec une résolution fréquentielle très fine. En bref, à chaque type de non-stationnarité correspond une dyade {fréquence  $f$  / résolution fréquentielle  $\Delta f$ } qui maximise son kurtosis et donc sa détection. Nous avons appelé *kurtogramme* la représentation du KS dans le plan  $(f, \Delta f)$  et avons illustré dans [4] les avantages de ce type de représentation dans les problématiques de détection. Il est clair cependant que l'exploration exhaustive du plan  $(f, \Delta f)$  est très coûteuse en temps de calcul et difficilement envisageable en pratique. Nous proposons dans cet article un algorithme de calcul rapide du kurtogramme basé sur un échantillonnage dyadique du plan  $(f, \Delta f)$  et dont la complexité maximale est de l'ordre de  $N \log N$ .

## 2 Principes d'estimation du kurtogramme

Comme précisé précédemment, les estimateurs du kurtogramme se ramènent d'une manière ou d'une autre au calcul du kurtosis des coefficients en sortie d'un banc de filtres. Nous imposons aux gabarits des filtres de vérifier un certain nombre de contraintes décrites ci-dessous :

1. *Invariance en translation* : les valeurs du kurtogramme doivent rester invariantes par rapport à toute translation  $t_0$  de l'axe des temps, i.e.  $Kurt\{X(n - n_0)\} = Kurt\{X(n)\}$
2. *Insensibilité aux harmoniques purs* : le kurtogramme d'une composante fréquentielle d'amplitude *constante* à la fréquence  $f_0$  doit être nul (il s'agit de ne pas détecter les composantes harmoniques qui, en toute rigueur, sont *stationnaires*),
3. *Localisation fréquentielle* : afin de conserver l'interprétation du kurtogramme comme le kurtosis du signal pour une dyade {fréquence / résolution fréquentielle}  $(f, \Delta f)$ , il est nécessaire d'avoir des filtres proches de filtres passe-bande idéaux  $[f - \Delta f; f + \Delta f]$ ,
4. *Concentration fréquentielle* : si le kurtogramme est utilisé pour sélectionner une bande de fréquence optimale où démoduler le signal, les filtres doivent en plus respecter le théorème de Bedrosian, c'est à dire avoir des gabarits de largeur de bande telle que  $\Delta f \leq f$ ,
5. *Rapidité de calcul* : enfin les filtres doivent se prêter à une implémentation numérique rapide qui évite le traitement de toute information redondante.

Le respect des contraintes (1-5) conduit à une construction logique de l'estimateur du kurtogramme. Remarquons tout d'abord que la contrainte (4) est forcément satisfaite par le respect de la contrainte (3). Remarquons ensuite que la contrainte (2) implique l'utilisation de filtres complexes analytiques (de gain nul sur les fréquences négatives). La contrainte (1) quant à elle implique de calculer des kurtosis sur des séquences correctement échantillonnées, c'est à dire vérifiant la condition de Shannon. En conjonction avec la contrainte (5) ceci suggère de sous-échantillonner les signaux au plus serré en sortie du banc de filtre avant de calculer les kurtosis.

Nous affirmons qu'une solution efficace pour concilier les contraintes (1-5) est alors de bâtir un banc de filtres quasi-analytiques avec sous-échantillonnage critique. Par le terme «

quasi-analytique » nous entendons le fait d'approcher l'analyticité théorique à partir de filtres RIF, et par le terme « sous-échantillonnage critique » le fait de décimer d'un facteur  $M$  un banc de filtres à  $M$  bandes. Les détails de l'implémentation de l'algorithme sont décrits dans le paragraphe suivant.

## 3 Calcul rapide du kurtogramme

### 3.1 Principe de l'algorithme

Le principe de l'algorithme rapide de calcul du kurtogramme que nous proposons est basé sur une structure en bancs de filtres arborescente relativement classique [5], si ce n'est qu'elle s'appuie sur les propriétés particulières des filtres quasi-analytiques. Nous décrivons d'abord l'algorithme dans le cas d'un découpage en puissances de 2 de l'axe fréquentiel, avant d'en donner une généralisation en tiers de puissance de 2.

Soit  $h(n)$  un filtre prototype passe-bas, de fréquence de coupure<sup>2</sup>  $f_c = 1/8 + \epsilon$ ,  $\epsilon \geq 0$  à partir duquel nous construisons deux filtres d'analyse quasi-analytiques  $h_0(n)$  et  $h_1(n)$ , respectivement « passe-bas » et « passe-haut » dans les bandes de fréquence  $[0; 1/4]$  et  $[1/4; 1/2]$  :

$$\begin{aligned} h_0(n) &= h(n)e^{j\pi n/4} \\ h_1(n) &= h(n)e^{j3\pi n/4} \end{aligned} \quad (4)$$

Les filtres  $h_0(n)$  et  $h_1(n)$  vont servir de base à l'élaboration du banc de filtres arborescent en réalisant les opérations élémentaires de la figure 1 itérées en cascade de manière à obtenir l'arbre de décomposition de la figure 2, dont chaque niveau  $k$  représente un banc de filtres "uniforme"<sup>3</sup> à  $2^k$  bandes. Comme indiqué à la figure 1, notons  $c_k^i(n)$  la séquence des coefficients issu du  $i^{\text{ème}}$  filtre,  $i = 0, \dots, 2^k - 1$ , au  $k^{\text{ème}}$  niveau de l'arbre de décomposition. Par filtrage avec  $h_0(n)$  et  $h_1(n)$  suivi d'un sous-échantillonnage par 2, cette séquence donne alors naissance à deux nouvelles séquences  $c_{k+1}^{2i}(n)$  et  $c_{k+1}^{2i+1}(n)$  de longueurs deux fois plus courtes au niveau  $k+1$ . Le processus est itéré du niveau  $k=0$  où  $c_0(n) \equiv X(n)$  jusqu'à un niveau  $K-1$  spécifié, le nombre de bandes – et donc de séquences filtrées – augmentant d'un facteur 2 à chaque nouveau niveau. Notons que la multiplication par  $(-j)^n$  dans les branches supérieures (après filtrage par  $h_1$  et avant sous-échantillonnage) permet de ramener les séquences filtrées passe-haut en bande de base et donc de respecter l'ordonnancement fréquentiel du banc de filtre au niveaux suivants. Par conséquent il s'ensuit que les coefficients  $c_k^i(n)$  sont indicés par un indice fréquentiel  $i$  et par un indice de résolution fréquentielle  $k$ , et qu'ils s'interprètent comme l'enveloppe complexe de  $X(n)$  (sous-échantillonnée d'un facteur  $2^k$ ) dans la bande de fréquence positionnée sur la fréquence centrale  $f_i = (i + 2^{-1})2^{-k-1}$  et de largeur de bande  $(\Delta f)_k = 2^{-k-1}$ . Le kurtogramme est finalement obtenu par le calcul du kurtosis<sup>4</sup> sur toutes les séquences de coefficients  $c_k^i(n)$ ,  $i = 0, \dots, 2^k - 1$ ,  $k = 0, \dots, K - 1$  :

$$K_k^i = \frac{|c_k^i(n)|^4}{\langle |c_k^i(n)|^2 \rangle^2} - 2 \quad (5)$$

Sa représentation dans le plan  $(f, \Delta f)$  échantillonné aux noeuds  $\{f_i; (\Delta f)_k\}$  est schématisé à la figure 3.

<sup>2</sup>la raison d'être du  $\epsilon$  sera explicitée au paragraphe 3.3

<sup>3</sup>ce point est discuté plus en détail au paragraphe 3.3

<sup>4</sup>on prendra soin à ne pas inclure dans le calcul du kurtosis les premiers coefficients affectés par les transitoires des filtres  $h_0$  et  $h_1$ .

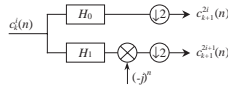


FIG. 1 – Filtrages passe-bas et passe-haut élémentaires.

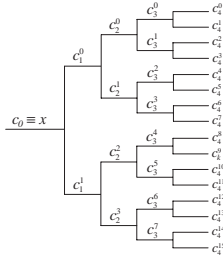


FIG. 2 – Principe de calcul rapide du kurtogramme par une structure en bancs de filtres arborescente.

### 3.2 Complexité de l'algorithme

La complexité de l'algorithme proposé est de l'ordre de  $KLN$  avec  $K$  le nombre de niveaux demandé,  $L$  la longueur du filtre prototype et  $N$  la longueur du signal analysé. Pour une décomposition du signal jusqu'au dernier niveau où il est possible de calculer un kurtosis, la complexité est de  $O(LN \log_2 N)$  à l'image de la transformation en paquet d'ondelettes et de la Transformation de Fourier Rapide. Il est clair que pour diminuer le temps de calcul, il est important de concevoir filtre prototype  $h(n)$  le plus court possible, mais tout en vérifiant les contraintes imposées dans le paragraphe 2.

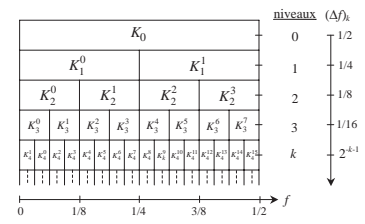
### 3.3 Spécification du filtre prototype $h(n)$

Afin de préciser les spécifications de conception du filtre prototype  $h(n)$ , nous établissons dans un premier temps l'expression générale de la fonction de transfert  $G_{k,i}(f)$  du  $i^{\text{ème}}$  filtre au  $k^{\text{ème}}$  niveau qui, au signal analysé  $X(n)$ , associe son enveloppe complexe  $c_k^i(n)$  dans la bande de fréquence  $[i \cdot 2^{-k-1}; (i+1) \cdot 2^{-k-1}]$ . Pour cela, posons  $a_l$  les coefficients de la décomposition en base 2 de l'indice  $i$  au niveau  $k$ , c'est à dire  $i = \sum_{l=1}^k a_l 2^{k-l}$ . On démontre alors que :

$$G_{k,i}(f) = \prod_{q=1}^k H(2^{-q}f + \beta_q - \gamma_q) \quad (6)$$

avec  $\beta_q = \sum_{l=0}^{q-1} a_{k-l} 2^{-q+l-2}$  et  $\gamma_q = (1 + 2a_q)2^{-3}$ . La simplicité de l'expression (6) provient essentiellement du caractère quasi-analytique des filtres  $h_0(n)$  et  $h_1(n)$ . Elle est riche en enseignements quant aux spécifications du filtre prototype  $h(n)$  :

1. *Filtres à phase linéaire* : Pour avoir un banc de filtres arborescent à phases linéaires, il suffit de choisir au départ  $h(n)$  à phase linéaire ; l'expression (6) montre que la propriété se transmet au travers des branches de l'arbre de décomposition du premier jusqu'au dernier niveau. Dans une optique de détection cette propriété est très avantageuse.
2. *Filtres à gains uniformes* : La forme de  $G_{k,i}(f)$  dépend en général de la bande  $i$  et du niveau  $k$  considéré. En effet, l'expression (6) montre que, par le jeu des dilations, la bande de fréquence sélectionnée par  $G_{k,i}(f)$  sur  $X(f)$  devient de plus en plus étroite en avançant dans les niveaux de l'arbre de décomposition ; il en est

FIG. 3 – Pavage (fréquence / résolution fréquentielle)  $\{f_i; (\Delta f)_k\}$  du kurtogramme rapide

de même des bandes de transition. Par conséquent le filtre  $G_{k,i}(f)$  devient de plus en plus sélectif, comme requis par la contrainte (3) (localisation fréquentielle) du paragraphe 2. Cependant la forme de  $G_{k,i}(f)$  dépend en général de la bande  $i$  et du niveau  $k$  considéré ; par exemple si en  $f = 0$  le gabarit du filtre prototype est tel que  $|H(f)| < 1$ , il est clair que  $\prod_{q=1}^k H(2^{-q}f) \rightarrow 0$  avec  $k \rightarrow \infty$ . Le fait d'avoir des gabarits hétérogènes le long de l'axe des fréquences n'est pas forcément un problème, car (1) cette évolution se fait lentement avec  $k$  (en pratique le niveau maximum dépassera rarement quelques unités), (2) le calcul du kurtosis (5) fait de toute manière intervenir une normalisation par l'énergie dans chaque bande de fréquence. Si avoir des filtres presque uniformes est toutefois une priorité, une manière simple de s'en approcher est d'imposer  $H(f)$  aussi plat que possible sur toute la bande passante  $[-1/8; 1/8]$  en choisissant une fréquence de coupure  $f_c = 1/8 + \epsilon$  avec  $\epsilon > 0$ . Il faut noter que cette spécification n'autorise pas la conception d'un banc de filtres à complémentarité de puissance – i.e. tel que  $\sum_{i=0}^{2^k-1} |G_{k,i}(f)|^2 = 1$  au niveau  $k$  – mais que cette concession est sans conséquence sur le calcul du kurtosis.

### 3.4 Généralisation à un découpage en tiers de puissance de 2

Il est très facile de généraliser le principe de l'algorithme proposé pour aboutir à un échantillonnage encore plus fin du plan  $(f, \Delta f)$ . Par exemple dans le cas d'un découpage en tiers de puissance de 2, l'idée est de définir trois nouveaux filtres passe-bas quasi-analytiques  $g_j(n)$ ,  $j = 0, 1, 2$ , de bandes passantes respectives  $[0; 1/6]$ ,  $[1/6; 1/3]$ , and  $[1/3; 1/2]$ . Ces filtres sont ensuite utilisés pour décomposer chaque séquence  $c_k^i(n)$ ,  $k = 0, \dots, K-1$ ,  $i = 0, \dots, 2^k-1$  en trois nouvelles sous-séquences  $c_{k,6}^{i+j}(n)$ ,  $j = 0, 1, 2$ , en basses, moyennes et hautes fréquences de l'intervalle  $[i \cdot 2^{-k-1}; (i+1) \cdot 2^{-k-1}]$ . L'indice  $k.6$  indique qu'il y a  $i = j = l = 0, \dots, 3 \times 2^k - 1 \simeq 2^{k+0.6} - 1$  sous-séquences  $c_{k,6}^l(n)$  calculées entre les niveaux  $k+1$  et  $k+2$  de l'arbre binaire. Après décimation d'un facteur 3, les kurtosis de toutes les sous-séquences sont finalement calculés à partir de (5). Cet algorithme fournit un échantillonnage encore plus du plan  $(f, \Delta f)$  tel qu'illustré à la figure 4, à comparer à la figure 2.

## 4 Exemples d'application

### 4.1 Exemple 1

Le premier exemple d'application est tiré de [6]. Il s'agit de détecter les chocs créés par des corps errants indésirables dans le circuit hydraulique d'une centrale nucléaire. Les signaux re-

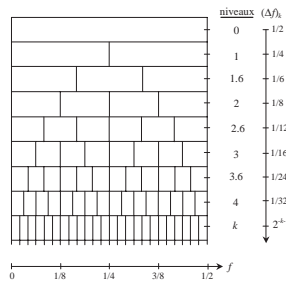


FIG. 4 – Echantillonnage du plan  $(f, \Delta f)$  en tiers de puissance de 2.

cueillis sont de type vibratoire et entachés d'un très fort bruit de fond. La figure 5.a présente un tel signal mesuré sur 1,37 secondes à 24kHz Hz. Le kurtogramme correspondant – calculé avec un filtre prototype à 8 coefficients – est représenté à la figure 6. Il révèle une forte activité non-stationnaire sur la dyade  $\{f_i; (\Delta f)_k\} = \{6750Hz; 1500Hz\}$ . Le résultat du filtrage dans la bande de fréquence correspondante – superposé avec l'enveloppe  $c_k^i(n)$  – est représenté à la figure 5.b, où la présence d'un choc anormal est maintenant clairement discernable aux alentours de 1 seconde.

## 4.2 Exemple 2

Ce deuxième exemple illustre l'utilisation du kurtogramme pour le diagnostic des paliers à roulements dans les systèmes mécaniques. Un défaut de roulement se manifeste sur les mesures vibratoires par une série d'impulsions généralement de faibles amplitudes par rapport au bruit de fond environnant [4]. Afin de les détecter, il est d'usage de démoduler le signal dans différentes bandes de fréquences jusqu'à trouver celle qui maximise le rapport signal-à-bruit. Le kurtogramme permet de substituer à cette procédure empirique une méthodologie rigoureuse pour rapidement trouver la bande de démodulation optimale. Ceci est illustré sur le signal vibratoire de la figure 7.a auquel on fait correspondre le kurtogramme de la figure 8. Ce dernier indique un kurtosis spectral maximum sur la dyade  $\{f_3; (\Delta f)_{2,6}\} = \{0,292; 0,083\}$ ; la partie réelle de l'enveloppe  $c_{2,6}^3(n)$  dans la bande de fréquence correspondante est représentée à la figure 7.b. Il faut apprécier le fait que le signal de défaut dont le rapport signal-à-bruit initial était seulement de -30dB a été parfaitement détecté et extrait du bruit de fond.

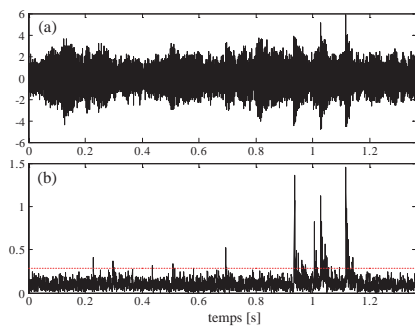


FIG. 5 – (a) Signal vibratoire, (b) partie réelle de l'enveloppe complexe  $c_4^5(n)$  extraite via le kurtogramme, avec le seuil de significativité à 0,1%.)

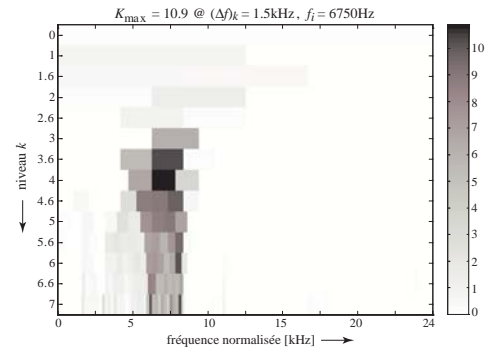


FIG. 6 – Kurtogramme du signal de la figure 5.a (7 niveaux en tiers de puissance de 2.)

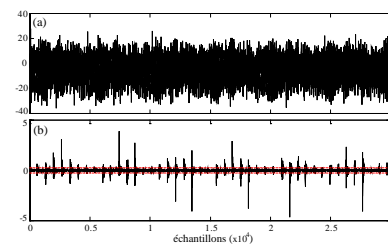


FIG. 7 – (a) Signal vibratoire, (b) enveloppe complexe  $c_{2,6}^3(n)$  (partie réelle) extraite via le kurtogramme, avec le seuil de significativité à 0,1%.

## Références

- [1] Dwyer, "Detection of non-Gaussian signals by frequency domain kurtosis estimation", in *Int. Conf. on Acoustic, Speech, and Signal Processing*, pp. 607-610, Boston 1983.
- [2] J. Antoni, "The spectral kurtosis : a useful tool for characterising nonstationary signals", *Mechanical Systems and Signal Processing*, In Press.
- [3] J. Antoni, "The Spectral Kurtosis of Nonstationary Signals : Formalisation, some Properties, and Application", in *12th European Signal Processing Conference*, Sept. 6-10, 2004, Vienna, Austria.
- [4] J. Antoni, "The spectral kurtosis : application to the vibratory surveillance and diagnostics of rotating machines", in *Mechanical Systems and Signal Processing*, In Press.
- [5] J. Masson, "Bancs de filtres numériques pour l'analyse et la synthèse des signaux", in *11ème colloque GRETSI*, Juin 1987, Nice.
- [6] Ravier, "Détection de transitoires par ondelettes adaptées - Critères d'adaptation fondés sur les statistiques d'ordre supérieur", thèse de l'Institut National Polytechnique de Grenoble préparée au Laboratoire des Images et des Signaux, Juillet 1998, 2005.

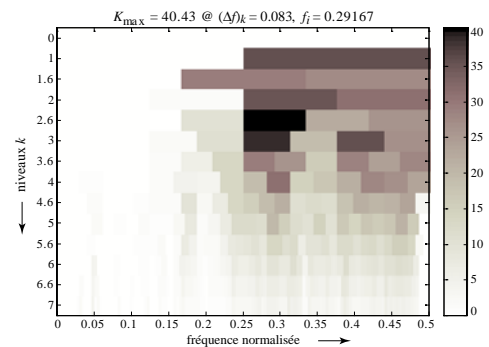


FIG. 8 – Kurtogramme du signal de la figure 7.a : 7 niveaux en tiers de puissance de 2.

# Apport du Modèle de Lambert Généralisé à l'Extraction de Relief de Surfaces Rugueuses par Stéréovision Photométrique : Application aux Revêtements Routiers

Anis BENSLIMANE<sup>1</sup>, Majdi KHOUDEIR<sup>1</sup>, Jacques BROCHARD<sup>1</sup>, Minh-Tan DO<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire SIC, FRE-CNRS 2731

Université de Poitiers

Bvd Marie et Pierre Curie, BP 30179

Tel : 33 5 49 49 65 67

86962 Futuroscope Cedex, France

[khoudeir@sic.sp2mi.univ-poitiers.fr](mailto:khoudeir@sic.sp2mi.univ-poitiers.fr)

<sup>2</sup>Laboratoire Central des Ponts et Chaussées

44340 Bouguenais, France

**Résumé** – Dans le cadre de l'analyse d'environnement 3D texturés par traitement d'images, nous abordons ici le cas des surfaces rugueuses pour l'analyse des variations locales de leur relief à une échelle fine. En général, l'interaction entre la lumière et ces variations locales du relief se traduit par un aspect texturé des images de ces surfaces. L'objectif recherché ici est la caractérisation de leur degré de rugosité après extraction de leurs reliefs. L'approche proposée est une adaptation originale de la technique de stéréovision photométrique au cas de surfaces à forte rugosité et au comportement photométrique de type Lambertien. En effet, l'approche usuelle traite uniquement le cas de surfaces à faible rugosité sans prise en compte des phénomènes tels que les inter-reflexions, les ombrages ou encore les masquages entre facettes de surface élémentaires. Nous proposons ici la prise en compte de ces phénomènes au travers de l'adaptation du modèle de Lambert généralisé pour la stéréovision photométrique. Ainsi nous explicitons l'incidence de ces phénomènes sur le niveau de gris de l'image puis sur l'extraction du relief. Une étude est ensuite menée pour mettre en évidence de l'apport de notre approche dans le cas de surfaces à forte rugosité est menée. Les résultats obtenus sont alors exploités pour l'analyse de l'usure de la micro texture de revêtements routiers.

**Abstract** – Within the framework of the analysis of 3D textured environment through image analysis, we approach here the case of the rough surfaces for the analysis of the local variations of their relief. Generally, the interaction between the light and these local variations of the relief leads to a textured images of these surfaces. Our aim here is to achieve their roughness characterization through a local relief extraction. The proposed approach is an original adaptation stereovision based on photometric model to the case of surfaces with a high degree of roughness and with Lambertian photometric behaviour. Indeed, the usual approach treats only the case of surfaces with weak roughness, without consideration of the phenomena such as inter-reflexions, shades or still maskings between elementary facets of surface. We propose here to take into account these phenomena through the adaptation of Lambert's generalized model for the photometric stereovision. So, we clarify the incidence of these phenomena on the image grey level and then on the relief extraction technique. A comparative study is done to put out the contribution of the proposed approach in the case of surfaces with strong roughness. The obtained results are then run for the wear estimation of road surfaces through their micro texture analysis.

## 1. Introduction

Nous nous intéressons ici à l'analyse des variations locales du relief des surfaces rugueuses à une échelle fine. En général, la rugosité de surface conduit à un aspect texturé des images correspondantes. L'objectif recherché ici est la caractérisation de leur degré de rugosité. Actuellement, l'analyse de la rugosité d'une surface est effectuée principalement au travers de capteurs tactiles ou de capteurs à focalisation de type laser [14]. Ces capteurs permettent en général d'estimer la rugosité d'une surface au travers de l'analyse d'une série de relevés profilométriques (ou monodimensionnels). De part leur fonctionnement (temps de mesure élevé, résolution, distance focale réduite, ...), ces différents types de capteurs ne permettent pas d'envisager une

utilisation sur des surfaces de dimensions importantes ou d'envisager leur transposition vers un système embarqué.

Une estimation de la rugosité par traitement d'images permettrait des avantages non négligeables tels que la prise en compte de l'information bidimensionnelle, la rapidité du traitement, et la possibilité d'une analyse en dynamique. Peu de travaux dans la littérature traitent de l'analyse de la rugosité d'une surface texturée par traitement d'images. Ces travaux effectuent une estimation de la rugosité au travers de l'extraction des variations du relief de la surface par des systèmes exploitant, selon l'application recherchée, l'utilisation combinée d'une caméra et de la projection d'une lumière structurée [2], [10], ou d'une lumière non structurée [3], [4], [6], [8], [9], [13]. L'extraction du relief est ensuite obtenue par mesure de la déformation de la trace de cette lumière structurée ou par l'exploitation de modèles photométriques (cas des systèmes de stéréovision

photométrique). L'approche proposée ici est une extension originale pour l'extraction locale du relief par stéréovision photométrique. Cette extension étant particulièrement adaptée au cas de surfaces pouvant comporter différentes échelles de rugosité. La méthode proposée sera ensuite appliquée à l'analyse de l'usure de revêtements routiers français. Nous expliciterons dans ce cadre notre apport pour la phase d'extraction de l'image du relief, le procédé d'estimation de la rugosité et les résultats obtenus.

## 2. Extraction du relief

### 2.1 Relation entre Niveau de gris, aspect et relief

Pour établir le lien entre l'image, le relief et la couleur, les surfaces considérées n'ayant pas de comportement spéculaire, nous choisissons d'utiliser un modèle Lambertien pour traduire leur comportement photométrique diffus et établir le lien entre niveau de gris, information couleur et information relief. Les différentes approches par stéréovision photométrique développées dans la littérature exploitent le modèle Lambertien dit usuel [12]. Ce modèle permet de traduire le comportement photométrique recherché sous certaines hypothèses restrictives qui conduisent à négliger les phénomènes d'inter-réflexions entre facettes élémentaires, les phénomènes d'ombrage ainsi que les phénomènes de masquage. Ces considérations limitent la validité de cette approche au cas des surfaces rugueuses avec une distribution de pentes faible. En raison de l'application visée, nous proposons ici l'exploitation du modèle de Lambert généralisé [11] qui permet de prendre en compte ces différents phénomènes et conduire ainsi à une extraction du relief par stéréovision photométrique adaptée au cas des surfaces rugueuses comportant de fortes pentes.

Pour cela, considérons une surface texturée rugueuse constituée de micro facettes Lambertienne, éclairée sous un angle d'incidence  $\theta_i$  et observée par une caméra placée perpendiculairement au plan (x,y) de la surface. La figure 1 montre cette configuration.

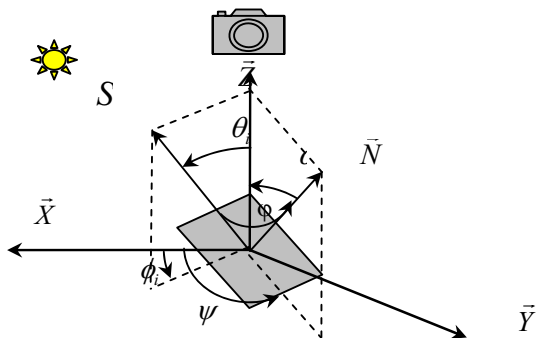


Figure 1 : Eclairage reçue capteur pour une portion élémentaire de surface

Les différents angles de cette figure sont définis ci-dessous :

$\theta_i$  : Angle d'incidence par rapport à la surface rugueuse

$\varphi$  : Angle d'incidence par rapport à la facette

$\alpha$  : Angle que forme la normale à la facette avec la normale à la surface

$\phi_L$  est l'angle formé par l'axe des  $\vec{X}$  et la projection du vecteur source de lumière  $\vec{S}$  dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ .

Par un calcul simple, nous pouvons alors exprimer l'angle  $\varphi$ , angle sous lequel la source éclaire la facette, en fonction des coordonnées cartésiennes (x, y et z) du point visé.

#### 2.1.1 Par exploitation du modèle de Lambert usuel

Dans ce cas, l'intensité  $I_L(x,y)$  dans l'image en niveau de gris traduit l'énergie reçue par le capteur CCD et s'exprime par la relation ci-dessous :

$$I_L(x,y) = \frac{L(x,y)}{r^2} \cos(\varphi(x,y)) \quad (1)$$

Dans cette expression, les différents termes désignent :

$L(x,y)$  : est représentatif des propriétés d'aspect et de colorimétrie en chaque point de la surface,

$r$  : Distance séparant la source de lumière de la facette.

Le terme de luminance  $L$  peut s'exprimer par

$$L(x,y) = \rho(x,y) \frac{I_0}{\pi}$$

où  $\rho$  représente l'albédo de la surface et  $I_0$  représente l'intensité lumineuse de la source d'illumination.

Puis à partir de considérations géométriques simples, nous obtenons l'équation suivante :

$$I(x,y) = \frac{L(x,y)}{r^2} \frac{\cos \theta_i - \frac{\partial z}{\partial x} \sin \theta_i \cos \varphi_i - \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta_i \sin \varphi_i}{\sqrt{1 + (\partial z / \partial x)^2 + (\partial z / \partial y)^2}} \quad (2)$$

Ainsi, le niveau de gris dans l'image, prend en compte des informations liées respectivement à l'aspect coloré de la surface ( $L$ ), aux variations locales de son relief ( $dz/dx$  et  $dz/dy$ ), à la configuration de prise de vues ( $\theta_i$ ) et la distance de la surface par rapport à la caméra ( $r^2$ ). Pour l'application visée, la distance  $r$  sera considérée constante du fait qu'elle est nettement supérieure aux dimensions des variations de relief recherchées qui sont de l'ordre de quelques dizaines de microns.

#### 2.1.2 Par exploitation du modèle de Lambert Généralisé

Afin de tenir compte des phénomènes d'inter-réflexions, d'ombrage ou de masquage, nous exploitons les travaux de [11] qui propose une généralisation du modèle lambertien pour les surfaces rugueuses de type diffus, pouvant inclure des dénivellations relativement importantes. Pour cela, [11] modélise les variations "importantes" de la surface par des V-Cavités, et explicite les phénomènes d'inter-réflexions et de masquage par d'une part un terme aditif au modèle de Lambert usuel et un terme d'atténuation affecté au modèle de Lambert usuel. Soit :

$$I(x,y) = \text{FAG} \cdot I_L(x,y) + I_i(x,y)$$

Où :  $I(x,y)$  représente l'éclairement total reçu

FAG représente le Facteur d'atténuation géométrique lié aux phénomènes d'ombrages et de masquage,

$I_L$  est la composante Lambertienne "usuelle"

$I_i$  est la composante Lambertienne due aux phénomènes d'inter-réflexions.

Dans notre cas de figure, où l'axe optique de la caméra coïncide avec la normale à la surface (voir figure 1), l'expression de l'éclairement reçu par le capteur CCD peut s'écrire comme suit :

$$I(x,y) = \rho \frac{I_0}{\pi r^2} \cos \phi + \rho_2 \frac{I_0}{\pi r^2} \cos \theta_i \cos \alpha (1 - \cos \alpha) \quad (3)$$

Dans cette expression, le second terme exprime l'effet des inter-réflexions et des masquages éventuels. Nous pouvons



alors exprimer cette équation en fonction des variations de relief  $p = \frac{\partial z}{\partial x}$  et  $q = \frac{\partial z}{\partial y}$  par :

$$I(x, y) = \rho \frac{I_0}{r^2} \frac{\cos \theta_i - p \sin \theta_i \cos \theta_i \cos \theta_i - q \sin \theta_i \sin \theta_i}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} + p^2 \frac{I_0}{\pi r^2} \cos \theta_i \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \right) \quad (4)$$

## 2.2 Principe de la technique d'extraction du relief

Nous avons explicité le lien entre le relief, l'apparence couleur d'une surface et son image en niveaux de gris dans le paragraphe 2-1. L'équation (4) est une équation à trois inconnues dont deux caractérisent la géométrie de la surface à savoir la dérivée de l'altitude  $z$  par rapport à  $x$  et la dérivée de  $z$  par rapport à  $y$ , alors que la troisième caractérise son aspect coloré au travers de la luminance  $L(x, y)$ . Pour déterminer ces trois inconnues, nous exploitons trois images de notre surface, sous configurations d'éclairage différentes. Nous choisissons trois configurations d'éclairage de manière à obtenir trois équations linéairement indépendantes. A partir de l'expression des images obtenues pour ces configurations d'éclairage, nous pouvons exprimer les variations de surfaces au travers des dérivées partielles de l'altitude  $z$  par rapport à  $x$  et par rapport à  $y$ , puis par intégration numérique nous aboutissons au relief  $z(x, y)$  en tous points de la surface.

## 3. Résultats expérimentaux

### 3.1 Champs d'application et base d'images

Le développement important des infrastructures routières en France nécessite de pouvoir disposer d'outils d'auscultation et de diagnostic de l'état des routes. Cette auscultation est effectuée dans un objectif de gestion de patrimoine et de sécurité des usagers. Les concepts de sécurité liés à l'adhérence d'une chaussée routière dépendent fortement de la forme géométrique de la surface de la couche de roulement et plus particulièrement de la micro rugosité des granulats utilisés. La dégradation de la chaussée, liée au trafic routier, entraîne une évolution du relief et donc de la rugosité de ces granulats. L'étude de cette rugosité à l'échelle la plus fine appelée "micro texture" est encore aujourd'hui au stade expérimental. La mesure de cette échelle est basée essentiellement sur des méthodes profilométriques [5], [14]. Les inconvénients de ces techniques, liées d'une part à la très faible dimension de l'échantillon analysé et d'autre part au temps d'acquisition important, ne permettent pas d'envisager à terme leur transposition dans un système d'auscultation embarqué. Pour cela, nous nous intéressons ici, en collaboration avec le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC), à la faisabilité de cette auscultation par un système de traitement d'images qui pourrait à terme être embarqué.

### 3.2 Quantification de l'apport de notre approche

Afin de pouvoir comparer les reliefs extraits pour ces deux modèles photométriques, nous choisissons d'effectuer cette comparaison sur une surface dont nous pouvons maîtriser les

variations de relief et dont les pentes peuvent varier de manière significative. La surface choisie est une surface de forme cylindrique. Ce choix est justifié par la présence de toutes les pentes sur ce type de forme géométrique. Cela nous permet de comparer les résultats de reconstruction de deux méthodes. La comparaison des reliefs reconstruits l'un avec le modèle Lambertien usuel et l'autre avec le modèle généralisé, est effectuée par rapport à un cylindre de synthèse de même dimensions que celui du cylindre objet de l'étude. La figure ci-dessous présente la cartographie du cylindre de synthèse.

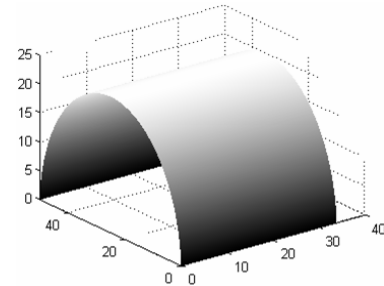
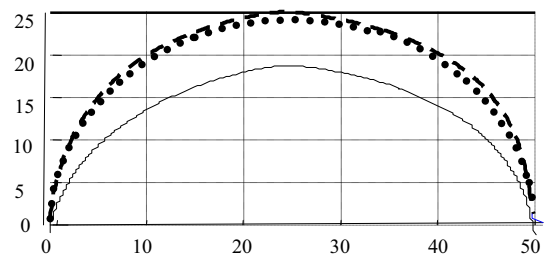


Figure 2 : Cylindre de synthèse servant de référence pour l'évaluation de l'erreur

A partir de 3 prises de vues sous angles d'éclairage différents, nous effectuons la reconstruction du relief à partir des deux modèles présentés. La figure 3 présente les profils de relief obtenus dans cas



Profils du relief  
 ..... Reconstruit avec modèle de Lambert généralisé  
 — Profil de référence  
 — Reconstruit avec modèle de Lambert usuel

Figure 3 : Profils de relief reconstruit.

La mesure de la précision de la méthode dans les deux cas est faite par le biais de l'erreur quadratique moyenne (EQM) et le rapport bruit sur signal, le bruit étant constitué de l'écart relatif en tout point entre le relief reconstruit et le relief de référence. Les résultats de ces mesures sont présentés dans le tableau 1.

Tableau 1 : Comparaison des erreurs

	EQM	Rapport bruit /signal (%)
Modèle usuel	1270,6	3,5234
Modèle généralisé	78,4	0,1881

Les résultats obtenus en tenant compte des phénomènes d'inter-réflexions et de masquage sont nettement plus précis que ceux obtenus en faisant abstraction de ces phénomènes. Cela est d'autant plus perceptible sur les profils reconstruits, pour les plus fortes valeurs de pentes. Nous adopterons par la suite le modèle généralisé de Lambert pour la reconstruction des différentes cartes de hauteurs de notre champ d'application.

L'extraction du relief sur l'ensemble des images des différentes bases d'images a ainsi été effectuée et un exemple de résultat obtenu est représenté en figure 4. Nous représentons sur cette figure l'image de la surface étudiée, l'image des variations de reliefs et la cartographie 3D (ou carte des hauteurs correspondante).

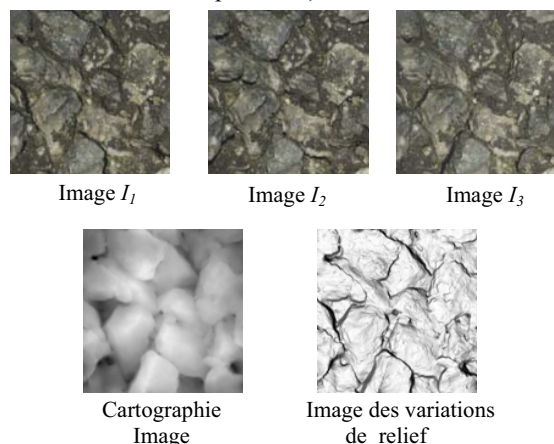


Figure 4 : Trois Images de la surface étudiée, cartographie 3D extraite par SP et image des variations de relief

### 3.3 Application à l'estimation de l'usure de revêtements routiers

L'extraction du relief sur l'ensemble des images des différentes bases d'images a ainsi été effectuée et un exemple de résultat obtenu est représenté en figure 5. Nous représentons sur cette figure l'image de la surface étudiée, l'image des variations de reliefs et la cartographie 3D (ou carte des hauteurs correspondante).

Après extraction des différentes cartographies 3D par stéréovision photométrique, nous appliquons différents critères d'estimation de la rugosité [1], [7], sur l'ensemble de nos bases d'images. Ces critères reposent sur une analyse fréquentielle et géométrique des variations de la cartographie extraite. Les résultats présentés incluent aussi, pour comparaison, l'évolution d'un critère mécanique de type « SRT » basée sur une mesure de résistance au frottement [14] et faisant référence dans le domaine des routes.

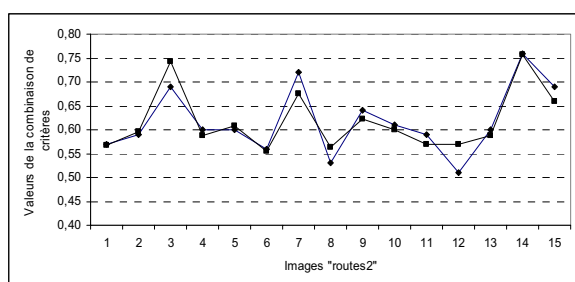


Figure 5 : Evolution du critère SRT (◆), évolutions du critère rugosité sur les cartographies « images » (■)

## 4. Conclusions et perspectives

Nous avons développé une approche d'estimation de la rugosité basée sur l'analyse de la carte des hauteurs de la surface. L'extraction de cette carte des hauteurs est effectuée

par stéréovision photométrique. Ainsi à partir des techniques de stéréovision classiques, nous développons une approche qui prend en compte les phénomènes d'inter-réflexions, de masquage et d'ombrage pouvant exister sur les surfaces à forte rugosité. Une estimation de la rugosité a ensuite été menée sur les cartes de hauteurs extraites par traitements d'images. Les résultats de discrimination de la rugosité obtenus, permettent de répondre efficacement aux différents objectifs recherchés dans l'analyse de la rugosité de chaussées routières. Ces travaux qui ont été menés sur des surfaces rugueuses statiques sont actuellement en cours d'extension à l'analyse dynamique de surfaces rugueuses.

## Références

- [1] A. Benslimane, M. Khoudeir, J. Brochard, *Caractérisation de la micro texture de chaussées par analyse d'image* International Conference on Pavement Surface Characteristics of Roads and Airports (taux d'acceptation de 60%), 10 p., Toronto, Canada, juin 2004.
- [2] D. Caspi, N. Kiryati, J. Shamir, *Range imaging with adaptive color structured light*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 20(8), p.470-480, 1998.
- [3] M.J. Chantler, J. Clark, M. Umasuthan, *Calibration and operation of an underwater laser triangulation sensor: the varying baseline problem*, Optical Engineering, 36(9), pp. 2604-2611, 1997.
- [4] K. Dana, B. van Ginneken, S.K. Nayar, J.J. Koenderink, *Reflectance and texture of real world surfaces* ACM Transactions on Graphics, 18(1), p.1-35, 1999.
- [5] G. Gratia, *Méthodes et matériels de mesure de l'adhérence*, Bulletin de liaison des laboratoires des ponts et chaussées, n°185, p.107-121, 1993.
- [6] H. Hayakawa, *Photometric stereo under a light-source with arbitrary motion*, journal of optical Society of America", 11(11), p. 3079-3089, 1994.
- [7] M. Khoudeir, J. Brochard, V. Legeay, M-T Do, *Roughness Characterization through 3D Textured Image Analysis: Contribution to the Study of Road Wear Level*, Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, Vol. 19, p. 93-104, 2004.
- [8] G. McGunnigle and M.J. Chantler, *Rough surface classification using point statistics from photometric stereo*, Pattern Recognition Letters, n°21, p. 593-604, 2000.
- [9] G. McGunnigle and M.J. Chantler, *Rough surface description using photometric stereo*, Measurement Science and Technology, n°14, p.699-709, 2003.
- [10] M. Mouaddib *Fonctions basiques et moyens de perception pour la navigation des robots mobiles HDR* soutenue le 03/12/1999.
- [11] M. Oren and S. Nayar, *Generalization of the Lambertian Model and implications for machine vision* International Journal of Computer Vision, n°14, p. 227-251, 1995.
- [12] K.E. Torrance, *Theory of Off-Specular reflection from roughened surfaces*, Journal of Optical Society of America, 57(1105), p. 32-41, 1967.
- [13] R.J. Woodham, *Photometric method for determining surface orientation from multiples images*, Optical Engineering, 19(1), p. 139-144, 1980.
- [14] H. Zahouani, R. Vargiolu and M.-T. Do, *Characterization of micro texture related to wet road/tire friction*, AIPCR/PIARC, p.195-205, June 2000.



# Modélisation, évaluation et contrôle d'une chaîne de traitement d'images routières

A. DOMINGUES<sup>1</sup>, Y. LUCAS<sup>2</sup>, D. DRIOUCHI<sup>3</sup>, P. MARCHE<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire Vision et Robotique, ENSI de Bourges 10 bd Lahitollé 18000 Bourges

<sup>2</sup>Laboratoire Vision et Robotique, IUT Mesures Physiques 63 av. de Lattre 18020 Bourges cedex

<sup>3</sup>Laboratoire de Statistique Théorique et Appliquée, Université Pierre et Marie Curie, 175 av. du chevaleret 75013 Paris

[Yves.Lucas@bourges.univ-orleans.fr](mailto:Yves.Lucas@bourges.univ-orleans.fr), {Antonio.Domingues, Pierre.Marche}@ensi-bourges.fr, [driouchi@ccr.jussieu.fr](mailto:driouchi@ccr.jussieu.fr)

**Résumé** – La mise au point d'une chaîne complète de traitement d'image (CTI) est toujours très délicate. Jusqu'à présent la communauté s'est intéressée à l'évaluation d'algorithmes isolés, sur un petit nombre d'image test et avec un réglage ad hoc des paramètres indépendant des données d'entrée. Nous montrons ici comment en combinant la modélisation statistique par plans d'expérience, l'optimisation numérique et l'apprentissage neuronal, on peut élaborer une CTI adaptative performante. Il faut aussi pour cela disposer d'une base d'images conséquente, être capable de caractériser en entrée les images brutes et enfin évaluer les sorties de la CTI. Nous montrons comment, dans le cas d'une CTI dédiée à la détection d'obstacles routiers, cette méthodologie expérimentale et l'architecture logicielle associée, assurent en permanence l'efficacité des traitements. L'explication en est simple : la CTI est optimisée dans sa globalité, à partir d'un grand nombre d'images test réelles et en adaptant les traitements aux données d'entrée.

**Abstract** – Tuning a complete image processing chain (IPC) remains a tricky step. Until now researchers focused on the evaluation of single algorithms, based on a small number of test images and ad hoc tuning independent of input data. In this paper we explain how, by combining statistical modeling with design of experiments, numerical optimization and neural learning, it is possible to elaborate a powerful and adaptive IPC. To succeed, it is also necessary to build a large image database, to describe input images and finally to evaluate the IPC output. By testing this approach on an IPC dedicated to road obstacle detection, we demonstrate that this experimental methodology and software architecture ensures a steady efficiency. The reason is simple : the IMC is globally optimized, from a large number of real images et with adaptive processing on input data.

## 1. Traitements adaptatifs en vision

La conception d'une application de traitement d'images fait intervenir une succession d'opérateurs bas et moyen niveau (filtrage, extraction et chaînage de contours, détection de coins, segmentation en régions...) dont le but est d'extraire des informations pertinentes pour l'aide à la décision (reconnaissance, classification, inspection ...). A chaque étape de traitement, les paramètres de réglage ont une influence notable sur le comportement des algorithmes et sur la qualité finale des résultats. La puissance de calcul ayant augmenté considérablement en quelques décennies, la vision se tourne vers des applications comme la vidéo surveillance ou la conduite automobile où le contenu de la scène reste incontrôlé, très versatile et rapidement variable. Se pose alors le problème du réglage automatique de la chaîne de traitement d'images (CTI), car il faut en permanence assurer la qualité de la détection bas niveau, garante de la robustesse des tâches de haut niveau.

Une première difficulté est l'évaluation des traitements dont le caractère adaptatif est indissociable. Depuis quelques années, la communauté scientifique en a pris conscience et a proposé des solutions plus ou moins empiriques [1-7]. Lorsqu'une vérité terrain est disponible, on peut directement y comparer les résultats en définissant une métrique pour mesurer les écarts avec cette référence. Parfois

cette vérité terrain n'est pas disponible ou reste controversée et on préfère se baser sur l'avis d'experts proches de l'application pour une simple appréciation visuelle ou sur des critères quantitatifs mais empiriques. Ces méthodes considèrent un seul type d'opérateur à la fois [8-11]; or le réglage isolé d'un opérateur ne conduit pas forcément à un réglage optimal de la chaîne complète. De plus, les opérateurs sont généralement testés sur un nombre limité d'images test, voire sur des images de synthèse bruitées pour tester la robustesse des algorithmes. Ceci ne remplace pas le recours à une base d'images réelles conséquente sur laquelle la CTI sera testée. Comment évaluer sur un grand nombre d'images des traitements comprenant de nombreux paramètres ?

Il subsiste une deuxième difficulté : comment trouver les bons réglages et donc comment adapter les traitements pour maintenir une qualité constante des résultats ? Les traitements temps réel étant implémentés sur des composants électroniques, il faut déjà prévoir la reconfiguration de leurs paramètres. Les rétines artificielles et les caméras intelligentes permettent déjà de régler certains paramètres d'acquisition. Concernant les traitements, le volume de calcul nécessaire pour apprécier l'effet de la modification de plusieurs paramètres sur les résultats semble d'emblée dissuasif, d'autant plus que chaque image conduit à des paramètres différents. Notons que le choix des opérateurs reste ici du ressort de l'expérimentateur mais que quelques

travaux examinent aussi la possibilité de l'automatiser [12-13]].

Nous montrons ici comment on peut surmonter ces deux difficultés grâce à une approche expérimentale combinant la modélisation statistique, l'optimisation et l'apprentissage. Nous illustrons ensuite cette démarche dans le cas d'une CTI dédiée à l'extraction de lignes pour la détection d'obstacles routiers.

## 2. Architecture

Votre article étant sans doute rédigé en français, il est préférable d'utiliser les règles de typographie françaises. La ponctuation haute (: ; ? !) doit être précédée d'un espace, comme sur une machine à écrire. Utiliser de préférence les guillemets à la française, « comme ceci ». Enfin, les majuscules doivent être accentuées. Elle comprend les modules suivants (Fig.1) :

- une CTI composée de plusieurs opérateurs bas et moyen niveau disposant chacun de paramètres re-configurables.
- une base d'images brutes, propres à l'application et représentatives de sa versatilité.
- un module d'évaluation des sorties mesurant la qualité des images traitées. L'évaluation peut s'appuyer sur une vérité terrain ou sur des critères empiriques.
- un module d'évaluation des entrées permettant au module de contrôle d'adapter le réglage des paramètres de traitement d'image à chacune des images brutes. L'évaluation a pour but d'extraire de l'image brute des descripteurs pertinents pour le réglage de la CTI.

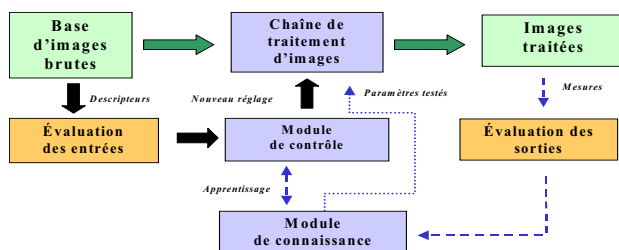


FIG.1 : architecture d'une chaîne de traitement adaptative

- un module de connaissances permettant d'une part, de modéliser l'influence des paramètres de traitement sur les images obtenues en sortie de la CTI et d'autre part de trouver un réglage optimal de ces paramètres pour une part donnée.
- un module de contrôle permettant après une phase d'apprentissage et à partir de l'évaluation des entrées de fournir pour chaque image brute des paramètres de traitement adaptés.

La modélisation de l'influence des paramètres est confiée à des plans d'expériences [14]. Cet outil couramment utilisé dans l'industrie commence à être expérimenté en vision [15-16]. Il consiste à modéliser en un nombre minimal d'essais les effets de modifications simultanées des paramètres de la chaîne. Le volume de calculs reste considérable car ces mêmes essais doivent être répétés sur un grand nombre d'images test afin de leur donner une valeur statistique. On n'obtient donc pas un réglage pour chaque image testée mais

un réglage moyen. On isole les paramètres les plus influents sur la qualité des résultats et on détecte les interactions entre ces paramètres. Pour chaque image test de la base, il faut ensuite déterminer quel est le meilleur réglage. C'est une procédure typique d'optimisation : le réglage moyen et les modalités hautes et basses des paramètres influents initialisent et délimitent le domaine d'exploration d'un l'algorithme d'optimisation du simplexe [17] qui recherche ces valeurs optimales. Une fois obtenu les réglages optimaux de la CTI pour un ensemble d'images brutes, on utilise les descripteurs d'entrée de ces images et les réglages correspondants à ces images test, comme base d'apprentissage pour un réseau de neurones. Une partie des images brutes est réservée au test du réseau. Après les étapes précédentes de modélisation statistique, d'optimisation et d'apprentissage, la CTI bascule en mode opérationnel et adapte en permanence ses paramètres de traitement aux caractéristiques des nouvelles images.

## 3. Application à une chaîne de traitement d'images routières

Cette application du programme PREDIT s'intègre dans le projet SPINE (Sécurité Passive INtelligentE) destiné à configurer un système d'airbags intelligent en situation de pré-crash. Le rôle du système multi capteurs (caméra haut débit EEV + télémètre laser SICK) embarqué sur un véhicule expérimental PEUGEOT 406 est de classer les obstacles frontaux potentiels et d'estimer leur trajectoire en moins de 100 ms [18-20]. C'est pourquoi les traitements bas et moyens niveaux sont implémentés matériellement par la société MBDA, partenaire du projet, sur deux ASICs [21] intégrés avec un DSP sur une carte électronique interfacée avec le bus CAN du véhicule (Fig.2). Les premiers essais chez l'équipementier automobile FAURECIA ayant démontré qu'un réglage fixe était inopérant face à la diversité des images routières, un réglage automatique basé sur l'approche décrite plus haut a été adopté.

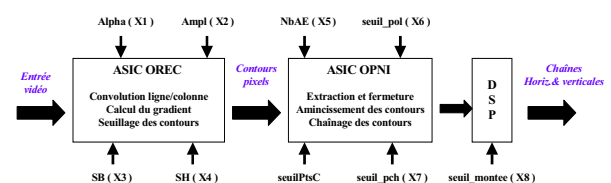


FIG.2 : Chaîne de traitement et paramètres réglables

Les huit paramètres re-configurables sont : les coefficients du filtre de Canny-Deriche ( $X_1$ ) et d'amplification de l'image ( $X_2$ ), les seuils bas et haut et bas des contours ( $X_3$ ,  $X_4$ ), le nombre d'automates élémentaires de fermeture des contours ( $X_5$ ), le seuil d'approximation polygonale ( $X_6$ ), le seuil d'élimination des petites chaînes ( $X_7$ ) et le seuil d'approximation des chaînes horizontales et verticales ( $X_8$ ) (Fig. 2). Avec deux modalités de réglage (Tab.1), on peut appliquer 256 traitements différents sur la même image.

TAB .1 modalités pour les plans d'expérience

Facteur	Paramètre	Modalités	
$X_1$	alpha	0.5	1
$X_2$	ampl	33	63
$X_3$	SB	5	15
$X_4$	SH	15	30
$X_5$	NbAE	26	30
$X_6$	seuil pol	5	6
$X_7$	seuil pch	5	10
$X_8$	seuilMontee	1	3

La CTI doit extraire de l'image les familles de lignes horizontales et verticales (Fig.3) décrivant après groupement perceptuel les obstacles routiers situés à l'avant du véhicule test. L'évaluation des sorties est alors basée sur le nombre, la répartition et la longueur de ces segments dans une fenêtre d'intérêt spécifiée par un télémètre laser. Le critère utilisé, appelé taux de recouvrement, peut être mesuré pour différents réglages des paramètres (Fig.4)

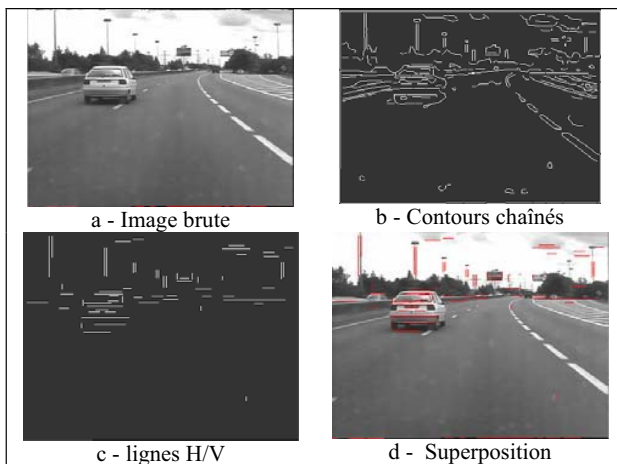


FIG. 3 : extraction des lignes H/V



FIG. 4 : évaluation des sorties

Au sein du module de connaissances, trois plans d'expérience ont été implémentés : Un plan factoriel fractionnaire  $2^{k-p}$  à 16 essais [22] (Tab.2) pour déterminer les

paramètres vraiment influents ( $X_1$ ,  $X_6$ ,  $X_8$ ), un plan de Rechscaffner à 37 essais [23] pour identifier les interactions des paramètres ( $X_1X_2$  et  $X_6X_8$ ) et enfin un plan quadratique ajoutant une modalité intermédiaire afin de détecter des non-linéarités. Ces plans ont été testés sur 180 images sélectionnées dans une séquence vidéo de 30 000 images urbaines et autoroutières. On en déduit un modèle statistique validé par la mesure du R-Square et du C(p) de Mallow ( $Y = 40.2 + 2.06 X_1 + 0.74 X_2 - 2.47 X_6 + 5.30 X_8 - 0.92 X_1X_2 + 0.95 X_6X_8$ ). Il fournit un réglage moyen des paramètres qui initialise l'algorithme d'optimisation de Nelder & Mead utilisant le simplexe. Celui-ci détermine les réglages optimaux des paramètres pour l'ensemble des images testées.

TAB.2 plan d'expérience Factoriel  $2^{k-p}$ 

Essai	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	r (%)
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	35.535
2	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	40.310
3	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	27.859
4	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	42.436
5	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	47.328
6	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	30.284
7	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	44.034
8	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	37.743
9	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	46.517
10	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	40.469
11	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	<b>50.680</b>
12	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	33.464
13	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	35.169
14	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	49.255
15	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	39.715
16	1	1	1	1	1	1	1	1	44.842

Pour réaliser l'apprentissage du module de contrôle, il faut auparavant choisir des descripteurs d'entrée pour caractériser les images. L'histogramme d'homogénéité [24] de l'image brute a été utilisé pour rendre compte à la fois de zones de teinte unie (peinture des véhicules) ou de texture homogène (revêtement bitumé de la route). Le module de contrôle utilisé est un simple perceptron multicouches. Il comporte 256 neurones d'entrée associés aux niveaux de l'histogramme d'homogénéité de l'image, 48 neurones cachés correspondant à la vitesse de convergence maximale du réseau et 3 neurones de sortie pour les valeurs calculées des 3 paramètres influents de réglage. Dans (FIG.5) sont indiquées en % les valeurs du taux de recouvrement (évaluation des sorties) moyenné sur l'ensemble des images test selon la technique de réglage adoptée ainsi que le coût CPU correspondant.

En l'absence de tout réglage adaptatif (réglage fixe moyen fourni par les plans d'expériences), les résultats sont médiocres ; si on applique le réglage issu du meilleur essai d'un des plans d'expériences, les résultats sont sensiblement meilleurs mais cette méthode est inapplicable en temps réel ; les résultats optimaux sont obtenus par le simplexe (SPL) au prix du temps prohibitif d'exploration de l'espace des paramètres ; enfin les réseaux (RN) fournissent des résultats remarquables, surtout celui à 3 sorties, au prix d'un temps de calcul négligeable ( $\approx$  temps de calcul des descripteurs

d'entrée). On a mentionné volontairement dans ce tableau les résultats obtenus avec un réglage à 8 paramètres : on peut vérifier qu'il est inutile de régler les 5 paramètres jugés peu influents par les plans d'expérience.

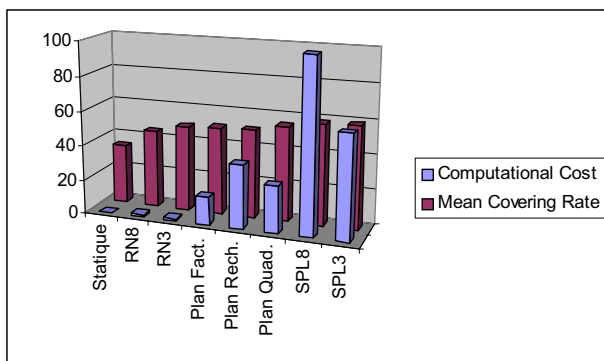


FIG.5 : comparaison de différentes techniques de réglage

**Conclusion** Ces résultats intéressants confirment l'intérêt de l'approche expérimentale pour le réglage adaptatif de chaînes de traitement d'images. Il s'agit maintenant d'en vérifier d'une part la portée sur d'autres applications où la typologie des images, les opérateurs de la CTI et les critères d'évaluation des données en entrée et en sortie seront à nouveau spécifiques et d'en unifier d'autre part la méthodologie.

## Références

- [1] R.M. Haralick, "Performance characterization protocol in computer vision", ARPA Image Understanding Workshop, Monterey, CA, 667-673, 1994.
- [2] P.Courtney, N.Thacker, A. Clark "Algorithmic modeling for performance evaluation" Workshop on performance characteristics of vision algorithms" Cambridge, April 19 1996- 13p.
- [3] W. Forstner, "10 Pros and cons against performance characterization of vision algorithms", in Workshop on Performance Characteristics of Vision Algorithms, April 1996.
- [4] Kevin W. Bowyer, P. Jonathon Phillips "Empirical Evaluation Techniques in Computer Vision" June 1998, Wiley-IEEE Computer Society Press ISBN: 0-8186-8401-1 262 pages
- [5] P. Meer, B. Matei, K. Cho, "Input Guided Performance Evaluation", Theoretical Foundations of Computer Vision, pp. 115-124, 1998.
- [6] I.T. Phillips and A.K. Chhabra, "Empirical Performance Evaluation of Graphics Recognition Systems", IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 21, pp. 849-870, 1999.
- [7] J.Blanc-Talon, V.Roport "Evaluation des chaînes de traitement d'images" Revue Scientifique et Technique de la Défense n°46 2000 p.29-38
- [8] S. Philipp-Foliguet, "Evaluation de la segmentation", ETIS, Cergy-Pontoise, Mars 2001.
- [9] N.Sebe,Q.Tian, E.Loupas, M.Lew, T.Huang "Evaluation of salient point techniques" CIVR 02 July 10-15 2002 London
- [10] P.Rosin, E.Ioannidis "Evaluation of global image thresholding for change detection" Pattern Recognition Letters 24 (2003) 2345-2356
- [11] Y.Yitzhaky, E.Peli "A method for objective edge detection evaluation and detection parameter selection" IEEE PAMI vol.25 n°8 Aug. 2003 p.1027-1033
- [12] V. Ropert, "Proposition d'une architecture de contrôle pour un système de vision", Thèse de l'Université René Descartes (Paris 6), Décembre 2001.
- [13] I.Levner, V.Bulitko "Machine learning for adaptive image Interpretation" The Sixteenth Innovative Applications of Artificial Intelligence Conference (IAAI-04) July 27-29, 2004 San Jose, California USA- 7p.
- [14] P. Schimmerling, J-C. Sisson, A. Zaïdi, "Pratique des Plans d'Expériences", Lavoisier Tec & Doc, ISBN 2-743-00239-5, 1998.
- [15] J.J.Rousselle, N.Vincent,"Design of experiments to set active contours" Quality control by Artificial Vision" Le Creusot France 19-22 May 2003.
- [16] S. Treuillet, "Analyse de l'influence des paramètres d'une chaîne de traitements d'images par un plan d'expériences", 19<sup>e</sup> colloque GRETSI'03 sur le traitement du signal et des images, 8-11 sept. 2003.
- [17] Margaret H. Wright The Nelder-Mead Simplex Method: Recent Theory and Practice International Symposium on Mathematical Programming Lausanne, EPFL, August 24-29, 1997
- [18] A.Domingues, Y. Lucas , D. Baudrier, P. Marché, "Détection et suivi d'objets en temps réel par un système embarqué multi capteurs", GRETSI'01, Toulouse, Septembre 2001.
- [19] A. Domingues, "Système embarqué multicapteurs pour la détection d'obstacles routiers - Développement du prototype et réglage automatique de la chaîne de traitement d'images", Thèse de l'Université d'Orléans, 15 Juillet 2004.
- [20] Y. Lucas, A. Domingues, M. Boubal, P. Marché, "Système de vision embarqué pour la détection d'obstacles routiers " Techniques de l'Ingénieur - Recherche & Innovation. 02/2005.9 p.
- [21] P. Lamaty, "Opérateurs de niveau intermédiaire pour le traitement temps réel des images", Thèse de Doctorat, 2000.
- [22] A. Fries, J. Hunter, "Minimum aberration  $2^{k-p}$  designs", Technometrics , vol. 22, pp. 601-608, 1980.
- [23] R. L. Rechtschaffner, "Saturated fractions of  $2n$  and  $3n$  factorial designs", Technometrics, 9, pp. 569-575, 1967.
- [24] H. Cheng, Y. Sun, "A hierarchical approach to color image segmentation using homogeneity", in IEEE Transactions on Image Processing, 9(12) : 2071-2082, 2000.

# Détection de jingles dans les documents sonores

Julien PINQUIER, Régine ANDRÉ-OBRECHT

Équipe SAMOVA, IRIT, UMR 5505 CNRS INPT UPS UT1  
118, route de Narbonne, 31062 TOULOUSE Cedex 04, FRANCE  
{pinquier, obrecht}@irit.fr

**Résumé** – Dans cet article, une nouvelle approche relative à l'indexation de la bande sonore de documents audiovisuels est proposée, son but est de détecter et d'identifier des sons clés (jingles). La localisation de ces unités sonores permet, par exemple, de structurer le flux sonore en émissions (programmes). Chaque jingle, d'une longueur de une à quatre secondes ici, est représenté par une suite de vecteurs spectraux que nous nommerons "signature" par la suite. La détection de candidats potentiels est effectuée en comparant la signature de chacun des jingles au flux de données. Ce calcul de dissimilarité est réalisé avec la distance Euclidienne. Des règles heuristiques (basées sur des seuils) valident (confirment ou annulent) le choix des candidats potentiels préalablement sélectionnés. Afin de vérifier la faisabilité de notre système et de valider notre approche, des expériences sont réalisées sur des émissions télévisées et radiophoniques. Le volume de données, correspondant à trois chaînes de télévision et trois stations de radio, est de l'ordre d'une dizaine d'heures. Le système est efficace car les premiers résultats sont très encourageants. En effet, nous avons reconnu 130 jingles sur 132 avec un catalogue (tableau des jingles de référence) contenant 32 sons clés.

**Abstract** – This work addresses the soundtrack indexing of multimedia documents. Our purpose is to detect and locate one or many jingles to structure the audio dataflow in program broadcasts (reports). Each jingle, from one to four seconds length, is commonly represented by a sequence of spectral vectors, considered as its "signature". Potential candidates are extracted from the data flow by computing an Euclidean distance. They are validated with heuristic rules. The system evaluation is performed on TV and radio corpora (more than 10 hours, 3 TV channels and 3 radio channels). First results show that the system is efficient: among 132 jingles to recognize, we have detected 130 with our reference jingle table of 32 different key sounds.

## 1 Introduction

Le document audio ou la bande sonore d'un document audiovisuel est très complexe puisqu'il résulte d'un mixage entre plusieurs sources sonores. Si l'on se réfère à la norme MPEG7, indexer un document sonore signifie rechercher les composantes primaires (parole, musique), identifier des sons clés (applaudissements, effets spéciaux...), détecter et identifier les locuteurs, trouver des mots-clés ou rechercher des thèmes [1]. Néanmoins tous ces systèmes de détection présupposent l'extraction de composantes acoustiques élémentaires et homogènes. Dans la plupart des études, cette étape consiste à faire une discrimination parole/musique.

Plusieurs tendances sont observées. D'une part, dans la communauté des spécialistes en musique, l'accent porte sur des paramètres permettant de séparer au mieux la musique du reste (non-musique) [2]. Par exemple, le taux de passage par zéro (Zero Crossing rate) et le centroïde spectral sont utilisés pour séparer le bruit des parties voisées (donc harmoniques) [3], [4] tandis que la variation de la magnitude spectrale (le "Flux" spectral) permet de détecter les continuités harmoniques [5]. D'autre part, dans la communauté du traitement automatique de la parole, les paramètres cepstraux sont privilégiés pour extraire les zones de parole [6] et [7].

Dans une étude précédente [8], nous avons fusionné ces deux approches et obtenu de très bons résultats. En effet, il n'était plus question pour nous de chercher à discriminer la parole et la musique, mais à les caractériser au mieux de façon indépendante. Dans cet article, une alternative à ce premier partitionnement (parole/musique/autre) est proposée. Celle-ci con-

siste à détecter des sons-clés (appelés communément "jingles") représentant le début et/ou la fin d'une émission afin de segmenter ou structurer le flux audio-visuel [9]. Il ne s'agit pas de rechercher des thèmes [10], mais plutôt de proposer une macro-segmentation de l'audio en trouvant la structure temporelle des programmes télévisés ou radiophoniques.

La section "reconnaissance de sons" du document de spécifications de MPEG7 [11] propose une liste d'effets sonores classés en catégories afin de décrire les documents sonores. En effet, les sons clés de référence sont répertoriés dans un tableau dynamique: structurer un document sonore revient donc à détecter et localiser les occurrences de ces sons clés.

Notre étude se situe dans ce même cadre scientifique. Pour nous, un jingle est un extrait sonore qui dure généralement quelques secondes. Il a pour but de présenter le début ou la fin d'une émission (météo, journal, publicité...) ou d'attirer l'attention de l'auditeur. Celui-ci a la particularité de pouvoir aussi bien contenir de la musique que de la parole ou du bruit. Il est, de plus, généralement redondant. Nous appelons "jingle de référence", une occurrence de celui-ci. Ce descripteur audio "bas niveau" est basé sur une analyse spectrale. La distance Euclidienne est utilisée comme mesure de dissimilarité.

Cet article est divisé en deux parties. La première section présente le système global de classification qui permet de détecter et d'identifier les jingles présents dans le flux sonore à condition que ceux-ci fassent partis de notre catalogue de sons clés. La seconde section permet de valider notre approche par des expériences effectuées sur des documents audiovisuels et radiophoniques.



## 2 Le système de classification

Le système de classification (figure 1) est divisé en trois modules classiquement utilisés dans un problème de reconnaissance de formes :

- le prétraitement acoustique permet de caractériser au mieux le signal par une suite de vecteurs afin de comparer ceux-ci à la signature de chacun de nos jingles.
- la phase de détection propose des candidats potentiels issus de la comparaison par la distance Euclidienne.
- l'identification confirme ou annule le choix des candidats grâce à des heuristiques (seuils).

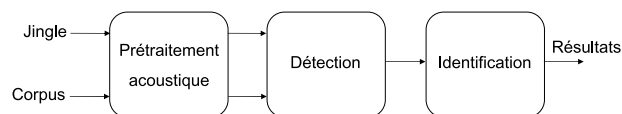


FIG. 1: Le système global de détection et d'identification des jingles.

### 2.1 Prétraitement acoustique

Ce prétraitement acoustique est basé sur une analyse spectrale (figure 2).



FIG. 2: Extraction des paramètres par analyse spectrale.

Le signal est découpé en trames de 32 ms avec recouvrement sur la moitié. Pour chaque trame d'analyse, une accentuation des aigus et un calcul du fenêtrage sont effectués (Hamming). Les coefficients spectraux sont alors créés à la suite du calcul des énergies dans les filtres par la FFT (Transformée de Fourier) et d'une pondération triangulaire (filtrage). Les filtres, couvrant la plage de fréquences [100 Hz - 8000 Hz], ont été testés lors d'une étude précédente sur la classification parole/musique [12].

Afin de ne pas tenir compte du facteur bruit/intensité qui peut varier au cours du temps ou des enregistrements, les spectres sont normalisés par leur énergie respective. Ainsi, 29 coefficients spectraux sont extraits.

### 2.2 Détection

Un jingle de référence, appartenant à notre catalogue de sons clés, est caractérisé par une suite de  $N$  vecteurs spectraux que nous appelons "signature" du jingle. Cette valeur  $N$  correspond au nombre de fenêtres d'analyse. La détection consiste à trouver cette séquence (suite de vecteurs) dans le flux de données à analyser. La distance Euclidienne est utilisée afin de comparer la signature (du jingle) et le signal (lui aussi représenté par une suite de vecteurs spectraux).

Cette comparaison s'effectue avec un pas de  $S$  vecteurs (figure 3).

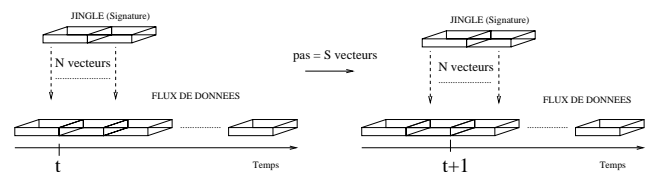


FIG. 3: Comparaison entre le jingle et le corpus par distance Euclidienne.

Les candidats potentiels sont sélectionnés comme étant des minima locaux. En effet, la valeur moyenne de la distance signature/flux est calculée. Si la distance courante est inférieure à la moitié de celle-ci, notée  $M$  dans la figure 5, cette distance est considérée comme une valeur minimale. Seuls les minima locaux, correspondant à ces valeurs minimales, sont détectés comme des jingles potentiels (figure 4).

### 2.3 Identification

La figure 4 est un exemple de résultats obtenus en calculant la distance Euclidienne entre la signature d'un jingle de référence et un fichier signal.

Nous pouvons observer cinq minima principaux qui ont été détectés dans l'étape précédente (cf. 2.2). Les deux premiers correspondent à un "bon" jingle : il s'agit d'un jingle présent dans le catalogue de sons-clés. Les trois autres sont bien des jingles mais n'appartiennent pas au catalogue. Ils ressemblent fortement aux deux premiers car les sons (notes) qui composent ces jingles sont les mêmes mais passés dans un ordre différent.

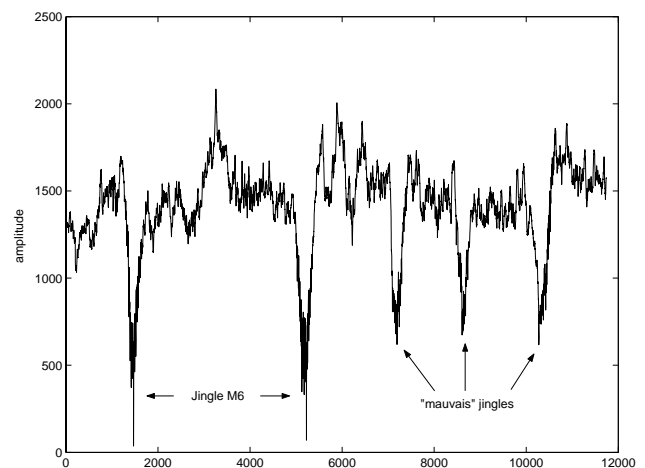


FIG. 4: Distance Euclidienne lors de la détection du "jingle M6" sur 3 minutes du "corpus M6".

Afin de sélectionner les "bons" jingles, nous proposons le processus suivant. Nous nous sommes aperçus que tous les minima correspondants à un jingle de référence, ont une particularité commune. En effet, ils sont représentés sans exception par un pic très fin. Ainsi, nous analysons la largeur des pics de chacun des minima locaux.

Pour cela, nous calculons (cf. figure 5) :

- $h$  la valeur courante du minima local.
- $L$  la largeur du pic à la hauteur  $H$ .  $H$  correspond à la hauteur à laquelle la largeur doit être estimée. Naturellement  $H$  et  $h$  sont liés (cf. 3.2).

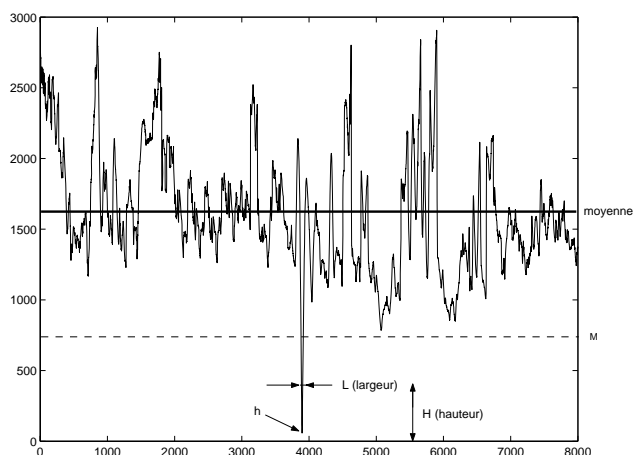


FIG. 5: Identification des “bons” jingles par analyse de chacun des pics correspondant aux minima locaux détectés précédemment.

Nous avons introduit un seuil  $\lambda$ . Si  $L < \lambda$ , le pic est fin et le minimum local est considéré comme un “bon” jingle. Sinon, le candidat est rejeté (“mauvais” jingle).

Remarque : le seuil  $\lambda$  doit être proportionnel à  $N$ .

### 3 Expériences

#### 3.1 Corpus

Notre base de données est composée de six corpora différents (table 1). La durée totale est d'environ 10 heures. Cette base a été échantillonnée à 16 kHz.

TAB. 1: Description de la base de données.

Corpus	Durée	Jingles	Occurrences
France 3	15 min	1	4
M6	15 min	1	16
Canal+	30 min	1	6
France Info	60 min	1	12
RFI	360 min	3	60
Publicités	90 min	25	34
<b>Total</b>	<b>570 min</b>	<b>32</b>	<b>132</b>

- Le corpus “France Info” est composée d’émissions de radio et pour la plupart des informations composées d’actualités, de reportages, de sports et de la météo. Il y a aussi quelques chansons et des publicités.
- Le corpus “France 3” est un corpus télévisuel avec 2 chansons et diverses publicités.
- Les corpora “Canal+” et “M6” correspondent à des journaux d’informations de la télévision française.

- Le corpus “RFI” est multilingue (Français, Anglais et Espagnol) avec une majorité d’interviews, de reportages et d’informations de Radio France Internationale (RFI).
- Le dernier corpus est une compilation de plusieurs publicités télévisuelles et radiophoniques.

La durée d’un jingle varie de une à quatre secondes. Les jingles de références (ou sons clés) sont une sélection des jingles présents dans la base de données. Notre catalogue de sons clés est composé de 32 jingles différents. Plus de 200 jingles apparaissent dans notre base de données. Notre but est de détecter et d’identifier seulement les jingles identiques à ceux de notre catalogue de sons clés ou superposés à de la parole si le présentateur parle durant le jingle. Finalement, nous avons 132 jingles à reconnaître sur les 200.

#### 3.2 Apprentissage

Afin d’implémenter notre méthode d’identification, nous devons tout d’abord fixer les paramètres  $S$ ,  $H$  et  $\lambda$ . Pour cela, nous avons examiné le comportement de la distance Euclidienne entre les jingles de référence et le corpus France 3. Nous nous sommes aperçus que  $S$  pouvait être très grand sans pour autant que les résultats soient dégradés. Ce délai important (supérieur à une seconde pour un corpus échantillonné à 16 kHz) permet au système de fonctionner en temps réel.

Nous avons fixé  $H$  :  $H = \alpha.h$ , avec  $\alpha$  correspondant à une constante ( $\alpha = \log 2$ ).

Le seuil de rejet  $\lambda$  correspond au rapport entre la durée du jingle de référence  $N$  et le pas d’analyse  $S$ .

Experimentalement nous choisissons :  $\lambda = 5 * N/S$ .

#### 3.3 Resultats

Nous avons testé **chaque** jingle de référence sur **tous** les corpora (table 2). Sur les 132 jingles que nous devons identifier, nous en avons détecté 130, soit 98,5% de taux de reconnaissance. Les deux seuls jingles omis (France Info et un jingle publicitaire) sont complètement recouverts de parole et leur pic est dans ce cas trop large (figure 4).

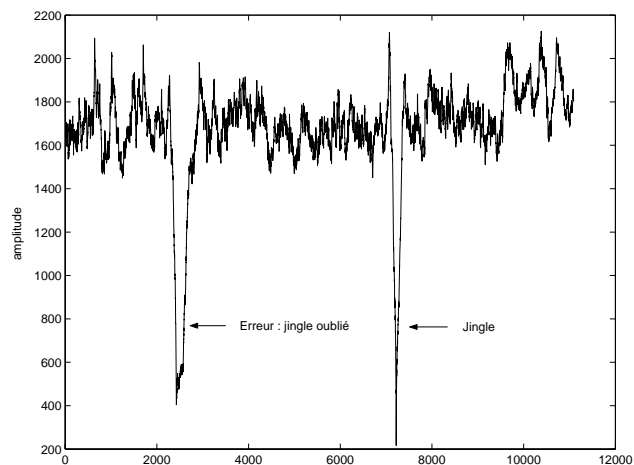


FIG. 6: Exemple d’erreur (omission) du “jingle France Info” sur un extrait du corpus France Info (3 minutes).

La détection est excellente : nous n'avons aucune fausse alarme et seulement deux omissions alors que d'autres jingles (n'appartenant pas au catalogue de sons clés) sont présents dans la base de données.

Bien que la base de données soit très variée, notamment par la différence des enregistrements entre les programmes de télévision et ceux de radio et la nature des émissions, le système possède un comportement très satisfaisant. En outre, ces expériences prouvent la robustesse de notre système.

TAB. 2: Détection manuelle et automatique des jingles de référence sur chacun des corpus.

Corpus	Détection auto	Détection manuelle
France 3	4	4
M6	16	16
Canal+	6	6
France Info	11	12
RFI	60	60
Publicités	33	34
<b>Total</b>	<b>130</b>	<b>132</b>

Durant la phase d'évaluation, nous avons étudié la précision de la détection. La localisation des jingles est très bonne : la différence entre les localisations manuelle et automatique sont très faibles (inférieure à 500 ms quelque soit le jingle). Dans une optique d'indexation, où généralement les décisions sont prises pour chaque seconde d'analyse, cette précision est suffisante.

Nous pouvons aussi noter que notre système fonctionne en temps réel. En effet, pour traiter un fichier sonore d'une heure avec notre catalogue de 32 jingles de référence, moins d'une heure est nécessaire en utilisant un processeur AMD cadencé à 1,4 GHz.

## 4 Discussion

Dans cet article, une nouvelle approche relative à la classification de la bande sonore est proposée, son but est d'indexer les documents sonores. Nous avons présenté pour cela un système de détection et d'identification de jingles (ou sons clés) basé sur un calcul de distance euclidienne dans le domaine spectral. Cette méthode est assez simple mais, néanmoins les résultats sont excellents. En effet, nous n'observons aucune fausse alarme et seulement deux omissions dans des conditions extrêmes : de la parole est superposée au jingle pendant l'intégralité de celui-ci. La localisation est très satisfaisante : nous pouvons déterminer le début d'un jingle avec une marge inférieure à la demi-seconde, ce qui est largement suffisant pour une tâche d'indexation.

Notre système peut être considéré comme efficace par sa simplicité (seulement basé sur une analyse spectrale), sa rapidité (temps réel), sa robustesse (indépendant du corpus) et la qualité de ses résultats. Il peut être utilisé pour une description des documents sonore de plus haut niveau, de manière à par exemple structurer ou classer en émissions (programmes).

Ce travail devra être prolongé en y ajoutant une macro segmentation visuelle [13] afin de définir une signature audio/vidéo des émissions et trouver une mesure de dissimilarité audiovisuelle.

## Références

- [1] M. Franz, J. Scott McCarley, T. Ward, and W. Zhu, "Topics styles in IR and TDT: Effect on System Behavior," in *European Conference on Speech Communication and Technology*, Aalborg, Denmark, Sept. 2001, pp. 287–290.
- [2] S. Rossignol, X. Rodet, J. Soumagne, J. L. Collette, and P. Depalle, "Automatic Characterization of Musical Signals: Feature Extraction and Temporal Segmentation," *Journal of New Music Research*, vol. 28, no. 4, pp. 281–295, Dec. 1999.
- [3] J. Saunders, "Real-time Discrimination of Broadcast Speech/Music," in *IEEE International Conference on Audio, Speech and Signal Processing*, Atlanta, USA, May 1996, pp. 993–996.
- [4] T. Zhang, C. Kuo, and C. J., "Hierarchical System for Content-Based Audio Classification and Retrieval," in *Conference on Multimedia Storage and Archiving Systems III*, Nov. 1998, vol. 3527 of *SPIE*, pp. 398–409.
- [5] E. Scheirer and M. Slaney, "Construction and Evaluation of a Robust Multifeature Speech/Music Discriminator," in *IEEE International Conference on Audio, Speech and Signal Processing*, Munich, Germany, Apr. 1997, pp. 1331–1334.
- [6] J. L. Gauvain, L. Lamel, and G. Adda, "Systèmes de processus légers : concepts et exemples," in *International Workshop on Content-Based Multimedia Indexing*, Toulouse, France, Oct. 1999, pp. 67–73, GDR-PRC ISIS.
- [7] J. Foote, "Automatic Audio Segmentation using a Measure of Audio Novelty," in *IEEE International Conference on Multimedia and Expo*, New-York, USA, 2000, pp. 452–455.
- [8] J. Pinquier, Jean-Luc Rouas, and R. André-Obrecht, "A Fusion Study in Speech / Music Classification," in *IEEE International Conference on Audio, Speech and Signal Processing*, Hong-Kong, China, Apr. 2003.
- [9] J. Carrière, F. Pachet, and R. Ronfard, "CLAViS - A Temporal Reasoning System for Classification of Audiovisual Sequences," in *Content-Based Multimedia Information Access Conference (RIAO)*, Collège de France, Paris, France, Apr. 2000.
- [10] R. Amaral, T. Langlois, H. Meinedo, J. Neto, N. Souto, and I. Trancoso, "The Development of a Portuguese Version of a Media Watch System," in *European Conference on Speech Communication and Technology*, Aalborg, Denmark, Sept. 2001, vol. 4, pp. 2689–2692.
- [11] ANSI, "ISO/IEC 15938-4 Information Technology - Multimedia Content Description Interface - Audio," Tech. Rep., MPEG, 2001.
- [12] J. Pinquier, C. Sénac, and R. André-Obrecht, "Indexation de la bande sonore : recherche des composantes parole et musique," in *Congrès de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle*, Angers, France, Jan. 2002, pp. 163–170.
- [13] P. Aigrain, P. Joly, and V. Longueville, "Medium Knowledge-Based Macro-Segmentation of Video into Sequences," in *Intelligent Multimedia Information Retrieval*, pp. 159–173, 1997.



# Estimation du signal glottique basée sur un modèle ARX

Damien VINCENT<sup>1</sup>, Olivier ROSEC<sup>1</sup>, Thierry CHONAVEL<sup>2</sup>

<sup>1</sup>France Telecom Division R&D TECH/SSTP  
2, Avenue Pierre Marzin, 22307 Lannion Cedex, France

<sup>2</sup>ENST Bretagne, département Signal et Communications  
B.P. 832, 29285 Brest Cedex, France

{damien.vincent,olivier.rosec}@francetelecom.com, thierry.chonavel@enst-bretagne.fr

**Résumé** – Le but de cet article est d’estimer à partir du seul signal de parole le signal de source glottique. L’utilisation du modèle ARX de production de la parole ainsi que d’un modèle de source glottique transforme ce problème de déconvolution en un problème d’optimisation non linéaire. Nous présentons une méthode efficace pour résoudre ce problème ainsi que des résultats sur signaux synthétiques et réels.

**Abstract** – The goal of this paper is to estimate the glottal source signal from the sole speech signal. By using the ARX model of speech production and a glottal source model, this deconvolution problem is turned into a complex nonlinear optimization problem. We present an efficient method to solve this problem, and some experiments on synthetic speech as well as on natural speech signals.

## 1 Introduction

La caractérisation de la qualité vocale à l’aide du signal de source glottique a fait l’objet de nombreuses études [1] et permet d’envisager des applications intéressantes visant à caractériser des voix ou à réaliser des transformations de la voix. L’information issue de la source glottique peut par exemple se révéler utile dans des domaines tels que la conversion de voix ou la synthèse de parole expressive.

La mesure directe de l’onde glottique ne peut être réalisée que par des méthodes intrusives et donc incompatibles avec la plupart des applications visées. Il convient par conséquent d’estimer le signal de source glottique à partir du seul signal de parole. Pour traiter ce problème de déconvolution, un modèle ARX (Auto-Regressive eXogenous) est utilisé pour représenter les mécanismes de production de la parole. De plus, une information a priori sur la source glottique est introduite par le biais du modèle LF (Liljencrant-Fant, [2]). Dans ce cadre, l’estimation conjointe de la source glottique et du conduit vocal s’apparente à un problème complexe d’optimisation non-linéaire. Pour limiter la complexité de l’estimation, nous proposons une méthode efficace visant notamment à réduire drastiquement le domaine d’exploration des paramètres. L’algorithme proposé est appliqué à l’analyse de signaux de parole synthétique et naturelle.

## 2 Modèle de production de la parole

Le modèle ARX est couramment utilisé pour représenter de manière linéaire le processus de production de la parole [3] :

$$s(n) = - \sum_{k=1}^p a_k(n)s(n-k) + b_0(n)u(n) + \epsilon(n) \quad , \quad (1)$$

où  $s(n)$  correspond au signal de parole et  $u(n)$  à la dérivée du signal de débit glottique, la dérivation correspondant à une pre-

mière approximation de l’effet de radiation des lèvres. Le filtre tout pôle de coefficients  $a_k(n)$  et d’ordre  $p$  supposé fixé permet de représenter la réponse du conduit vocal,  $b_0(n)$  est le facteur d’amplitude du signal de source glottique et  $\epsilon(n)$  correspond à l’erreur de prédiction du modèle ARX.

Dans le cas d’une modélisation AR du signal de parole, le résidu est issu de la minimisation de l’erreur de prédiction. Aucun a priori n’est ajouté au signal d’excitation et celui-ci ne correspond donc pas à une approximation satisfaisante du signal de source glottique. Le modèle ARX corrige ce défaut en permettant de contraindre la source glottique  $u(n)$  à rester dans un espace qui reste proche de la réalité physique.

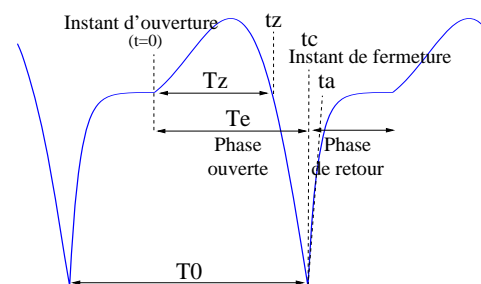


FIG. 1 – Le modèle LF

La contrainte sur la source glottique peut passer par l’utilisation d’un modèle paramétrique, celui-ci étant établi à partir de mesures directes du débit glottique ainsi qu’à partir de la modélisation de certains phénomènes physiques intervenant dans le processus de production de la parole. Parmi ces modèles paramétriques, le modèle LF, dont la dérivée du signal glottique et ses instants caractéristiques sont représentés sur la figure 1, est le plus répandu. Le modèle LF est un modèle à cinq degrés de liberté : un pour la position temporelle (la référence étant généralement l’instant de fermeture  $t_c$ ), un pour l’amplitude (déjà intégré au modèle de production sous la forme du

coefficient  $b_0$ ) et trois sur la forme du signal représentée par le vecteur  $\theta = (O_q, \alpha_m, Q_a)$ , où le quotient ouvert est défini par  $O_q = \frac{T_e}{T_0}$ , le coefficient d'asymétrie par  $\alpha_m = \frac{T_z}{T_e}$  et le coefficient de phase de retour par  $Q_a = \frac{T_a}{(1-O_q)T_0}$ . Le domaine de variation admissible du vecteur de forme  $\theta$  sera noté  $\Theta$ .

L'expression analytique du modèle LF fait intervenir un autre jeu de paramètres (non normalisés) qui est implicitement relié aux paramètres décrits précédemment :

$$\begin{aligned} u(t) &= E_1 e^{at} \sin(wt) & 0 \leq t \leq T_e \\ u(t) &= -E_2 [e^{-b(t-T_e)} - e^{-b(T_0-T_e)}] & T_e \leq t \leq T_0 \end{aligned} \quad (2)$$

L'équation (2) permet de calculer analytiquement le spectre de l'onde glottique dont on peut déduire un comportement asymptotique représenté sur la figure 2 : le spectre est caractérisé par la présence d'une résonance, aussi appelée formant glottique par analogie avec les résonances du conduit vocal, et par une atténuation supplémentaire de 6dB/oct pour des fréquences situées au delà de la fréquence de coupure  $F_a = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{Q_a(1-O_q)T_0}$ .

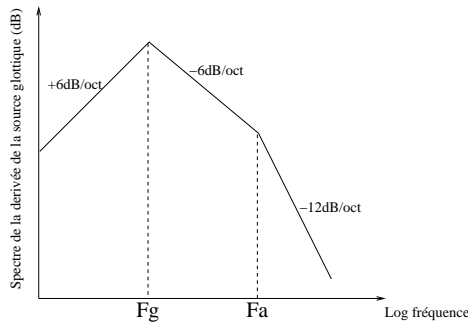


FIG. 2 – Comportement asymptotique de la dérivée de l'onde de débit glottique.

### 3 Estimation des paramètres

#### 3.1 Principe général

En utilisant le modèle ARX et le modèle LF de source glottique, le problème de déconvolution est ramené à un problème d'optimisation non linéaire sur les paramètres de source et les coefficients  $a_k(n)$ ,  $b_0(n)$ . La période fondamentale  $T_0$  peut être estimée par des méthodes telles que l'algorithme YIN [4] et ceci de manière indépendante des autres paramètres de source. Pour pouvoir considérer le filtre AR comme stationnaire, l'analyse sera réalisée sur un intervalle  $[t_c - T_0; t_c + T_0]$  (l'instant de fermeture détermine ainsi l'instant d'analyse) et en utilisant une fenêtre de Hanning. Le modèle ARX étant linéaire à  $u$  fixé, l'estimation des  $a_k$  et  $b_0$  s'obtient simplement par minimisation du critère des moindres carrés  $\sum \epsilon^2(n)$  qui s'écrit aussi sous la forme  $\|M_u A - S\|^2$  où :

$$\begin{aligned} S &= (s(t_c - N), \dots, s(t_c + N))^T, \\ A &= (a_1, a_2, \dots, a_p, b_0)^T, \\ U &= (u(t_c - N), \dots, u(t_c + N))^T, \\ M_u &= [D|U], \end{aligned}$$

$$\text{avec } D = \begin{pmatrix} s(t_c - N - 1) & \dots & s(t_c - N - p) \\ \dots & \dots & \dots \\ s(t_c + N - 1) & \dots & s(t_c + N - p) \end{pmatrix}.$$

Ce minimum se calcule à l'aide d'algorithmes standards de résolution de systèmes linéaires et s'écrit analytiquement sous la forme suivante :

$$E(\theta, t_c) = \min_{a_k, b_0} \sum \epsilon^2(n) = \|S - M_u(M_u^T M_u)^{-1} M_u^T S\|^2.$$

#### 3.2 Quantification et estimation des paramètres de forme

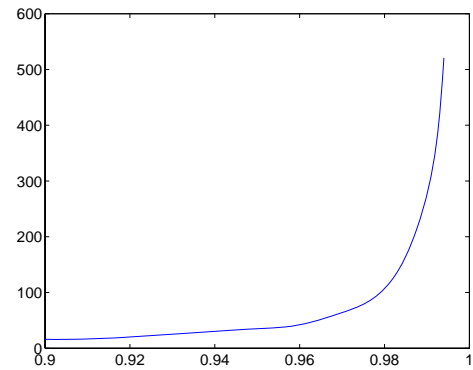


FIG. 3 – Nombre de sources de  $\tilde{\Theta}_{\rho_m}$  en fonction de  $\rho_m$

La minimisation de  $E(\theta, t_c)$  vis à vis du vecteur  $\theta$  des paramètres de forme (les autres paramètres de source étant fixés) reste un problème d'optimisation non-linéaire complexe. Afin de réduire cette complexité tout en gardant une solution proche de l'optimum global, l'erreur  $E(\theta, t_c)$  ne sera évaluée que sur un dictionnaire fini  $\tilde{\Theta}$  de vecteurs de forme. La construction d'un tel dictionnaire est basée sur une mesure de similarité des différentes formes d'onde glottique, la similarité entre 2 sources de paramètres  $\theta$  et  $\tilde{\theta}$  étant mesurée à l'aide de leur coefficient de corrélation  $\rho_{u_\theta, u_{\tilde{\theta}}}$ . Ainsi, étant donné un coefficient de corrélation minimal  $\rho_m$ , la création du sous-ensemble  $\tilde{\Theta}_{\rho_m}$  devra respecter les 2 conditions suivantes :

- condition pour couvrir l'ensemble  $\Theta$  :  
 $\forall \theta \in \Theta : \exists \tilde{\theta} \in \tilde{\Theta}_{\rho_m} \text{ tel que } \rho(u_\theta, u_{\tilde{\theta}}) \geq \rho_m,$
- condition pour éviter la redondance :  
 $\forall \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2 \in \tilde{\Theta}_{\rho_m} : \rho(u_{\tilde{\theta}_1}, u_{\tilde{\theta}_2}) < \rho_m.$

En pratique, l'algorithme 1 permet de créer un tel sous-ensemble. La figure 3 montre les variations du cardinal du sous-ensemble  $\tilde{\Theta}_{\rho_m}$  en fonction de  $\rho_m$ .

---

#### Algorithme 1 : Algorithme de création de $\tilde{\Theta}$

---

```

 $\tilde{\Theta} \leftarrow \emptyset$  ;
 $\Delta \leftarrow 0$  ;
répéter
    Générer un vecteur de forme  $\theta$  ;
    si  $\max_{\tilde{\theta} \in \tilde{\Theta}} \rho_{u_{\tilde{\theta}}, u_\theta} < \rho_m$  alors
         $\tilde{\Theta} \leftarrow \tilde{\Theta} \cup \{\theta\}$  ;
         $\Delta \leftarrow 0$  ;
    sinon
         $\Delta \leftarrow \Delta + 1$  ;
tant que  $\Delta < \Delta_{max}$  ;
```

---

L'estimation des paramètres de forme sera réalisée en deux temps : la première étape consiste à minimiser l'erreur sur l'ensemble fini  $\tilde{\Theta}$  puis à affiner la solution obtenue en réalisant quelques itérations d'un algorithme d'optimisation non linéaire tel que celui décrit dans [5] qui se base sur des transformations géométriques élémentaires pour minimiser une fonction de coût. Le choix de  $\rho_m$  (et donc du nombre de sources dans le dictionnaire) doit être basé sur les considérations suivantes : un nombre trop élevé de sources augmente la complexité sans améliorer la solution car l'algorithme d'optimisation non linéaire permet déjà d'affiner la solution ; au contraire, un nombre trop faible de sources nuira à la qualité de l'estimation finale. Prendre  $\rho_m = 0.99$  s'est révélé être un bon compromis entre ces deux considérations : le cardinal du dictionnaire est alors de  $L = 280$  sources.

Pour estimer les paramètres de forme, nous sommes donc amenés à évaluer  $E(\theta, t_c)$  et donc à inverser  $M_u$  pour différentes valeurs de  $\theta$ . Une modification des paramètres de forme n'affectant que le signal de source, seule la dernière colonne de  $M_u$  est modifiée lorsque  $\theta$  parcourt  $\tilde{\Theta}$ . Nous pouvons donc tabuler un certain nombre d'opérations en mettant en oeuvre une décomposition QR de  $M_u$  pour le calcul de  $E(\theta, t_c)$ , et ainsi réduire l'ordre de complexité de  $O(LNp^2)$  à  $O(LNp)$  (où  $L$  correspond au cardinal de  $\tilde{\Theta}$ ) puisque seule la dernière colonne de  $Q$  et de  $R$  doivent être recalculées pour chaque point de  $\tilde{\Theta}$ . Au final, les opérations sont réparties de la manière suivante :

- pour le premier vecteur  $\theta$ ,  $O(Np^2)$  opérations sont nécessaires,
- pour les  $L - 1$  vecteurs suivants, le calcul de  $E(\theta, t_c)$  requiert  $O(Np)$  opérations.

Lors de l'estimation des paramètres, il faut générer de manière explicite le signal de source glottique LF ce qui est coûteux si on utilise directement l'équation (2). Une méthode plus rapide consiste à générer ce signal de manière récursive en utilisant un filtre AR d'ordre deux pour la phase ouverte et un filtre AR d'ordre un pour la phase de retour.

### 3.3 Résumé de la procédure d'estimation

L'utilisation d'un algorithme du type « délai de groupes » tel que celui présenté dans [6] permet d'initialiser de manière robuste la position des instants de fermeture de glotte. L'algorithme 2 détaillé dans l'encadré ci-dessous limite donc la recherche de l'instant de fermeture à un intervalle centré autour de cette position. Pour chaque position testée, l'estimation du paramètre  $\theta$  optimal est effectuée suivant les deux étapes décrites dans la section précédente, à savoir une minimisation de  $E(\theta, t_c)$  sur le sous-ensemble  $\tilde{\Theta}_{\rho_m}$  suivi d'un raffinement par un algorithme d'optimisation non linéaire.

## 4 Expérimentations et résultats

### 4.1 Résultats sur signaux synthétiques

La mesure de la qualité de l'estimation du vecteur de forme  $\theta$  est réalisée ici sur des signaux synthétiques. Le coefficient de corrélation moyen entre la source estimée et la source théorique donne une mesure globale de la qualité de l'estimation de la forme tandis que les variances des estimateurs de  $O_q$ ,  $\alpha_m$

#### Algorithme 2 : Algorithme d'estimation des paramètres de source

---

```

 $T_0 \leftarrow$  Estimation par l'algorithme YIN;
 $\tilde{t}_c \leftarrow$  Estimation par un algorithme de délais de groupe;
pour  $t_c = \tilde{t}_c - \Delta$  à  $\tilde{t}_c + \Delta$  de pas  $\delta t_c$  faire
     $E_{t_c} \leftarrow \min_{\theta \in \tilde{\Theta}_{\rho_m}} E(\theta, t_c);$ 
     $\theta_{t_c} \leftarrow \operatorname{argmin}_{\theta \in \tilde{\Theta}_{\rho_m}} E(\theta, t_c);$ 
     $(E_{t_c}, \theta_{t_c}) \leftarrow$  Optimisation non linéaire avec  $\theta_{init} = \theta_{t_c};$ 
 $\hat{t}_c \leftarrow \operatorname{argmin}_{t_c} E_{t_c};$ 
 $\hat{\theta} \leftarrow \theta_{\hat{t}_c};$ 

```

---

et  $Q_a(1 - O_q)$  donnent une indication de la qualité des résultats sur chacun des paramètres de forme. Les biais sur chacun des trois paramètres de forme ne sont pas donnés car ils se sont révélés négligeables sur les expériences effectuées. L'expression de la fréquence de coupure  $F_a = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{Q_a(1-O_q)T_0}$  justifie l'étude sur  $Q_a(1 - O_q)$  plutôt que sur  $Q_a$  qui n'a pas de signification physique réelle. Les signaux synthétiques ont été générés en tirant aléatoirement les paramètres de source glottique et en utilisant de manière aléatoire un filtre AR d'ordre huit parmi sept configurations correspondant à différentes voyelles françaises. Les résultats donnés dans le tableau 1 confirment que la réduction du domaine d'exploration de  $\theta$  à l'ensemble  $\tilde{\Theta}$  ne nuit pas à la qualité de l'estimation, l'algorithme d'optimisation non linéaire permet juste d'améliorer la précision de l'estimation.

TAB. 1 – Résultats de l'estimation des formes sur signaux synthétiques avec  $f_0 = 100\text{Hz}$ , HNR=25dB et en utilisant ou non un algorithme d'optimisation non linéaire pour affiner la solution.

OptimNL	$\sigma_{O_q}$	$\sigma_{\alpha_m}$	$\sigma_{Q_a(1-O_q)}$	$\rho_{mean}$
Non	0.048	0.021	0.013	0.993
Oui	0.023	0.008	0.003	0.999

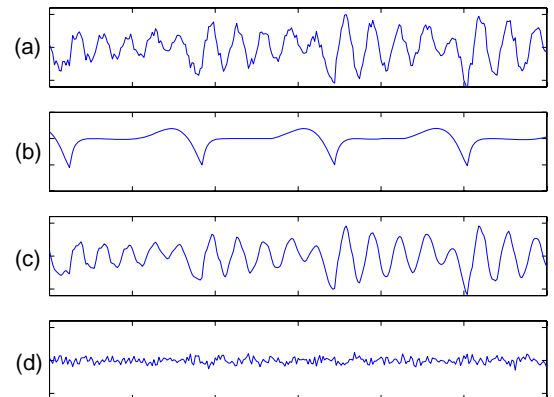


FIG. 4 – Analyse et resynthèse sur un signal de parole synthétique. (a) Signal de parole. (b) Source estimée. (c) Signal resynthétisé. (d) Différence entre le signal de parole et le signal resynthétisé.

Un signal synthétique a aussi été généré sur vingt périodes ( $f_0 = 100\text{ Hz}$ ) dans le cadre d'un test de resynthèse. La première période a été générée en utilisant les paramètres de sources

suivants :  $O_q = 0.6$ ,  $\alpha_m = 0.7$ ,  $Q_a = 0.05$  et en utilisant un filtre représentant la voyelle 'A' tandis que la dernière période a été générée en utilisant  $O_q = 0.4$ ,  $\alpha_m = 0.85$ ,  $Q_a = 0.05$  et un filtre AR correspondant à la voyelle 'E'. Pour les périodes intermédiaires, les paramètres de source ainsi que les coefficients LSF ont été interpolés linéairement. Comme le montre la figure 4, le signal resynthétisé en utilisant les paramètres de source estimés ne diffère de l'original que par la composante apériodique.

## 4.2 Résultats sur signaux réels

La voyelle 'A' issue du mot 'sable' prononcé par un homme a été analysée en utilisant un filtre AR d'ordre 14. La validité du résultat de l'analyse visible sur la figure 5 est partiellement confirmée par le signal DEGG (dérivée du signal électroglottographique) qui montre que les instants caractéristiques du signal de source glottique ont bien été estimés. Sur la voyelle analysée, l'erreur de prédiction est également faible, le résultat du filtrage inverse par l'AR estimé est donc très proche de la source LF estimée. D'autre part, un test informel d'écoute confirme que le signal resynthétisé est proche de l'original sans toutefois être complètement identique au niveau perceptuel, des résultats similaires ont été observés dans [7].

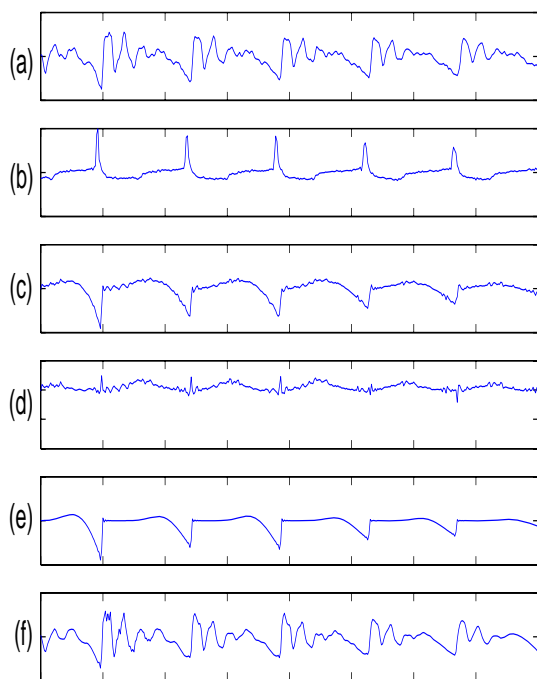


FIG. 5 – Analyse et resynthèse sur un signal de parole naturelle. (a) Signal de parole. (b) Signal DEGG. (c) Résultat du filtrage inverse. (d) Erreur de prédiction du modèle ARX. (e) Source LF estimée. (f) Signal resynthétisé.

## 5 Conclusion

L'estimation conjointe de la source glottique et du filtre AR modélisant le conduit vocal mène à un problème complexe d'op-

timisation non linéaire. Dans cet article, nous avons proposé une méthode efficace et robuste basée sur l'exploration systématique d'un ensemble fini de vecteurs de forme et suivie d'une procédure de raffinement local. Des optimisations algorithmiques ont également permis de réduire d'un facteur  $p$  la complexité d'estimation du vecteur de forme.

La méthode proposée a été validée sur des signaux synthétiques et les expériences réalisées sur de la parole naturelle ont montré que les caractéristiques principales du signal glottique sont correctement estimées. La resynthèse n'étant toutefois pas complètement transparente, il conviendra de réaliser une modélisation acoustique du résidu, cette modélisation pouvant également servir dans le cadre de modifications ou transformations de voix de haute qualité.

## Références

- [1] N. Henrich, "Etude de la source glottique en voix parlée et chantée," Ph.D. dissertation, Université de Paris 6, 2001.
- [2] G. Fant, J. Liljencrants, and Q. Lin, "A four-parameter model of glottal flow," *STL-QPSR*, 1985.
- [3] W. Ding, H. Kasuya, and S. Adachi, "Simultaneous estimation of vocal tract and voice source parameters based on an ARX model," *IEICE Trans. Inf. Syst.*, vol. E78-D, no. 6, pp. 738–743, June 1995.
- [4] A. Cheveigné and H. Kawahara, "YIN, a fundamental frequency estimator for speech and music," *Journal of the Acoustic Society of America*, 2002.
- [5] J. Nelder and R. Mead, "A simplex method for function minimisation," *Computer Journal*, vol. 7, pp. 308–313, 1964.
- [6] A. Kounoudes, P. Naylor, and M. Brookes, "The dyspa algorithm for estimation of glottal closure instants in voiced speech," *IEEE ICASSP*, 2002.
- [7] P. Hedelin, "High quality glottal LPC-vocoding," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 11, pp. 465–468, April 1986.

# Classification d'Expressions Vocales Passives Versus Actives

Z. HAMMAL<sup>1</sup>, B. BOZKURT<sup>2</sup>, L. COUVREUR<sup>2</sup>, D. UNAY<sup>2</sup>, A. CAPLIER<sup>1</sup> et T. DUTOIT<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire des images et des signaux LIS  
46 avenue Félix Viallet, Grenoble, France

<sup>2</sup>Laboratoire de traitement de signal, Faculté Polytechnique de Mons  
1 Avenue Copernic, B-7000, Mons, Belgique

<sup>1</sup>[hammal.caplier@lis.inpg.fr](mailto:hammal.caplier@lis.inpg.fr), [zakia\\_hammal@yahoo.fr](mailto:zakia_hammal@yahoo.fr)

<sup>2</sup>[bozkurt,couvreur,unay,dutoit@tcts.fpms.ac.be](mailto:bozkurt,couvreur,unay,dutoit@tcts.fpms.ac.be)

**Résumé** – Six expressions sont généralement considérées pour caractériser les états émotionnels humains : Sourire, Surprise, Colère, Tristesse, dégoût et Neutre. Différentes mesures peuvent être extraites à partir du signal de parole pour caractériser ces expressions, à savoir la fréquence fondamentale, l'énergie, le SPI (rapport des énergies des HF et des BF dans le signal) et le débit de parole. Une classification automatique des cinq expressions basées sur ces caractéristiques présente des conflits entre la Colère, la Surprise et le Sourire d'une part et le Neutre et la Tristesse d'autre part. Ce conflit entre classes d'expressions est également retrouvé chez le classifieur humain. Nous proposons donc de définir deux classes d'expressions: Active regroupant le Sourire, la Surprise et la Colère et Passive regroupant le Neutre et la Tristesse. Une telle classification est également plus réaliste et plus appropriée pour l'intégration d'information de parole dans un système de classification multimodale combinant la parole et la vidéo, ce qui est à long terme le but de notre travail. Dans ce papier, différentes méthodes de classification sont testées: un classifieur Bayésien, une Analyse Discriminante Linéaire (ADL), le classifieur au K plus proches voisins(KNN) et un classifieur à Machine à Vecteur de Support (SVM) avec une fonction de base gaussienne. Pour les deux classes considérées, les meilleurs taux de classification sont obtenus avec le classificateur SVM avec un taux de reconnaissance de 89.74% pour l'état Actif et de 86.54 % pour l'état Passif.

**Abstract** – Six expressions are commonly considered to characterize human emotional states: Happiness, Surprise, Anger, Sadness, disgust and Neutral. Different measures can be extracted from speech signals to characterize these expressions, for example the pitch, the energy, the SPI and the speech rate. Automatic classification of the five expressions based on these features shows a great confusion between Anger, Surprise and Happiness on the one hand and Neutral and Sadness on the other hand. Such a confusion is also observed when humans make the same classification. We propose to define two classes of expression: Active gathering Happiness, Surprise and Anger versus Passive gathering Neutral and Sadness. Such a partition is also better suited for the integration of speech information in a multimodal classification system based on speech and video, which is the long term aim of our work. In this paper, we test several classification methods, namely a Bayesian classifier, a Linear Discriminant Analysis (LDA), the K Nearest Neighbours (KNN) and a Support Vector Machine with Gaussian radial basis function kernel (SVM). For the considered two classes, the best performances are achieved with the SVM classifier with a recognition rate of 89.74% for Active state and of 86.54 % for Passive state.

## 1. Introduction

Les interfaces utilisateurs des systèmes informatiques évoluent vers des interfaces intelligentes et multimodales. Elles prennent en considération aussi bien les gestes de l'utilisateur, sa voix ainsi que ses expressions faciales dans le but de rendre la communication homme-machine aussi proche que possible d'une communication homme-homme[1]. Il existe de nombreux travaux dédiés à l'analyse et la reconnaissance soit des expressions vocales soit des expressions faciales. Dans [2] les auteurs indiquent que l'utilisation de l'une des deux modalités est liée aussi bien aux expressions traitées qu'au contexte de leurs applications. Le travail présenté s'inscrit dans la continuité de nos travaux sur la reconnaissance des expressions faciales [3] basée sur l'analyse d'informations vidéos dans le but de développer un système multimodal de reconnaissance d'expressions.

Plusieurs travaux ont été menés sur l'analyse et la reconnaissance des expressions vocales : analyse de caractéristiques [4,5], classification des expressions vocales [6,7].

Contrairement à ces travaux qui se sont efforcés de déterminer des caractéristiques permettant de reconnaître et dissocier un nombre prédéfini de classes d'expressions, notre objectif est de trouver des classes plus générales et plus réalistes.

Dans un premier temps, une classification en 5 classes d'expressions a été envisagée sur la base d'expressions vocales en langue danoise DES [8]. Cette dernière est composée uniquement de 5 des 6 expressions universelles: Colère, Surprise, Sourire, Neutre et Tristesse.

Conformément à ce qui a été rapporté dans des travaux précédents [6,7], des confusions entre groupes d'expressions ont été obtenues. Il s'avère que ce sont les mêmes confusions que celles obtenues lors d'une classification par un humain. Ce qui nous amène à nous intéresser à deux classes d'expressions seulement : la classe des voix Actives regroupant la Joie, la Surprise et la Colère et la classe des voix Passive regroupant le Neutre et la Tristesse.

Pour valider le bien-fondé de ces deux nouvelles classes, plusieurs méthodes de classification utilisant un ensemble de caractéristiques statistiques acoustiques sont testées: un classifieur



Bayésien, une classification par Analyse Discriminante Linéaire (ADL), un classifieur aux K plus proches voisins (KNN) et un classifieur à Machine à Vecteur de Support (SVM).

Dans la section 2 est présentée la base d'expressions vocales utilisée. Dans la section 3 est présentée l'analyse des différentes caractéristiques prosodiques utilisées. La section 4 est consacrée aux résultats et à la discussion.

## 2. Base de données

La base d'expressions vocales DES [8] a été utilisée pour nos expériences. Cette dernière regroupe des expressions vocales de quatre acteurs professionnels (deux hommes et deux femmes). Cinq expressions ont été simulées: *Neutre*, *Surprise*, *Joie*, *Tristesse* et *Colère*. Pour chaque expression, il y a 2 mots simples, 9 phrases et 2 passages de discours continu. La validation des enregistrements a été faite par 40 auditeurs (20 hommes et 20 femmes). Les expressions ont été correctement identifiées avec un taux moyen de 67%. La *Surprise* et le *Sourire* sont souvent confondus ainsi que le *Neutre* et la *Tristesse* (TAB.1). Nous considérerons que cette matrice de confusion représente la vérité de terrain.

TAB.1 Matrice de confusion à partir de l'évaluation subjective humaine [8]. Les colonnes représentent l'expression vocal à reconnaître et les lignes l'expression sélectionnée par le classifieur humain.

	Neutre	Surprise	Sourire	Tristesse	Colère
Neutre	<b>60.8</b>	2.6	0.1	31.7	4.8
Surprise	10.0	<b>59.1</b>	28.7	1.0	1.3
Sourire	8.3	29.8	<b>56.4</b>	1.7	3.8
Tristesse	12.6	1.8	0.1	<b>85.2</b>	0.3
Colère	10.2	8.5	4.5	1.7	<b>75.1</b>

## 3. Extraction et analyse de caractéristiques

En s'appuyant sur de récents travaux en analyse d'expressions vocales [3,4,5,9], plusieurs caractéristiques prosodiques ont été extraites et analysées : la fréquence fondamentale, l'énergie, le SPI et le débit de parole.

La fréquence fondamentale, l'énergie et le SPI sont calculés dans une fenêtre glissante de largeur constante de 30ms avec un pas de 10ms.

Un ensemble de paramètres statistiques normalisés (centrés réduits) ont été calculés et analysés pour chaque caractéristique (TAB.2).

TAB.2 Paramètres statistiques utilisés pour chaque caractéristique prosodique ('x': utilisé, '-': non utilisé).

	Inter- valle	Média -ne	Ecart -type	Fronts- montants	Fronts- descendants	Maxi -mum
F0	x	x	x	x	x	-
Energie	x	x	x	x	x	-
SPI	-	-	-	-	-	x
Vitesse de parole						

## 3.1 Fréquence fondamentale et énergie

La fréquence fondamentale (F0) est calculée par un estimateur d'auto corrélation [10]. Tandis que l'énergie est calculée (en décibels) comme la somme des carrés des échantillons du signal discret [10]. On ne prend en considération que l'énergie des zones voisées des signaux de parole.

Pour la fréquence fondamentale F0 et l'énergie du signal de parole sont calculés : le minimum, le maximum, la moyenne, la médiane, l'intervalle et l'écart type ainsi que les médianes des fronts montants et descendants. Les FIG.1.a et FIG.2.a présentent les valeurs de l'écart type, de l'intervalle (maximum-minimum) et de la médiane de F0 (resp. de l'énergie). La valeur de chaque barre correspond à la valeur moyenne pour chaque expression sur l'ensemble des données. Les FIG.1.b, FIG.2.b présentent les médianes des fronts montants et descendants de F0 (resp. de l'énergie) pour chaque expression sur l'ensemble des données. L'analyse de toutes ces statistiques montre que ces dernières sont en moyenne plus importantes pour la *Joie*, la *Surprise* et la *Colère* que pour la *Tristesse* et le *Neutre* aussi bien pour F0 que pour l'énergie. Les FIG.1 et FIG.2 mettent ainsi en évidence deux groupes d'expressions : la *Surprise*, la *Colère* et la *Joie* d'un côté et le *Neutre* et la *Tristesse* de l'autre.

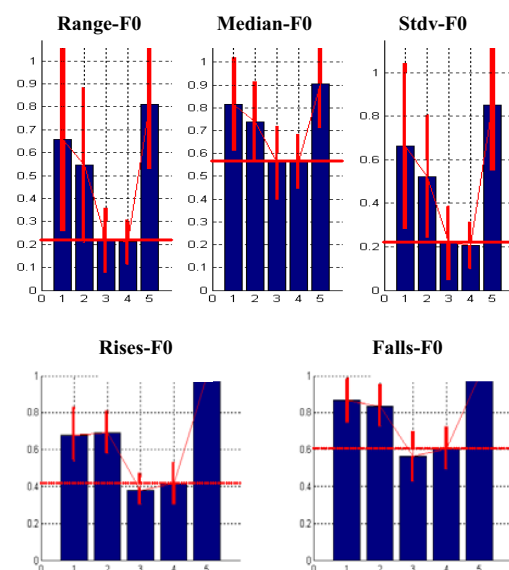


FIG.1 Valeurs des paramètres statistiques de F0 pour toutes les données et toutes les expressions : intervalle (Range), médiane (Median), écart-type (Stdv), Fronts-montants (rises), Fronts-descendants (falls). Les barres représentent les expressions dans l'ordre suivant : 1) *Colère*, 2) *Joie*, 3) *Neutre*, 4) *Tristesse*, 5) *Surprise*.

## 3.2 Le SPI

Le SPI est une mesure spectrale du rapport des énergies des basses fréquences (70-1600Hz) sur les hautes fréquences (1600-4500Hz) [11]. L'analyse des caractéristiques statistiques du SPI montrent que la seule caractéristique intéressante pour la classification des expressions vocales est son maximum. Cette caractéristique permet également

de faire une séparation en deux classes (les deux mêmes classes que pour F0 et l'énergie) (FIG.3.b).

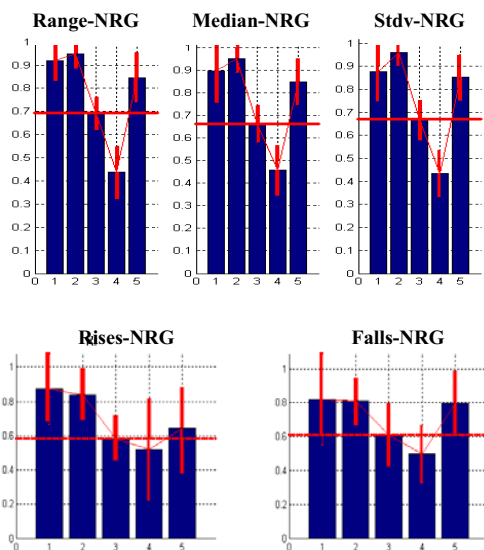


FIG.2 Valeurs des paramètres statistiques de l'énergie pour toutes les données et toutes les expressions : intervalle (Range), médiane (Median), écart-type (Dtdv), Fronts-montants (Rises), Fronts-descendants (Falls). Les barres représentent les expressions dans l'ordre suivant : 1) Colère, 2) Joie, 3) Neutre, 4) Tristesse, 5) Surprise.

### 3.3 Le débit de parole

Le débit de parole est calculé pour chaque enregistrement comme le nombre de phonèmes prononcés dans un intervalle de temps donné. Le nombre de phonèmes de chaque enregistrement est a priori connu pour la base de données utilisée. L'analyse du débit de parole (FIG.3.a) montre que celui-ci est en moyenne plus important pour la Surprise, la Colère et la Joie que pour le Neutre et la Tristesse. Ceci conduit à la même conclusion que précédemment.

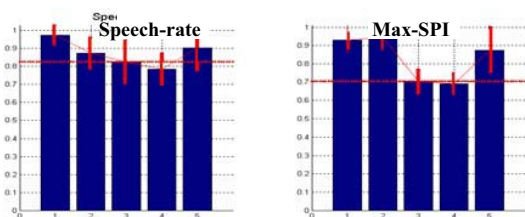


FIG.3 (a) : Valeurs du débit de parole (speech-rate), (b) : valeurs maximales du SPI sur l'ensemble des données (Max). Les barres représentent les expressions dans l'ordre suivant : 1) Colère, 2) Joie, 3) Neutre, 4) Tristesse, 5) Surprise.

### 3.4 Conclusion de l'analyse

Les expressions telles que la Colère, Surprise, Joie sont caractérisées par des valeurs de F0, d'énergie et de débit de parole en moyenne plus élevées, ce qui signifie qu'elles sont caractéristiques d'une plus forte activité vocale. A l'inverse, les expressions telles que la Tristesse ou le

Neutre sont associées à des valeurs de F0, d'énergie et de débit de parole moins importantes ce qui signifie qu'elles sont caractéristiques d'une moins forte activité vocale. Ces observations nous amènent à conclure que les paramètres acoustiques les plus fréquemment utilisés ne permettent pas de distinguer les 5 expressions considérées ici. En revanche, ces paramètres ont le même comportement pour deux groupes d'expressions : Colère, Surprise et Joie d'un côté ; Tristesse et Neutre d'un autre côté.

## 4. Résultats et Discussion

### 4.1 Classification en 5 classes

L'analyse de la section 3 montre qu'il y a des similarités prosodiques entre plusieurs expressions vocales. En premier lieu, nous cherchons à confirmer ces résultats et à voir le pouvoir discriminant des paramètres calculés pour la classification des expressions vocales. Les 12 caractéristiques acoustiques décrites dans la section 2 sont donc utilisées avec un classificateur Bayésien pour reconnaître les cinq expressions vocales. Pour palier le manque de données, une technique de Bootstrapping [12] est utilisée sur l'ensemble des données à classer.

TAB.3 présente les résultats de la classification. Dans le but de tester la validité de nos caractéristiques, nous les comparons à ceux de [7] obtenues sur la même base de données. En utilisant plus de caractéristiques (un vecteur de 15 caractéristiques comprenant des statistiques sur la fréquence fondamentale, l'énergie et les 4 premiers formants), le taux moyen de classification obtenu dans [7] est autour de 50% (Neutre (51%), Surprise (64%), Joie (36%), Tristesse (70%) et Colère (31%)) tandis que le nôtre est autour de 54%. De plus, nos résultats sont plus homogènes : le taux de classification est presque le même pour toutes les expressions ce qui n'est pas le cas dans [7] qui présente un très faible taux de classification pour la Joie et la Colère.

TAB.3 Matrice de confusion du classifieur Bayésien

	Neutre	Surprise	Joie	Tristesse	Colère
Neutre	<b>46.76</b>	23.92	12.26	3.3	13.73
Surprise	20.11	<b>51.69</b>	6.5	5	16.61
Joie	7.11	5	<b>56.61</b>	24.69	6.5
Tristesse	4.57	3.19	28.76	<b>61.80</b>	1.65
Colère	12.5	29.11	4.26	1.84	<b>52.26</b>

### 4.2 Classification en 2 classes

Nos résultats de classification montrent qu'il y a des confusions entre groupes d'expressions. Il s'avère que ce sont les mêmes confusions que celles obtenues lors d'une classification par un humain (TAB.1). Ceci nous amène à dire que si on considère les confusions non pas comme un problème à résoudre mais comme un indice de similitude entre expressions, il est possible de définir deux classes d'expressions seulement : Active qui regroupe la Colère, la Joie et la Surprise et Passive qui regroupe le Neutre et la Tristesse.

Pour valider le bien-fondé de ces deux nouvelles classes, quatre classifieurs sont testés : le classifieur Bayésien, le



classifieur par Analyse Discriminante Linéaire (ADL) [13], le classifieur aux K plus proches voisins (KNN) [13] et un classifieur à Machine à Support Vecteur (SVM) [14]. Les taux de classification sont obtenus par validation croisée. Les résultats de la classification (TAB. 4- à 7) montrent que les taux de classification du classifieur Bayésien et du classifieur par ADL sont inférieurs à ceux du classifieur SVM et du classifieur KNN. Ceci est dû au fait que le classifieur Bayésien suppose une distribution Bayésienne des classes, ce qui n'est pas forcément le cas de nos données. Le classifieur par ADL quant à lui effectue une séparation linéaire alors que nos données peuvent être non-linéairement séparables. Le classifieur KNN obtient de meilleurs résultats que le classifieur par ADL. Toutefois, les SVM donnent les meilleurs taux de classification (TAB. 7). L'ensemble des résultats présentés (TAB. 6 et 7) permet de confirmer que les caractéristiques utilisées sont nécessaires et suffisantes pour une classification en deux classes d'expressions vocales.

TAB.4 Résultats de la classification par le Bayésien.

	Active	Passive
Active	<b>78.84%</b>	21.15%
Passive	19.23%	<b>80.76%</b>

TAB.5 Résultats de la classification par l'ADL.

	Active	Passive
Active	<b>96.79%</b>	3.2%
Passive	46.15%	<b>53.85%</b>

TAB.6 Résultats de la classification par KNN.

	Active	Passive
Active	<b>83.33%</b>	16.67%
Passive	11.54%	<b>88.46%</b>

TAB.7 Résultats de la classification par SVM.

	Active	Passive
Active	<b>89.74%</b>	10.26%
Passive	13.46%	<b>86.54%</b>

## 5. Conclusion

Afin d'intégrer la modalité parole à notre système de classification d'expressions faciales, nous avons étudié les propriétés acoustiques du signal de parole pour cinq expressions vocales (*Surprise*, *Joie*, *Colère*, *Neutre* et *Tristesse*). Cette analyse a permis de constater que les caractéristiques acoustiques considérées ne sont pas suffisantes pour séparer les cinq expressions vocales. Cependant, les résultats montrent que ces expressions se regroupent en deux classes plus larges: *Joie*, *Colère* et *Surprise* d'un côté et *Neutre* et *Tristesse* de l'autre. Ceci nous a conduit à définir deux classes d'expressions vocales : *Active* et *Passive*. Sur la base de ces classes, les résultats de cette classification sont très satisfaisants.

## Remerciements :

Ce travail a été effectué dans le cadre d'une collaboration supportée par le réseau d'excellence Similar.

## Bibliographie

- [1] <http://www.similar.cc>
- [2] P. Ekman, W.V. Friesen, M. O'Sullivan & K. Scherer, *Relative importance of face, body, and speech in judgments of personality and affect*, Journal of Personality and Social Psychology, vol. 38(2), pp. 270-277, 1980.
- [3] Z. Hammal, A. Caplier & M. Rombaut, *Classification d'expressions faciales par la théorie de l'évidence*, Rencontre Francophones sur la Logique Floue et ses Applications, pp. 173-180, Nantes, France, 2004.
- [4] K. R. Scherer, *Vocal communication of emotion: A review of research paradigms*, Speech Communication, vol. 40(1-2), pp. 227-256, 2003.
- [5] P. N. Juslin & P. Laukka, *Communication of emotions in vocal expression and music performance: Different channels, same code?*, Psychological Bulletin, pp. 770-814, 2003.
- [6] V. A. Petrushin, *Emotion recognition in speech signal: experimental study, development, and application*, in Proc. Of International Conference on Spoken Language processing (ICSLP), Beijing, China, 2000.
- [7] D. Ververidis & C. Kotropoulos, *Automatic speech classification to five emotional states based on gender information*, in Proc. of European Conference on Signal Processing (EUSIPCO), pp. 341-344, Vienna, Austria, 2004.
- [8] I. S. Engberg & A. V. Hansen, *Documentation on the Danish Emotional Speech Database (DES)*, Technical Report, Alborg University, Denmark, 1996.
- [9] M. Schröder, "Speech and Emotion Research", PhD thesis, university of Saarlandes, 2003.
- [10] T. F. Quatieri, "Discrete Time Speech Signal Processing: Principles and Practice", Prentice Hall PTR, 2001.
- [11] D. Deliyski, *Acoustic model and evaluation of pathological voice production*, in Proc. of European Conference on Speech Communication and Technology (EUROSPEECH), pp. 1969-1972, Berlin, Germany, 1993.
- [12] R. Kallel, M. Cottrell & V. Vigneron, "Bootstrap for neural model", Neurocomputing, vol 48, pp.175-183, 2002.
- [13] R. O. Duda, P. E. Hart & D. G. Stork, "Pattern Classification" (2nd ed.), John Wiley and Sons, 2001.
- [14] J.C. Burges, "A Tutorial on Support Vector Machines for Pattern Recognition", Data Mining and Knowledge Discovery, Kluwer Academic Publishers, pp. 121-167, 1998.

# Détection et classification des sons : application aux sons de la vie courante et à la parole

Dan ISTRATE, Michel VACHER, Jean François SERIGNAT

Laboratoire CLIPS-IMAG, UMR CNRS-UJF-INPG 5524

385, rue de la Bibliothèque

B.P. 53 - 38041 Grenoble Cedex 9

Dan.Istrate@imag.fr, Michel.Vacher@imag.fr

Jean-Francois.Serignat@imag.fr

**Résumé** – Depuis quelques années se développe le concept général d'espace perceptif (salle intelligente) qui répond de diverses façons aux besoins, demandes, attentes des acteurs humains. Un système d'extraction de l'information du son à trois étapes est proposé. La première étape, permet la détection et l'extraction des sons du flux sonore continu. L'algorithme de détection proposé est basé sur la transformée en ondelettes, il permet de s'affranchir du bruit et d'obtenir une bonne résolution temporelle. La deuxième étape utilise un mélange de distributions de Gauss (GMM) pour faire la classification du signal sonore entre parole et sons et aiguiller le signal sur le processus adapté : reconnaissance de la parole (non traitée dans l'article) ou classification des sons. La troisième étape, celle de classification des sons de la vie courante, est aussi réalisée avec un système à base de GMM. Les paramètres acoustiques sont étudiés étant donné qu'ils ont une influence essentielle sur le système de classification ; par ailleurs, de nouveaux paramètres issus de la transformée en ondelettes sont proposés. Chaque étape de l'étude est validée au moyen d'un corpus spécifique.

**Abstract** – Recently, the general concept of perceptive spaces or smart rooms is in a continuous development and tries to answer in different ways to the needs, demands or expectations of human actors. This paper presents a system to extract information from sound signals, which contains three stages. The first stage, sound event detection, takes care of the sound detection and extraction from a continuous acoustic flux and it uses an algorithm based on the wavelet transform. The algorithm described in the paper offers good temporal resolution and performances in a noisy environment. The second stage aims to Speech/Sound classification and uses Gaussian Mixtures Models (GMM). The third stage is also based on GMM and realizes the classification of the everyday life sounds. The acoustical parameters are studied since they have an important influence on the classification performances. New parameters based on the wavelet transform are proposed. Every stage of the system is validated on a specific corpus.

## 1 Introduction

Depuis quelques années se développe le concept général d'espace perceptif (salle intelligente) qui répond de diverses façons aux besoins, demandes, attentes des acteurs humains. Les espaces perceptifs exploitent des signaux de parole, des signaux vidéo, des données de l'environnement afin de permettre la localisation des personnes, la reconnaissance des gestes, etc.

L'analyse et l'extraction des informations du son peuvent être très utiles dans ces espaces. La reconnaissance de la parole et du locuteur sont fréquemment étudiées. La possibilité d'identification des sons de la vie courante comme les claquements de porte, les chutes d'objets, les sons de vaisselle est utile dans le cadre des applications de télésurveillance médicale ou pour l'indexation des bases de données, mais il s'agit d'un domaine encore peu exploré. Cet article propose un système d'extraction d'informations du son acquis par un système multicanal avec pour principale application la télésurveillance médicale.

Le système d'analyse sonore proposé est présenté sur la figure 1, il se décompose en quatre modules pour permettre le fonctionnement du système de traitement en temps réel. Le premier module, ou module de détection, a pour rôle d'extraire les signaux à identifier (sons de la vie courante ou parole) du bruit

environnemental. Le deuxième module doit déterminer si le signal extrait appartient à la classe des sons de la vie courante ou à celle de la parole. Suivant ce résultat, le module utilisé sera soit un module de classification, soit un système de reconnaissance de la parole continue qui n'est pas décrit ici.

## 2 Détection des événements sonores

Le rôle de la détection est de déterminer l'instant d'apparition d'un événement sonore, en vue de l'extraire du bruit de fond pour un traitement ultérieur de classification. Nous considérons comme événement sonore les sons de la vie courante ou la parole noyés dans un bruit non-stationnaire.

L'adaptation du seuil à chaque analyse en utilisant la probabilité de distribution de l'amplitude du signal de parole est une des méthodes classiques de détection. Il existe aussi des méthodes de détection de la voix (VAD-Voice Activity Detection) mais celles-ci utilisent des propriétés spécifiques à la parole, comme par exemple, la présence de la fréquence fondamentale ou les statistiques d'ordres supérieurs sur le résidu de la prédiction linéaire pour différencier la parole du bruit. Ces méthodes se basent soit sur le modèle de production de la parole, soit sur d'autres propriétés du signal de parole et ne sont pas utilisables

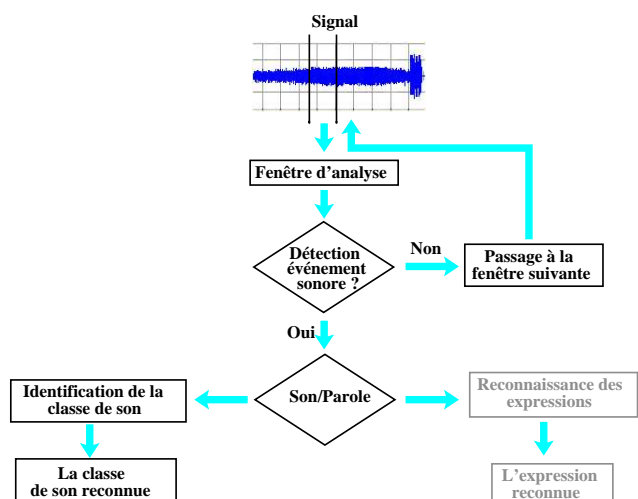


FIG. 1 – Le système d'analyse sonore proposé

pour les sons de la vie courante.

Les travaux qui se rapprochent le plus de notre problème ont été conduits par A. Dufaux qui a étudié la détection et la classification de sons impulsionnels pour un système anti-effraction [1]. Les techniques de détection des signaux impulsionnels proposés utilisaient l'énergie du signal et faisaient ressortir les maxima locaux par un traitement adéquat (filtrage médian, calcul des paramètres statistiques, etc.). Les résultats dépendent beaucoup des propriétés du bruit de fond.

L'algorithme de détection développé pour notre application devra fonctionner en présence d'un bruit environnemental basse fréquence et non stationnaire important pour lequel le système cité a des performances insuffisantes, en effet le rapport signal sur bruit peut descendre jusqu'à 0 dB.

**Algorithme proposé.** La détection du signal utile est facilitée par une décomposition en fréquence du flux sonore. Dans cette étude, la transformée en ondelettes discrète (DWT) est préférée à la transformée de Fourier discrète (FFT) car la résolution temporelle en hautes fréquences est une fraction de la largeur de la fenêtre d'analyse; en effet, une détection précise du début et de la fin du signal est importante pour les étapes qui suivent.

En effet, le pavage temps-fréquence n'est pas uniforme pour la transformée en ondelettes. La résolution temporelle est alors supérieure pour les hautes fréquences, à l'opposé de la résolution fréquentielle, car le nombre d'ondelettes est d'autant plus important que le support de l'ondelette se situe haut en fréquence [2]. Les ondelettes de Daubechies sont choisies en traitement du signal à cause de leurs propriétés spectrales; l'algorithme proposé utilise les ondelettes de Daubechies avec 6 moments nuls.

L'algorithme proposé atténue l'influence du bruit environnemental en utilisant seulement les ondelettes des trois coefficients de plus hautes fréquences de la transformée. La taille de la fenêtre d'analyse est imposée par l'application temps réel, 128 ms soit 2048 échantillons pour une fréquence d'échantillonnage de 16 kHz; la transformée en ondelettes permet un décalage temporel à l'intérieur de cette fenêtre qui rend possible une détermination plus fine de l'instant d'apparition du son. L'algorithme, comme le montre la figure 2, commence par

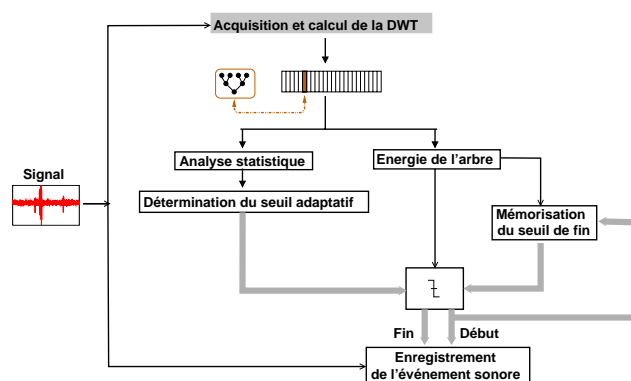


FIG. 2 – Le schéma de l'algorithme de détection basé sur la transformée en ondelettes

le calcul de la transformée en ondelettes sur la fenêtre d'analyse, puis le calcul de l'énergie des arbres d'ondelettes avec une profondeur de 3 pour des trames ayant une largeur de 32 ms et se chevauchant de 16 ms. La détection est réalisée par l'application d'un seuil adaptatif sur la valeur de l'énergie des arbres d'ondelettes de la trame. Le seuil adaptatif dépend de la moyenne des valeurs de l'énergie précédentes et d'une constante.

Si le signal extrait comprend des parties composées seulement de bruit, ceci aura une influence sur la classification et fera baisser les performances; si une faible partie du signal est coupée, les effets seront moins importants car l'évolution temporelle du signal n'est pas prise en compte par le système de classification utilisé. La détection de fin de signal est obtenue par un deuxième seuil sur l'énergie de l'arbre d'ondelettes. Ce seuil est obtenu à partir de la valeur de l'énergie de l'arbre au moment de la détection du début de l'événement sonore. Pour tenir compte des périodes de silence dans le signal de parole, la fin du signal est considérée atteinte seulement si l'énergie reste en-dessous du seuil de fin pendant un nombre suffisant de trames consécutives (12 trames  $\approx 192$  ms); on considère comme la fin du signal l'instant de la première valeur en-dessous du seuil.

Un exemple de détection d'un événement sonore (l'expression « Appelez quelqu'un ») mélangé avec le bruit de l'appartement de test (que nous appellerons à la suite HIS) est présenté dans la figure 3. Le rapport signal sur bruit (RSB) est de 0 dB. Le premier graphique affiche la variation du signal, le deuxième la variation de l'énergie des trois coefficients de haute fréquence de la transformée en ondelettes. Le seuil adaptatif de détection est présenté dans le deuxième graphique en pointillé et le seuil de fin sous forme de « tiret-point ». Nous pouvons observer que l'événement sonore est détecté avec précision même si le RSB est faible et que le silence en milieu de phrase est bien pris en compte.

### 3 Classification des événements sonores

Les modèles de Markov cachés (HMM - Hidden Markov Models), les modèles de mélange de gaussiennes (GMM Gaussian Mixture Models)[3] et l'alignement temporel dynamique (DTW - Dynamic Time Warping) représentent les techniques de classification les plus utilisées dans le domaine de la recon-

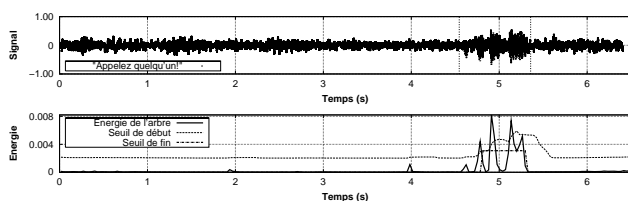


FIG. 3 – Exemple de détection de l'expression « Appelez quelqu'un » superposé au bruit HIS avec un RSB de 0 dB

naissance de la parole ou du locuteur.

Un système de classification statistique modélise chaque classe de signaux par une variable aléatoire qui est souvent une distribution de Gauss. La classification statistique est le calcul de la vraisemblance d'appartenance du signal à chacune des classes possibles, ce qui permettra de déterminer la classe d'appartenance la plus probable. Le calcul utilise une paramétrisation acoustique du signal et les modèles des classes à identifier.

**Les modèles de mélange de distributions de Gauss (GMM)** sont utilisés dans le cas de signaux complexes où il est nécessaire de considérer plus d'une variable aléatoire. La classification de sons à l'aide d'un modèle GMM comprend 2 étapes : une phase d'apprentissage du système sur un ensemble de fichiers supposés représentatifs d'une classe et, une deuxième phase, de vérification de l'appartenance d'un son quelconque à cette classe. La facilité d'emploi des GMM et leurs bonnes performances obtenues en reconnaissance des locuteurs représentent les principales raisons du choix de cette méthode pour le système proposé.

L'**apprentissage** a pour but d'estimer les paramètres des distributions de Gauss qui composent le modèle à partir des vecteurs acoustiques des sons composant la classe. L'apprentissage d'une classe se décompose en deux étapes successives : tout d'abord l'obtention de valeurs approximatives des paramètres des distributions de la classe par l'algorithme des K-moyennes, ensuite l'optimisation des valeurs de ces paramètres par un algorithme de type EM (Expectation Maximisation).

La phase de **classification** permet de déterminer la classe la plus probable à partir du calcul de la vraisemblance pour chaque vecteur acoustique du signal. La vraisemblance d'un son constitué d'une suite temporelle de plusieurs vecteurs est la moyenne géométrique des vraisemblances de chacun de ses vecteurs. La classe de sons d'appartenance est celle pour laquelle la valeur de vraisemblance moyenne est maximale.

**Paramètres acoustiques.** L'apprentissage et la classification sont effectués non pas directement sur les signaux temporels mais sur des paramètres extraits de ceux-ci, parce que le signal temporel contient beaucoup d'informations redondantes. Le passage à une représentation fréquentielle du signal met en évidence les caractéristiques du signal.

Les paramètres acoustiques les plus fréquemment utilisés en reconnaissance de la parole sont les MFCC (Mel-Frequency Cepstral Coefficients), les LFCC (Linear Frequency Cepstral Coefficients) et les LPC (Linear Prediction Coefficients). Nous proposons l'utilisation de 3 paramètres acoustiques traditionnellement utilisés dans la segmentation parole/bruit/musique en addition aux paramètres MFCC. Ces 3 paramètres sont le nombre de passages par zéro (ZCR), le Roll-off Point (RF) et

le barycentre spectral (Centroid).

Des coefficients cepstraux provenant de la transformée en ondelettes sont aussi étudiés. Ils sont obtenus grâce à quatre étapes de calcul : premièrement, calcul de la transformée en ondelettes, deuxièmement calcul de l'énergie des 6 derniers coefficients de la transformée, troisièmement application du logarithme décimal et enfin obtention du vecteur acoustique par calcul de la transformée en ondelettes inverse du vecteur d'énergies logarithmique. La dimension du vecteur acoustique est de 6 éléments et ces coefficients seront appelés DWTC.

**Classification parole/sons et la classification des sons de la vie courante.** La classification parole/sons a comme but d'identifier l'appartenance de l'événement sonore extrait lors de la phase de détection. Cette phase utilise 2 mélanges de distributions de Gauss pour modéliser la classe « parole » et la classe « son de la vie courante ».

La classification des sons est réalisée, elle aussi, avec un système à base de GMM. Chacune des 7 classes de sons de la vie courante est modélisée par un GMM.

## 4 Evaluation

Un corpus de sons de la vie courante a été réalisé à partir d'enregistrements effectués dans l'appartement de test et des sons de CDs commerciaux [4]. Dans le cas de la parole, un corpus d'expressions de détresse spécifiques à l'application médicale a été enregistré dans le studio de notre laboratoire.

Chaque étape du système a été validée individuellement à l'aide d'un corpus spécifique extrait du corpus de test.

### 4.1 Résultats de la détection

L'évaluation de l'algorithme proposé basé sur la transformée en ondelettes est présentée dans le Tableau 1. La première colonne indique le rapport signal sur bruit et les deux suivantes le taux d'égale erreur pour le bruit HIS et le bruit blanc. Pour chaque type de bruit quatre valeurs de RSB ont été envisagées : 0, +10, +20 et +40 dB. Le taux d'égale erreur (TEE) est le taux de détection manquées lu sur la courbe ROC (Receiver Operating Characteristic Curve) lorsque le taux de fausses alarmes (TFA) est égal au taux de détections manquées (TDM).

Pour analyser les résultats nous devons surtout analyser les performances pour le bruit HIS avec des valeurs faibles de RSB (l'environnement sonore réel). L'algorithme proposé, basé sur la transformée en ondelettes, procure des bonnes performances pour le bruit HIS : le TEE est de 0% lorsque le RSB est supérieur ou égal à 10 dB et le TEE est de 3.7% lorsque le RSB est égal à 0 dB. Ses performances dans le bruit blanc sont acceptables. Avec l'algorithme proposé, nous obtenons un TEE de 0% sur les 60 fichiers de la base de validation réelle (mélange réel des sons avec le bruit HIS) ce qui vient confirmer ces résultats.

Précisons que cet algorithme a non seulement de très bonnes performances en terme de TEE mais aussi que la précision temporelle de détection du début et de la fin du signal est très bonne. La précision du début de signal est en moyenne de 20 ms et est indépendante du RSB ; celle de fin de signal est d'environ 100 ms. Il faut tenir compte de ce que la taille de la trame

TAB. 1 – Taux d'égale erreur de l'algorithme de détection proposé

RSB	TEE	
	HIS [%]	Bruit blanc [%]
0 dB	3.7	6
10 dB	0	4
20 dB	0	0
40 dB	0	0

d'analyse est de 32 ms avec un pas de 16 ms.

## 4.2 Classification parole/sons

Le nombre de distributions de Gauss a été fixé à 24, valeur optimale obtenue à l'aide du critère BIC [5]. L'apprentissage des deux classes (parole et sons) est réalisé sur les sons purs et le test sur des sons mélangés avec le bruit HIS pour des valeurs de RSB de 0, 10, 20 et 40 dB. La validation est effectuée en utilisant un protocole d'évaluation croisée : l'apprentissage utilise à tour de rôle 80 % du corpus et le reste, les 20 % restant, sert pour le test.

Les performances de la classification sont évaluées par le calcul du taux d'erreur de classification (TEC) qui représente le rapport entre le nombre d'erreurs de classification et le nombre total de sons à identifier. Les résultats de classification parole/sons pour 16 paramètres MFCC et l'énergie normalisée sont présentés dans le tableau 2. Nous pouvons observer que le taux d'erreur reste inférieur à 4.5 % pour des RSB variant de 10 à 40 dB et atteint 22 % pour RSB=0 dB.

TAB. 2 – Taux d'erreur de classification parole/sons

RSB [dB]	TEC [%]		
	Global	Parole	Sons
0	22	29.9	8.6
10	4.2	5.9	3.1
20	4.4	9.1	1.6
40	4.5	9.6	1.4

## 4.3 Classification des sons de la vie courante

La classification des sons de la vie courante a été validée sur un corpus comportant 7 classes de sons. L'apprentissage a été effectué sur les sons purs et le test sur les sons mélangés avec le bruit HIS à des RSB variant entre 0 et 40 dB. Le nombre de distributions de Gauss a été fixé à 4, valeur déterminée avec le critère BIC comme précédemment.

Les performances de classifications sont constantes pour  $RSB \geq 20$  dB ; le TEC diminue pour des RSB au-delà de cette valeur : pour 16 paramètres MFCC couplés avec le nombre de passages par zéro, le Roll-off Point, le barycentre spectral et pour les 16 paramètres LFCC couplés avec l'énergie, le TEC est de 26.82 % pour  $RSB = +10$  dB (Figure 4). Ces valeurs ne sont pas acceptables parce que le RSB dans l'environnement

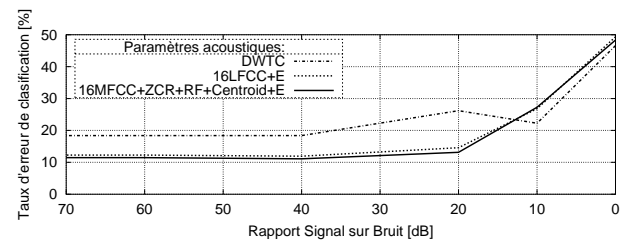


FIG. 4 – Erreur de classification dans le bruit HIS (apprentissage sur les sons purs)

de l'application varie entre 10 et 20 dB.

Les paramètres proposés DWTC ont des performances meilleures que les MFCC pour des  $RSB \leq 10$  dB et sont en nombre de 6 au lieu de 17 pour les autres.

## 5 Conclusions

Le cadre applicatif du système étudié est la télésurveillance médicale des personnes âgées ou des patients en convalescence. Le système utilise un réseau de 5 à 8 microphones installés dans un appartement d'étude à raison d'un au moins par pièce. Le but du système est de détecter une situation de détresse à partir de la surveillance sonore.

Pour le système proposé d'extraction de l'information du son, l'erreur de détection reste nulle lorsque le rapport signal sur bruit est plus élevé que +10 dB, et, par ailleurs la méthode de détection utilisée permet de garantir un positionnement précis du signal, typiquement 20ms de retard, et ne perturbe pas les étapes de classification. Dans les mêmes conditions de bruit, la classification parole/sons introduit un taux d'erreur inférieur à 5%. Nous pouvons donc conclure que le système de détection/classification peut être utilisé dans des conditions réalistes de fonctionnement avec un bruit modéré. La classification des sons de la vie courante est plus difficile à cause de la grande similarité entre les classes de signaux. Le taux d'erreur est de 12% pour un rapport signal sur bruit de +20 dB et de 26% à +10 dB, d'autres techniques devront être envisagées pour le réduire. Par ailleurs, une fusion de données avec d'autres capteurs est envisagée.

## Références

- [1] A. Dufaux, "Detection and recognition of impulsive sounds signals," Ph.D., Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel, 2001.
- [2] S. Mallat, *Une exploration des signaux en ondelette*, ser. ISBN 2-7302-0733-3. Palaiseau, France : Les Editions de l'Ecole Polytechnique, 2000.
- [3] D. A. Reynolds, "Speaker identification and verification using gaussian mixture speaker models," *Speech Communication*, vol. 17, no. 1, pp. 91–108, Jan. 1995.
- [4] M. Vacher, D. Istrate, et J. F. Serignat, "Sound detection and classification through transient models using wavelet coefficient trees," en *EUSIPCO*, Vienne, Autriche, Sept. 2004, pp. 1171–1174.
- [5] G. Schwarz, "Estimating the dimension of a model," *Annals of Statistics*, vol. 6, pp. 461–464, 1978.

# Extraction temps-réel de contours labiaux par segmentation vidéo robuste en vue d'animation 3D

Brice BEAUMESNIL, Franck LUTHON, Marc CHAUMONT

Laboratoire LIUPPA, IUT Informatique,  
Château-Neuf, Place Paul Bert, 64100 Bayonne, France  
beaumesn@iutbayonne.univ-pau.fr, Franck.Luthon@univ-pau.fr,  
Marc.Chaumont@iutbayonne.univ-pau.fr

**Résumé** – Nous présentons une chaîne complète analyse/synthèse temps réel permettant l'animation labiale d'un clone de synthèse à partir d'une simple caméra non calibrée dans un environnement non contraint (typ. caméra motorisée ou webcam avec des conditions d'éclairage de bureau). La technique utilisée est basée sur une segmentation labiale à partir d'une teinte chair extraite d'un espace couleur non-linéaire robuste aux changements de luminosité. Les contours internes et externes sont ensuite extraits puis interprétés afin d'animer en temps-réel et de façon réaliste la bouche d'un clone de synthèse.

**Abstract** – We present a complete real-time analysis/synthesis approach allowing lip animation of a clone with a single camera in unconstrained environment (typ. motorized camera or webcam). This approach is based on a labial segmentation of a skin hue computed from a non-linear color space that is robust to lighting variations. Internal and external contours are extracted and interpreted to make a real time realistic animation of a mouth's clone.

## 1 Introduction

Plus de 80% de l'information visuelle lors d'une conversation entre deux personnes provient des mouvements de la bouche. Ces indices visuels sont essentiels à une meilleure compréhension de la parole [1]. Ainsi dans le cadre d'applications nécessitant l'animation d'un clone, l'effort porte sur la reconstruction réaliste des mouvements des lèvres.

L'objectif de ce papier est de faire le lien entre l'analyse de visage parlant et l'animation de clone de synthèse, afin d'animer en temps réel celui-ci. Nous nous intéressons à l'analyse labiale du locuteur pour l'animation de la bouche d'un clone uniquement à partir de la vidéo sans utiliser l'information sonore. L'important n'est pas d'avoir des résultats d'analyse très précis mais plutôt d'avoir un rendu de synthèse acceptable (dans notre cas une animation réaliste). Ainsi, pour l'application visée, l'effort en terme de complexité opératoire n'est pas à porter sur un algorithme d'analyse particulier ni sur un modèle de synthèse mais sur la chaîne de traitement globale temps-réel entre la vidéo (en entrée de chaîne) et le clone (en sortie de chaîne).

Les algorithmes développés actuellement par la communauté reposent sur des méthodes de haut-niveau, utilisant des bases d'apprentissage de grande taille permettant la convergence vers une situation connue ou estimée [2]. La chaîne de traitement que nous proposons ici se situe en marge de ces méthodes : nous cherchons à utiliser des algorithmes de bas-niveau très rapides et sans connaissance du visage, capables de s'adapter à n'importe quelle forme de bouche.

Nous pouvons diviser notre algorithme en trois étapes :

- La première étape consiste à effectuer une segmentation couleur de bas-niveau sur un espace peu sensible aux va-

riations de luminosité et révélant plus particulièrement les zones de teinte chair.

- La deuxième étape utilise une approche basée sur les contours actifs pour délimiter les contours internes et externes des lèvres.
- Enfin la dernière étape utilise l'information des contours des lèvres pour animer le clone.

## 2 Description de la chaîne de traitement

Notre étude se situe en aval du développement d'un outil de détection et de suivi de visage permettant un cadrage dynamique optimal de celui-ci par asservissement de caméra. Nous plaçons donc, dans ce papier, directement le locuteur en face de la caméra de sorte que son visage occupe la majorité de l'image (l'image est ainsi considérée comme le cadre de recherche). Par conséquent, le locuteur devra rester toujours à peu près à la même distance de la caméra lors d'une acquisition, afin que les proportions de bouche restent les-mêmes (étant donné que le cadrage est statique).

Enfin nous demandons seulement au locuteur d'avoir une position neutre (c'est-à-dire bouche fermée) sur la première image afin d'initialiser les proportions de la bouche (hauteur et largeur) pour l'animation du clone (cela permet de prendre en compte le recul du locuteur face à la caméra, qui peut être différent selon les acquisitions).

Les conditions d'éclairage ne sont pas stabilisées afin d'être dans les conditions les plus réalistes possibles (ajout ou suppression de sources lumineuses, éclairage non uniforme, ...).

Notre algorithme de segmentation a été réalisé sur la base

de deux travaux : une approche de classification markovienne proposée par Liévin [3], et une approche contours actifs présentée par Delmas [4]. Notre démarche a consisté à adapter ces méthodes pour atteindre trois objectifs :

- fonctionner dans un environnement non contraint (conditions d'éclairage et mouvements du visage non stabilisés)
- être exécutable en temps-réel
- coupler analyse et synthèse pour effectuer une animation labiale réaliste d'un clone de locuteur.

## 2.1 Extraction de la zone labiale

Afin de segmenter le visage pour détecter la zone labiale, nous utilisons l'espace couleur  $LUX$  [3]. L'apport principal de cet espace couleur, non linéaire par rapport à l'espace couleur  $RGB$ , est d'amplifier le contraste tout en s'affranchissant le plus possible des variations d'éclairage. De plus, l'information principale d'un visage humain est représentée, dans cet espace, par la composante  $U$  (teinte rouge) dans le cas particulier où  $R > L$  ( $L$  représentant la luminance). Ce qui nous permet de définir un modèle discriminant de visage grâce à la teinte que l'on nomme  $H$  (Eq.2) modèle sur lequel nous nous basons pour la segmentation.

$$L = (R + 1)^{0.3}(G + 1)^{0.6}(B + 1)^{0.1} - 1 \quad (1)$$

$$H = \begin{cases} 256 \frac{L+1}{R+1} & \text{si } R > L, \\ 255 & \text{sinon ou si } L < \alpha. \end{cases} \quad (2)$$

Le seuil  $\alpha$  utilisé dans la transformée couleur permet de mettre en avant les zones très sombres comme l'intérieur de la bouche ou les narines. Cela a pour but de renforcer les différents gradients de teinte utilisés par la suite.

Afin de séparer les lèvres du visage et étant donné que la différence entre la peau et les lèvres est plus marquée que dans l'espace linéaire  $RGB$ , nous utilisons un algorithme de classification de la teinte du visage basé sur les k-means [5] (la classification markovienne demandant beaucoup trop de temps de calcul). Cet algorithme utilise trois classes : le visage, les lèvres et le fond.

Il est basé sur deux informations :

- le moyennage de la teinte de l'image dans un voisinage donné,
- l'écart maximum calculé entre un point de ce voisinage et la moyenne trouvée sur celui-ci.

Afin d'obtenir une bonne convergence de l'algorithme des k-means, il faut déduire automatiquement une bonne initialisation des barycentres des classes.

Pour cela de nombreux tests nous ont permis d'établir des valeurs empiriques dépendant seulement de la teinte globale du visage dans l'image (facilement calculable par histogramme), permettant une bonne initialisation de ces barycentres et donc une bonne convergence de l'algorithme vers les classes recherchée (Fig. 1). De plus nous avons établi un voisinage suffisant permettant d'obtenir des formes de lèvres lisses.

Visuellement, on sait que la bouche est la forme rouge la plus grande du visage, ainsi nous pouvons implanter un outil de recherche permettant de repérer cette zone dans la classe "lèvres". Pour cela nous parcourons les pixels appartenant à la

classe "lèvres" avec un masque de filtrage non-linéaire (Eq.3) qui vérifie si le voisinage du pixel traité appartient à la même classe, et qui calcule la grandeur de chaque forme trouvée.

$$M(i) = \begin{cases} 1 + \sum_{j \in \nu(i)} a(j)M(i) & \text{si } H(i) \in \text{"lèvres"} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3)$$

où  $M$  est une matrice de taille  $L \times C$  (taille de l'image) initialisée à 0 et où les  $a(j)$  (avec  $j \in \nu(i)$ ) sont les coefficients attribués aux différents pixels appartenant au voisinage connexe causal du pixel traité (voir Fig. 1).

Ce procédé permet de localiser le positionnement des lèvres dans l'image en une seule passe (très rapide). Comme on peut le voir sur la Fig. 1, le masque utilisé privilégie les formes allongées horizontalement (ce qui permet de faire la différence entre les oreilles et la bouche qui sont les deux plus grandes zones de teinte rouge du visage).

Cela permet d'établir une carte du visage avec les valeurs les plus élevées sur les plus grandes formes rouges, dont la bouche avec la valeur la plus élevée de la carte.

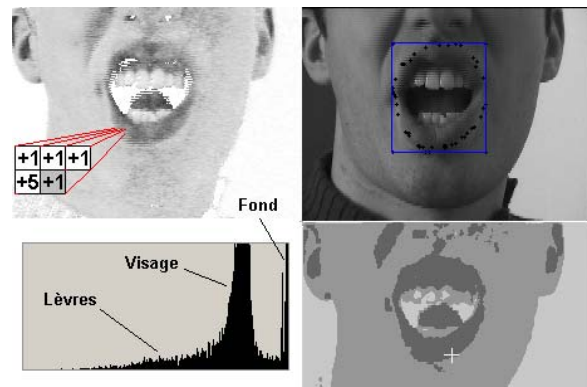


FIG. 1 – a) Teinte  $H$  et masque de filtrage. b) Suivi de points d'intérêt et cadrage de la bouche. c) Histogramme de la teinte. d) Image des classes résultant de l'algorithme k-means, point de  $M$  de plus forte valeur en blanc.

Cette méthode permet de localiser la bouche dans l'image mais pas dans sa globalité. En effet, dans certains cas, les commissures des lèvres sont peu marquées et les formes de la lèvre inférieure et de la lèvre supérieure sont séparées (p.ex. lors de la prononciation du phonème  $[a]$ ). Pour contrer cela nous effectuons le suivi des formes des lèvres par l'algorithme de Lucas-Kanadé en suivant quelques points pertinents du contour externe des lèvres.

Le fait d'utiliser un algorithme d'estimation de mouvement au lieu d'une détection de mouvement [3], permet une meilleure robustesse aux conditions d'éclairage. Selon notre hypothèse, le locuteur a la bouche fermée à la première image (position au repos). Cela permet d'être sûr de bien suivre les deux lèvres durant le reste de la séquence (car la bouche fermée est détectée comme une seule forme).

Grâce à cette information supplémentaire, nous complétons la carte du visage (en recherchant une ou deux formes proches des points de suivi et en les reliant) pouvant ainsi mettre en avant la zone labiale dans sa totalité. Nous définissons ensuite



un cadre contenant de façon optimale la zone en question, par un simple parcours de la forme connexe contenant le point détecté comme étant sur les lèvres (point de  $M$  dont la valeur est la plus élevée i.e. sur la forme détectée la plus grande Fig.1.b)).

## 2.2 Contour actif et Animation d'avatar

Une fois le cadre contenant les lèvres défini, nous initialisons un contour actif (ou snake [6]) sur celui-ci et nous le laissons converger sur les contours externes de la bouche [4]. Le snake utilisé contient un nombre fini de points de contrôle. Ces points sont contraints à un déplacement vertical et sont initialisés sur des courbes cubiques calculées à partir de la ROI (région d'intérêt) et de la carte des lèvres (pour placer les commissures) comme présenté sur la Fig. 2.

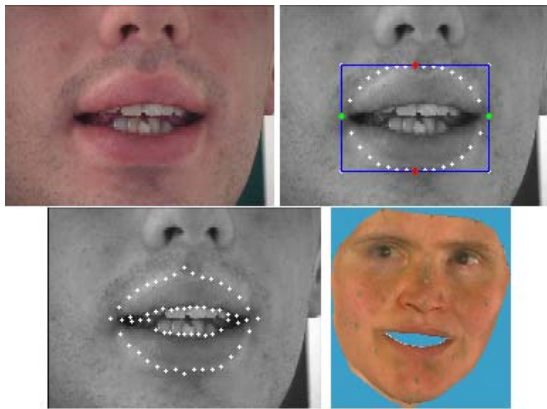


FIG. 2 – a) Entrée vidéo ; b) Initialisation du snake externe à partir de la ROI (bleu) ; c) snake interne et externe après convergence ; d) clone animé.

Les forces utilisées pour la convergence du snake sont (mise à part la force interne qui contrôle l'élasticité et la courbure de celui-ci) :

- la force externe : elle caractérise les éléments vers lesquels on veut attirer le snake sur l'image. Dans notre cas, nous utilisons un gradient calculé à partir de la teinte non-linéaire et de l'intensité lumineuse.
- la force de contrainte (spécificités du problème) : nous forçons le snake à converger vers le centre de gravité de la ROI.

Après convergence du snake externe, on initialise un second snake sur celui-ci, puis on le réduit par homothétie non isotrope par rapport au centre de la bouche (en tenant compte de l'épaisseur des lèvres traitées) et on le laisse converger sur le contour interne des lèvres.

Une fois la convergence des snakes effectuée, nous pouvons interpréter plusieurs points de contrôle de ceux-ci pour estimer les différents paramètres du clone. Ce travail est spécifique au clone utilisé. En effet, chaque interface servant à l'animation d'un avatar possède ses propres paramètres, cela nécessite donc un apprentissage différent à chaque modèle de clone. Le clone utilisé dans notre étude est un clone en 3D de 275 points mobiles fourni par l'ICP<sup>1</sup> qui permet d'animer de façon réaliste

la bouche grâce à six paramètres d'animation sur les différents phonèmes de la langue française [7].

Nous avons donc mis en place un système linéaire qui transforme des points de contrôle des snakes en paramètres d'animation acceptables visuellement par le clone. Les points de contrôle actuellement exploités sont les suivants : la commissure droite, la commissure gauche, la position de la lèvre supérieure et la position de la lèvre inférieure.

## 3 Résultats

Nous présentons deux types de résultat : les résultats d'analyse présentant la segmentation des lèvres dans l'image, la création d'une ROI, et l'extraction des contours labiaux. Puis les résultats de synthèse présentant l'animation du clone à partir de l'interprétation des points trouvés précédemment.

### 3.1 Résultat de segmentation (analyse)

L'espace couleur utilisé permet de réaliser une bonne segmentation même dans des conditions d'éclairage défavorable. On peut voir sur la Fig. 3 que la teinte utilisée sépare bien les lèvres du reste du visage dont la teinte reste assez homogène même avec un fort contraste ou avec un éclairage non homogène (typ. de côté).

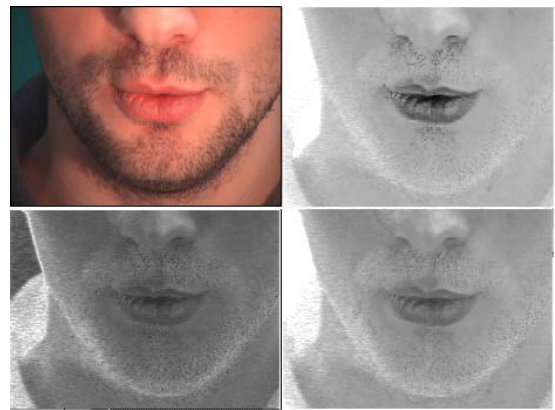


FIG. 3 – a) Image Originale avec barbe et éclairage latéral ; b) Teinte utilisée ; c) Teinte de l'espace couleur *HSL* ; d) Teinte *G/R* souvent utilisée en segmentation labiale.

L'algorithme est robuste aux conditions d'éclairage : les changements brutaux d'éclairage (typ. ajout et suppression d'une source lumineuse) n'influent pas sur celui-ci car les différentes teintes sont estimées à chaque image à partir de la teinte moyenne du visage dans l'image courante. L'algorithme étant basé sur la teinte des lèvres sans connaissance a priori du visage (mise à part la teinte moyenne estimée de celui-ci), les visages avec barbe ou moustaches ne constituent pas un obstacle à la détection. La segmentation labiale proposée permet de localiser précisément la bouche dans le visage, la ROI résultant de la segmentation englobe entièrement les lèvres, ce qui permet une bonne initialisation des snakes et ainsi une bonne convergence.

<sup>1</sup>Institut de la Communication Parlée, Grenoble - <http://www.icp.inpg.fr>

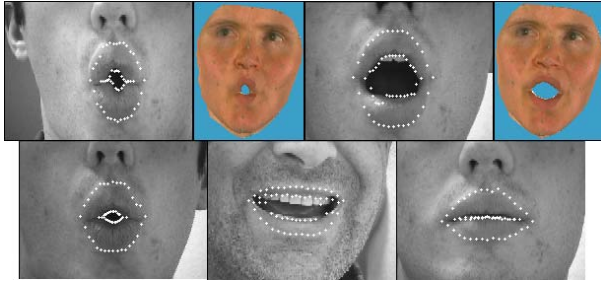


FIG. 4 – Exemples avec différents phonèmes : [o] + clone, [a] + clone, [e], [θ] et enfin la position neutre.

### 3.2 Résultat d'animation (synthèse)

Une fois la ROI détectée et la convergence des contours actifs effectuée (cf. Fig.2), nous pouvons interpréter les contours détectés pour l'animation labiale du clone. Même si les contours ne sont pas forcément bien estimés, pour une animation réaliste, une bonne exploitation des résultats est plus pertinente qu'une bonne segmentation.

Dans le cas du contour interne, les dents ne posent aucun problème (elles amplifient même le gradient assurant ainsi une meilleure convergence). Le seul problème restant est l'apparition de la langue car elle possède la même teinte que la bouche. On peut remarquer que les configurations de bouche ouverte sont favorables aux dessins des contours externes. Au contraire, les configurations avec protrusion des lèvres ou bouche fermée sont favorables à l'estimation des contours internes. Nous pouvons donc coupler ces informations afin de réaliser une animation réaliste en pondérant ces valeurs selon la configuration de la bouche. Ainsi avec quelques points obtenus par une segmentation correcte et rapide, tout en respectant les proportions de la bouche, l'animation temps-réel résultante permet la compréhension des voyelles prononcées, le mouvement du clone étant très proche des mouvements réalisés par le locuteur.

## 4 Conclusion et Perspectives

Ce travail a permis de mettre en place un ensemble de méthodes rapides exploitant l'information fournie par une teinte non-linéaire robuste à l'éclairage, afin d'extraire les contours interne et externe des lèvres puis de les interpréter afin d'animer de façon réaliste un clone de synthèse tout en tenant compte de l'aspect temps-réel. Cela nous a permis de réaliser une chaîne complète Analyse/Synthèse temps-réel pour l'animation d'un clone sans exploitation d'information sonore et sans aucune base d'apprentissage.

L'algorithme complet d'analyse s'exécute en temps-réel, notre implantation en code C (non optimisé) permet d'atteindre une cadence vidéo supérieur à 30Hz avec un processeur de type i386 de 1.4Ghz, soit 30 fois plus rapide que l'algorithme initial proposé dans [3].

Nos travaux actuels visent à réaliser la segmentation de l'ensemble du visage nous permettant d'obtenir des points d'intérêt précis et de pouvoir animer un modèle 3D de visage qui nous permettra de réguler les données récoltées grâce à rigidité du modèle (cf. Fig. 5).

De plus le fait d'avoir des informations sur le reste du visage nous permettra une meilleure compréhension des phonèmes prononcés (par exemple, pour faire la différence entre le phonème [e] et le phonème [y], la position du nez est très importante pour l'animation, car visuellement la bouche a pratiquement la même forme, sauf que pour le phonème [y], elle est nettement plus proche du nez que pour le phonème [e]).

Enfin nous cherchons à permettre l'animation d'un plus grand nombre de clones par l'utilisation de la norme MPEG4.

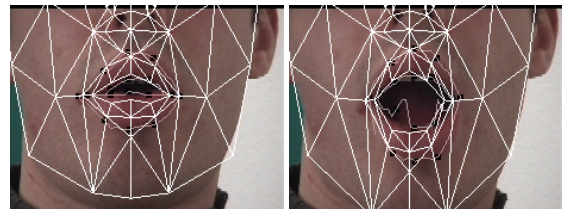


FIG. 5 – Régularisation de la forme labiale par un modèle 3D, on peut voir sur l'image de droite, que le snake interne a mal convergé à cause de la langue, le modèle 3D permet de corriger le problème.

## Références

- [1] T. Chen et R.R. Rao. *Audio-Visual Integration in Multimodal Communication*. Proceedings of the IEEE, Vol. 86, pp. 837-852, May 1998.
- [2] T.F. Cootes et C.J. Taylor *Statistical Models of Appearance for Computer Vision* Imaging Science and Biomedical Engineering, University of Manchester
- [3] M. Liévin et F. Luthon. *Nonlinear color space and spatiotemporal MRF for hierarchical segmentation of face features in video*. IEEE Trans. on Image Processing, Vol. 13, No. 1, pp. 63-71, Jan. 2004.
- [4] P. Delmas *Extraction des contours de lèvres d'un visage parlant par contours actifs, Application à la communication multimodale* PhD Thesis, National Polytechnic Institute, Grenoble, France, Apr. 2000.
- [5] J. B. MacQueen. *Some Methods for classification and Analysis of Multivariate Observations* Proceedings of 5th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley, pp. 281-297, 1967.
- [6] M. Kass, A. Witkin et D. Terzopoulos. *Snakes : Active contour models* International Journal of Computer Vision, pp. 321-331, 1987.
- [7] C. Benoît, T. Lallouache, T. Mohamadi et C. Abry. *A set of French visemes for visual speech synthesis* Talking Machines : Theories, Models, and Designs, Elsevier Science Publishers, pp. 485-503, 1992.

# Influence de la Réduction des Couleurs sur la Détection des Changements de Plan dans les Films d'Animation

Bogdan IONESCU <sup>(1)</sup>, Patrick LAMBERT <sup>(2)</sup>, Didier COQUIN <sup>(2)</sup>, Vasile BUZULOIU <sup>(1)</sup>

<sup>(2)</sup> LISTIC - Université de Savoie - BP 806 -74016 Annecy Cedex

<sup>(1)</sup> LAPI - Université POLITEHNICA de Bucarest

Bogdan-Emanuel.Ionescu@univ-savoie.fr, Patrick.Lambert@univ-savoie.fr

**Résumé** - Dans ce papier nous proposons une technique de détection des changements de plan appliquée aux films d'animation. Cette technique est basée sur la mesure de distance entre histogrammes couleur d'images voisines. L'approche envisagée demande la définition d'une palette couleur réduite sur laquelle sont calculés les histogrammes. La détection des changements est alors effectuée par seuillage, le seuil étant déterminé automatiquement. Nous présentons des résultats obtenus avec quelques films sur lesquels une segmentation temporelle a été effectuée manuellement pour disposer d'une vérité terrain. Ces tests permettent d'évaluer l'influence du choix de la palette couleur choisie.

**Abstract** - In this paper an improved cut detection algorithm is proposed. It is adapted to the segmentation of animation movies. As the color is an important feature in the animation movies (each movie has its own particular color distribution), metrics on color histograms are used in order to measure the visual discontinuity produced by video cuts. For the frame classification an automatic threshold estimation is proposed. Building the frame histograms requires reducing the number of colors. Based on experimental results a study of the influence of different color reduction algorithms on the cut detection error is presented.

## 1. Introduction

Le travail exposé ici a été développé en lien avec le CICA (Centre International du Cinéma d'Animation [1]). Le CICA organise chaque année, depuis 1960, un Festival International du Cinéma d'Animation à Annecy. Un très grand nombre de films ont ainsi pu être archivés et la difficulté est de pouvoir exploiter cette base. L'utilisation d'un système d'indexation est de toute évidence nécessaire. Les travaux présentés s'inscrivent dans un projet plus global dont l'objectif est de construire les méthodes et les outils permettant la caractérisation des films, la recherche ou la navigation dans la base.

Les films d'animation présentent un certain nombre de spécificités qui obligent à envisager des approches en partie différentes de celles utilisées dans l'analyse de vidéos plus classiques (informations, sports, etc. [2]) : les événements ne suivent pas forcément une logique particulière (des objets peuvent apparaître et disparaître sans respecter de règle physique), les déplacements peuvent être discontinus et les mouvements de caméra très complexes, des effets spéciaux peuvent apparaître à tout moment, les couleurs ne sont pas nécessairement des couleurs naturelles, etc. .

Dans l'analyse de telles séquences, le premier travail consiste à effectuer une segmentation temporelle en détectant les changements de plans. Les méthodes de détection des changements (ou «cuts») peuvent être classées en trois catégories selon les attributs qu'elles utilisent : la couleur, les contours

ou le mouvement. Une comparaison de ces trois types d'approche est proposée dans [3] et [4]. Les méthodes basées sur l'utilisation des histogrammes couleur sont largement utilisées : elles sont en effet peu sensibles aux transformations géométriques et fournissent en général de meilleurs résultats que les autres approches [5]. Différentes techniques à base d'histogrammes couleur ont été proposées dans la littérature : mesure de l'intersection d'histogrammes dans l'espace Cb-Cr et r-b [6], différence d'histogrammes dans l'espace Yuv [7], comparaison d'histogrammes calculés sur des sous-fenêtres [8], différence d'histogrammes utilisant une distance de Hausdorff multi-niveau [9].

Le travail présenté ici utilise également les histogrammes couleur pour détecter les discontinuités visuelles provoquées par les «cuts». La démarche envisagée consiste à réduire le nombre de couleurs, puis à calculer 4 histogrammes correspondant aux 4 quadrants de chaque image. Les différentes distances entre histogrammes d'images successives sont automatiquement seuillées, et permettent alors de décider de la présence d'un «cut». Le but de ce travail est d'analyser l'incidence de l'étape de réduction des couleurs sur les résultats de la segmentation temporelle.

Le papier est organisé de la manière suivante. Dans une première partie nous présentons les différentes réductions couleur utilisées. La deuxième partie détaille la technique de détection des changements de plan. Enfin, dans une dernière partie, nous donnons des résultats sur des séquences réelles.

## 2. La réduction couleur

Classiquement représentée sur 3x8 bits, la couleur peut donc prendre plus de 16 millions de valeurs. Dans la plupart des applications, la réduction des couleurs est une étape préalable indispensable. Les techniques de réduction couleur sont très nombreuses [10], [11], [12]. Elles sont basées sur le fait que l'œil humain ne perçoit pas les petites variations de couleur. On peut ainsi modifier la couleur de certains pixels sans modification majeure de la perception visuelle. Le choix dépend souvent de l'application et résulte d'un compromis entre la qualité de la préservation des couleurs et le temps de calcul. En général, la réduction couleur se déroule en 2 étapes : la construction d'une palette, puis l'attribution d'une des couleurs de la palette pour chaque couleur de l'image.

Ici, notre soucis n'est pas de préserver la qualité visuelle de l'image, mais de conserver les différences couleur pouvant exister entre images. Parmi les différentes approches possibles, on distingue deux types de stratégies :

- D'une part les stratégies pour lesquelles la réduction des couleurs est déterminée en fonction des couleurs de chaque image.

- D'autre part les stratégies basées sur l'utilisation d'une palette de couleurs déterminée a priori, indépendamment des couleurs des images à traiter. Ces techniques sont plus simples à mettre en œuvre et permettent une comparaison plus rapide des histogrammes calculés sur ce type de palette. Nous nous sommes limités à l'utilisation de ces techniques en envisageant quatre approches :

- une quantification uniforme dans l'espace RVB. En gardant 5 couleurs sur chaque composante, nous disposons de 125 couleurs. C'est la stratégie la plus simple, mais les différences perceptuelles ne sont pas toujours bien restituées avec cette palette.

- une quantification de l'espace Teinte, Luminance, Saturation (TLS). L'espace TLS est basée sur la perception humaine de la couleur. Les axes des Teintes et des Luminances sont divisés en 7 intervalles et celui de la Saturation en 4 intervalles, l'œil humain étant plus sensible à la Teinte et à la Luminance. 9 niveaux de gris, incluant le noir et le blanc, sont ajoutés, ce qui aboutit à 205 couleurs. Nous nous sommes limités à un nombre faible de couleurs pour garder une cohérence avec les autres palettes, même s'il est préconisé [2] d'utiliser une palette de plus de 561 couleurs pour préserver la Teinte.

- une palette construite dans l'espace Lab proposée dans [10]. Cette palette comporte 215 couleurs. Chaque couleur de l'image est remplacée par la couleur de la palette la plus proche mesurée selon la distance euclidienne calculée dans l'espace Lab. L'espace Lab présente une meilleure uniformité de la perception visuelle que les autres espaces : ainsi, les distances euclidiennes y sont en concordance avec les écarts perceptuels.

- la diffusion d'erreur dans l'espace XYZ. Après réduction

des couleurs par la palette Lab présentée ci-dessus, les couleurs sont modifiées en tenant compte de leur voisinage spatial avec l'algorithme de Floyd and Stenberg dans l'espace XYZ [13]. La diffusion permet d'atteindre une meilleure qualité visuelle au prix d'une plus grande complexité.

D'une manière générale, le choix de la palette dépend d'un compromis entre le nombre de couleurs conservées, la qualité visuelle que l'on désire obtenir et le coût en termes de temps de calcul. Les résultats obtenus avec les quatre réductions envisagées sont présentés en figure 1.

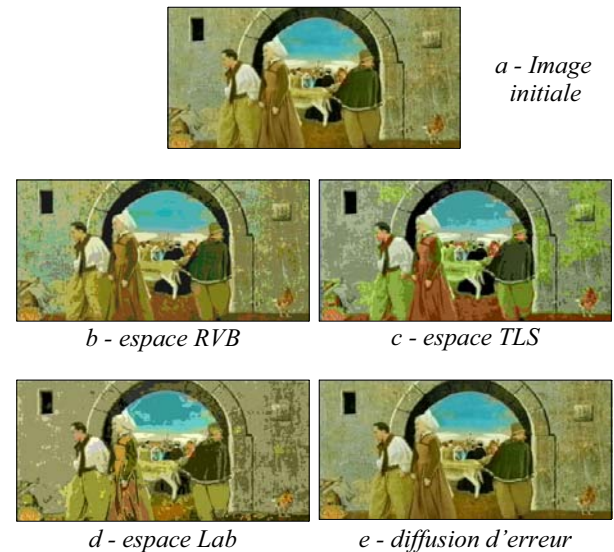


FIG 1 : Réduction couleur

Du point de vue du temps de calcul, les deux dernières méthodes sont beaucoup plus coûteuses puisqu'elles demandent, pour chaque couleur de l'image, la recherche de la couleur de la palette la plus proche.

L'ensemble de ces résultats est résumé dans le tableau ci-dessous où la qualité a été évaluée de manière subjective par une note allant de 1 (mauvais) à 4 (bon). Les temps de calcul sont mesurés sur un processeur PentiumM 1.6 GHz pour une image 178x81.

TAB 1 : Performances de la réduction couleur

Réduction	RVB	TLS	Lab	Diff. err.
Qualité	2	1	3	4
Tps calcul	0.007 s	0.017 s	4.1 s	4.2 s

## 3. La segmentation temporelle

La technique utilisée ici repose sur la comparaison d'histogrammes couleur. Elle présente l'avantage d'être rapide et de ne pas nécessiter l'estimation du mouvement contenu dans l'image. Elle est adaptée à la détection de changements rapi-



des. Les changements avec effets spéciaux (fade, dissolves, etc.) demandent un traitement particulier [14], [15]. Pour accélérer le traitement, les images sont sous-échantillonnées spatialement (pour se ramener à des images de taille approximative 160x90) et temporellement (prélèvement régulier d'une image sur  $n$ ,  $n$  paramètre de la méthode). Ce sous-échantillonnage temporel ne peut être trop important car on trouve dans les films d'animation des plans de courte durée (moins de 5 images).

La détection de «cut» à l'instant courant  $k$  se fait en considérant les instants précédent et suivant, l'observation sur un horizon de 3 images limitant le risque de fausses détection. Nous noterons  $I(k-n)$ ,  $I(k)$  et  $I(k+n)$  les images utilisées à l'instant  $k$ . Pour limiter l'influence du mouvement qui pourrait engendrer de fausses détections, les images sont découpées en quatre quadrants ( $i = 1 \dots 4$ ). Un histogramme couleur (sur la palette réduite) est calculé sur chacun des quadrants, et l'on mesure les différences entre les histogrammes des quadrants respectifs des paires d'images consécutives. Le schéma de la figure 2 résume cette stratégie.

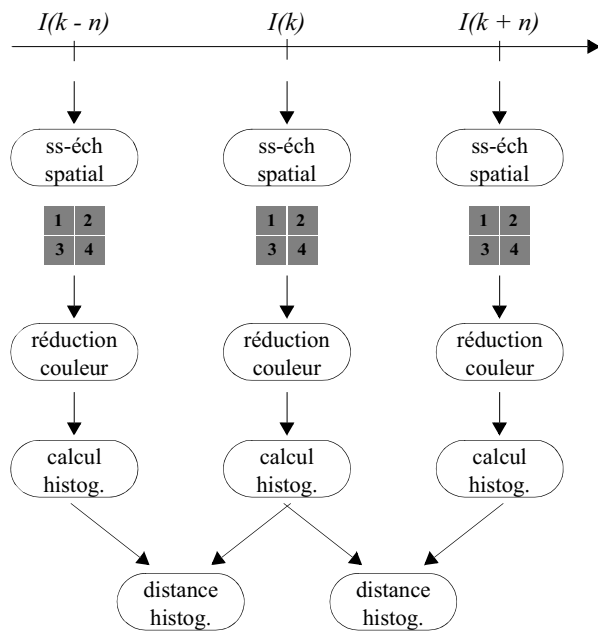


FIG 2 : Principe de la détection des «cuts»

Pour l'étude de l'instant  $k$ , on dispose donc des 8 distances suivantes :

$$D_i(k) = \text{dist}[\text{hist}_i(k-n), \text{hist}_i(k)]$$

$$D_i(k+n) = \text{dist}[\text{hist}_i(k), \text{hist}_i(k+n)]$$

*avec  $i \in [1, 4]$*

La distance utilisée est la distance Euclidienne «bin» à «bin». Un changement de plan est détecté si la condition :

$$D_i(k) > S \quad \text{ET} \quad D_i(k+n) < S$$

est vérifiée sur au moins 3 des 4 quadrants, c'est-à-dire au

moins pour 3 des 4 valeurs de  $i$ .

Une procédure d'estimation automatique du seuil  $S$  a été validée. Elle s'appuie sur une analyse de la moyenne  $D_{\text{moy}}$  des distance  $D_i$ ,  $i = 1 \dots 4$ , et fonctionne en deux temps. Une première étape élimine toutes les distances inférieures à la moyenne des distances. Le seuil est alors déterminé comme la moyenne des distances supérieures à cette première moyenne. Un exemple est présenté dans la figure 3.

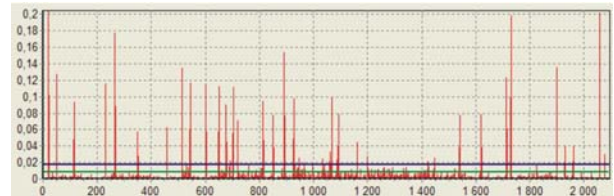


FIG 3 : Estimation automatique du seuil de détection : L'axe des abscisses correspond au temps, l'axe des ordonnées aux distances  $D_{\text{moy}}$ . Le seuil  $S$  est représenté par la ligne horizontale bleue. La ligne verte indique le premier seuil obtenu en effectuant la moyenne de toutes les distances. Les pics isolés correspondent à des «cuts»

La méthode ne présente donc pas de paramètre de réglage, à l'exception des valeurs de sous-échantillonnage spatial et temporel. Ces deux paramètres n'ont qu'une incidence sur la rapidité des calculs mais n'influent pas beaucoup sur la qualité de la détection si leurs valeurs restent dans des plages raisonnables.

## 4. Résultats expérimentaux comparatifs

La technique de détection des changements de plan a été testée sur deux films d'animation de longue durée (film1: 84 mn 46s et 1597 changements; film2: 73mn18s et 1569 changements) en utilisant les 4 techniques de réduction couleur et un sous-échantillonnage temporel  $n$  égal à 2. Les résultats obtenus sont présentés en figure 4. Après une étape de segmentation temporelle manuelle, nous avons pu calculer les taux de non détections et de fausses alarmes présentés dans la figure 4.

On constate que la réduction couleur utilisée joue un rôle important sur le taux de non-détections : variation allant de 13.30 % à 7.96 %. C'est la palette TLS qui fournit les meilleurs résultats, ce qui peut s'expliquer par le fait que cette palette a tendance à préserver, voire accentuer, les différences couleur. La conséquence est que c'est cette même palette qui donne le taux de fausses détections le plus élevé. Cependant le taux de fausses détections semble moins sensible à la méthode de réduction couleur employée. Les taux restent compris entre 5.34 % et 6.85 %, la diffusion d'erreur donnant le moins de fausses détections. Il faut noter que la plupart des fausses alarmes sont dues à des mouvements de caméra, et que les non détections proviennent de changements de plan sans modification importante des couleurs.

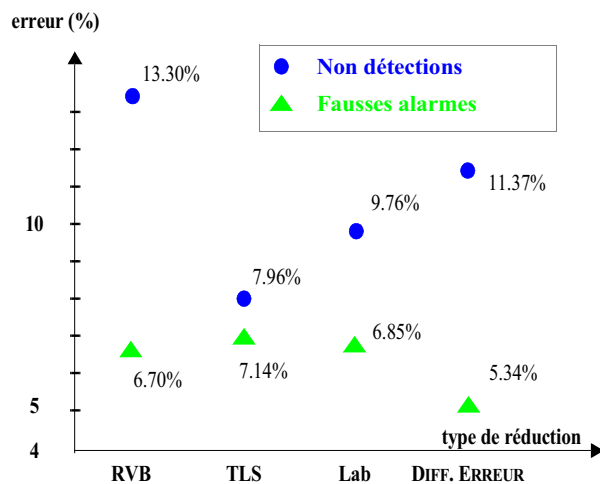


FIG 4 : Performances de la méthode de détection des changements de plan en fonction de la palette couleur utilisée

## 5. Conclusion

Dans ce papier nous avons proposé une méthode automatique de détection des changements de plans («cuts») dans les films d'animation. La discontinuité visuelle provoquée par un «cut» est évaluée à travers la mesure de la distance Euclidienne entre les histogrammes couleur d'images successives. Cette distance est comparée à un seuil calculé automatiquement.

Pour limiter le temps de calcul nécessaire à l'analyse d'une séquence, un certain nombre de réductions ont été effectuées : sous-échantillonnage spatial, réduction de la taille des images et réduction des couleurs.

Une analyse de l'influence du choix de la technique de réduction couleur sur la qualité de la détection des «cuts» a été réalisée. Les erreurs de fausses alarmes restent faibles, entre 5 et 7%, et ne semblent pas dépendre beaucoup de la palette utilisée. En revanche, les non-détections ont des valeurs plus importantes et le choix de la palette couleur semble être un facteur important. On constate également que la plus faible erreur de détection est obtenue avec la palette TLS dont la qualité visuelle reste moyenne du fait de sa tendance à accentuer les différences visuelles entre les couleurs. La palette obtenue par diffusion d'erreur sur l'espace XYZ, même si elle assure une bonne qualité visuelle, aboutit à un taux de non-détection relativement important.

Les perspectives de ce travail ont pour objectif la prise en compte des informations de mouvement de manière à compenser les variations dues aux déplacements caméra / objets.

*Remerciements* : les auteurs tiennent à remercier le CICA (Centre International du Cinéma d'Animation) pour la mise à disposition des films d'animation.

## Références

- [1] Centre International du Cinéma d'Animation. <http://www.annecy.org>.
- [2] A.D. Bimbo. *Visual information retrieval*. Morgan Kaufmann Publishers Inc. San Francisco, CA, USA, pp. 81-113, 1999.
- [3] R.Lienhart. *Reliable Transition Detection in Videos: A Survey and Practitioner's Guide*. International. Journal of Image and Graphics, 1(3), pp. 469-486, 2001.
- [4] R. Lienhart. *Comparison of Automatic Shot Boundary Detection Algorithms*. SPIE Storage and Retrieval for Still Image and Video Databases VII, 3656, pp. 290-301, January 1999.
- [5] U. Gargi, R. Kasturi, S.H. Strayer. *Performance Characterization and Comparison of Video-Shot-Change Detection Methods*. IEEE Transaction on Circuits and Systems for Video Technology, 10(1), February 2000.
- [6] M.S. Drew, Z.N. Li, X. Zhong. *Video dissolve and wipe detection via spatio-temporal images of chromatic histogram differences*. Proc. of IEEE International Conference on Image Processing, 3, pp. 929-932, 2000.
- [7] S. Nayaga, S. Seki, R. Oka. *Temporal video segmentation using unsupervised clustering and semantic object tracking*. SPIE Journal of Electronic Imaging, 7(3), pp. 592-604, July 1998.
- [8] A. Nagasaka, Y. Tanaka. *Automatic video indexing and full-video search for object appearances*. Proc. of IFIP TC2/G2.6 Second Working Conference on Visual Database Systems, pp. 113-127, 1991.
- [9] B. Shen. *HDH based compressed video cut detection*. Proc. of Visual 97 San Diego CA, pp. 149-156, December 1997.
- [10] *Worldnet User's Reference Desk*. <http://www.wurd.com>, 2004.
- [11] P. Bonton, C. Fernandez-Maloigne, A. Trémeau, *IMAGE NUMERIQUE COULEUR De l'acquisition au traitement*, DUNOD, ISBN 2 10 006843 1, 2004.
- [12] K. Kanjanawanishkul, B. Uyyanonvara. *Novel fast color reduction algorithm for time-constrained applications*. Journal of Visual Communication and Image Representation, In Press, Corrected Proof, Available online 12 October 2004,.
- [13] B. L. Evans, V. Monga, N. Damera-Venkata, *Variations on error diffusion: retrospectives and future trends*, Proc. SPIE Vol. 5008, p. 371-389, Color Imaging VIII: Processing, Hardcopy, and Applications; Reiner Eschbach, Gabriel G. Marcu; Eds, jan 2003.
- [14] M.S. Drew, Z.N. Li, X. Zhong. *Video dissolve and wipe detection via spatio-temporal images of chromatic histogram differences*. Proc. of IEEE International Conference on Image Processing, 3, pp. 929-932, 2000.
- [15] B. Ionescu, D. Coquin, P. Lambert, V. Buzuloiu, "Analyse et Caractérisation de séquences de films d'animation", 9<sup>ème</sup> journées ORASIS 2005.

# Filtrage matriciel multicomposante et estimation de la polarisation

Caroline PAULUS, Jérôme I. MARS

Laboratoire des Images et des Signaux  
961 rue de la Houille Blanche, BP46,  
38402 St-Martin d'hères cedex, France

caroline.paulus@lis.inpg.fr, jerome.mars@lis.inpg.fr

**Résumé** — Ce papier présente une méthode de séparation des ondes polarisées reçues sur des réseaux de capteurs multicomposantes. Cette méthode est basée sur la diagonalisation d'une matrice spectrale large bande multicomposante assurant la prise en compte de toute l'information disponible. De plus, une méthode permettant l'analyse de la polarisation de ces ondes à partir de la matrice spectrale est aussi proposée. Enfin, les performances du filtrage sont testées sur des données synthétiques et comparées à une autre méthode multicomposante.

**Abstract** — This paper presents a method of separation of polarized waves received on multicomponent sensors arrays. This method is based on the diagonalisation of a multicomponent wide band spectral matrix ensuring the taking into account of all the available information. Moreover, one method allowing the polarization analysis of the waves using the spectral matrix terms is also proposed. Finally, performances of filtering are tested on synthetic data and compared to another multicomponent method.

## 1 Introduction

Les capteurs multicomposantes (2C, 3C ou 4C) sont de plus en plus utilisés pour les acquisitions sismiques. Ils peuvent enregistrer le déplacement dans plusieurs directions de l'espace ainsi que les variations de pression. Le développement de traitements adaptés à ce type de données est nécessaire. Le but de ce travail est de présenter une méthode permettant d'une part le débruitage de données sismiques multicomposantes et la séparation des différents champs d'ondes ou encore l'estimation de la polarisation des ondes. Cette méthode, appelée filtrage matriciel large-bande multicomposante [6], dérivée de la méthode monocomposante [3, 7], prend en compte l'information de polarisation et traite les différentes composantes de façon globale et non indépendamment. Le principe utilisé est celui de la décomposition en valeurs propres d'une matrice spectrale pour permettre une séparation efficace de l'espace des données de départ en deux espaces complémentaires (sous-espace signal et sous-espace bruit). Les résultats obtenus sur des données synthétiques sont présentés afin d'évaluer les performances de la méthode.

## 2 Filtrage matriciel large-bande multicomposante

### 2.1 Modèle et définition de la matrice spectrale

On considère une antenne linéaire uniforme constituée de  $N_x$  capteurs chacun ayant  $N_c$  composantes. Les données enregistrées dépendent de trois paramètres : le temps d'enregistrement ( $N_t$  échantillons), la distance (ou offset)

et la direction. Par suite du théorème de superposition, le signal reçu sur les trois composantes d'un capteur de l'antenne est une combinaison linéaire des  $P$  ondes polarisées reçues à laquelle s'ajoute un bruit aléatoire blanc, indépendant des ondes.

L'utilisation de la matrice spectrale a été introduite en géophysique par Samson [7] dans le cas de signaux monocomposantes à bande étroite. Nous généralisons au cas de signaux large bande et multicomposantes. Pour ce faire, l'utilisation de long-vecteurs est nécessaire et permet de ne pas avoir à utiliser des tenseurs de taille trop importante. Ainsi, le cube des données sismiques de taille  $(N_x, N_f, N_c)$  est déplié pour former un vecteur de taille  $(N_x N_f N_c)$  contenant les  $N_f$  canaux fréquentiels de chaque composante de chaque capteur :

$$\underline{W} = [\underline{X}(f_1)^T, \dots, \underline{X}(f_{N_f})^T, \underline{Y}(f_1)^T, \dots, \underline{Y}(f_{N_f})^T, \underline{Z}(f_1)^T, \dots, \underline{Z}(f_{N_f})^T]^T \quad (1)$$

avec  $\underline{X}(f_i)$ ,  $\underline{Y}(f_i)$  et  $\underline{Z}(f_i)$  des vecteurs de taille  $(N_x)$  qui correspondent respectivement à la  $i^{eme}$  composante fréquentielle du signal reçu sur les  $N_x$  capteurs des composantes X, Y and Z ( $N_c = 3$ ).

Ces signaux sont de la forme :

$$\underline{W} = \underline{S} \cdot \underline{A} + \underline{B} \quad (2)$$

avec  $\underline{S}$ , une matrice décrivant la propagation des  $P$  ondes de taille  $(N_x N_f N_c, P)$ ;  $\underline{A}$ , un vecteur de taille  $(P, 1)$  correspondant à l'amplitude de chaque onde et  $\underline{B}$  un bruit additif, temporellement et spatialement blanc, non polarisé et de densité spectrale de puissance  $\sigma_b^2$ .

La matrice spectrale large-bande multicomposante de dimension  $(N_x N_f N_c, N_x N_f N_c)$  est donc définie par :

$$\underline{\Gamma} = E\{\underline{W} \cdot \underline{W}^H\} \quad (3)$$



avec  $^H$  l'opérateur transposé conjugué. Cette matrice est constituée des matrices spectrales large-bande monocomposantes associées aux composantes X, Y, Z situées sur les blocs de la diagonale principale et des matrices spectrales large-bande inter-composantes. Ces dernières contiennent l'information relative à l'interaction entre deux composantes et à la polarisation des ondes reçues.

Cette matrice spectrale est composée de plusieurs termes. Le premier correspond à l'interaction des ondes avec elle-mêmes, le deuxième correspond à l'interaction des ondes entre elles et le dernier correspond au bruit. Ayant une seule observation disponible, il est nécessaire d'utiliser un opérateur de moyenne pour estimer cette matrice. Il doit permettre de diminuer l'influence des deux derniers termes et ainsi décorréler les ondes du bruit et décorréler les ondes entre elles. Il a aussi pour rôle d'augmenter le rang de la matrice spectrale. En pratique, ce moyennage est réalisé à l'aide de lissages spatiaux et fréquentiels qui permettent d'obtenir à partir d'une unique observation plusieurs réalisations  $K$  en opérant des décalages spatiaux-fréquentiels [8].

## 2.2 Estimation du sous-espace signal

Une fois la matrice spectrale  $\underline{\Gamma}$  estimée, deux étapes sont nécessaires : la diagonalisation puis la projection des données initiales sur les vecteurs propres appartenant au sous-espace signal.

**Diagonalisation et étude des valeurs propres :** D'après les hypothèses émises dans la section précédente, nous obtenons :

$$\underline{\Gamma} = \underline{S} \cdot \underline{\Gamma}_A \cdot \underline{S}^H + \sigma_b^2 \cdot \underline{I} \quad (4)$$

Si  $\underline{\Gamma}_A = E[\underline{A} \cdot \underline{A}^H]$  est non singulière (ondes partiellement corrélées ou décorréélées) et les colonnes de  $\underline{S}$  sont linéairement indépendantes, le rang de  $\underline{\Gamma}_s = \underline{S} \cdot \underline{\Gamma}_A \cdot \underline{S}^H$  est  $P$ . La matrice  $\underline{\Gamma}$  étant carrée, elle peut être diagonalisée par une décomposition en valeurs propres [2] selon la formule :

$$\underline{\Gamma} = \underline{U} \cdot \underline{\Lambda} \cdot \underline{U}^H = \sum_{i=1}^{N_x N_f N_c} \lambda_i \underline{u}_i \underline{u}_i^H \quad (5)$$

- $\underline{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{N_x N_f N_c})$  est une matrice diagonale contenant les valeurs propres  $\lambda_i$  représentant l'énergie associée au vecteur propre  $\underline{u}_i$  ;
- $\underline{U}$  contient les vecteurs propres  $\underline{u}_i$ .

Les valeurs propres  $\lambda_i$  sont arrangées par ordre décroissant :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N_x N_f N_c} \geq 0 \quad (6)$$

Si l'on considère l'équation (5),  $\underline{\Gamma}$  possède  $N_x N_f N_c$  valeurs propres. Cependant, la propriété de rang énoncée précédemment implique que :

- les  $(N_x N_f N_c) - P$  plus petites valeurs propres sont égales à  $\sigma_b^2$  ;
- les vecteurs propres correspondant à ces valeurs propres sont orthogonaux aux colonnes de la matrice  $\underline{S}$ .

Par conséquent, l'espace généré par les plus petites valeurs propres est appelé sous espace bruit et son complémentaire, le sous espace signal.

**Réduction d'espaces :** Il est alors possible de réaliser une séparation de l'espace initial des données en deux

sous-espaces : le sous-espace signal ( $\underline{\Gamma}_s$ ) et le sous-espace bruit ( $\underline{\Gamma}_b$ ), le but étant d'améliorer le RSB et de séparer les ondes entre elles. L'estimation du nombre de valeurs propres caractérisant  $\underline{\Gamma}_s$  se fait à l'aide de méthodes statistiques, ou par observation de la décroissance des valeurs propres. Ce nombre de valeurs propres est égal à  $P$  (le nombre d'ondes) dans le cas où le bruit est spatialement blanc et décorrélé du signal. Ainsi,  $\underline{\Gamma}$  se décompose :

$$\underline{\Gamma} = \sum_{i=1}^P \lambda_i \underline{u}_i \underline{u}_i^H + \sum_{i=P+1}^{N_x N_f N_c} \lambda_i \underline{u}_i \underline{u}_i^H = \underline{\Gamma}_s + \underline{\Gamma}_b \quad (7)$$

**Projection sur le sous-espace signal :** Le long-vecteur contenant les données initiales  $\underline{W}$  est projeté sur le sous-espace signal :  $\sum_{i=1}^P \langle \underline{W}, \underline{u}_i \rangle \cdot \underline{u}_i$ , puis il est réarrangé sous la forme d'un cube de données (opération inverse de Eq.(1)). Enfin, une transformée de Fourier inverse est réalisée pour repasser dans le domaine temps-distance.

## 3 Analyse de la polarisation

La polarisation caractérise le mouvement d'une particule du sol au passage d'une onde sismique [5, 9]. L'étude de la polarisation d'une onde consiste à établir les relations d'amplitude et de phase de cette onde sur les capteurs multicomposantes.

Une fois les ondes séparées, leurs paramètres de polarisation peuvent être caractérisés en fonction des éléments de la matrice spectrale  $\underline{\Gamma}_s$  résultant du filtrage de cette onde. Pour une fréquence donnée  $f$  et un capteur  $n$ ,  $\underline{\Gamma}_s(n, f)$  peut s'exprimer :

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma}_s(n, f) &= \begin{bmatrix} \underline{\Gamma}_{sX,X}(n, f) & \underline{\Gamma}_{sZ,X}(n, f) \\ \underline{\Gamma}_{sX,Z}(n, f) & \underline{\Gamma}_{sZ,Z}(n, f) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1^2 & A_1 A_2 e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \\ A_1 A_2 e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} & A_2^2 \end{bmatrix} \quad (8) \end{aligned}$$

avec  $(A_1/A_2)$  et  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  respectivement le rapport d'amplitude et le déphasage entre les deux composantes. Les paramètres de polarisation ( $\beta$  and  $\theta$ ) représentent le rapport entre le petit axe et le grand axe de l'ellipse de polarisation,  $\tan(\beta)$ , et l'angle que fait cette même ellipse avec l'axe des abscisses. On rappelle que l'ellipse de polarisation correspond au tracé de l'amplitude de la composante Z sur le capteur  $n$  en fonction de l'amplitude de la composante X sur la capteur  $n$ . De plus, Le signe de  $\beta$  indique le sens dans lequel l'ellipse est décrite. En utilisant les résultats présentés dans [1], on peut montrer que :

$$\sin(2\beta) = \frac{2A_1 A_2}{A_1^2 + A_2^2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{i(\underline{\Gamma}_{X,Z}(n, f) - \underline{\Gamma}_{Z,X}(n, f))}{\underline{\Gamma}_{X,X}(n, f) + \underline{\Gamma}_{Z,Z}(n, f)} \quad (9)$$

Ainsi,  $\beta$  est entièrement déterminé par les éléments de la matrice spectrale. Si l'on considère l'onde comme étant monochromatique,  $\beta$  est indépendant de la fréquence. Néanmoins, l'estimation sera meilleure si la fréquence choisie pour estimer  $\beta$  est proche de la fréquence centrale de l'ondelette.

$\theta$  est estimé en réalisant une analyse en composante principale (ACP) sur l'ellipse de polarisation. Le premier axe principal trouvé correspond au grand axe de l'ellipse. On en déduit ainsi la valeur de  $\theta$ .

## 4 Applications

La méthode est appliquée sur un jeu de données 2C synthétiques dans le but d'améliorer le RSB et d'estimer la polarisation des ondes.

### 4.1 Filtrage de données

Les données utilisées sont reçues sur une antenne synthétique linéaire uniforme de 20 capteurs à 2 composantes (X : composante horizontale et Z : composante verticale) sur 128 échantillons. L'onde présente (Fig.1) possède une vitesse apparente négative et une polarisation elliptique. Le rapport d'amplitude entre la composante X et Z est de 0.7 et le déphasage inter-composante est de 0.8 rad. A ce modèle s'ajoute un bruit aléatoire blanc (Fig.3). Le RSB sur la composante X est de -2 dB et de -4 dB sur la composante Z. Les données filtrées (Fig.5) sont obtenues par projection des données bruitées sur le premier vecteur propre de la matrice spectrale. Le filtrage permet de récupérer l'onde et d'enlever la majeure partie du bruit comme nous pouvons le constater sur la Figure 6 qui représente la différence entre l'onde obtenue par filtrage (Fig.5) et le modèle (Fig.1).

Nous avons voulu tester la méthode de filtrage 3DSVD [4] sur les mêmes données pour comparer les résultats. La Figure 9 correspond à l'onde filtrée par la 3DSVD et la Figure 10 à la différence entre cette onde et le modèle. On constate qu'une certaine partie de l'onde n'a pas été correctement filtrée et a donc été rejeté dans le sous espace bruit. Pour une comparaison quantitative, nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne entre le modèle et l'onde filtré. Avec la matrice spectrale, l'erreur est de  $34.10^{-4}$  alors qu'elle est de  $80.10^{-4}$  pour la 3DSVD.

### 4.2 Estimation de la polarisation

L'onde présente dans le profil possède une polarisation elliptique. La figure de polarisation de l'onde sans bruit sur l'un des capteurs (Fig.2) est une pseudo-ellipse. Le rapport d'amplitude est de 0.7 et le déphasage de 0.8 rad, ce qui explique la forme elliptique. La figure de polarisation obtenue après filtrage des données est présentée en Figure 7, elle est améliorée par rapport à celle obtenue directement sur les données bruitées (Fig.4). L'extraction des paramètres de polarisation d'après la méthode vue en Section 3, nous permet de trouver un rapport d'amplitude de 0.74 et un déphasage de 0.77 rad. La figure de polarisation obtenue après correction du déphasage est représentée sur la Figure 8. On voit qu'après correction, l'ellipse tend vers une droite qui correspondrait à une onde de polarisation linéaire.

## 5 Conclusion

Les acquisitions sismiques multicomposantes étant largement répandues, des traitements spécifiques pour ces données sont développés. Ce papier présente une nouvelle méthode réalisant un filtrage matriciel large bande multicomposante. En termes d'amélioration de RSB et de séparation d'ondes, cette méthode donne de bons résul-

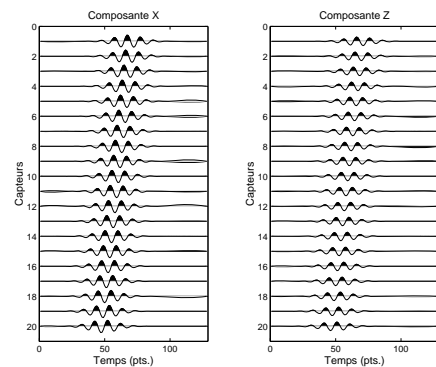


FIG. 1 – Modèle : Onde elliptique

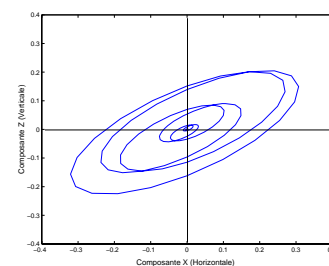


FIG. 2 – Polarisation de l'onde sans bruit

tats. De plus, il est possible d'estimer la polarisation des ondes. Par comparaison avec d'autres méthodes multicomposantes comme la 3DSVD, la méthode proposée a l'avantage de ne nécessiter d'aucun pré-traitement.

## Références

- [1] M. Born and E. Wolf. *Principles of optics : Electromagnetic theory of propagation interference and diffraction of light*. Pergamon Press, sixth edition edition, 1980.
- [2] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix Computations*. The John Hopkins University Press, Baltimore, London, 3rd edition edition, 1996.
- [3] P. Gounon, J. I. Mars, and D. Goncalves. Wideband spectral matrix filtering. In *Meeting of Society of Exploration Geophysicists*, 1998.
- [4] N. Le Bihan and G. Ginolhac. Three-mode data set analysis using higher order subspace method : application to sonar and seismo-acoustic signal processing. *Signal Processing*, 84 :919-942, May 2004.

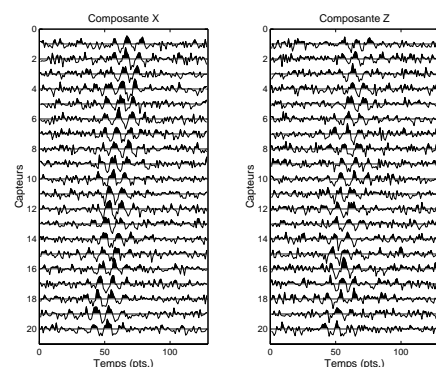


FIG. 3 – Données initiales bruitées

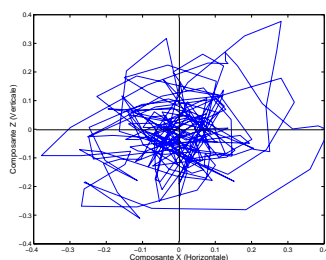


FIG. 4 – Polarisation de l'onde avec bruit

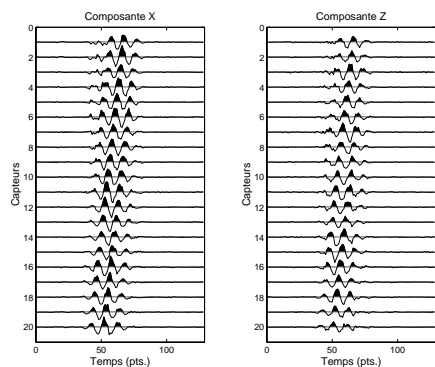


FIG. 5 – Onde filtrée avec la matrice spectrale

- [5] J.I. Mars, Lacoume J.-L., J.-L. Mari, and F. Glangeaud. *Traitement du signal pour géologues et géophysiciens*, chapitre 1, pages 92–123. Edition technip edition, 2004.
- [6] C. Paulus, P. Gounon, and J. I. Mars. Wideband spectral matrix filtering for multicomponent sensors array. In *Meeting of Society of Exploration Geophysicists*, 2004.
- [7] J. C. Samson. The spectral matrix, eigenvalues, and principal components in the analysis of multichannel geophysical data. *Annales Geophysicae*, 1(2) :115–119, 1983.
- [8] T.-J. Shan, M. Wax, and T. Kailath. On spatial smoothing for direction-of-arrival estimation of coherent signals. *IEEE Trans. ASSP*, 33 :806–811, August 1985.
- [9] B. D. Smith and S. H. Ward. On the computation of polarization ellipse parameters. *Geophysics*, 39 :867–869, December 1974.

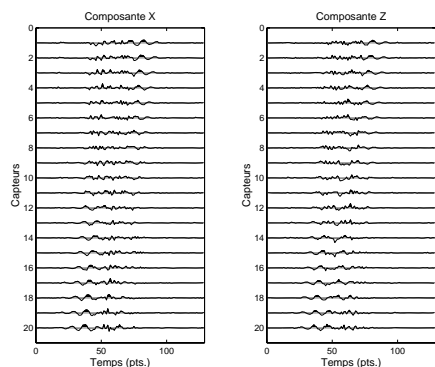


FIG. 6 – Différence entre le modèle et l'onde filtrée par la matrice spectrale

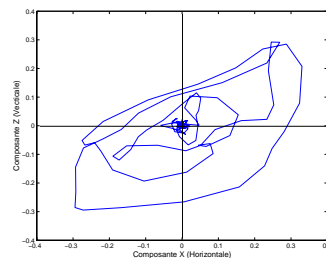


FIG. 7 – Polarisation de l'onde filtrée

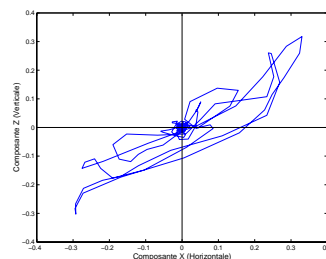


FIG. 8 – Polarisation de l'onde filtrée après correction du déphasage inter-composante

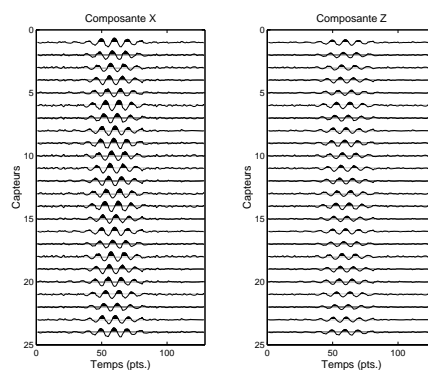


FIG. 9 – Onde filtrée par 3DSVD

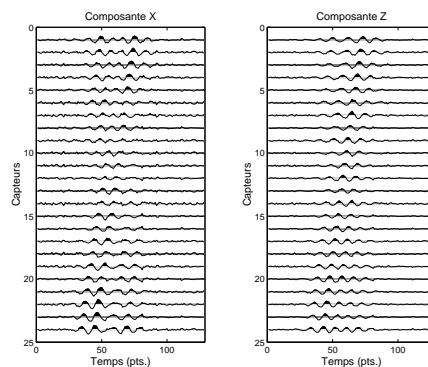


FIG. 10 – Différence entre le modèle et l'onde filtrée par 3DSVD

# Analyse d'images SAR polarimétriques au moyen d'outils temps-fréquence

Paul LEDUCQ, Laurent FERRO-FAMIL, Eric POTTIER

Institut d'Electronique et de Télécommunication de Rennes – Université de Rennes 1  
Campus de Beaulieu - Bat 11.D, 263 Avenue Général Leclerc, CS 74205, 35042 Rennes Cedex, France  
Equipe SAPHIR - Téléphone : 02 23 23 57 07 – Fax : 02 23 23 69 63  
paul.leducq@univ-rennes1.fr, laurent.ferro-famil@univ-rennes1.fr,  
eric.pottier@univ-rennes1.fr

**Résumé** – Cet article illustre l'intérêt des outils temps-fréquences en imagerie SAR au travers de deux applications. Une nouvelle méthode d'analyse des cibles mobiles est présentée. Elle s'appuie sur un algorithme de Matching-Pursuit bidimensionnel et l'utilisation d'un dictionnaire temps-fréquence. Une étude des zones urbaines dans le cadre temps-fréquence est proposée. Le comportement fréquentiel des réflecteurs est mis à profit pour effectuer une classification des zones urbaines à l'aide de deux indicateurs.

**Abstract** – This article shows the usefulness of time-frequency tools in SAR imagery through two applications. A new method is proposed to analyse moving targets. It uses a two dimensional Matching-Pursuit algorithm, over a time-frequency dictionary. Urban areas analysis is carried on in a time-frequency framework. The behaviour of pixels in the frequency domain is studied and used as an input to two new indicators, allowing a classification of urban areas pixels.

## 1 Introduction

Les méthodes temps-fréquence sont un outil puissant pour l'analyse de signaux non-stationnaires. Elles sont ici confrontées au problèmes de l'imagerie SAR (Synthetic Aperture Radar). Plus particulièrement, les cas des cibles mobiles et des zones urbaines, dont les comportements sont particulièrement non-stationnaires, sont abordés.

### 1.1 Principe de formation de l'image

Une image SAR d'une scène utilise une mesure électromagnétique d'une scène sur une large bande de fréquence et pour une large plage d'angles d'observation. L'image SAR est formée en appliquant aux données mesurées la technique de compression d'impulsion. Il s'agit de calculer la corrélation entre les données et une fonction de référence correspondant à la réponse d'un diffuseur ponctuel dont la réflectivité serait indépendante de l'angle d'observation et de la fréquence d'illumination.

### 1.2 Non-stationnarité en imagerie SAR

L'amélioration de la résolution, s'obtient en élargissant la bande transmise et la plage angulaire d'observation de la scène. L'hypothèse de stationnarité de la scène, c'est à dire d'invariance de la réflectivité des diffuseurs avec l'angle et la fréquence peut alors être mise en défaut. Cet article traite en particulier de deux cas de non stationnarité :

- Les images SAR de cibles ou environnements possédant une réflectivité variable en fonction de l'angle et de la fréquence (structure à réflectivité directive,

phénomène de résonance, ...)

- Le cas de cibles mobiles, dont la position change entre les acquisitions successives de la réponse de la scène par le capteur.

### 1.3 Intérêt des méthodes temps-fréquence

Suivant l'axe azimut (axe parallèle au déplacement du radar), l'analyse du comportement temps-fréquence d'une cible permet d'observer l'évolution de la réflectivité de celle-ci en fonction de la fréquence Doppler (liée à l'existence d'une vitesse relative entre la cible et le radar). Cette fréquence étant liée à l'angle d'observation et la vitesse de la cible, il est ainsi possible de mesurer le comportement angulaire de la réflectivité de la cible.

De la même façon, l'observation du comportement de la cible en fréquence distance (axe orthogonal à la direction de déplacement du radar) renseigne sur l'évolution de sa réflectivité dans la bande de fréquence émise par le radar.

## 2 Analyse de cibles mobiles

Le problème des cibles mobiles en imagerie SAR a fait l'objet de nombreuses études [3]. Une nouvelle méthode est proposée ici, permettant non seulement d'identifier les paramètres de mouvement de la cible étudiée mais aussi d'analyser le comportement angulaire, fréquentiel et polarimétrique des réflecteurs qui la composent.

## 2.1 Principe

Cette méthode est basée sur l'algorithme de Matching-Pursuit de Mallat et Zhang [5], qui est étendu au cas de signaux bidimensionnels. Les données analysées (3 images complexes correspondant aux 3 canaux de polarisation) sont alors décomposées sur une famille d'atomes temps-fréquence. Les atomes sont issus de la modélisation de la réponse d'un réflecteur ponctuel de comportement simple (comportement angulaire et fréquentiel gaussien, vitesse constante). Ce modèle conduit à des atomes de la forme d'une gaussienne modulée par une cissoïde dans la direction distance ( $y$ ) et d'une chirplet gaussienne dans la direction azimuth ( $x$ ), les paramètres des atomes étant reliés aux caractéristiques du réflecteur modélisé.

$$g_\gamma(x, y) = C \exp \left[ -\alpha_x \frac{(x - \tau_x)^2}{2} - \alpha_y \frac{(y - t_y)^2}{2} + i \left( \beta_x \frac{(x - \tau_x)^2}{2} + \omega_x(x - \tau_x) + \omega_y(y - t_y) \right) \right] \quad (1)$$

Les atomes sélectionnés peuvent alors être associés à des réflecteurs de l'image dont les caractéristiques se déduisent des paramètres de l'atome.

Afin de s'adapter aux spécificités de l'imagerie SAR, le critère d'arrêt de type énergétique habituellement utilisé est remplacé par un critère polarimétrique d'homogénéité de la zone observée.

## 2.2 Résultats

La méthode proposée a été validée sur des données simulées et réelles [4]. La figure 1 présente une image SAR polarimétrique d'un ferry mesuré en bande C par le capteur EMISAR sur le site de Storebaelt (Danemark). L'application de la méthode présentée à ces données permet notamment d'estimer la vitesse des réflecteurs de la cible (figure 2). Cette vitesse s'avère être sensiblement identique pour tous les réflecteurs (couleur verte), preuve que ceux-ci correspondent à une même cible. D'autres paramètres peuvent être estimés : directivité angulaire (figure 3), comportements fréquentiels et polarimétriques, ...

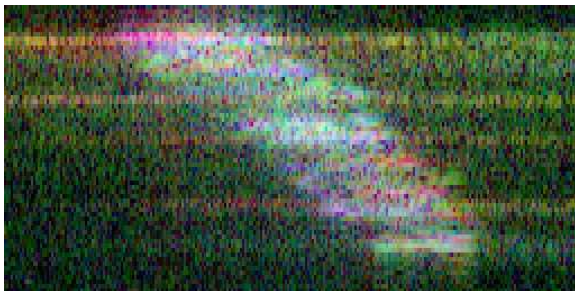


FIG. 1 – Image originale (base de Pauli [1], axe distance vertical, azimuth horizontal)

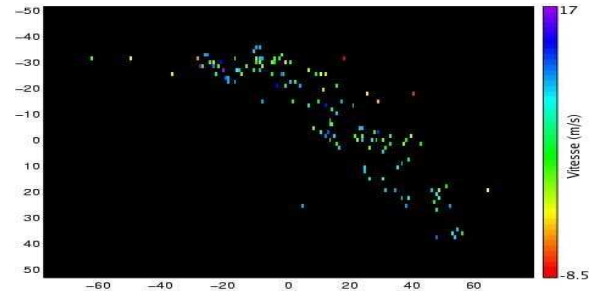


FIG. 2 – Carte des vitesses

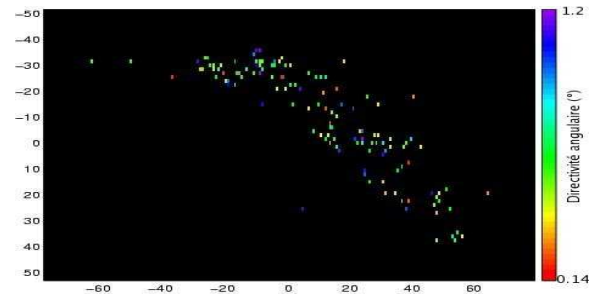


FIG. 3 – Carte des directivités angulaires

## 3 Etude de zones urbaines

### 3.1 Principe

Les zones urbaines sont des environnements dont la réponse électromagnétique est complexe, ce qui rend difficile l'analyse des images SAR de ces zones. Sur la figure 4, une image SAR polarimétrique de la ville de Dresde, mesurée en bande L par E-SAR, on peut notamment constater que certains bâtiments (dans le coin inférieur gauche par exemple) ont une réponse différente (beaucoup plus énergétique et de comportement polarimétrique différent) des autres. Cette différence n'est pas liée à la nature des bâtiments mais simplement à une configuration géométrique particulière. Il convient donc de comprendre et de détecter ce type de comportement parasite avant toute analyse.

Il est proposé dans cette partie une méthode, basée sur l'analyse temps-fréquence des images SAR, permettant de caractériser les diffuseurs d'une zone urbaine afin d'en permettre l'analyse. Elle tire partie de la complémentarité entre la stabilité et la stationnarité, matérialisée chacune par un indicateur. Dans les deux cas, l'indicateur est construit à partir d'images de sous-ouverture : il s'agit d'images formées en n'utilisant qu'une portion du spectre total. L'indépendance des images de sous-ouverture est garantie en découpant le spectre en sous-spectres indépendants.

### 3.2 Sélection des pixels cohérents

Un pixel est supposé cohérent si son comportement est le même dans toutes les images de sous-ouverture. C'est le cas notamment quand une cible de réflectivité élevée domine dans une cellule de résolution. Inversement, un pixel appartenant à une zone naturelle est formé de la somme





FIG. 4 – Image originale (base de Pauli [1], axe distance horizontal, azimuth vertical)

de multiples contributions. Il présentera donc un caractère aléatoire et une cohérence faible. La mesure choisie est basée sur la construction pour chaque pixel de la matrice des cohérences entre sous-ouverture (2).

$$\gamma_{SO} = (\gamma_{ij}) \text{ où } \gamma_{ij} = \frac{\langle X_i X_j^* \rangle}{\sqrt{\langle |X_i|^2 \rangle \langle |X_j|^2 \rangle}} \quad (2)$$

Les valeurs propres  $\{\lambda_i\}_{i=1..N}$  de la matrice  $\gamma_{SO}$  sont alors calculées et l'entropie, au sens polarimétrique, est déduite (3).

$$H = - \sum_{i=1}^N p_i \log_N(p_i) \text{ où } p_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^N \lambda_i} \quad (3)$$

Dans le cas où une cible stable domine,  $\gamma_{SO}$  tend vers une matrice de 1 donc  $H \rightarrow 0$ . Si le pixel appartient à un milieu aléatoire, les termes non diagonaux sont quasi nuls,  $\gamma_{SO}$  tend vers l'identité donc  $H \rightarrow 1$ . La normalisation opérée dans (2) permet d'éviter de sélectionner des pixels très anisotropes. En effet en l'absence de normalisation, la présence dans une des images de sous ouverture d'un comportement dominant entraîne une entropie faible, indépendamment de la corrélation entre les sous vues. Après normalisation, les mécanismes cohérents (dont l'amplitude peut varier, mais pour lesquels les sous-ouvertures sont corrélées) sont conservés (entropie faible) tandis que les mécanismes incohérents (sous-ouvertures non corrélées) sont éliminés. L'indicateur présenté en partie 3.3 permettra de différencier parmi les mécanismes cohérents ceux de réflectivité constante de ceux de réflectivité variable.

La figure 5 montre le résultat obtenu en appliquant cette méthode sur les données de la figure 4. La stabilité  $\xi = 1 - H$  est calculé pour chacun des canaux de la base de Pauli [1] : en bleu, HH+VV (simple ou triple rebond), en rouge, HH-VV (double rebond), en vert, HV (structure orientée). Cela permet de sélectionner les réflecteurs

stables, mais aussi de les caractériser par leur comportement polarimétrique.

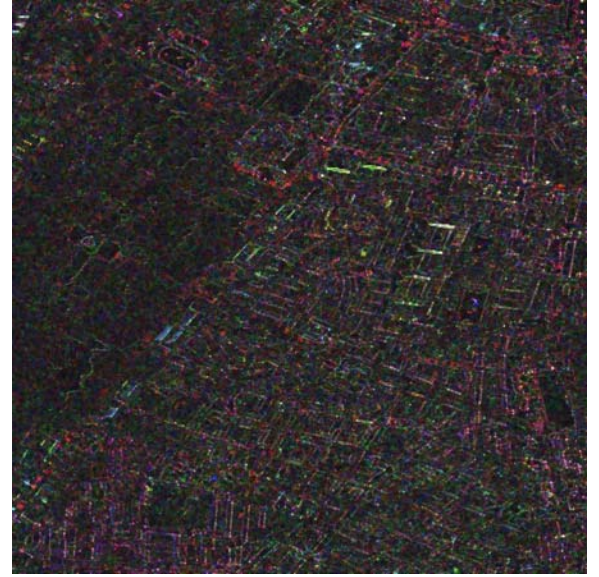


FIG. 5 – Mesure de la stabilité

### 3.3 Sélection des pixels anisotropes

L'étude des non stationnarités dans la direction azimuth renseigne sur l'anisotropie des réflecteurs. La mesure utilisée pour détecter les pixels anisotropes est fondée sur l'observation pour chaque pixel des matrices de covariance polarimétrique [1] associées aux sous-ouvertures,  $\{T_i\}_{i=1..N}$ . Les hypothèses  $H_0 : \{\text{les matrices } T_i \text{ suivent la même distribution}\}$  et  $H_1 = \overline{H_0}$  sont comparées au moyen d'un critère de maximum de vraisemblance. Les matrices de covariance polarimétrique  $T_i$  suivent une loi de Whishart, le critère prend donc la forme [2] :

$$\Lambda = \frac{\prod_{i=1}^N |T_i|^{n_i}}{|T_t|^{n_t}} \text{ où } n_t = \sum_{i=1}^N n_i \text{ et } T_t = \sum_{i=1}^N \frac{n_i T_i}{n_t} \quad (4)$$

La figure 6 présente les résultats obtenus sur les données de la figure 4.  $\log(\Lambda)$  est affiché, les valeurs les plus faibles sont représentées en blanc, les plus fortes en noir. Cet indicateur met notamment en évidence les bâtiments identifiés sur la figure 4 à la partie 3.1.

### 3.4 Résultats

Grâce aux deux indicateurs présentés, il est possible de proposer une classification des zones urbaines en quatre classes. Pour cela les indicateurs présentés plus haut sont seuillés. Dans le cas de l'indicateur de stabilité, le même seuil est appliqué aux trois canaux de polarisation. Sont conservées, les points pour lesquels au moins un des canaux dépasse le seuil (il est en effet possible d'observer un mécanisme très cohérent dans un canal et incohérent dans les autres. La figure 7 illustre le résultat de cette classification. Les classes peuvent être interprétées de la façon suivante :



FIG. 6 – Mesure de l'anisotropie

- Les zones stationnaires et non cohérentes (gris). Il s'agit en général de zones naturelles ou de zone de faible réflectivité (ombre radar, routes, toits, ...) Dans les zones naturelles, le comportement peut être considéré comme aléatoire. Les valeurs du pixel considéré entre les différentes sous-ouverture ne présente donc ni corrélation, ni d'anisotropie. Les zones de faible réflectivité sont "parasitées" par les pixels voisins et présentent donc également un comportement aléatoire.
- Les pixels stables (bleu). Ce sont des pixels cohérents et stationnaires, correspondant à des structures dont le comportement électromagnétique est invariant avec l'angle d'observation (lampadaires, structures en "coin de cube", ...)
- Les pixels anisotropes (rouge). Ils présentent un comportement (notamment polarimétrique) variant avec l'angle d'observation : phénomène de masquage, de résonance.
- Les pixels cohérents et anisotropes (jaune). Ces pixels correspondent à des cibles dont le mécanisme de rétrodiffusion est le même pendant toute la mesure par le radar, mais dont l'intensité varie. Il s'agit principalement des dièdres formés par l'assemblage mur-sol.

La figure 7 montre que la méthode proposée permet :

- d'éliminer les zones naturelles (gauche de l'image),
- de mettre en évidence les contours des bâtiments,
- de discriminer les bâtiments dont le comportement anisotrope pourrait perturber l'analyse (partie inférieure gauche et droite de l'image).

## 4 Conclusion

Dans cet article, deux applications des méthodes temps-fréquences à l'imagerie SAR ont été présentées. Une adaptation de l'algorithme de Matching Pursuit a été développée pour analyser les cibles mobiles. Afin d'étudier les zones urbaines, des indicateurs basés sur les propriétés

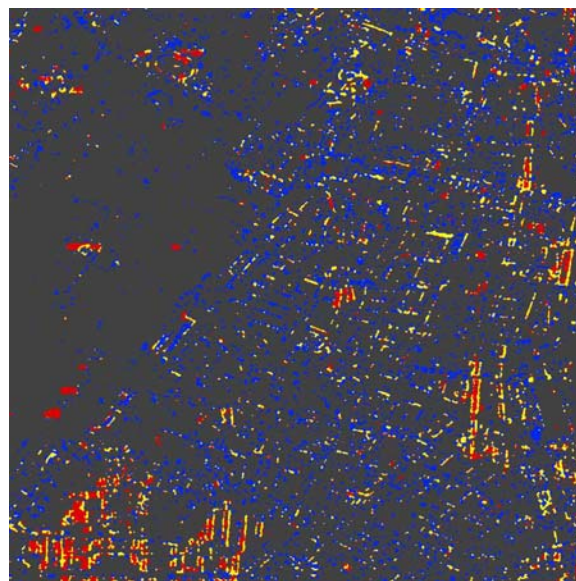


FIG. 7 – Classification des pixels.

temps-fréquence des signaux SAR ont été introduits. Ces deux applications illustrent l'intérêt de l'approche temps-fréquence dans le cadre de l'imagerie SAR.

## Remerciements

Les travaux présentés font partie d'une étude réalisée pour le CNES.

## Références

- [1] S. R. Cloude and E. Pottier, "A Review of Target Decomposition Theorems in Radar Polarimetry", *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 34, no. 2, pp. 498-518, 1996.
- [2] L. Ferro-Famil, A. Reigber and E. Pottier, "Scene characterization using subaperture polarimetric SAR data", *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 41, no. 10, pp. 2264-2276, October 2003.
- [3] J. K. Jao, "Theory of synthetic aperture radar of a moving target", *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 39, no. 9, pp. 1984-1992, September 2001.
- [4] P. Leducq, L. Ferro-Famil and E. Pottier, "Analysis of moving and non-stationary objects in polarimetric SAR images using Matching-Pursuit", *Proc. RADAR*, October 2004.
- [5] S. G. Mallat and Z. Zhang, "Matching pursuit with time-frequency dictionaries", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 41, no. 12, pp. 3397-3415, December 1993.
- [6] J.-C. Souyris, C. Henry and F. Adragna, "On the use of complex SAR image spectral analysis for target detection : assessment of polarimetry", *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 41, no. 12, pp. 2725-2734, December 2003.



# Fusion de Méthodes pour la Classification de Zones Urbaines en Télédétection Satellites

Mathieu FAUVEL<sup>1,2</sup>, Jocelyn CHANUSSOT<sup>1</sup>, Jon Atli BENEDIKTSSON<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire des Images et des Signaux - LIS / INPG  
BP 46 - 38402 St Martin d'Heres - FRANCE

<sup>2</sup>Department of Electrical and Computer Engineering  
University Of Iceland - Hjardarhaga 2-6, 107 Reykjavik, Iceland  
mathieu.fauvel@lis.inpg.fr, jocelyn.chanussot@lis.inpg.fr  
benedikt@hi.is

**Résumé** – Le thème de cet article est la fusion de méthodes pour la classification d'images panchromatiques haute résolution. Nous proposons un schéma de fusion pour agréger des résultats fournis par différents classifieurs. Les règles classiques de fusion ne combinent pas correctement les informations si celles-ci sont conflictuelles ou si elles proviennent de capteurs de fiabilité différente. La solution proposée dans cet article est de définir des mesures de confiance, au niveau local et global, basées sur la théorie des ensembles flous. La fusion est ensuite réalisée avec un opérateur de fusion adaptatif. Cette méthode a été testée sur une image panchromatique Ikonos haute résolution, les résultats sont meilleurs que ceux obtenus en utilisant séparément les classifieurs.

**Abstract** – The fusion of methods for the classification of panchromatic high-resolution satellite remote sensing images from urban areas is addressed. In this paper we propose to aggregate the results provided by different classifiers with complementary properties. Classical combination rules fail to properly combine conflictual information or information provided by sources with different reliabilities. To overcome those problems, the proposed approach is based on the definition of two measures of accuracy. Based on fuzzy set theory, both a local and a global accuracy are defined for each classifier. The fusion is then performed with an adaptive fuzzy combination operator. In terms of classification accuracy, the proposed method performs better than each classifier used separately. Results are presented on panchromatic IKONOS image.

## 1 Introduction

Cet article traite de la classification d'images satellitaires haute résolution de zones urbaines. Cette technique a pour objectif de déterminer les structures présentes dans l'image et d'associer chaque pixel de l'image à une structure. Plusieurs approches ont été envisagées, elles se basent généralement sur une étape d'extraction de caractéristiques et une étape de classification [1].

Lors d'études précédentes, des méthodes de classification d'images panchromatiques ont été proposées. Benediktsson *et al.* ont utilisé des filtres issus de la morphologie mathématique pour extraire des informations sur la taille, la forme et le contraste local des structures. La classification est ensuite réalisée par un réseau de neurones [2]. Dans [3], Chanussot *et al.* ont mis en place un classifieur flou, basé sur la même méthode d'extraction de caractéristiques. Ces deux méthodes donnent des résultats satisfaisants. Cependant si les résultats sont bons pour certaines classes de l'image, ils ne le sont pas pour toutes, les erreurs se produisant à des pixels différents. Dans cet article, nous proposons de fusionner les résultats fournis par les différents algorithmes afin de tirer profit de chacun d'eux.

La fusion de données consiste à combiner des informations issues de plusieurs sources afin d'améliorer la prise de décision [4]. Pour notre application cela consiste à utiliser seulement l'information pertinente fournie par les algorithmes de classification. C'est une opération difficile en raison des diffé-

rences de nature et de précision des résultats. Le problème qui se pose est de savoir, pour chaque pixel, quelle est la source qui donne l'information la plus précise. En d'autres termes, quelle confiance pouvons nous avoir envers les différentes sources ? Pour répondre à cette question il est nécessaire de définir des mesures de confiance au niveau local (pour le pixel considéré) ainsi qu'au niveau global (pour chaque source). De plus l'opérateur de fusion doit pouvoir adapter son comportement (conjonctif, disjonctif...) selon l'information de confiance.

La solution proposée dans cet article consiste à construire un ensemble flou avec les résultats de chaque source et de calculer le degré de flou de cet ensemble. Nous supposons qu'un degré de flou élevé correspond à une faible fiabilité. La confiance globale est définie pour tous les résultats de chaque source, elle représente la fiabilité d'une source pour une classe donnée par rapport aux autres sources. L'opérateur de fusion utilisé est issu de la logique floue [5, 6].

Le plan de cet article est le suivant : dans la deuxième section nous présentons brièvement les ensembles flous et la théorie des possibilités. Le problème de la fusion d'informations imparfaites et conflictuelles est étudié dans la troisième section. L'approche proposée est détaillée et les résultats sont donnés dans la section 4. Enfin dans la dernière section, nous discutons des apports et des perspectives offertes par cette étude.

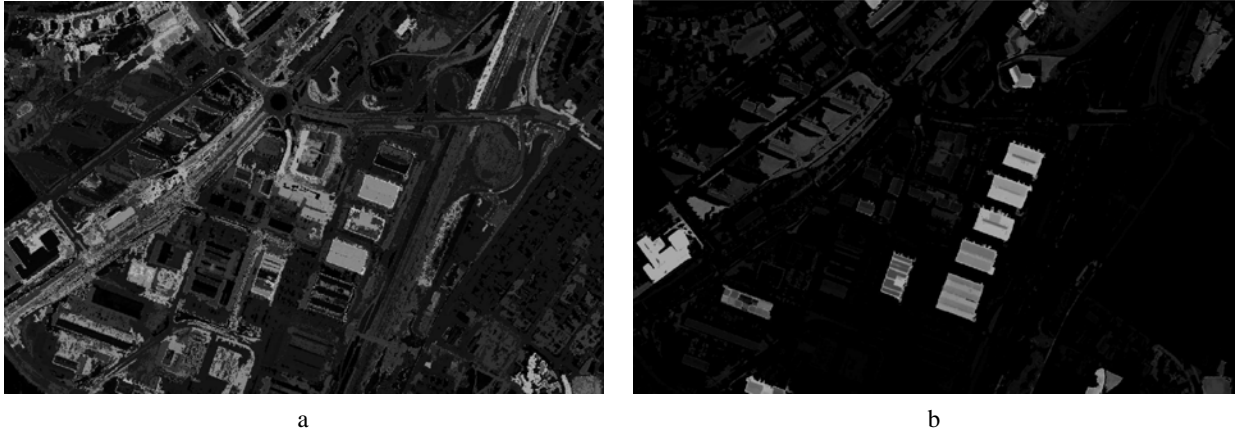


FIG. 1 – Images d'appartenance : *a* et *b* représentent les images d'appartenance à la classe *grands bâtiments* produites respectivement par le réseau de neurones [2] et le classifieur flou [3] pour l'image originale présentée sur la figure 3(a).

## 2 Ensemble flou et représentation des données

### 2.1 Ensemble flou

Les ensembles flous ont été introduits par L.Zadeh [7] comme une extension des ensembles classiques. La théorie des ensembles flous permet l'appartenance graduelle d'un élément à un ensemble. Si on note  $U$  l'espace de référence,  $x$  un élément de  $U$  et  $X$  un sous ensemble flou de  $U$ , l'appartenance d'un élément  $x$  à  $X$  est définie par la fonction d'appartenance  $\mu_X$  de  $X$  :

$$\mu_x : U \rightarrow [0, 1] \quad (1)$$

Une caractéristique importante des ensembles flous est leur *degré de flou*. Ce degré représente l'éloignement de l'ensemble flou à un ensemble binaire classique. Plus la fonction d'appartenance aura des valeurs exclusivement proches de 0 ou 1, plus le degré de flou de l'ensemble correspondant sera faible. Ebanks dans [8], propose que les mesures de flou satisfassent les cinq propriétés suivantes :

1.  $\forall \mu \in U, f(\mu) = 0 \Leftrightarrow \mu$  est un ensemble vide
2.  $f(\mu)$  est maximum si et seulement si  $\forall x \in U, \mu(x) = 0.5$
3.  $\forall (\mu, \nu) \in U^2, f(\mu) \geq f(\nu)$  si  $\forall x \in U$ 

$$\begin{cases} \nu(x) \geq \mu(x) & \text{si } \mu(x) \geq 0.5 \\ \nu(x) \leq \mu(x) & \text{si } \mu(x) \leq 0.5 \end{cases}$$
4.  $\forall \mu \in U, f(\mu) = f(\bar{\mu})$ . Un ensemble flou et son complémentaire ont le même degré de flou
5.  $\forall (\mu, \nu) \in U^2, f(\mu \cup \nu) + f(\mu \cap \nu) = f(\mu) + f(\nu)$

Bezdeck dans [9] a défini une classe de fonctions paramétrables satisfaisant ces cinq propriétés : la *Multiplicative Class*.

$$H_*(\mu_X) = K \sum_{i=1}^n g(\mu_X(x_i)), K \in R^+ \quad (2)$$

avec  $g(\mu)$  défini de la manière suivante :

$$\begin{cases} \hat{g}(t) &= h(t)h(1-t) \\ g(t) &= \hat{g}(t) - \min_{0 \leq t \leq 1} \hat{g}(t) \end{cases} \quad (3)$$

où  $h$  est une fonction croissante concave sur  $[0,1]$ . En posant  $h(t) = t^\alpha$  avec  $0 < \alpha < 1$ , on peut définir une famille de mesures de flou appelée  $\alpha$  - *Quadratic entropy*. Le paramètre  $\alpha$  permet de moduler l'influence des valeurs de la fonction d'appartenance.

$$H_{\alpha QE}(\alpha, \mu_X) = \frac{1}{n2^{-2\alpha}} \sum_{i=1}^n \mu_X(x_i)^\alpha (1 - \mu_X(x_i))^\alpha \quad (4)$$

La sensibilité de cette mesure peut être ajustée à l'aide du paramètre  $\alpha$ . Pour une valeur proche de zéro, la sensibilité sera faible et cette mesure sera insensible aux différences de degré de flou entre deux ensembles. Inversement, pour une valeur trop proche de un, la sensibilité sera trop forte.

### 2.2 Représentation des classes

Pour un pixel donné  $x$ , on représente les résultats fournis par le classifieur  $i$  par l'ensemble :

$$\{\mu_i^1(x), \mu_i^2(x), \mu_i^3(x), \dots, \mu_i^j(x), \dots, \mu_i^n(x)\} \quad (5)$$

où  $n$  est le nombre de classes considéré et  $\mu_i^j(x) \in [0, 1]$  représente l'appartenance du pixel  $x$  à la classe  $j$  selon le classifieur  $i$ . Ces ensembles sont assimilés à des ensembles flous. Pour chaque pixel, les entrées du processus de fusion sont les  $m$  ensembles flous,  $m$  étant le nombre de classifieur.

Ces ensembles peuvent être visualisés en recadrant les valeurs d'appartenance entre 0 et 255. Les figure 1(a) et 1.(b) représentent les valeurs d'appartenance à la classe *grands bâtiments* calculées avec deux classifieurs différents.

## 3 Fusion d'information

Le but de la fusion de données pour la classification est de sélectionner l'information pertinente provenant de plusieurs sources. On suppose que lors d'un conflit, au moins une source donne le bon résultat. Pour notre application les sources seront les différents classifieurs.

Typiquement, il existe trois modes de combinaison : conjonctif, disjonctif et intermédiaire. Le mode conjonctif est généralement utilisé lorsque les sources sont de fiabilité égale. L'opérateur *min* est un exemple d'une telle combinaison. Le mode

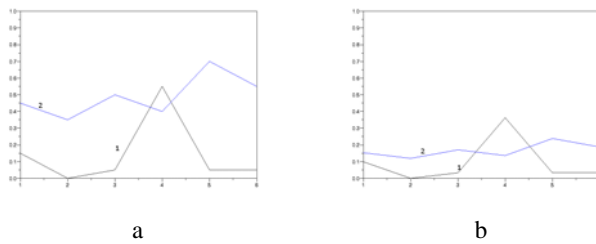


FIG. 2 – Effet de la normalisation. La figure a montre deux ensembles flous de degré de flou différent ( $f_{m1} = 0.51$ ,  $f_{m2} = 0.97$ ,  $w_1 = 0.65$ ,  $w_2 = 0.35$ ). b montre les effets de la normalisation. L'influence du second classifieur est réduite par la normalisation.

disjonctif est généralement utilisé lorsque les sources sont de fiabilités différentes. L'opérateur *max* est un exemple d'un tel mode. Ces deux modes de combinaison ne gèrent pas le cas de sources en conflit, de plus on ne peut pas ajouter d'informations *a priori* sur la fiabilité des sources.

L'action des mesures de fiabilité visera à éliminer l'information peu fiable. En pratique, il faut d'abord identifier ces valeurs peu fiables (c'est le rôle des mesures de fiabilité) puis ne retenir que l'information pertinente (c'est le rôle de l'opérateur de fusion).

Nous allons maintenant expliquer comment sont estimées les fiabilités locale et globale puis comment l'opérateur de fusion prend en compte ces informations.

### 3.1 Mesure de fiabilité

L'ensemble des informations fournies par une source pour un pixel est représenté sous la forme d'un ensemble flou. Nous supposons que lorsqu'une source fournit un résultat *sûr*, cet ensemble sera proche d'un ensemble binaire (voir figure 2). Au contraire lorsque la source est *indécise* aucune possibilité ne devrait être *significativement* plus grande que les autres. En terme de degré de flou, l'ensemble construit avec une source sûre aura un faible degré contrairement à un ensemble construit avec une source indécise. A l'aide des degrés de flou on définit des facteurs de normalisation :

$$w_i = \frac{\sum_{k=0, k \neq i}^n H_{\alpha QE}(\alpha, k)}{(n-1) \sum_{k=0}^n H_{\alpha QE}(\alpha, k)} \quad (6)$$

où  $H_{\alpha QE}(\alpha, k)$  est le degré de flou de la source  $k$ . Lorsque le degré de flou de la source  $i$  est faible,  $w_i$  sera proche de 1, la normalisation n'aura que peu d'influence sur les valeurs de la source  $i$ . En revanche lorsque le degré de flou est élevé, la valeur de  $w_i$  sera faible et les valeurs de la source seront diminuées. Un exemple de cette normalisation est donnée figure 2. Le paramètre  $\alpha$  est choisi égal à 0.5, cette valeur assure une bonne sensibilité quels que soient les ensembles flous.

La fiabilité globale est définie pour chaque classifieur et pour chaque classe par le paramètre  $f_i^j$ . Cette mesure est déterminée par une étude des résultats fournis par les classifieurs utilisés séparément. On compare le pourcentage de pixels bien traités par classe et la préférence est donnée aux classifieurs obtenant

TAB. 1 – Résultats de la classification de l'image Ikonos

	Réseau de neurones	Logique floue	Fusion
Grands bâtiments %	26.2	46.7	47.4
Maisons individuelles %	33.4	67.8	67.4
Grandes routes %	59.1	58.8	43.7
Petites routes %	55.6	9.8	55.7
Espaces verts %	30.9	52.2	60.9
Ombres %	32.7	83.8	86.6
Global %	40.3	52.1	59.1

les meilleurs résultats pour la classe considérée. Si pour une classe  $j$ , l'utilisateur considère que les résultats fournis par le classifieur  $i$  sont satisfaisants, le paramètre  $f_i^j$  est mis à 1. Autrement, le paramètre est mis à 0. Cet indice de fiabilité étant binaire, on suppose que pour chaque classe au moins un classifieur fournit des résultats satisfaisants.

### 3.2 Opérateur de fusion

L'opérateur proposé est issu de la logique floue [5, 6]. Il permet d'utiliser l'information *a priori* sur la fiabilité des sources :

$$\mu_f^j(x) = \max \left\{ \min(w_i \mu_i^j(x), f_i^j(x)), i \in [1, m] \right\} \quad (7)$$

où  $f_i^j$  est la confiance globale envers le classifieur  $i$  pour la classe  $j$ ,  $w_i$  est le facteur de normalisation définie dans (6) et  $\mu_i^j(x)$  l'ensemble flou décrit dans (5). Cet opérateur assure que pour chaque pixel, seules les informations pertinentes sont prises en compte.

## 4 Résultats expérimentaux

Nous décrivons dans cette partie le processus de fusion appliqué à la classification de zones urbaines en imagerie satellitaire. Lors d'une première étape, les classifieurs sont appliqués séparément, sans prise de décision. Ensuite les résultats fournis pour chaque pixel sont fusionnés suivant la règle (7). Chaque pixel est assigné à la classe possédant l'appartenance la plus grande après la fusion. La méthode proposée a été testée sur une image panchromatique Ikonos haute résolution. Cette image est de taille 976 par 640 pixels et a une résolution spatiale de 1 mètre (voir figure 3(a)). Pour cette image, six classes ont été définies : grands bâtiments, maisons individuelles, grandes routes, petites routes, espaces verts et ombres.

Dans cette expérience, deux classifieurs ont été utilisés. Le premier utilisant un réseau de neurones, présenté dans [2] et le second utilisant un algorithme basé sur la logique possibiliste décrit dans [3]. Les résultats<sup>1</sup> fournis par les classifieurs utilisés séparément sont donnés dans le tableau 1.

À la lecture de ces résultats, on peut noter le classifieur basé sur la logique floue donne globalement de meilleurs résultats. Néanmoins pour les classes « petites et grandes routes » c'est le réseau de neurones qui donne de meilleurs résultats. L'objectif de la fusion est de tirer bénéfice de ces deux classifieurs au comportement complémentaire pour améliorer la pertinence de la classification.

<sup>1</sup>Ces résultats sont calculés à partir d'une image manuellement référencée.

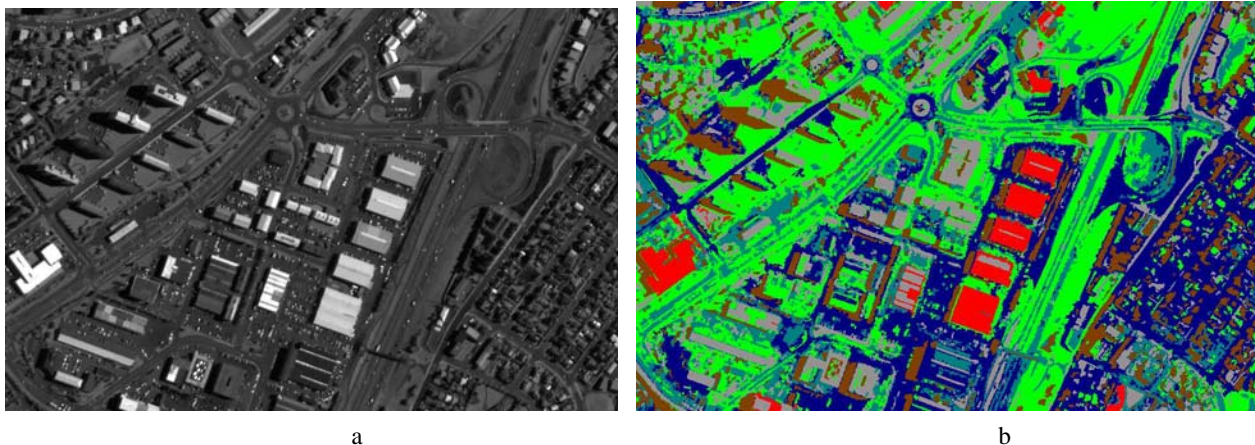


FIG. 3 – a. Image Ikonos de Reykjavik, Islande. b. Résultat de la classification. Rouge = grands bâtiments, gris = maisons individuelles, bleu foncé = petites routes, bleu clair = grandes routes, verts = espaces verts et marron = ombres.

TAB. 2 – Indices de confiance

	NN	FL
Grands bâtiments	0	1
Maisons individuelles	0	1
Grandes routes	1	1
Petites routes	1	0
Espaces verts	0	1
Ombres	0	1

Les confiances locales sont calculées à l'aide de l'opérateur (6) dont le paramètre  $\alpha$  est choisi égal à 0.5. Les indices de confiance globale sont donnés dans le tableau 2. Les résultats de la fusion sont données dans le tableau 1.

Le pourcentage de pixels bien classés augmente de 52.1% à 59.1% grâce à la fusion. Les grands bâtiments et les maisons individuelles sont aussi bien classés après qu'avant la fusion. En revanche, le taux de bonne classification des petites routes passe de 9.8% à 55.7% grâce à l'utilisation des informations fournies par le réseau de neurones. Cependant, le pourcentage de pixels grandes routes bien classé diminue de 59.1% à 43.7%. L'image classifiée est donnée figure 3(b).

## 5 Conclusion

Une méthode de fusion de données a été présentée. Grâce à une règle de combinaison floue, elle permet d'utiliser la complémentarité des informations fournies par les sources. Pour contrôler le processus de fusion, deux indices de confiance ont été définis. Le premier indice est défini de manière globale pour chaque classifieur et pour chaque classe et n'évolue pas au cours de la fusion. Le second indice estime la fiabilité des résultats fournis par les classifieurs calculée pour chaque pixel.

Les expériences menées avec deux sources ont permis d'améliorer les résultats de la classification.

Le caractère général du schéma de fusion proposé permet aisément l'extension de son utilisation au cas  $n$ -sources. De plus des algorithmes spécialisés, tels que des détecteurs de routes, peuvent être intégrés lors de la fusion. Pour des données multi spectrales, cette méthode permet l'utilisation d'algorithmes n'exploitant pas le caractère multi-spectral des images. Ces algorithmes peuvent être appliqués sur chaque bande et ensuite les

résultats obtenus à partir de chaque bande peuvent ainsi être fusionnés.

Une des limitations de cette méthode est l'utilisation d'indice de confiance globale binaire. L'orientation de nos futurs travaux visera à intégrer des indices de confiances flous et à remplacer les opérateurs *max* et *min* par des *T-conormes* et des *T-normes* respectivement moins indulgentes et moins sévères.

## Références

- [1] D. A. Landgrebe. *Signal Theory Methods in Multispectral Remote Sensing*. John Wiley and Sons, New Jersey, 2003.
- [2] J.A. Benediktsson, M. Pesaresi, and K. Arnason. Classification and feature extraction for remote sensing images from urban areas based on morphological transformations. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 41(9):1940–1949, September 2003.
- [3] J. Chanussot, J. A. Benediktsson, and M. Vincent. Classification of remote sensing images from urban areas using a fuzzy model. In *Geoscience and Remote Sensing Symposium*, volume 1, pages 556 – 559. IGARSS '04. Proceedings, September 2004.
- [4] F. Tupin, I. Bloch, and H. Maitre. A first step toward automatic interpretation of sar images using evidential fusion of several structure detectors. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 37(3):1327–1343, May 1999.
- [5] H. Prade and D. Dubois. Possibility theory in information fusion. *Proceedings of the Third International Conference on Information Fusion*, 2000.
- [6] I. Bloch. *Fusion d'informations en traitement du signal et des images*. GERMES LAVOISIER, 11 rue Lavosier, 75008 Paris, 2003.
- [7] Zadeh L.A. Fuzzy sets. *Information and Control*, pages 338–353, 1965.
- [8] B R Ebanks. On measures of fuzziness and their representations. *J.Math. Analysis and Application*, 94:421–427, 1983.
- [9] C Bezdek. Measuring fuzzy uncertainty. *IEEE Transaction On Fuzzy Systems*, pages 107–118, 1994.

# DETECTION DE FEUX DE FORET A PARTIR D'IMAGES SATELLITAIRES IRT PAR ANALYSE STATISTIQUE D'EVENEMENTS RARES

Florent LAFARGE<sup>1</sup>, Xavier DESCOMBES<sup>1</sup>, Josiane ZERUBIA<sup>1</sup>, Sandrine MATHIEU-MARNI<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Projet Ariana, commun INRIA - I3S

2004 route des Lucioles - BP93, 06902 Sophia Antipolis, Cedex France

<sup>2</sup>Alcatel Space

100, boulevard du Midi - BP99, 06156 Cannes La Bocca Cedex France

Florent.Lafarge@inria.fr, Xavier.Descombes@inria.fr, Josiane.Zerubia@inria.fr,  
sandrine.marni@space.alcatel.fr

**Résumé** – Le canal IRT (InfraRouge Thermique) contient des longueurs d'onde particulièrement sensibles à l'émission de chaleur. Les feux de forêt sont alors caractérisés par des pics d'intensité sur ce type d'images. Nous proposons une méthode automatique de détection de feux de forêt fondée sur une analyse statistique des pics d'intensité de l'image. Pour ce faire, nous modélisons dans un premier temps l'image par une réalisation d'un champ gaussien, champ ayant des propriétés particulièrement intéressantes. Les zones de feux, minoritaires et de fortes intensités sont considérées comme des éléments étrangers à ce champ : ce sont des événements rares. Ensuite, par une analyse statistique, nous déterminons un jeu de probabilités définissant, pour une zone donnée de l'image, un degré d'appartenance au champ gaussien, et par complémentarité aux zones potentiellement en feux.

**Abstract** – The TIR (Thermal InfraRed) channel has a wavelength sensitive to the emission of heat : the higher the heat of an area, the higher the intensity of the corresponding pixel of the image. Then a forest fire can be characterized by a peak intensity in TIR images. We present an automatic classification method based on Gaussian field theory which allows forest fire detection from TIR images. First we model the image as a realization of a Gaussian field. The fire areas, which have high intensity and are supposed to be a minority, are considered as foreign elements of that field : they are rare events. Then we determine by a statistical analysis a set of probabilities which characterizes the degree of belonging to the Gaussian field of a small area of the image. So, we estimate the probability that the considered area is a potential fire.

## 1 Introduction

Les dégâts résultant des incendies de forêts présentent des conséquences très néfastes sur l'environnement. Aujourd'hui, les espoirs se concentrent sur les technologies spatiales apportées par les satellites. L'enjeu est notamment de détecter de façon précoce les feux de forêt grâce à l'imagerie satellitaire. Dans ce domaine, les méthodes de détection existantes sont principalement fondées sur des analyses radiométriques d'images thermiques et moyen infrarouge. Des algorithmes tels que le CFDA ("Canadian Fire Detection Algorithm") fondé sur les travaux de Flannigan et Vonder Haar [1], permettent, par des jeux de tests sur des mesures et des seuillages, d'obtenir de bons résultats quant à la détection des feux. Cependant, la plupart de ces méthodes nécessitent des connaissances a priori sur les capteurs employés, les caractéristiques du satellite ou bien encore les spécificités du terrain observé.

Nous proposons une nouvelle méthode de détection de feux de forêt qui n'utilise pas ces connaissances a priori. Cette méthode permet, en effet, de détecter les feux de manière automatique à partir d'images thermiques moyenne résolution. La seule contrainte de cette méthode réside dans l'hypothèse suivante : les feux doivent être des événements rares dans l'image (c'est-à-dire très minoritaires en terme de pixels : cette contrainte signifie, entre autre, que la résolution de l'image ne doit pas être

très fine). Cette méthode est fondée sur la théorie des champs aléatoires. Nous modélisons les images par des réalisations de champs gaussiens afin d'en extraire, par une analyse statistique, les éléments étrangers pouvant correspondre aux feux de forêt. Une approche comparable a été développée en IRM fonctionnelle par K.J. Friston, K.J. Worsley et J.B. Poline. Nous nous sommes appuyés sur leurs travaux en imagerie médicale, notamment sur [2] et [3] pour proposer cette nouvelle technique de détection de feu.

Les images étudiées proviennent du satellite BIRD, fournies par l'Agence Spatiale Allemande (DLR) à Alcatel Space. Elles représentent le Portugal durant le mois de mai 2003 à une résolution de 300 mètres.

## 2 Méthode proposée

### 2.1 Champs aléatoires

Dans cette partie, nous rappelons quelques principes de la théorie des champs aléatoires. Nous nous intéressons, en particulier, aux champs gaussiens. Pour des informations complémentaires, le lecteur est invité à consulter [4] et [5].

**Définition 1** Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé complet et  $\mathcal{T}$  un espace topologique. Un **champ aléatoire** à valeurs

réelles est une application mesurable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^T$ . Si  $T \subset \mathbb{R}^N, N \in \mathbb{N}$ ,  $X$  est appelée champs aléatoire de dimension  $N$ .

De cette définition, nous obtenons un ensemble de mesures  $F_{t_1, \dots, t_n}$  définies par  $F_{t_1, \dots, t_n}(B) = P((X(t_1), \dots, X(t_n)) \in B)$  pour tout  $B \in \mathcal{B}^n$ , où  $\mathcal{B}$  est la tribu borélienne engendrée par les ouverts de  $\mathbb{R}$ . L'ensemble de toutes ces mesures est appelé la famille des  $\mathcal{F}_n$  distributions.

Un champ aléatoire est gaussien si ses  $\mathcal{F}_n$  distributions sont des vecteurs gaussiens.

Un champ aléatoire  $X(t)$  de dimension  $N$  est dit **homogène** si  $\forall \tau, t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}^N$ , le vecteur  $(X(t_1), \dots, X(t_k))$  a la même loi que le vecteur  $(X(t_1 + \tau), \dots, X(t_k + \tau))$ .

**Définition 2** Soit  $F(t) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.  $\forall u \in \mathbb{R}$  et  $S \subset \mathbb{R}^N$ , on définit l'ensemble d'excursion de la fonction  $F$  au dessus du seuil  $u$  dans  $S$  par :

$$A_u(F, S) = \{t \in S : F(t) \geq u\}$$

En terme d'imagerie,  $A_u$  représente l'ensemble des "clusters" d'une image au seuil  $u$ , c'est-à-dire l'ensemble des surfaces définies, dans l'espace 3D, par l'intersection entre la silhouette de l'image (i.e. la surface dont la cote correspond à l'intensité des pixels de l'image) et le plan de cote  $u$ . L'expression (1), établie par Adler [4], permet d'estimer le nombre  $m_u$  d'ensembles connexes de l'ensemble d'excursion  $A_u$  (i.e. le nombre de "clusters" au seuil  $u$ ) d'un champ gaussien homogène de dimension 2, centré et réduit.

$$E[m_u] = S(2\pi)^{\frac{3}{2}} |\Lambda|^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \quad (1)$$

où  $S$  représente le nombre de pixels de l'image et  $\Lambda$ , la matrice de covariance des dérivées de l'image.

Pour que cette formule soit applicable, l'image doit vérifier deux conditions principales :

- Les dérivées partielles jusqu'au second ordre du champ aléatoire doivent être continues, ce qui signifie, en terme d'imagerie, que l'image doit avoir une certaine homogénéité dans l'intensité de ses pixels (i.e. un certain lissage) et notamment qu'elle ne doit pas être trop bruitée.
- Pour qu'une image soit modélisable par une réalisation d'un champ gaussien homogène, il faut que la distribution des intensités des pixels de cette image suive une loi normale (cela revient à avoir une distribution normale de l'histogramme).

## 2.2 Prétraitements

Les données utilisées, c'est-à-dire les images TIR des feux, doivent subir une série de prétraitements afin que l'équation (1) soit applicable. En effet, elles doivent pouvoir être modélisées par des réalisations de champs gaussiens : leur distribution doit être gaussienne.

Les images satellitaires possèdent, bien souvent, plusieurs classes dominantes (mer, terre, nuages,...), ce qui rend leur distribution multimodale. La première étape consiste à rendre la distribution unimodale. Il faut donc séparer les différents modes de l'image pour n'en conserver qu'un : celui le plus proche de la modélisation des feux de forêt, c'est-à-dire celui qui aura l'intensité moyenne la plus élevée. Pour ce faire, nous utilisons

l'algorithme du "K-means" à deux classes de manière itérée. Comme nous souhaitons conserver le mode de l'image qui a la plus forte intensité moyenne, nous allons éliminer, par un principe semblable à la dichotomie, les classes de moyenne d'intensité les plus faibles. A chaque itération, nous séparons l'image en deux classes en utilisant l'algorithme du "K-means" à deux classes et nous gardons la classe de moyenne d'intensité la plus élevée. Nous testons alors si la classe conservée suit une distribution unimodale par un test sur le kurtosis [5].

Nous réalisons ensuite sur la sous-image obtenue une fermeture, puis une ouverture par morphologie mathématique [6], afin d'améliorer sa connexité, c'est-à-dire en faisant disparaître les petits éléments isolés du masque et en rebouchant les trous présents dans le masque. Cette opération nous permet également d'améliorer la normalité de la distribution : nous récupérons, en effet, la queue de la distribution associée à la classe d'intérêt.

La dernière étape consiste à rendre la distribution parfaitement gaussienne par une spécification d'histogramme. Pour plus d'information sur cette opération, le lecteur est invité à consulter [7]. Enfin, nous centrons et réduisons la distribution gaussienne obtenue.

## 2.3 Etude statistique sur l'appartenance d'un "cluster" à un champ gaussien

Les feux de forêt correspondent aux pixels de très forte intensité. Ainsi, suite aux prétraitements de la partie précédente, il est légitime de considérer l'image comme l'union d'une réalisation d'un champ gaussien et d'un ensemble de points étranger à ce champ : les feux de forêt. La réalisation du champ gaussien est un ensemble de pixels très majoritaire, que nous pouvons considérer comme le "fond de l'image". Les feux de forêt sont, eux, représentés par des ensembles de pixels de taille relativement petite par rapport aux dimensions de l'image ; ils sont surtout très rares (hypothèse  $\mathcal{H}$ ).

Nous considérons, par ailleurs, que ces pixels rares ayant une forte intensité ne peuvent représenter que des feux de forêt, cela signifie que les seuls événements naturels ou artificiels pouvant expliquer une intensité thermique très élevée sur la surface terrestre imagée sont forcément un feu de forêt (hypothèse  $\mathcal{H}$ ). Nous allons, dans ce cas, pouvoir utiliser les résultats de la théorie des champs aléatoires, et particulièrement l'équation (1) afin d'établir des lois probabilistes sur l'appartenance d'un cluster à un champ gaussien. Nous pourrions alors estimer si un ensemble connexe de pixels appartient au fond de l'image ou, par négation, appartient à l'ensemble des pixels représentant les feux de forêt.

### 2.3.1 Pics d'intensité

Dans un premier temps, nous estimons l'appartenance d'un "cluster" à une réalisation d'un champ gaussien en fonction de l'intensité maximale des pixels de ce "cluster".

La probabilité qu'un "cluster", pris au seuil  $u$  et ayant un pic d'intensité égal à  $u + H_0$  appartienne à la réalisation d'un champ gaussien  $G$  est estimée par le quotient de l'espérance du nombre de "clusters" au seuil  $u + H_0$  divisée par l'espérance du nombre de "clusters" au seuil  $u$ , espérances données par



l'équation (1). En notant  $C_u^{H_0}$ , un "cluster" pris au seuil  $u$  et ayant un pic d'intensité égal à  $u + H_0$  nous avons

$$P(C_u^{H_0} \in G) = \frac{E[m_u + H_0]}{E[m_u]} = (1 + \frac{H_0}{u})e^{-(uH_0 + \frac{H_0^2}{2})} \quad (2)$$

Nous notons  $P_H$  cette probabilité. Il est intéressant d'observer le comportement de  $P_H$  en fonction du seuil  $u$  connaissant la valeur du pic d'intensité  $u + H_0$  : cette fonction admet un minimum unique. Le seuil  $u^*$  correspondant permettra de fixer un seuil de référence que l'on utilisera ultérieurement.

### 2.3.2 Extension spatiale

Dans un deuxième temps, nous estimons l'appartenance d'un "cluster" à une réalisation d'un champ gaussien en fonction de la surface de ce "cluster".

Soient  $N_u$  le nombre de pixels d'intensité supérieure à  $u$  et  $n_u$  le nombre de pixels d'un "cluster" au seuil  $u$ .

Nous cherchons à estimer la probabilité qu'un "cluster" pris à un seuil  $u$  ait une certaine surface  $n_0$ , c'est-à-dire à établir une loi sur  $n_u$ .

Nosko a établi expérimentalement que  $n_u$  suivait une distribution exponentielle [8]. Il nous suffit donc d'estimer son paramètre, c'est-à-dire d'estimer l'inverse de l'espérance de  $n_u$ . On utilise pour cela les lois de  $N_u$  et  $m_u$  à travers l'expression suivante :

$$E[n_u] = \frac{E[N_u]}{E[m_u]} \quad (3)$$

La distribution des pixels suivant une loi normale, l'espérance de  $N_u$  est donnée par :

$$E[N_u] = S \int_u^\infty (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = S \cdot \Phi(-u) \quad (4)$$

L'espérance de  $n_u$  est, elle, donnée par l'équation (1). Nous en déduisons une expression de l'espérance de  $n_u$  par :

$$E[n_u] = \frac{E[N_u]}{E[m_u]} = \frac{\Phi(-u)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} |\Lambda|^{\frac{1}{2}} \exp(-\frac{u^2}{2})} \quad (5)$$

De la même façon que dans la partie précédente où nous connaissions la valeur du pic d'intensité des "clusters", nous allons pouvoir, à partir de la loi de  $n_u$ , estimer la probabilité d'appartenance d'un "cluster"  $C_u^{S_0}$  pris au seuil  $u$  et ayant une surface  $S_0$  à une réalisation d'un champ gaussien  $G$ . Nous avons en effet :

$$P(C_u^{S_0} \in G) = P(n_u \geq S_0) = e^{-\frac{S_0}{E[n_u]}} = e^{-\frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}} |\Lambda|^{\frac{1}{2}} S_0 \exp(-\frac{u^2}{2})}{\Phi(-u)}} \quad (6)$$

Nous appelons  $P_S$  cette probabilité.

### 2.3.3 Seuillage contextuel

Les équations (2) et (6) permettent d'estimer la probabilité d'appartenance d'un "cluster" à une réalisation d'un champ gaussien de deux manières différentes. Il s'agit alors d'utiliser ces deux estimations afin de dégager une loi de décision qui soit pertinente et robuste.

Cette loi de décision consiste à *accepter le "cluster" comme élément étranger à une réalisation du champ gaussien si la probabilité  $P_H$  est inférieure à une certaine probabilité limite  $p_l$*

si  $P_H$  est supérieure à  $p_l$  et  $P_S$  est inférieure à  $p_l$

La probabilité limite  $p_l$  s'apparente alors à une "p-value", c'est-à-dire à la probabilité de commettre une erreur dans notre estimation. Le résultat sera donc d'autant plus robuste que  $p_l$  sera faible. Par cette loi de décision, nous testons la non-appartenance d'un "cluster" à un champ gaussien par la probabilité  $P_H$  ; si le test est rejeté, nous accordons une deuxième chance en testant cette fois-ci par la probabilité  $P_S$ .

Cette loi de décision permet de réaliser des analyses locales sur les "clusters". Il nous faut maintenant proposer un algorithme général sur toute une image. Pour ce faire, nous définissons une famille de seuils  $U = (u_{-n}, \dots, u_0, \dots, u_m)$ , fixée relativement au seuil de référence  $u$  décrit dans la partie 2.3.1. L'algorithme général consiste alors à :

1. fixer la probabilité limite  $p_l$  de la loi de décision
2. établir l'ensemble des "clusters" pris au seuil  $u$
3. **pour chacun de ces "clusters"**,
  - étendre le "cluster" à une famille de "clusters" relativement à l'ensemble de seuils  $U$ .
  - pour chaque élément de cette famille, établir  $P_H$
4. garder les "clusters" acceptés par la loi de décision.

## 3 Résultats

Les "clusters" acceptés ont été répertoriés en trois catégories : en jaune, les "clusters" acceptés avec une probabilité limite  $p_l = 0.01$  ; en bleu,  $p_l = 0.05$  et enfin en rouge,  $p_l = 0.1$ . Cela signifie que les zones en jaune, par exemple, n'appartiennent pas au "fond de l'image" et ce avec un degré de certitude de 99%. En tenant compte de l'hypothèse ( $H_1$ ), nous pouvons affirmer que ces zones sont des feux de forêt à 99%.

Les résultats obtenus sont très satisfaisants (figure 1). Le taux de détection des feux est supérieur à 85% et le taux de fausses alarmes est nul avec une probabilité limite  $p_l = 0.05$ . Sur la figure 1-a, le résultat obtenu apparaît très correct comparativement à la vérité de terrain associée, fournie par Alcatel Space. En effet, cette dernière fait état de 14 feux répartis dans le centre du Portugal. Sur ces 14 feux, nous en détectons 12 (11 feux détectés avec  $p_l = 0.01$  + 1 feu détecté avec  $p_l = 0.05$ ). Par ailleurs, l'algorithme n'a pas détecté de feux qui n'existent pas sur la vérité de terrain : le nombre de fausses alarmes est nul. Enfin, en terme de temps de calcul, l'algorithme a mis 136 secondes sur un P4-2Ghz pour une image  $4000 \times 1000$  pixels.

## 4 Conclusion

La méthode présentée permet d'extraire, de manière automatique, les feux de forêt sur des images satellitaires IRT. Elle fournit de très bons résultats concernant aussi bien le taux de détection des feux que le taux de fausses alarmes. Le principal avantage réside dans l'utilisation d'une probabilité limite  $p_l$ , agissant comme un coefficient de confiance sur le résultat. Il est envisagé de compléter, dans le futur, cette méthode par une étude topographique des pics d'intensité, dans le but de distinguer les zones en feux et les zones brûlées encore chaudes. Cette distinction nous permettrait de déterminer le sens de propagation des feux de forêt.



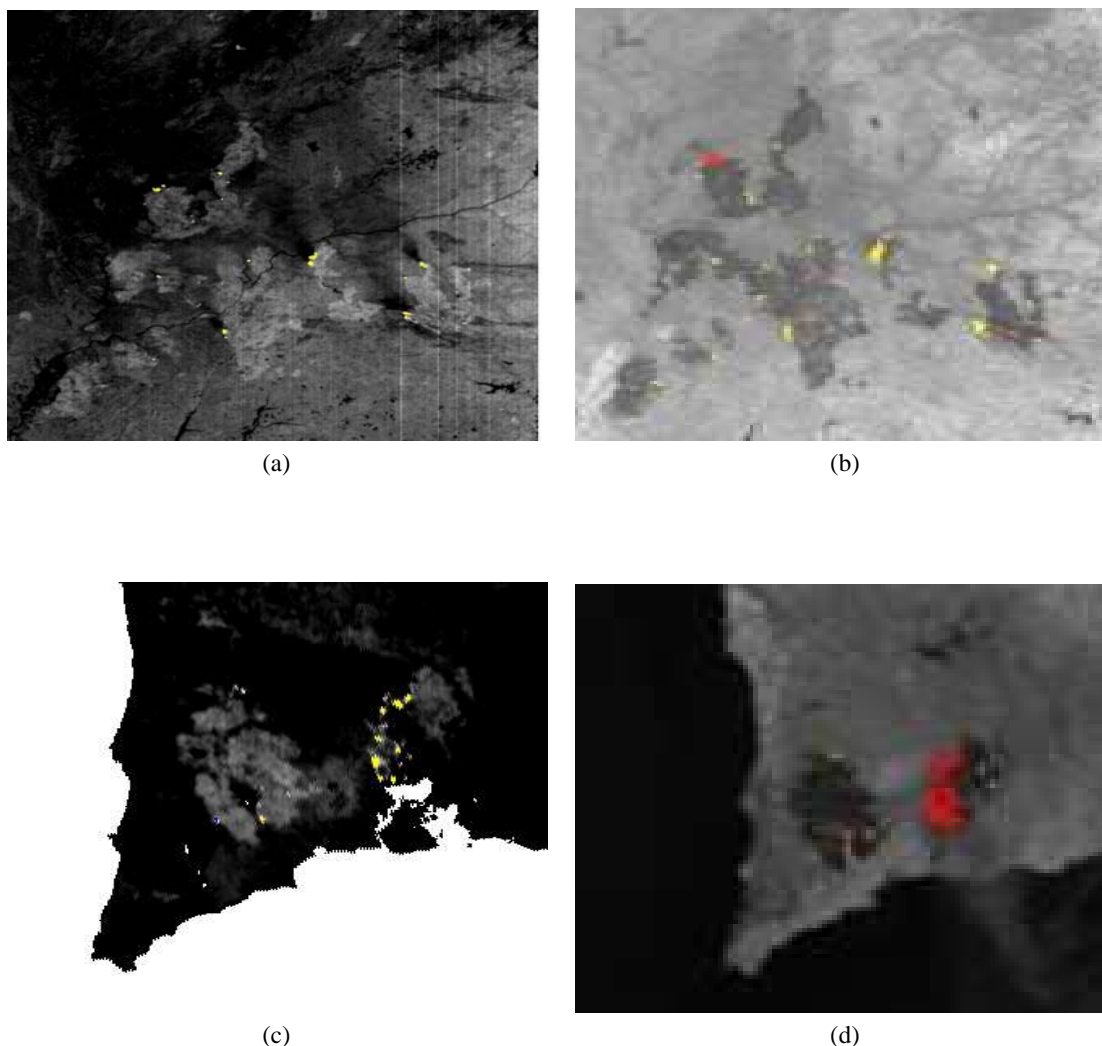


FIG. 1: (a) : Extrait du résultat obtenu sur l'image BIRD du 04/05/2003 en canal thermique. (c) : Extrait du résultat obtenu sur l'image BIRD du 14/05/2003 en canal thermique. (b) et (d) : Vérités de terrain associées

## Remerciements

Les trois premiers auteurs remercient Alcatel Space pour le soutien financier de ce travail, ainsi que l'Agence Spatiale Allemande (DLR) pour la fourniture des données BIRD.

## Références

- [1] M. Flannigan et T. Vonder Haar, « Forest fire monitoring using NOAA satellite AVHRR », *Canadian Journal of Forest Research*, vol. 16, 1986, p. 975–982.
- [2] K.J. Friston, K.J. Worsley, R.S.J. Frackowiak, J.C. Mazziotta, et A.C. Evans, « Assessing the significance of focal activations using their spatial extent », *Hum. Brain Map.*, vol. 1, 1994, p. 214–220.
- [3] J-B. Poline, K.J. Worsley, A.C. Evans, et K.J. Friston, « Combining spatial extent and peak intensity to test for activations in functional imaging », *Neuroimage*, vol. 5, 1997, p. 83–96.
- [4] R.J. Adler, *The Geometry of Random Fields*. Wiley, 1981.
- [5] F. Lafarge, X. Descombes, et J. Zerubia, « Détection de feux de forêt par analyse statistique de la radiométrie d'images satellitaires ». Rapport de recherche 5369, INRIA, nov 2004.
- [6] P. Soille, *Morphological Image Analysis*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2nd édition, 2003.
- [7] J.P. Cocquerez et S. Philipp, éditeurs, *Analyse d'images : filtrage et segmentation*. Masson, 1995.
- [8] V.P. Nosko, « Local structure of Gaussian random fields in the vicinity of high level shines », *Soviet Mathematics : Doklady*, vol. 10, 1969, p. 1481–1484.

# Variational approach to interpolate and correct biases in stereo correlation

Gabriele FACCIOLO<sup>1</sup>, Andrés ALMANSA<sup>1</sup>, Alvaro PARDO<sup>2</sup>

<sup>1</sup>InCo, Facultad de Ingenieria, Universidad de la República  
Julio Herrera y Reissig 565, C.C. 30, Montevideo, Uruguay

<sup>2</sup>IIE, Facultad de Ingenieria, Universidad de la República  
Julio Herrera y Reissig 565, C.C. 30, Montevideo, Uruguay

facciolo@fing.edu.uy, almansa@fing.edu.uy, apardo@fing.edu.uy

**Résumé** — Un défaut bien connu des modèles numériques d'élévation (MNE) obtenus par des techniques de corrélation, est le phénomène d'adhérence, qui apparaît le long des bords très contrastés de l'image comme une dilatation de la partie supérieure (ou inférieure) du terrain estimé. Le phénomène est directement lié à la taille des voisinages utilisés lors de la maximisation de la corrélation normalisée, et la magnitude de ces artefacts ne peut pas être négligée quand une précision très sous-pixellaire est cherchée. Le travail de Delon et Rougé [3] donne une caractérisation de ce phénomène, fournissant un lien entre les disparités mesurées par corrélation et les vraies disparités. Il permet aussi de détecter des régions incorrélables, c'est à dire, des régions ne contenant aucune information utile pour une corrélation suffisamment précise. Comme cette relation (entre disparités vraies et estimées) est exprimée par un système linéaire très mal posé, des nombreuses suppositions simplificatrices ont été adoptées pour sa résolution, conduisant à la *correction barycentrique* du phénomène d'adhérence. Le résultat, bien que beaucoup amélioré par rapport aux disparités brutes, reste légèrement flou et oscillant, ce qui est particulièrement gênant pour le MNE urbain. Dans cet article nous proposons des suppositions simplificatrices moins contraignantes pour l'inversion du système, à savoir, sa régularisation par un terme de surface minimale ou variation totale. Une telle approche permet d'obtenir un terrain avec des bords moins flous, tout en interpolant les régions vides (sans information fiable de corrélation) d'une façon raisonnable.

**Abstract** — It's well known that DEMs (Digital Elevation Models) obtained by stereo correlation techniques suffer from *adhesion phenomenon*, which is a distortion of the model that appears near strong discontinuities or borders of the image. This phenomenon is directly related to the correlation process, and the magnitudes of the artifacts cannot be neglected when trying to obtain sub-pixel accuracies.

The work by Delon and Rougé [3] characterizes this phenomenon, giving a link between measured and true disparities, and allowing to detect uncorrelatable regions (or regions providing no useful information for correlation). Since this leads to a very ill posed system of equations, many simplifying assumptions have been adopted in order to easily solve it, leading to the so called *barycentric correction* of the adhesion phenomenon. Even though the result is highly improved with respect to the raw correlation disparities, one still observes a slightly blurred disparity map, which is specially annoying in urban areas.

In this work we propose more precise and natural assumptions to solve this system, namely to regularize the solution by a minimal surface or total variation term. Such an approach is naturally expected to allow less blurred edges while still filling in empty areas (without meaningful correlation information) in a reasonable manner.

## 1 Introduction

The ability of obtaining depth information from an image pair has a wide range of applications. This problem has been studied in depth from multiple approaches during the last decade (see [1] for a complete review). All the most common approaches rely on the fact that the depth of the object is inversely proportional to the disparity of its image projection from two different viewpoints, a phenomenon called "stereopsis".

The obtention of DEMs (Digital Elevation Models) from aerial or satellite images requires sub-pixel accuracies in the terrain model. A common technique to reach these precisions is the stereo correlation. This method as other block matching methods suffer from the *adhesion phenomenon*, which is directly related to the windowing process and appears near strong discontinuities or borders of the images as a distortion of the elevation map.

The work by Delon and Rougé [3], characterizes this phenomenon, giving a link between measured and true disparities, and allowing to detect uncorrelatable regions (or regions providing no useful information for correlation). Since this leads to a very ill posed system of equations, many simplifying assumptions have been adopted in order to easily solve it, leading to the so called *barycentric correction* of the adhesion phenomenon. Even though the result is highly improved with respect to the raw correlation disparities, one still observes a slightly blurred disparity map, which is specially annoying in urban areas.

In this work we propose more precise and natural assumptions to solve this system, namely to regularize the solution by a minimal surface or total variation term. Such an approach is naturally expected to allow less blurred edges while still filling in empty areas (without meaningful correlation information) in a reasonable manner. We

discuss the technical difficulties of implementing this approach, and compare some results obtained by both methods on synthetic data.

In section 2 we present some fundamental concepts and recent advances by J. Delon and B. Rougé, on the formalization of the adhesion phenomenon and their solution the *barycentric correction*, summarized from [2, ch 4-5]. In section 3 we introduce a more direct and natural way to correct the adhesion, showing in section 4 some details of the implementation. The results will be commented in section 5, followed by the conclusions in section 6.

## 2 Analytic study of correlation

Assuming that the images have small baseline and are taken from high altitude we can consider a simplified image formation model with parallel projection, where no occlusions (due to vertical structures) can occur. Additionally we assume that the images have been previously rectified to have a horizontal epipolar geometry [4], this reduces the bi-dimensional matching problem to one dimension. Under the hypothesis of subpixel disparities, the relation between the image pair  $u, \tilde{u}$  and the disparity  $\varepsilon$  can be modelled by:  $\tilde{u}(x) = u(x + \varepsilon(x))$ .

Assuming that the real disparities are small enough to perform first order approximations of the correlation, Delon and Rougé [2] found that the process of maximizing the Normalized Cross Correlation (NCC) <sup>1</sup>

$$\rho_{x_0}(m) = \frac{\int_{\varphi_{x_0}} u(x+m)\tilde{u}(x)dx}{\sqrt{\int_{\varphi_{x_0}} u^2(x+m)dx \int_{\varphi_{x_0}} \tilde{u}^2(x)dx}} \quad (1)$$

produces a disparity map  $m$  which is related to the true disparity map  $\varepsilon$  by the “fundamental equation of correlation” (2):

$$(\varepsilon d_{x_0}) * \varphi = m(d_{x_0} * \varphi) \quad (2)$$

In this equation the function  $d_{x_0}$  expresses the “edginess” of the image  $u$  around the point  $x_0$  (center of the window  $\varphi$ ):

$$d_{x_0}(x) = \frac{u^2(x) \int_{\varphi_{x_0}} u^2(y)dy - u(x)u'(x) \int_{\varphi_{x_0}} u'(y)u(y)dy}{\left(\int_{\varphi_{x_0}} u^2(y)dy\right)^2}$$

This is a two variable function of  $x_0$  and  $x$ , which is computed over the reference image  $u$ , sometimes the notation  $d(x_0, x)$  will be used to enforce the fact of being a two variable function.

Equation (2) is very hard to solve for  $\varepsilon$ , because it only provides information near the edges of  $u$  (the regions with high  $d_{x_0}$ ). In [2] this difficulty was circumvented by a *barycentric correction* which consists of approximating  $d_{x_0}$  by a *delta* function at the barycenter of the window:  $x_1 = \frac{\int_{\varphi} d_{x_0}(x)xdx}{\int_{\varphi} d_{x_0}(x)dx}$ . Then associate the computed disparity  $m(x_0)$  to the location of the barycenter  $x_1$ , meaning

<sup>1</sup>With  $\int_{\varphi_{x_0}} u(x)dx$  we denote (in a compact way) the convolution of  $u$  with the window function  $\varphi_{x_0}$  centered at point  $x_0$ ; as the window has a compact support the convolution is well defined. In other cases we use a more extended representation like:  $\int u(x)\varphi(x_0 - x)dx$  (where the implicit integration domain is the entire support of the image  $u$ ).

$\varepsilon(x_1) = m(x_0)$ , the resulting irregular sampling of  $\varepsilon$  is later interpolated on a regular grid.

Delon and Rougé [2] also derived a measure that bounds the residual error in the computation of the disparity map  $\varepsilon$ , introduced by the fundamental equation of correlation. The measure  $N(u, \varphi, x_0)$  (eq. (3)) is a simplified case of the model defined by Delon in [2, ch 5.2]. It's computed over the image  $u$  and considers the correlation window  $\varphi$  and the standard deviation of the image noise  $\sigma_{noise}$  (considered gaussian).

$$N(u, \varphi, x_0) = \frac{\sigma_{noise}}{\|u\|_{\varphi_{x_0}} \sqrt{\int_{\varphi_{x_0}} d_{x_0}(x)dx}} < \lambda \quad (3)$$

By imposing a threshold  $\lambda$  this bound can be used to determine the zones where the disparity map  $\varepsilon$  (resulting from the correlation process) have at least a precision  $\varepsilon$  (as used in Section 4).

## 3 Variational Solution

Here we propose an alternative to the barycentric correction while adding regularization. More precisely, given the measured disparity map  $m$  (found by maximizing correlation) we shall instead invert equation (2) by minimizing  $E(\varepsilon) = \omega D(\varepsilon) + S(\varepsilon)$  with respect to  $\varepsilon$ , where  $D(\varepsilon)$  is the data fitting term and  $S(\varepsilon)$  is a surface regularization. To do so we start from the first guess  $\varepsilon = \varepsilon_0$  given by barycentric correction and follow the gradient descent path:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial \varepsilon} = -(\omega \frac{\partial D}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial S}{\partial \varepsilon}).$$

**Data term & its Euler-Lagrange:** The data term is taken to minimize an energy based on eq. (2), the fundamental equation of correlation:

$$D(\varepsilon) = \|(\varepsilon \Delta d_{x_0}) * \varphi - m(d_{x_0} * \varphi)\|^2,$$

which is a very ill posed system so its solution will need some regularization to return be solved. To calculate its first derivative we start converting it to matrix notation by introducing the operator  $K$

$$(K\varepsilon)(x_0) = \int \varepsilon(x) d_{x_0}(x) \varphi(x_0 - x) dx$$

$$(K1)(x_0) = \int 1 d_{x_0}(x) \varphi(x_0 - x) dx$$

Then  $D(\varepsilon)$  can be written as:

$$\begin{aligned} D(\varepsilon) &= |(K\varepsilon) - \overbrace{\text{diag}(m)(K1)}^{=b}|^2 \\ &= \langle K\varepsilon - b, K\varepsilon - b \rangle \\ &= \langle K\varepsilon, K\varepsilon \rangle - 2 \langle K\varepsilon, b \rangle + \langle b, b \rangle \end{aligned}$$

And calculating it's first derivative:

$$\frac{\partial D}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \langle K\varepsilon, K\varepsilon \rangle - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} 2 \langle K\varepsilon, b \rangle = 2K^*(K\varepsilon - b)$$

The conjugate matrix  $K^*$  is defined as:

$$(K^*g)(x) = \int \overline{\varphi(x_0 - x) d_{x_0}(x)} g(x_0) dx_0$$

(observe that it is integrated over the variable  $x_0$ , and  $d_{x_0}(x)$  is not complex valued). This is demonstrated with:

$$\langle Kf, g \rangle = \int \left( \int f(x) \varphi(x_0 - x) d(x_0, x) dx \right) \overline{g(x_0)} dx_0 = \int f(x) \left( \int \overline{\varphi(x_0 - x)} d(x_0, x) g(x_0) dx_0 \right) dx = \langle f, K^*g \rangle.$$

The solution for the problem is the following Partial Differential Equation, which can be minimized by a gradient descent method.<sup>2</sup>

$$\frac{\partial D}{\partial \varepsilon} = 2K^*(K\varepsilon - \text{diag}(m)(K1)) \quad (4)$$

**Regularization term & its Euler-Lagrange:** The energy for minimizing the surface is similar to the proposed in [5] and [6]:

$$S(\varepsilon) = \int \sqrt{a^2 + |\nabla \varepsilon|^2} dx$$

In this case the value of  $a^2$  is used to control the relative weight of vertical changes; values of  $a^2 < 1$  result in sharper edges because the changes of height are less expensive. For our problem the value of  $a^2$  may be selected similar to the proportion  $(b/h)^2$ , where  $b$  is the distance between the cameras and  $h$  is the distance between the cameras to the object. This choice balances the horizontal (pixel) and vertical (altitude) scales so that  $S(\varepsilon)$  represents the terrain surface measured in pixels. A smaller choice of  $a$  makes  $S(\varepsilon)$  tend to the total variation of  $\varepsilon$ .

The calculus of the E-L solution of this type of surface minimization leads to the following equation.

$$\frac{\partial S}{\partial \varepsilon} = \text{div}(\nabla \varepsilon / \sqrt{a^2 + |\nabla \varepsilon|^2})$$

## 4 Multiple window sizes

In the previous section we presented a variational method to minimize the effects of adhesion artifacts. But the result only takes into account a single window size, so now we extend it by integrating disparities from multiple correlation windows into a single energy. We build a weighted sum of multiple  $D$  terms (weighted by  $\omega_i$ ) for all window sizes  $i$ , and apply to each term a mask  $\Theta_i$  to select only one term for each pixel. This mask prevents multiple terms from acting simultaneously over the same pixel and distorting the solution (this happens specially near the image borders where many terms have simultaneously high values). The resulting energy will be:

$$E(\varepsilon) = S(\varepsilon) + \sum_i \omega_i \Theta_i D(m_i, \varphi_i, \varepsilon) \quad (5)$$

$$\Theta_i(x) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{if } i = i_{\min}(x) \\ 0 & , \quad \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$i_{\min}(x) = \arg \min_i \{ \text{size}(\varphi_i) : N(u, \varphi_i, x) < \lambda \}$$

<sup>2</sup>The numerical implementation of this differential equation, can be efficiently computed with six convolutions by the window function  $\varphi$  (plus some pixel-by-pixel additions and multiplications), resulting from developing the operator  $K$  and  $d_{x_0}$ .

For the determination of the masks  $\Theta_i$  we use eq. (3) to select the areas of sufficient precision  $\{x : N(u, \varphi_i, x) < \lambda\}$ , for each correlation window size. As the term  $N(u, \varphi_i, x)$  allows to compare directly the correlation curvatures of different window sizes, we select the smallest admissible window size for each pixel of the image.

## 5 Experimental results

Here we present some early results of an implementation of the minimization of equation (5). We computed the “correlation maps” with seven sizes of correlation windows for our images. The initial condition of the algorithm is the DEM obtained with the barycentric correction (fig. 2), and the computed correlation maps are used as parameters.

In fig. 3 we can observe that regularization (with low  $a$  value) sharpens the borders and reduces the oscillatory artifacts of the structures, but as expected from a minimal surface term the corners tend to be rounded.

The adhesion artifacts can be noticed between the ground truth (fig. 1) and the initial condition (fig. 2), noticing that the central structures suffer particularly from horizontal dilation in the initial condition. But the regularized DEM (fig. 3) is qualitatively similar to the ground truth, the borders are straight lines and less dilated, this is due to the data term that emphasizes the border values of the object.

The small objects present at the right side of the images, are more blurry in the regularized DEM because the data term is small in zones poorly contrasted. Increasing the relative weight of the data term with respect of the regularization will conduct to instability of the first one. This is due to the nature of the data term which has very large range of values, from high values in zones with highly contrasted to very small values in zones with low contrast.

Most areas of the image don't have any valid data term, so the regularization is predominant there, but this isn't necessarily true at lower resolutions. The actual implementation of our method only operates at one resolution, while the result of the barycentric corrected DEM [2], is generated with a multi-resolution algorithm. With a multi-resolution implementation the influence areas of each window will be magnified at lower resolution, allowing to correct the elevation model in zones where the actual implementation doesn't act.

## 6 Conclusion and future work

We presented a method to correct the adhesion phenomenon that also prevents the oscillatory artifacts result of barycentric correction and allows to interpolate in non feasible areas, while sharpening the edges. In some cases the resulting DEM is not better than the original (the barycentric correction), but we believe that most of these problems may be addressed in the future works.

The problems related with the data term's range of values, can be addressed by re-scaling eq. (4) depending

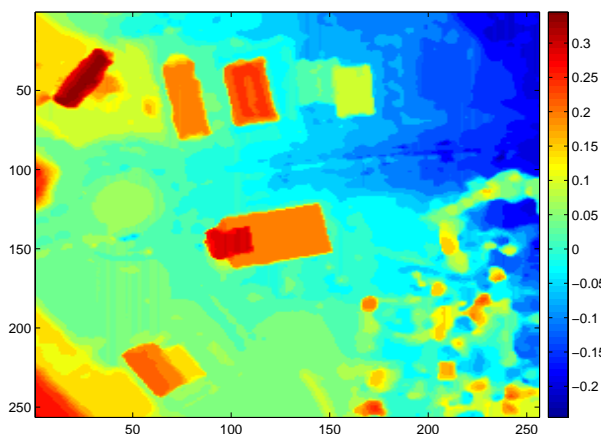


FIG. 1: Ground truth elevation model.

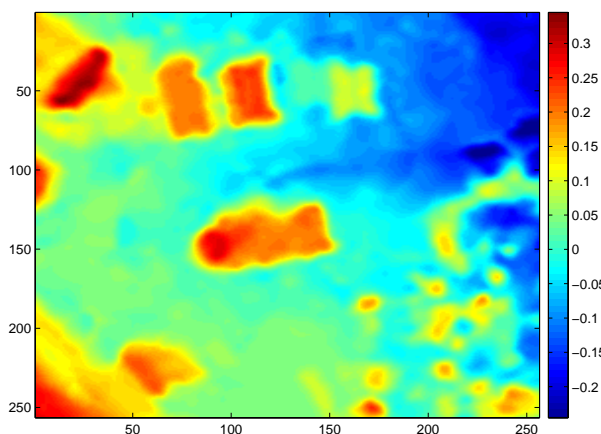


FIG. 2: Elevation model barycentric corrected.

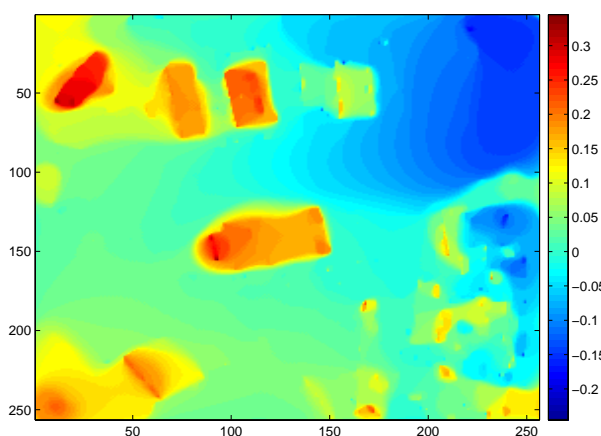


FIG. 3: Computed elevation model applying 2000 steps of the algorithm to the result of the barycentric correction.

the contrast of each pixel of the image. Using a more anisotropic regularization we can avoid the rounding of the corners proper of the surface minimization term, but produces elevation maps more similar to the reference image, so this term needs to be controlled carefully.

Lastly as mentioned in section 5 a multi-resolution implementation is more robust to the lack of valuable information at a certain resolution. The non-trivial aspect of this extension concerns how to integrate data-fitting terms at multiple resolutions into a single energy. The possible solutions are applying the resulting  $\varepsilon$  from every scale to the images and change scale, or adding the  $\varepsilon$  obtained so far to process the next scale. Of course recovering the exact urban shapes would involve a later detection stage where straight borders of buildings, planar walls and roofs are explicitly detected and fitted to the image data as for instance in [7]. We are also working on similar ideas. Anyhow, a DEM restoration like the one proposed here is still more general (and hence also useful in regions where planar or straight-line shapes cannot be significantly detected), and serves also as a more accurate initial guess that can guide such later detection stages.

## Acknowledgements

This project was funded by Project PDT S/C/OP/17/01 (Uruguay), CNES and CNRS (France). The data were provided by CNES and C-S. The authors would like to thank the close collaboration and insightful comments of Bernard Rougé, Julie Delon, Vicent Caselles, Jean-Michel Morel, Vincent Muron, Ariel Perez and many others.

## References

- [1] Myron Z. Brown, Darius Burschka, and Gregory D. Hager. Advances in Computational Stereo. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 25(8):993–1008, 2003.
- [2] J. Delon. *Fine comparison of images and other problems*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2004.
- [3] J. Delon and B. Rougé. Analytic study of the stereoscopic correlation, 2004. Personal Communication.
- [4] O. Faugeras, Q.-T. Luong, and T. Papadopoulos. *The Geometry of Multiple Images : The Laws That Govern the Formation of Multiple Images of a Scene and Some of Their Applications*. MIT Press, 2001.
- [5] O.D. Faugeras and R. Keriven. Variational-principles, surface evolution, pdes, level set methods, and the stereo problem. *IP*, 7(3):336–344, March 1998.
- [6] Ron Kimmel. 3d shape reconstruction from autostereograms and stereo. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 13(1-2):324–333, 2002.
- [7] X. Descombes M. Ortner and J. Zerubia. Building Extraction from Digital Elevation Model. *In Proc. of ICASSP'03*, April 2003.

# Reconnaissance automatique de fréquences de résonance à partir des données satellitaires de la mission spatiale CLUSTER

X. SURAUD<sup>1</sup>, J.-L. RAUCH<sup>1</sup>, R. LEDEE<sup>2</sup>, P. DECREAU<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Physique et Chimie de l'Environnement / Centre National de la Recherche Scientifique (LPCE/CNRS), 3A, avenue de la recherche scientifique 45071 Orléans cedex 2

<sup>2</sup> Laboratoire d'Electronique, Signaux, Images (LESI) EA 1715 / Université d'Orléans Polytech'Orléans - Site Galilée - 12 rue de Blois, BP 6744 45067 Orléans cedex 2

[Xavier.Suraud@cnrs-orleans.fr](mailto:Xavier.Suraud@cnrs-orleans.fr); [Jean-Louis.Rauch@cnrs-orleans.fr](mailto:Jean-Louis.Rauch@cnrs-orleans.fr); [Roger.Ledee@univ-orleans.fr](mailto:Roger.Ledee@univ-orleans.fr);

[Pierrette.Decreau@cnrs-orleans.fr](mailto:Pierrette.Decreau@cnrs-orleans.fr)

**Résumé** – Dans cette communication, nous présentons une méthode automatique pour l'identification de la fréquence de résonance d'un plasma spatial. Les données satellitaires sont issues de deux instruments de mesure. Elles se présentent sous la forme d'un spectrogramme bruité et d'un signal. Ce signal permet de procéder automatiquement à un découpage adapté en temps des spectrogrammes et à une analyse en fréquence de chaque bande temporelle. La méthode mise en place exploite la distance de Fréchet comme critère de ressemblance. Une courbe de l'évolution de la fréquence plasma au cours du temps est ensuite reconstruite. Le logiciel développé permet l'étude systématique, dans certaines régions de la magnétosphère terrestre, des spectrogrammes de l'expérience WHISPER de la mission spatiale CLUSTER.

**Abstract** – This paper presents a new method in order to automatically identify the spacial plasma frequency. Data stem from two onboard satellite instruments. These are a two dimension spectrogram and a one dimension signal. From this last signal, the spectrogram is cutted out along the temporal axis in a adapted way, and a frequency analysis is performed. The method uses the Frechet distance as a form similarity criterium. Plasma frequency time evolution is then extracted from the spectrogram. A software can treat spectrograms produced by the WHISPER instrument of the CLUSTER mission in several Earth magnetosphere regions.

## 1. Introduction

La mission scientifique CLUSTER est dédiée à l'étude des frontières des régions clefs de la magnétosphère terrestre. Cette mission est constituée de quatre satellites identiques évoluant en constellation tétraédrique de forme et de dimension ajustable en fonction des objectifs scientifiques. Chaque satellite a embarqué 11 instruments scientifiques pour mesurer les paramètres du milieu : champ magnétique, ondes électromagnétiques, flux, température, espèces de particules, etc. L'originalité de ce projet [1] réside dans la possibilité de réaliser des mesures en trois dimensions et ainsi de séparer les variations temporelles des variations spatiales.

La mesure de la concentration électronique du plasma est un paramètre clef pour déterminer les propriétés des régions actives de l'environnement terrestre ainsi que les conditions de propagation des ondes qui rayonnent dans cet environnement. L'expérience Wave of HIgh frequency and Sounder for Probing Electron density by Relaxation (WHISPER) mesure le champ électrique sur la gamme 2-80 kHz à l'aide d'antennes double-sphères de 88 m, puis en fait l'analyse fréquentielle en temps réel, par transformée de Fourier rapide. Un émetteur travaillant sur la gamme 4 – 80 kHz complète cet ensemble pour former un sondeur à relaxation, et ainsi obtenir, par identification des résonances propres du plasma, une mesure précise et fiable de la densité électronique totale du milieu [2]. Cette densité peut être déduite facilement de la fréquence de résonance « plasma » à l'aide de la formule suivante :

$$Fp_e = 9\sqrt{N_e} \quad (1)$$

où  $Fp_e$  est la fréquence « plasma » en kHz et  $N_e$  la densité électronique en  $\text{cm}^{-3}$ .

Des informations complémentaires concernant la mission CLUSTER sont disponibles sur le site de l'ESA (European Spatial Agency) [3] et les données de l'instrument WHISPER sur le site [4].

A chaque instant, l'expérience WHISPER construit un spectre correspondant à la réponse du plasma faisant suite à une excitation. Ces spectres sont juxtaposés et l'amplitude du signal pour chaque fréquence est codée en couleurs. Cet ensemble forme ainsi une image temps-fréquence appelée « spectrogramme ». Une série de points plus ou moins intenses correspondant aux fréquences de résonances du milieu apparaîtra et cette représentation nous permet de mettre en évidence les variations temporelles de la densité du plasma. L'enjeu de ce travail est donc d'être capable d'identifier et de reconnaître cette série de points associés à la résonance plasma, et ce, même dans les régions où la réponse du plasma est faible. Malheureusement, l'évolution temporelle de cette résonance plasma n'est pas forcément continue et peut présenter de brusques variations quand le satellite traverse des régions frontières comme l'illustre la figure 1. De plus, le spectre peut présenter des résonances d'autres natures perturbant la localisation de celle associée à la fréquence plasma. Pour palier au problème de la discontinuité et de l'aspect lacunaire des données nous sommes intéressés aux mesures de l'expérience EFW (Electric Field and Waves)



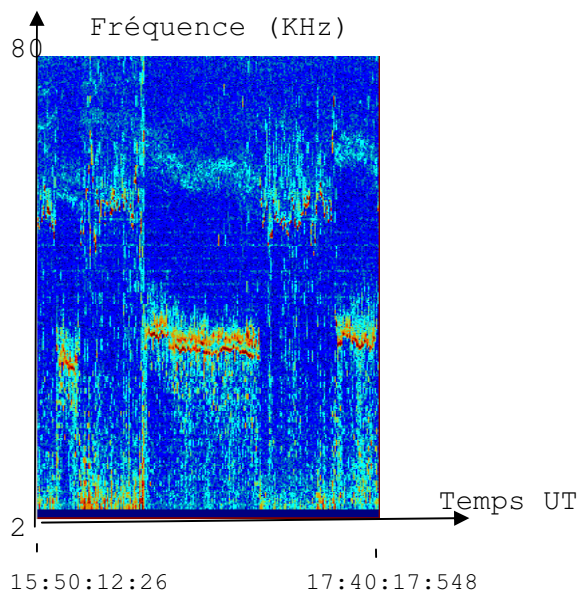


FIG. 1 : spectrogramme du 2002/05/13

qui mesure la différence de potentiel entre le corps du satellite, chargé positivement, et un ensemble de capteurs placés à  $\sim 45$  m du corps du satellite en liaison électrique avec le plasma. Cette différence de potentiel, d'autant plus élevée que la densité électronique dans le milieu est faible, permet de suivre qualitativement les variations temporelles de la densité, sans pour autant en donner une estimation précise. En effet, s'il existe une relation empirique bi-univoque entre le « potentiel EFW » et la fréquence plasma, celle-ci dépend clairement du régime de plasma concerné et donc de la région étudiée [5]. Les données auxiliaires de l'expérience EFW nous aideront par conséquent à identifier la résonance « plasma » présente dans les spectrogrammes sondeur comme un « fil d'Ariane » nous renseignant sur le sens des fluctuations de la densité. Les mesures précises de cette quantité seront obtenues au mieux à la résolution temporelle de l'instrument WHISPER.

Notre problème se résume donc à extraire d'une image une série de points formée de maxima locaux dont les variations sont « semblables » à celle d'une courbe auxiliaire de référence.

Quelques travaux relatifs à la recherche de signatures dans ce type de données existent. On peut citer ceux de Galkin [6] qui identifie les fréquences caractéristiques du plasma dans la bande 3 KHz et 3 MHz à l'aide de l'instrument RPI (Radio Plasma Imager) embarqué sur le satellite IMAGE. Il met en œuvre un seuillage adaptatif sur le gradient de l'image et exploite les réseaux de neurones pour l'identification des fréquences caractéristiques. Mais, l'utilisation des réseaux de neurones nécessite une connaissance *a priori* de la signature temporelle. Les travaux de Trotignon [7] ont concerné uniquement un traitement spectre à spectre sans intégrer l'information de continuité temporelle et qui nécessitait une intervention manuelle constante. En raison du nombre considérable de données à traiter qui présentent des variations imprévisibles, il s'avère nécessaire de mettre au point une procédure de localisation de la fréquence plasma de manière automatique adaptée à une succession de régions bien particulières de l'espace (vent solaire, magnétogaine).

Dans ce contexte, nous proposons une nouvelle stratégie qui consiste à découper notre spectrogramme en intervalles temporels de manière à isoler les régions de l'espace dont les frontières sont reconnaissables par des variations brusques du potentiel. Ensuite, chacun de ces intervalles est ensuite redécoupé suivant la variable fréquentielle pour former des sous-images. Ce double découpage exploite l'information provenant de l'instrument EFW. Bien que ces mesures ne soient pas calibrées, elles nous donnent accès à une information précieuse sur les variations de la densité. Une mesure basée sur la distance de Fréchet entre le signal EFW et la détection des fréquences de résonance dans chaque sous-image permet la sélection automatique de la bande fréquentielle qui contient la fréquence plasma. L'évolution temporelle continue de cette fréquence est ensuite retrouvée par une mise en correspondance non rigide de l'information EFW sur nos données WHISPER.

Nous présentons ci-après le principe du partitionnement en sous-images des spectrogrammes. Nous rappellerons ensuite le principe de la distance de Fréchet et définirons les critères de sélection des bandes fréquentielles. Le principe de déformation de l'information EFW pour une adaptation à nos données sera ensuite explicité. L'ensemble sera complété par une analyse statistique des résultats obtenus sur une période de cinq mois.

## 2. Méthodes

Dans le spectrogramme, l'extraction de la courbe associée à l'évolution temporelle de la fréquence plasma se réalise en quatre étapes. La première est le découpage temps-fréquence de l'image basé sur les caractéristiques du signal EFW. Dans chaque bloc temps-fréquence, il est pratiqué une détection de la fréquence d'amplitude maximale au cours du temps. Il n'est conservé que les points significatifs au sens du rapport signal à bruit. Au terme de la deuxième phase, chaque bande temporelle est associée à une famille de courbes de moyenne nulle (il y a une courbe par bloc). Ensuite, à l'aide d'un critère de ressemblance, chaque courbe est comparée au signal EFW également recentré en zéro. La distance de Fréchet s'est avérée bien adaptée à notre problématique ; la série temporelle de points retenue est celle associée à la plus petite distance mesurée. Enfin, dans une quatrième étape, les points retenus sont utilisés pour calculer les deux paramètres définissant un modèle physique de calibration des données EFW, définissant ainsi une nouvelle courbe EFW localisée au sens des moindres carrés sur nos fréquences choisies. Nous définissons ensuite une bande centrée autour de ce nouveau signal de manière à récupérer toutes les fréquences maximales qui forment ainsi la courbe d'évolution temporelle de la fréquence plasma recherchée.

### 2.1 Partitionnement en sous-images

Le partitionnement des spectrogrammes repose sur les variations en amplitude du signal EFW. Il est recherché un découpage temporel qui définit des intervalles dans lesquels les variations en amplitude sont modérées. Le signal EFW correspondant aux données présentées en figure 1 est reproduit en figure 2.



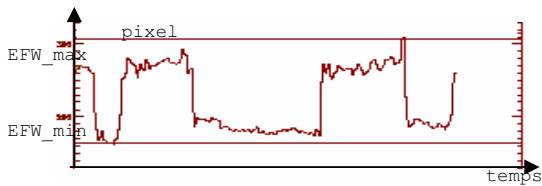


FIG. 2 : signal EFW

Sur ce signal, il est calculé une valeur continue comme suit :

$$EFW_c = \frac{EFW_{\max} + EFW_{\min}}{2}$$

Sur tout l'espace temporel considéré, les points du signal sont comparés à cette valeur continue. Il est ainsi défini une partition composée d'intervalles sur chacun desquels une suite de points a une amplitude supérieure ou inférieure à  $EFW_c$ . Néanmoins, il est introduit un nombre minimum de points consécutifs de manière à rendre significatif le critère de ressemblance entre ce signal et des fréquences de résonance de l'instrument WHISPER. De ce fait, l'algorithme fait la distinction entre un passage de frontière et une brusque variation du potentiel induit par l'apparition d'un phénomène physique de courte durée.

Le partitionnement fréquentiel se fait tout aussi simplement : la bande d'étude est recouverte par des sous-bandes fréquentielles de largeur  $EFW_{\max} - EFW_{\min}$  et se chevauchant de moitié. En supposant que l'amplitude du potentiel sera de l'ordre de celle de la courbe de fréquence plasma sur chaque intervalle temporel, ces choix impliquent l'unicité de la bande fréquentielle qui contient cette dernière.

## 2.2 Distance de Fréchet

La distance Euclidienne permet de comparer deux objets ponctuels. Par contre, pour comparer deux objets évoluant suivant une variable comme le temps par exemple, il existe plusieurs types de distances dont les plus usitées sont la distance moyenne de déplacement ou la distance de Hausdorff [8]. Ces deux mesures nécessitent la prise en compte de l'ensemble des points de la courbe considérée. Notre problématique étant la mesure de ressemblance entre l'évolution temporelle des points détectés sur les spectrogrammes et le signal EFW, la distance de Fréchet est la mieux adaptée. En effet, elle représente une distance max entre deux lignes orientées [9]. Elle se définit de la manière suivante :

Toute polygline orientée est équivalente à une application continue  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  où  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . La distance de Fréchet ( $d_f$ ) est la suivante : Soit  $f: [a, a'] \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $g: [b, b'] \rightarrow \mathbb{R}^2$  deux polygones et  $\| \cdot \|$  la norme euclidienne,

$$d_f(f, g) = \inf_{\substack{\alpha: [0,1] \rightarrow [a,a'] \\ \beta: [0,1] \rightarrow [b,b']}} \max_{t \in [0,1]} \|f(\alpha(t)) - g(\beta(t))\|$$

Une illustration intuitive de la distance de Fréchet est la suivante : un maître et son chien suivent deux chemins. Ils avancent ou s'arrêtent à volonté, indépendamment l'un de

l'autre, mais ils ne peuvent pas revenir sur leur pas. La distance de Fréchet entre ces deux chemins est la longueur minimale de la laisse qui permet de réaliser une progression de conserve satisfaisant ces conditions.

Par contre, le calcul de cette distance est complexe. Néanmoins, les travaux d'Eiter et Mannila [10] donnent un algorithme simple pour son approximation dont l'erreur maximale est majorée. Nous avons utilisé cet algorithme.

## 2.3 Principe de déformation

L'instrument EFW mesure le potentiel du milieu en Volts. Plusieurs études théoriques [5] ont contribué à définir un modèle reliant le potentiel et la fréquence plasma. Il s'exprime comme suit :

$$\alpha * \text{potentiel}^\beta \text{ avec } \beta < 0 \quad (2)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  ajustent expérimentalement la densité au potentiel.

Les coefficients usuellement adoptés pour définir une courbe moyenne dans cette région sont :

$$\alpha = 200 \text{ et } \beta = -1.85.$$

## 3. Résultats expérimentaux

L'algorithme décrit précédemment a fait l'objet d'une implantation dans un logiciel de visualisation nommé WHIMAGE spécialement conçu pour faciliter le dépouillement des données WHISPER. Nous présenterons les résultats obtenus avec les données des figures 1 et 2. Une analyse des résultats sur cinq mois de données complète notre étude.

Dans le cas des données du 13 mai 2005, l'orbite du satellite SC1 traverse différentes régions. Le passage des frontières se voit tout aussi bien sur le spectrogramme de la figure 1 que sur le potentiel EFW de la figure 2.

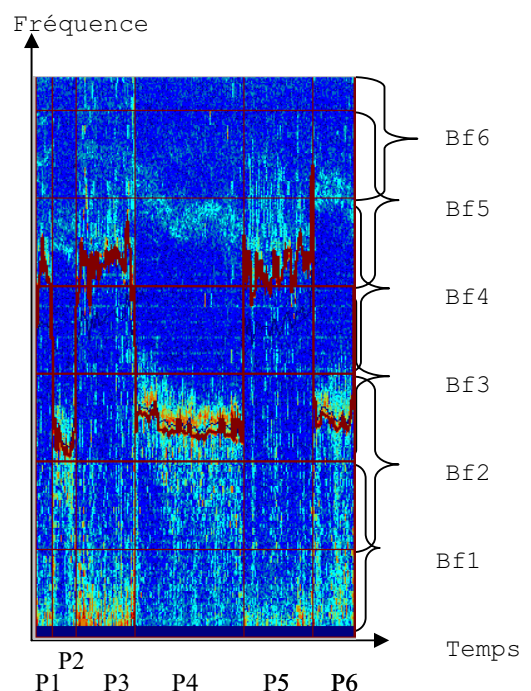


FIG. 3 : grille d'étude

La méthode simple exposée en 2.1 donne sans ambiguïté 36 sous-images ( $P_i * BF_j$ ) représentées sur la figure 3 et dont les distances de Fréchet sont reportées dans le tableau 1.

TAB. 1 : distances de Fréchet

	P1	P2	P3	P4	P5	P6
BF6	12.5	106.1	45.8	76.7	47.0	94.6
BF5	7.4	69.8	40.1	30.7	16.0	86.9
BF4	8.0	59.8	21.0*	104.7	21.1	78.7
BF3	46.4	23.0	76.2	8.1	74.9	61.4
BF2	29.2	97.2	36.0	111.6	52.8	113.9
BF1	25.0	113.0	19.2	98.3	78.8	114.9

Le choix de la bande de fréquence est effectué sur les valeurs minimales de la distance de Fréchet mises en rouge dans le tableau 1 et la courbe résultat, corrigée en \*, est affichée en rouge sur la figure 3.

Nous avons procédé au lancement en batch du logiciel sur cinq mois de données entre le 01/12/2003 et le 31/04/2004.

Un examen visuel des résultats a été effectué pour évaluer l'efficacité de notre méthode. Le logiciel a traité des périodes contenant 500 spectres. Dans 85% du temps de ces cinq mois de données la fréquence plasma a été reconnue correctement. Les échecs de détection sont attribués aux deux raisons principales suivantes :

(i) La méthode utilisée basée sur les variations de EFW amène dans certains cas un découpage mal adapté. Des variations brusques de la fréquence plasma peuvent être parfaitement visible sur les données WHISPER alors qu'elles n'apparaissent pas clairement sur la courbe de référence EFW. Ces différences localement significatives peuvent augmenter considérablement la distance de Fréchet et provoquer un choix erroné de la bande fréquentielle.

(ii) Dans certains cas, les mesures contiennent trop de points de bruit et provoquent une augmentation anormale de la distance de Fréchet bien que visuellement les courbes se ressemblent globalement. Dans cette situation, le choix de la distance de Fréchet n'est pas pertinent et une mesure de distance plus globale serait préférable.

Afin d'améliorer les résultats, un deuxième test a été fait en imposant les contraintes suivantes : on effectue une recherche sur un nombre limité de bandes fréquentielles autour de la courbe EFW par défaut. Cela permet de donner en cas d'échec un résultat pas trop éloigné de la courbe de résonance. De plus, cela permet d'intégrer en quelque sorte une dépendance entre les sous intervalles de temps jusqu'alors traités de manière indépendante. Nous ajoutons également un poids à chaque courbe qui est une fonction du nombre de maxima globaux qu'elle contient. Ces nouvelles propriétés; proximité de la courbe EFW et nombre de maxima globaux, attribuées aux courbes va nous permettre de définir des critères de sélection finale quand les distances de Fréchet sont voisines. Ces nouvelles contraintes ont permis d'améliorer significativement la reconnaissance de la

fréquence plasma. Nous estimons que sur 90 % du temps d'étude l'intervalle fréquentiel a été correctement choisi.

## 4. Conclusion et perspectives

En conclusion, la méthode donne de bons résultats. Une attention toute particulière est portée sur le découpage en temps et sur l'interprétation de la distance de Fréchet. La logique d'extraction proposée dans le paragraphe 2 bien que simple nous semble bien adaptée à nos données dans des régions où les frontières sont bien définies. L'outil développé permet actuellement une automatisation du dépouillement de données des quatre satellites CLUSTER et de fournir à la communauté scientifique une évaluation correcte de la densité électronique. Cette automatisation permettra d'effectuer des statistiques sur de nombreux passages dans des régions clés et de localiser plus finement les zones frontières et leurs fluctuations temporelles et spatiales. Néanmoins, d'autres méthodes sont en cours de développement pour les régions où la fréquence plasma se trouve mélangée en permanence avec d'autres résonances. En effet, le choix d'un maximum local dans une bande fréquentielle n'est plus valide. Des techniques de tout autre ordre sont actuellement à l'étude.

## Références

- [1] C.T. Russel et R. Schmidt. *The Cluster and Phoenix Missions*. Edité par C.P. Escoubet, Ed. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [2] P. Décréau et al. and Whisper investigators. *WHISPER, a resonance sounder and wave analyser: performances and perspectives for the Cluster Mission*. Space Science Reviews 79: 157-193, 1997.
- [3] [www.esa.int/science/cluster](http://www.esa.int/science/cluster)
- [4] [www.whisper.cnrs-orleans.fr](http://www.whisper.cnrs-orleans.fr)
- [5] A. Pedersen et al. *Four-point high time resolution information on electron densities by the electric field experiments (EFW) on Cluster*. Annales Geophysicae 19:1483-1489, 2001.
- [6] I.A. Galkin. *A pre-attentive vision model for automated data exploration applied to space plasma remote sensing data*. PhD thesis in computer science, University of Massachusetts Lowell, 2004.
- [7] J.G. Trotignon, P. Décréau, J.L. Rauch et al. *How to determine the thermal electron density and the magnetic field strength from the Cluster/Whisper observations around the Earth*. Annales Geophysicae, 19:1711-1720, 2001.
- [8] T. Devogele, Y. Riffault. *Alarme de précision pour les lignes de côte des ECDIS*, CoastGIS'99, Editeur Populus and Loubersac, Ed. IFREMER, Actes de colloques n°25, p 159-169, 2000.
- [9] M. Fréchet. *Sur quelques points du calcul fonctionnel*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 22 :1-74, 1906.
- [10] T. Eiter and K. Mannila. *Computing Discrete Fréchet Distance*. Rapport technique Christian Doppler Labor für Expertensysteme, Université Technique de Vienne, n° CD-TR 94/64.

# Une méthode d'initialisation automatique pour contour actif paramétrique, application aux images échographiques

Clovis TAUBER, Hadj BATATIA, Alain AYACHE

IRIT-ENSEEIH

2 rue Camichel, BP71, 31071 Toulouse Cedex 7, France

tauber@enseeiht.fr, batatia@enseeiht.fr

ayache@enseeiht.fr

**Résumé** — Le problème traité est celui de l'initialisation des contours actifs, avec pour application la segmentation des cavités cardiaques dans les images échographiques. Nous proposons d'abord une nouvelle énergie externe, robuste au speckle. Puis nous nous intéressons au délicat problème de l'automatisation de l'initialisation. Nous proposons une méthode générale d'initialisation automatique du snake fondée sur les champs de vecteurs gradients. Des résultats sur des images échographiques réelles sont présentés.

**Abstract** — We present a new method for automatic image segmentation with B-spline snakes, robust to speckle. Two contributions are presented. The first concerns the construction of a new energy for active contour model. The second one deals with the difficult problem of automatic initialization. We propose a new general initialization method for active contours, based on gradient vector flow type of energy. The method has been tested on different echocardiographic images with encouraging results.

## 1 Introduction

Le positionnement est une étape cruciale pour la segmentation par contours actifs. Bien que certaines techniques comme le gradient vector flow [6] ou les balloon snakes [1] rendent l'initialisation moins contrainte, ils ne l'automatisent pas entièrement. Nous illustrons cette limitation par un exemple. Nous construisons une méthode générale d'initialisation automatique du snake fondée sur la technique du GVF, dont nous proposons une version plus robuste au speckle.

L'article se structure de la manière suivante : nous commençons par présenter la nouvelle énergie externe dans la section 2. La section 3 traite du développement de notre méthode d'initialisation automatique. Les résultats sont présentés dans la section 4 et enfin quelques conclusions et perspectives sont formulées dans la section 5.

## 2 Energie externe d'expansion

L'énergie que nous proposons d'utiliser (que nous appelons s-GVF) permet de détecter des contours discontinus et une initialisation moins contrainte. Nous utilisons le modèle du flux des vecteurs gradients (*gradient vector flow*, GVF) [6]. Nous l'adaptions pour créer un champ de vecteurs qui attire le snake vers les points de fort coefficient de variation (CV) de l'image. Cette statistique est issue du domaine du radar à synthèse d'ouverture. Elle permet une détection des contours plus précise que le simple gradient, dans les images contenant du speckle [3].

Nous utilisons  $I_\gamma(x, y)$ , l'image seuillée des CV locaux. Dans cette carte des contours, les gradients  $\nabla I_\gamma$  sont des vecteurs qui pointent vers les contours de l'image. Ils sont perpendiculaires à ces contours sur les pixels appartenant aux contours. L'amplitude de ces vecteurs est grande sur les contours mais décroît très vite dès que l'on s'éloigne des contours et elle est nulle dans les régions homogènes où  $I_\gamma(x, y) = 0$ . Les vecteurs  $\nabla I_\gamma$  permettent au snake de converger vers une segmentation précise des contours, cependant cela requiert une initialisation très précise, proche de ces contours. Si un snake est initialisé au milieu d'une cavité, les forces extérieures sont nulles. Le s-GVF, calculé à partir du CV local résultant d'une étape de diffusion [3], permet de contourner ce problème et d'empêcher le snake de déborder des cavités. Il est plus robuste au speckle que le GVF classique.

Le s-GVF  $\mathbf{v}(x, y) = [u(x, y), v(x, y)]$  se calcule à partir de l'image  $I_\gamma$  comme la minimisation de la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{E} = \iint \mu(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) + |\nabla I_\gamma|^2 |\mathbf{v} - \nabla I_\gamma|^2 dx dy. \quad (1)$$

où  $\mu$  est un paramètre de régularisation entre les deux termes de l'intégrale. Dans les régions homogènes l'amplitude  $|\nabla I_\gamma|$  est faible, le second terme est donc négligeable. La fonctionnelle est alors dominée par la somme des carrés des dérivées partielles du s-GVF. Le s-GVF solution de l'équation (eq.1) varie donc lentement dans les régions homogènes. Dans le cas où  $|\nabla I_\gamma|$  domine (sur les contours), la solution qui minimise la fonctionnelle  $\mathcal{E}$  est directement les champs des gradients du CV local :  $\mathbf{v} = \nabla I_\gamma$ . Au fi-

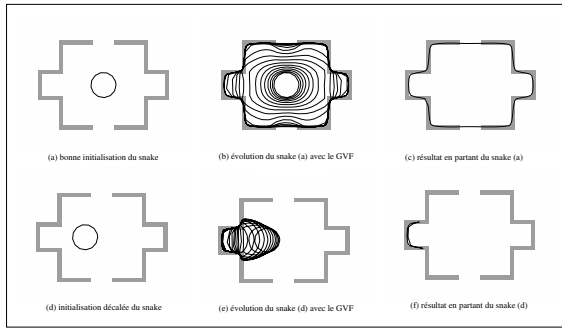


FIG. 1 – Importance de l'initialisation pour l'utilisation du GVF.

nal le s-GVF est un compromis entre champs homogène de vecteur directionnels et champs des gradients du CV local.

### 3 Automatisation de l'initialisation

#### 3.1 Problème du positionnement initial et centres de divergence

##### 3.1.1 Instabilité relative au positionnement initial

Le positionnement de la courbe initiale est une étape cruciale pour la segmentation par contours actifs. L'utilisation du s-GVF permet d'attirer la courbe vers les contours de l'image même si ces contours sont éloignés. Elle ne résout cependant pas complètement le problème de l'initialisation. Un mauvais positionnement de la courbe initiale peut aboutir à des résultats aberrants.

La figure 1 illustre ce phénomène. Nous utilisons le GVF snake de Xu et Prince [6] pour segmenter l'image. Sur la première rangée, nous initialisons le contour actif au centre de la forme géométrique. Nous remarquons que la courbe converge vers le contour. Sur la deuxième rangée, le contour initial est légèrement excentré sur la gauche. Le snake se plaque complètement sur un des bords de l'objet.

##### 3.1.2 Définition des centres de divergence

Pour expliquer cette instabilité, nous utilisons les *centres de divergence* (CD) [5]. Nous en proposons deux définitions généralisées : les *centres de forte divergence* (CSD, pour *Center of Strong Divergence*) et les *centres de faible divergence* (CWD, pour *Center of Weak Divergence*) du champ s-GVF.

Soit  $pole(x)$  une fonction indiquant le signe de la variable  $x$  :

$$pole(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

Soit  $\mathbf{v} = (u(i, j), v(i, j))$  le s-GVF de l'image, supposé non nul. Nous définissons  $\mathcal{C}_v$  (respectivement  $\mathcal{C}_h$ ) comme l'ensemble des centres de divergence pour la direction verticale (respectivement horizontale) :

$$\mathcal{C}_v = \{(i, j) \mid u(i, j) \leq u(i+1, j) \wedge \text{abs}(\text{pole}(u(i, j)) + \text{pole}(u(i+1, j))) \leq 1\}$$

$$\mathcal{C}_h = \{(i, j) \mid v(i, j) \leq v(i, j+1) \wedge \text{abs}(\text{pole}(v(i, j)) + \text{pole}(v(i, j+1))) \leq 1\}.$$

Nous définissons ensuite les centres de forte et de faible divergence de la manière suivante. Posons  $\mathcal{C}_{\text{fort}}$  l'ensemble des centres de forte divergence du s-GVF, et  $\mathcal{C}_{\text{faible}}$  l'ensemble des centres de faible divergence du s-GVF :

$$\mathcal{C}_{\text{fort}} = \{(i, j) \mid (i, j) \in \mathcal{C}_v \wedge (i, j) \in \mathcal{C}_h\} \quad (3)$$

$$\mathcal{C}_{\text{faible}} = \{(i, j) \mid (i, j) \in \mathcal{C}_v \vee (i, j) \in \mathcal{C}_h\}. \quad (4)$$

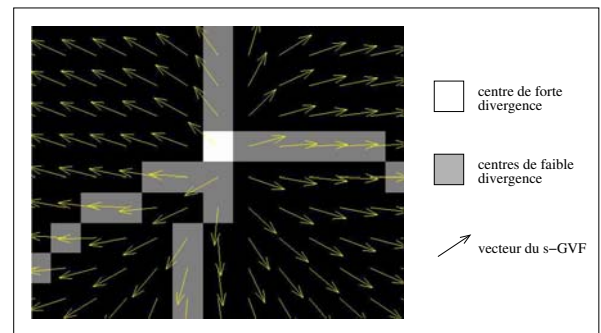


FIG. 2 – Centre de forte divergence (en blanc) et centres de faible divergence (en gris).

La figure 2 présente un exemple de s-GVF et de ses CSD et CWD.

#### 3.2 Analyse des centres de divergence

Ces centres sont les points sur lesquels les vecteurs du s-GVF changent d'une (pour la faible divergence) ou plusieurs (pour la forte divergence) directions. La figure 3 montre le centre de forte divergence de l'image *room* (Fig. 1). Dans cet exemple simple, pour que le snake converge vers le contour, la courbe initiale doit contenir le CSD. Nous généralisons cette propriété à des formes plus complexes dans la section 3.2.2.

Les centres de faible divergence forment des chaînes dont les intersections sont des centres de forte divergence.

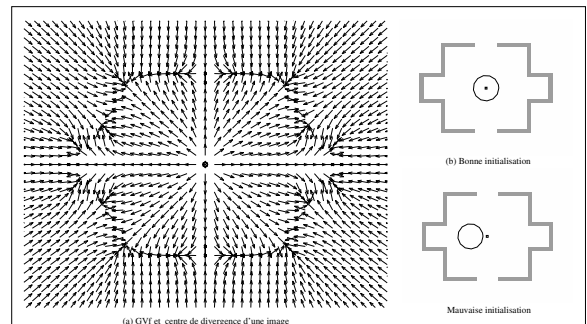


FIG. 3 – (a)GVF et le centre de divergence de l'image "room". Relation avec les initialisations de la figure 1.

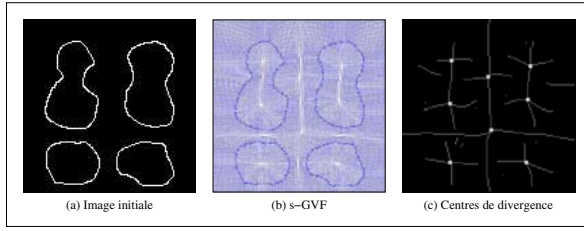


FIG. 4 – Génération du s-GVF et des centres de divergence sur une image synthétique. (a) Image initiale. (b) s-GVF. (c) Centres de faible divergence (gris) et forte divergence (blanc).

Ces deux définitions sont utilisées pour expliquer le processus d'initialisation du B-spline snake.

### 3.2.1 Relation entre centres de divergence et squelette des régions

Le **squelette** d'une région est le lieu des centres des disques de rayon maximum inscrits dans l'objet. Le rayon en chaque point permet de reconstruire l'objet. Le squelette peut aussi être défini comme l'ensemble des points équidistants aux deux bords de l'objet. Cette définition correspond à l'état stable obtenu par amincissements itératifs.

#### Squelette énergétique :

On généralise la notion de squelette en substituant la distance euclidienne par la quantité d'énergie transmise lors de la diffusion. Nous nommons ce squelette généralisé : squelette énergétique.

#### Propriété :

Les lignes formées par les centres de faible divergence forment un squelette énergétique des régions délimitées par les contours de l'image. Ceci parce qu'un changement directionnel de vecteurs voisins du s-GVF indique une équidistance énergétique.

Cette propriété est exploitée dans l'algorithme d'initialisation pour justifier la dilatation du chemin reliant les centres (Sec. 3.2.3). La figure 4 montre un exemple de  $\mathcal{C}_{\text{fort}}$  et de  $\mathcal{C}_{\text{faible}}$  calculés sur une image de synthèse.

#### Propriété :

Dans un GVF, les vecteurs associés aux voisins d'un centre de forte divergence  $c$  ont tous des directions fuyant ce centre (Fig. 5) :

$$\forall p \in \mathcal{V}_{\text{orth}}(c) : \vec{v}(p) \cdot \vec{\omega} \geq 0 \quad (5)$$

$$\forall p \in \mathcal{V}_{\text{diag}}(c) : u(p)\omega_i \geq 0 \vee v(p)\omega_j \geq 0 \quad (6)$$

où  $\mathcal{V}_{\text{orth}}(c) = \{v_2, v_4, v_6, v_8\}$  et  $\mathcal{V}_{\text{diag}}(c) = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$  forment le voisinage en 8-connexité du CSD  $c$ , et  $\vec{cp} = \vec{\omega} = (\omega_i, \omega_j)$ .

### 3.2.2 Propriété fondamentale d'initialisation

A la base de ces particularités, nous formulons la proposition importante suivante.

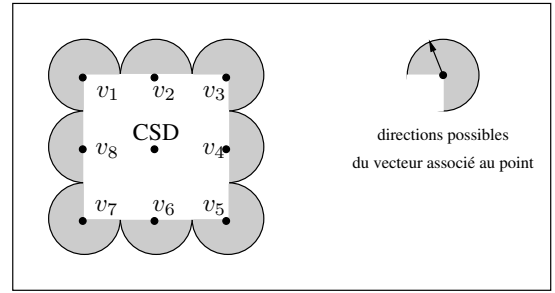


FIG. 5 – Directions possibles des vecteurs voisins d'un centre de divergence. Le vecteur partant de  $v_i$  décrit la partie grise du disque centré sur le pixel  $v_i$ .

#### Proposition :

L'initialisation d'un contour actif dont l'énergie externe repose sur un champ de vecteurs gradients doit :

- être incluse dans la région à segmenter ;
- contenir tous les centres de forte divergence de la région ;
- contenir tous les centres de faible divergence qui relient ces centres de forte divergence.

#### Illustration

La figure 6 illustre cette proposition. L'image initiale correspond à la figure 6(A), et son GVF à la figure 6(B). Chaque colonne correspond à un cas d'initialisation différent :

- dans la colonne (a) : le contour initial ne contient qu'un seul centre de divergence sur trois possibles ;
- dans la colonne (b) : le contour initial contient les trois CSD mais pas tous les CWD les reliant ;
- dans la colonne (c) : le contour initial ne contient aucun CSD, mais occupe une grande partie de la région ;
- dans la colonne (d) : le contour initial respecte la proposition précédente.

Nous utilisons un algorithme de B-spline snake où les nœuds sont forcés à se répartir régulièrement [4, 2]. Le GVF agit sur les points de jonction, représentés par les petits cercles. Chaque ligne de la figure 6 correspond à une étape de la segmentation. Les résultats sur la dernière ligne sont cohérents avec la proposition fondamentale d'initialisation : seule la courbe initiale, qui la vérifie, permet une bonne segmentation.

### 3.2.3 Algorithme d'initialisation automatique

A partir des propriétés des centres de divergence présentées ci-dessus, nous proposons une méthode automatique pour déterminer et positionner le snake initial. L'algorithme considère un point quelconque dans la cavité à segmenter. La propriété des directions fuyantes peut être prise dans le sens inverse : si on inverse le s-GVF, tous les vecteurs convergent vers un ou plusieurs CSD. Pour tout point initial, on suit les directions du s-GVF inversé pour atteindre le pixel de  $\mathcal{C}_{\text{fort}}$  :

Tantque  $(p \notin \mathcal{C}_{\text{fort}}) : p \leftarrow (p - \mathbf{v}(p))$ . Fintantque

Une fois un CSD trouvé, nous sélectionnons tous les CSD connexes via des CWD, et le chemin qui les relie. Nous appliquons une dilatation morphologique sur ce che-



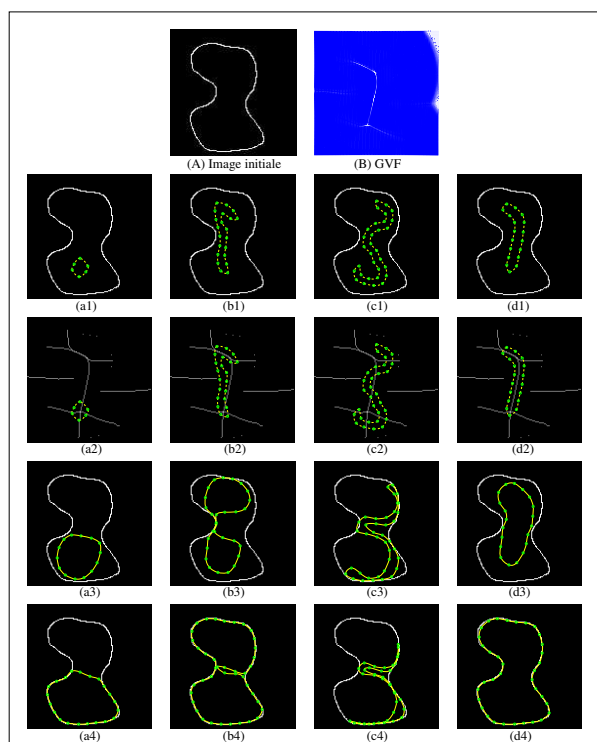


FIG. 6 – Evolution d'un B-spline snake suite à différentes initialisations.

min. Le contour ainsi obtenu sert d'initialisation pour le snake (Fig. 7).

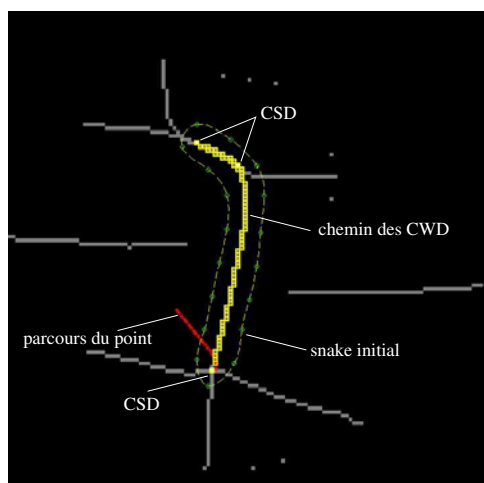


FIG. 7 – Illustration du procédé d'initialisation automatique du snake.

## 4 Expérimentations

Nous présentons des résultats sur des images échographiques réelles. Pour chaque image, la carte des centres de divergence et le contour initial automatiquement trouvés sont présentés (Fig.8). Ces contours permettent de segmenter les cavités cardiaques correspondantes, avec une courbe finale se répartissant sur la globalité des parois.

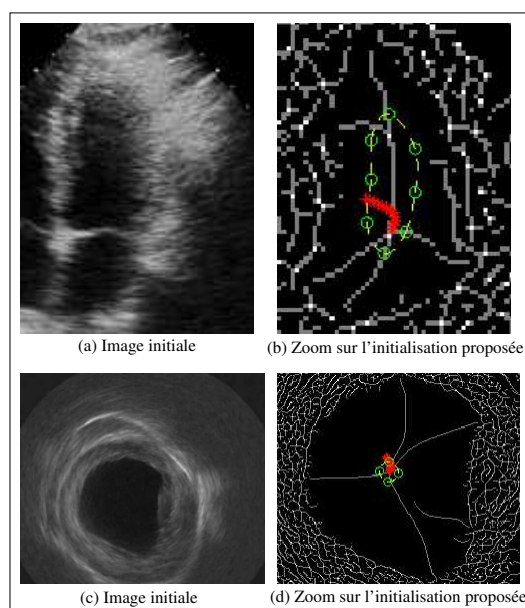


FIG. 8 – (a) et (c) Images échographiques initiales (b) et (d) Centres de divergences et zoom sur les initialisations proposées correspondantes.

## 5 Conclusion et Perspectives

Nous avons présenté un nouveau modèle de segmentation automatique robuste par B-spline snake. La technique d'initialisation peut être utilisée avec tout modèle de contour actif paramétrique en rajoutant une énergie externe de type GVF et en utilisant une fonction d'inhibition pour éviter la concurrence entre les énergies externes. Plusieurs perspectives s'ouvrent, notamment l'extension de ces méthodes au traitement des images 3D et une meilleure prise en compte de l'aspect dynamique, puisque le speckle est généralement moins corrélé temporellement que spatialement.

## Références

- [1] L. Cohen. On active contour models and balloons. *Computer vision, graphics, and image processing : Image Understanding*, 53 :211–218, 1991.
- [2] F. Precioso, M. Barlaud, T. Blu, and M. Unser. Smoothing b-spline active contour for fast and robust image and video segmentation. *Image Processing, 2003. Proceedings. 2003 International Conference on*, 1 :37–40, 2003.
- [3] C. Tauber, H. Batatia, and A. Ayache. A robust speckle reducing anisotropic diffusion. *Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing ICIP*, 2004.
- [4] M. Unser. Splines : A perfect fit for signal and image processing. *IEEE Signal Processing Magazine*, 16 :22–38, 1999.
- [5] G. Xingfei and J. Tian. An automatic active contour model for multiple objects. *Pattern Recognition, 2002. Proceedings. 16th International Conference on*, 2 :881–884, 2002.
- [6] C. Xu and J.L. Prince. Snakes, shapes, and gradient vector flow. *IEEE Trans. on Image Proc.*, 7 :359–369, 1998.

# Détection robuste et automatique des contours myocardiques sur des séquences IRM cardiaques marquées

Aymeric HISTACE<sup>1</sup>, Christine CAVARO-MÉNARD<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés  
69, avenue Notre Dame du Lac, 49000 Angers, France

aymeric.histace@univ-angers.fr, christine.menard@univ-angers.fr

**Résumé** — L'évaluation non invasive de la fonction cardiaque présente un intérêt majeur pour le diagnostic et le suivi de pathologies cardio-vasculaires. L'IRM cardiaque marquée (ou taggée) permet de mesurer des paramètres anatomiques et fonctionnels du myocarde. Ce protocole fait apparaître de manière non invasive une grille sur la zone ventriculaire gauche se déformant avec le myocarde. Le suivi de cette grille permet ainsi d'estimer le déplacement intra-myocardique. L'objectif de notre étude est d'automatiser la détection et le suivi des contours endocardique et épicaudique du ventricule gauche afin d'optimiser l'étude quantitative 2D+T de la contraction pariétale. La méthode que nous avons développée est fondée sur l'utilisation de l'analyse de texture associée à un modèle de contour actif. En effet, l'analyse de texture permet de générer de meilleures cartes de potentiels que les méthodes classiques (telles que le calcul du gradient par exemple) inefficaces compte-tenu de la faible qualité des images. Cette approche permet l'obtention de résultats satisfaisants à la fois en terme de précision et de reproductibilité.

**Abstract** — The noninvasive evaluation of the cardiac function presents a great interest for the diagnosis of cardiovascular diseases. Cardiac tagged MRI allows the measurement of anatomical and functional myocardial parameters. This protocol generates a dark grid which is deformed with the myocardium. Tracking the grid allows the displacement estimation in the myocardium. The work described in this paper aims to automate the myocardial contours detection in order to optimize the quantitative 2D+T study of the parietal contractions on Short Axis sequences. The method we have developed for endocardial and epicardial contours detection is based on the use of texture analysis and active contours models. Texture analysis allows us to define potential maps more efficient than those usually involved in active contours methods where attractors are often based on gradient and which were useless in our study. This approach allows to obtain satisfying results in term of precision but also in term of reproducibility.

## 1 Introduction

L'IRM de marquage tissulaire (*tagged MRI*) est actuellement la seule modalité en imagerie cardiaque autorisant une estimation quantitative de la déformation intramyocardique. Cette technique permet la génération non invasive de bandes sombres (*tags*) au niveau du myocarde, se déformant au cours du temps avec le mouvement de contraction du Ventricule Gauche (VG) (*i.e.* de la télédiastole à la télésystole) représentant à lui seul 80% de la fonction cardiaque.



FIG. 1: Quelques images d'une séquence Petit-Axe (PA) acquise en IRM cardiaque marquée (de la télédiastole à la télésystole).

Cette technique présente néanmoins un inconvénient certain, dans la mesure où le protocole d'acquisition entraîne une perte des qualités images caractéristiques de l'IRM conventionnelle, en particulier au niveau du contraste. Ainsi

donc, les méthodes habituelles intervenant dans la détection et le suivi de structure (ici les bandes sombres) sont difficilement applicables en tant que telles, et ce en raison de leur mauvaise adaptation à la problématique image. Bien qu'ayant fait l'objet de nombreuses recherches au cours des 20 dernières années, les différentes méthodes d'analyse mises en place sur les séquences d'IRM cardiaques marquées n'ont pas permis, à ce jour, l'utilisation en routine clinique de cette modalité. Les approches développées sont multiples et font appel à des cadres théoriques variées permettant, d'une part, une estimation directe du champ de déformation ventriculaire gauche (mesure de flot optique [14, 7, 5], recalage d'images [2, 13], mesure de phase locale [12, 8]) et, d'autre part, une estimation indirecte de ce même champ par détection et suivi du motif de marquage au moyen de modèles de contours actifs [11, 15, 1] (entre autres), de l'exploitation du profil gaussien des *tags* [4] (entre autres) ou bien encore de l'utilisation de l'information spectrale [16, 6]. Il reste néanmoins difficile de trouver, parmi ces approches, une technique intégrant à la fois les contraintes liées aux propriétés images des IRM cardiaques marquées ainsi que celles liées à une utilisation en routine clinique des outils développés (automatisme, rapidité des acquisitions et des traitements, robustesse, précision).

Afin de remédier à ce problème, nous nous intéressons



pour notre part, à une méthode d'estimation indirecte du champ de déformation ventriculaire gauche au moyen du suivi et de la détection du motif de marquage par déformation successive d'une grille virtuelle de *B-splines* au cours de la systole ventriculaire [9]. Ce choix, concerté avec les cardiologues, nous impose, en revanche, d'y intégrer une segmentation automatique des contours myocardiques. Les travaux de Young *et al.* [15] montrent en effet qu'une pondération différente des énergies interne et externe associées aux nœuds de la grille déformable, fonction de l'appartenance ou non au myocarde, permet l'obtention d'un suivi plus précis. De plus, la zone délimitée par les deux contours permet une quantification des déplacements et déformations du myocarde localisée sur la couronne du VG. Cependant, la littérature scientifique sur ce sujet particulier, ne fait pas état, actuellement, de méthodes automatiques adaptables directement aux images marquées en grille. Nous présentons donc dans cette article une méthode de détection et de suivi automatique des contours myocardiques fondée sur l'utilisation d'un modèle simple de contour actif auquel nous associons une énergie image particulière, issue d'une analyse de texture des images IRM cardiaques marquées.

## 2 Méthodes

Considérons la fonctionnelle énergétique d'un modèle classique de contour actif [10] donné par :

$$E(C) = \alpha \int_0^1 |C'(q)|^2 dq + \beta \int_0^1 |C''(q)|^2 dq - \lambda \int_0^1 |\nabla I_0(C(q))| dq, \quad (1)$$

où  $C$  est une courbe paramétrée,  $I_0$  l'image étudiée, et  $\alpha, \beta, \lambda$  des constantes positives. Les deux premières ( $\alpha$  et  $\beta$ ) contrôlent la régularité de la courbe (énergie interne), et  $\lambda$  contrôle l'attraction de la courbe vers la structure à segmenter de l'image  $I_0$  lors de la minimisation de  $E$ .

Dans le cas de la segmentation des IRM cardiaques marquées, le caractère bruité des images et la présence du motif de marquage rendent l'opérateur gradient inefficace à la mise en place d'une carte de potentiels susceptible de mettre en évidence les contours du VG. Nous proposons donc de calculer ce gradient, non pas sur l'image courante  $I_0$ , mais sur une carte de texture  $I_{texture}$  qui en est directement issue et permettant de caractériser par des potentiels forts les contours myocardiques.

## 3 Détection et suivi du contour endocardique

Une propriété importante observée sur les coupes IRM cardiaques marquées est la disparition rapide des *tags* dans la cavité cardiaque due à l'expulsion du sang dans la grande circulation lors de la contraction du VG. Cette propriété nous amène donc à considérer deux zones de texture différentes au niveau du VG : (i) la cavité cardiaque elle-même, caractérisée par une texture homogène, et (ii) la couronne

myocardique caractérisée, elle, par une texture en grille et donc non homogène. Partant de cette constatation, il est alors possible d'intégrer ces deux propriétés dans la création d'une carte de texture dont chaque intensité de pixel s'obtient comme la somme pondérée de la moyenne  $MOY$  et de l'écart-type  $STD$  d'un voisinage  $V$  ( $11 \times 11$ , valeur optimale empirique) autour du pixel courant de l'image traitée :

$$I_{moy/std}(i, j) = w_{moy} \cdot MOY_V(i, j) - w_{std} \cdot STD_V(i, j) \quad , \quad (2)$$

où  $w_{moy}$  et  $w_{std}$  sont les poids respectifs donnés à la moyenne et à l'écart-type. Cette approche permet d'augmenter de manière significative le niveau de gris des pixels situés dans des zones homogènes dont la variance, sur le voisinage considéré, est plus faible que pour les pixels proches des *tags* (Figure 2.b).

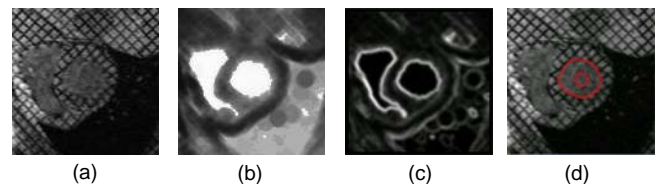


FIG. 2: (a) Image originale, (b) Génération d'une carte de texture moyenne/écart-type ( $\frac{w_{std}}{w_{moy}} = 2$  et  $T = 11$ ), (c) Obtention d'une carte de potentiels par calcul du gradient de l'image moyenne/écart-type, (d) initialisation et détection du contour endocardique.

L'obtention de la carte de texture moyenne/écart-type permet donc de générer, par un simple calcul de gradient, une carte de potentiels pertinente pouvant s'insérer dans le formalisme des contours actifs (Figure 2.c). Afin de se débarrasser des problèmes d'initialisation, nous ajoutons un terme énergétique correspondant à la force ballon de Cohen [3]. Ceci autorise alors une initialisation éloignée des contours sous forme de cercle (au centre de la cavité cardiaque par exemple (Figure 2.d)). Le suivi du contour au cours de la contraction ventriculaire (entre la télédiastole et la télésystole) est assuré par une répétition du processus décrit ci-dessus, initialisé avec le résultat de la détection précédent l'instant de contraction considéré.

## 4 Détection et suivi du contour épicaudique

La détection du contour endocardique sur la première image de la séquence présente une robustesse et une reproductibilité importantes de par l'intensité élevée des pixels de la carte de potentiels correspondant à la frontière endocardique. Nous utilisons donc ce contour pour initialiser le contour épicaudique dans le processus de détection.

Ceci étant, la génération d'une carte de texture associée à la détection du contour épicaudique, selon une approche similaire au contour endocardique, est plus complexe. En effet, aucun phénomène du type écoulement sanguin n'entraîne la disparition des *tags* dans une zone d'intérêt dont

le rehaussement d'intensité pourrait permettre une détection précise. Seule la zone pulmonaire (en hyposignal sur les images) peut servir à un apport partiel d'information. Ainsi, afin de reformuler le problème dans un contexte plus exploitable, nous nous intéressons non pas à la zone myocardique, mais plutôt à la zone pulmonaire. Cette région de l'image présente en effet des caractéristiques texturales particulières pouvant être exploitées ; la nature désordonnée de l'arrangement des pixels dans cette zone entraîne une valeur élevée du paramètre entropie issue de la matrice de co-occurrence en comparaison des valeurs obtenues dans d'autres régions de l'image. L'utilisation de cette propriété, mise uniquement en exergue par le paramètre d'entropie, permet l'obtention, par un procédé similaire au rehaussement de contraste de la cavité cardiaque, d'une carte de texture sur laquelle l'information pulmonaire est mise en évidence (Figure 3).

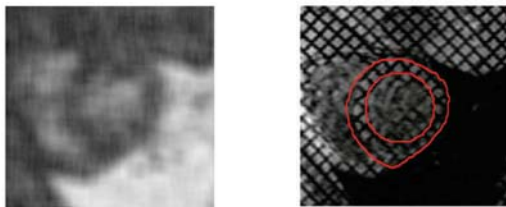


FIG. 3: Mise en évidence de la zone pulmonaire par mesure d'entropie sur un voisinage  $5 \times 5$  (à gauche) et initialisation et détection du contour épicaudique (à droite).

De la même manière que précédemment, cette carte de texture est intégrée dans notre modèle de contour actif auquel est associé une force ballon. Cette approche permet de détecter de manière fiable sur la première image de la séquence le contour épicaudique (Figure 3). Le suivi s'effectue de la même manière que pour le contour endocardique.

## 5 Résultats

L'utilisation des contours actifs associés à une carte de texture adaptée permet de détecter les contours endocardique et épicaudique de la télédiastole à la télésystole sur des séquences PA (Figure 4).

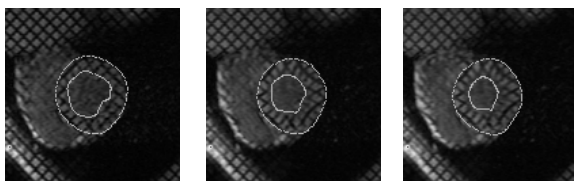


FIG. 4: Détection et suivi des contours épicaudique et endocardique sur une séquence PA de la télédiastole à la télésystole.

La méthode utilisée est reproductible et ne nécessite pas de reparamétrisation entre chaque patient. La Figure 5 montre le résultat de détection des contours obtenu sur une séquence PA d'un patient différent pour des valeurs

de paramètres identiques au niveau de l'algorithme.

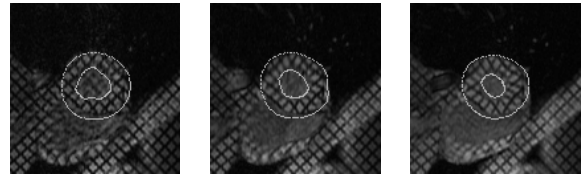


FIG. 5: Détection et suivi des contours épicaudique et endocardique sur une séquence PA, de la télédiastole à la télésystole, acquise sur un patient différent.

En terme de précision, la comparaison des surfaces myocardiques segmentées automatiquement aux surfaces obtenues par un tracé expert manuel montre que, quantitativement, sur un ensemble de 8 séquences (soient 48 images) plus de 80% des surfaces correspondent.

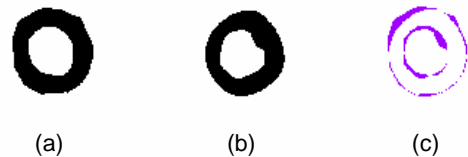


FIG. 6: Masques de détection des contours du VG sur une coupe PA : (a) masque expert, (b) masque automatique, (c) superposition des deux (la surface violette correspond à l'erreur de détection).

La comparaison de ces deux masques binaires permet la caractérisation de la méthode de segmentation au moyen du calcul de 2 paramètres particuliers : (i) le pourcentage de pixel correctement détectés (VP) et (ii) le pourcentage de pixels faussement considérés comme appartenant à la couronne cardiaque (FP). Le premier paramètre renseigne sur la capacité de la technique à détecter les pixels appartenant à la zone myocardique ventriculaire gauche. Le deuxième renseigne sur la capacité de la méthode à ne détecter **que** les pixels appartenant à cette même zone. Dans le cadre clinique, un examen pourra être considéré comme validé s'il se caractérise par un pourcentage de vrais positifs important et un pourcentage de faux positifs faible.

Le Tableau 1 présente les valeurs moyennes de paramètres VP et FP obtenus par l'étude des 8 séquences IRM cardiaques marquées (technique *SPAMM*), ainsi que l'écart-type correspondant.

	Moyenne	Écart-type
VP	81,25%	2,83
FP	2,89%	0,12

TAB. 1: Caractérisation de la méthode de détection des contours myocardiques par calcul des paramètres 'VP' et 'FP'.

Il apparaît donc que, en moyenne, 81% des zones détectées automatiquement correspondent à celles mises en évidence par le tracé expert, mais ceci pour un pourcen-

tage de pixels faussement détectés inférieur à 3%. Etant donné que cette segmentation n'a pas pour but premier de calculer des paramètres cliniques de type volume ou encore masse, mais bien de permettre un suivi optimisé de la grille de *tags* par la suite, ces résultats sont tout à fait satisfaisants.

## 6 Conclusion

La génération de cartes de potentiels, par analyse de texture s'avère donc être une méthode efficace pour intégrer dans un modèle de contour actif les informations images pertinentes. La précision de ces cartes, principalement concernant le contour endocardique, permet de détecter de façon **robuste et reproductible** les contours du VG. Dans le cas du contour épicaudique, la carte d'entropie apparaît comme un candidat meilleur que le potentiel de gradient obtenu après fermeture morphologique.

Par ailleurs, la disparition progressive des *tags*, entraînant une perte de contraste entre la cavité cardiaque et le reste de l'image, peut être compensée en augmentant progressivement le poids donné à l'écart-type, et ce de manière linéaire, lors de la génération de la carte moyenne-variance.

Enfin, aucune intervention manuelle n'est nécessaire durant les détections sur l'ensemble de la séquence, et le temps de calcul n'est que de, en moyenne, 2 minutes pour le traitement d'une séquence complète sur un Pentium IV cadencé à 1,4 GHz.

## Références

- [1] A.A. Amini, Y. Chen, R.W. Curwen, V. Mani, and J. Sun. Coupled B-snake grids and constrained thin-plate splines for analysis of 2D tissue deformations from tagged MRI. *IEEE Transaction on Medical Imaging*, 17(3):344–356, 1998.
- [2] R. Chandrasekara, R.H. Mohiaddin, and D. Rueckert. Analysis of myocardial motion in tagged MR images using nonrigid image registration. In *Medical Image Understanding and Analysis*, Porthmouth, 2002.
- [3] M. Cohen, Y. Cottin, F.X. Soto, P.M. Walker, C. Touzery, S. Roy, F. Brunotte, P. Luois, and J.E. Wolf. Etude de la viabilité myocardique après infarctus du myocarde. intérêts et limites de l'IRM comparée à la scintigraphie myocardique. *Archives des Maladies du Cœur et des Vaisseaux*, 90(6):817–825, 1997.
- [4] T. Denney. Estimation and detection of myocardial tags in MR images without user-defined myocardial contours. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 18(4):330–344, 1999.
- [5] L. Dougherty, J. Asmuth, A. Blom, L. Axel, and R. Kumar. Validation of an optical flow method for tag displacement estimation. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 18(4):359–363, 1999.
- [6] M. Groot-Koerkamp, G. Snoep, A. Muijtjens, and G. Kemerink. Improving contrast and tracking of tags in cardiac magnetic resonance images. *Magnetic Resonance in Medicine*, 41:973–982, 1999.
- [7] S. Gupta, J. Prince, and S. Androutsellis-Theotokis. Bandpass optical flow for tagged MRI. In *International Conference on Image Processing*, volume 3, pages 364–367, San Diego CA, 1997.
- [8] I. Haber, R. Kikinis, and C.F. Westin. Phase-driven finite elements model for spatio-temporal tracking in tagged mri. In *Proceedings of Fourth International Conference On Medical Image Computing and Computer Assisted Intervention (MICCAI'01)*, pages 1352–1353, 2001.
- [9] A. Histace, V. Courboulay, C. Cavaro-Ménard, and M. Ménard. Détection et suivi des déformations intramyocardiques en irm cardiaque marquée. In *Actes du congrès GRETSI 2003*, volume 3, pages 316–320, 2003.
- [10] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes: Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1:321–331, 1988.
- [11] S. Kumar and D. Goldgof. Automatic tracking of SPAMM grid and the estimation of deformation parameters from cardiac MR images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 13(1):122–132, 1994.
- [12] N.F. Osman, E.R. Mc Veigh, and J.L. Prince. Imaging heart motion using Harmonic Phased MRI (HARP). *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 19:186–202, 2000.
- [13] C. Petitjean, N. Rougon, F. Prêteux, Ph. Cluzel, and Ph. Grenier. A non rigid registration approach for measuring myocardial contraction in tagged mri using exclusive f-information. In *Proceedings International Conference on Image and Signal Processing (ICISP'2003)*, Agadir, Morocco, 25-27 June 2003.
- [14] J.L. Prince and E. McVeigh. Motion estimation from tagged MR image sequences. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 11(2):238–249, 1992.
- [15] A.A. Young, D.L. Kraitchmann, L. Dougherty, and L. Axel. Tracking a finite element analysis of stripe deformation in magnetic resonance tagging. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 14(3):413–421, 1995.
- [16] S. Zhang, M. Douglas, L. Yaroslavsky, R. Summers, V. Dilsizian, L. Fananapazir, and S. Bacharach. A fourier based algorithm for tracking SPAMM tags in gated magnetic resonance cardiac images. *Medical Physics*, 32(8):1359–1369, 1996.

# Segmentation guidée en imagerie CT 3D : Application à l'arborescence artérielle pulmonaire

Raphaël SEBBE<sup>1,2</sup>, Bernard GOSSELIN<sup>1</sup>, Roger LÉDÉE<sup>2</sup>, Emmanuel COCHE<sup>3</sup>, Benoît MACQ<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Faculté Polytechnique de Mons, TCTS, 1 Av. Copernic, 7000 Mons, Belgique

<sup>2</sup>Université d'Orléans, LESI, 12 rue de Blois BP 6744, 45067 Orléans, France

<sup>3</sup>Université catholique de Louvain, RDGN, Hôpital St-Luc, 10 Av. Hippocrate, 1200 Brussels, Belgique

<sup>4</sup>Université catholique de Louvain, TELE, 2 Place du Levant, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique  
raphael.sebbe@tcts.fpms.ac.be

**Résumé** — Nous proposons une méthode originale de segmentation de l'arborescence artérielle pulmonaire à partir d'images CT 3D. Cette méthode combine une approche à croissance de région à un modèle de connaissance anatomique. La croissance de région est réalisée par l'algorithme de Fast Marching à partir d'un germe placé par le radiologue au départ de l'artère pulmonaire. Le vaisseau est alors découpé en tranches successives qui permettent notamment d'évaluer ses caractéristiques, telles que sa section et sa courbure. La méthode de croissance de région utilisée permet une intégration aisée d'un modèle de connaissance dont l'objectif est de solutionner le problème des contacts entre vaisseaux. Le modèle est une représentation des vaisseaux du thorax par courbes paramétriques 3D. L'information du modèle est utilisée pour modifier la vitesse de propagation du contour actif. Notons également que le modèle doit être réutilisé et est donc être recalé sur le CT de chaque patient.

**Abstract** — We propose a novel method, guided slice marching, to segment opacified vessels tree in 3D image sets (CT scans). The region growing method uses fast marching with freezing of boundaries to advance inside the vessel in 3D from a given seed. Large scale features, such as vessel section and curvature, are evaluated for each vessel slice. The formulation of this method, which is based on interface evolution theory, enables easy integration of an a priori model of knowledge of vessels topology to handle the case of touching vessels, where image-based method systematically fails. The a priori knowledge is expressed as parametric curves that model vessels centerline. That information is injected in the slice marching method through the speed of propagation, setting it to zero at missing vessels boundaries. The model is intended to be re-used across patients, and must therefore be registered with the image.

## 1 Introduction

L'embolie pulmonaire reste une maladie grave avec un pourcentage non négligeable de mortalité chez les patients non traités. Son diagnostic repose aujourd'hui sur différentes modalités. Une tendance est d'exploiter le scanner spiralé car il est moins invasif que l'angiographie et apporte une information différente que celle que propose la scintigraphie, même s'il a l'inconvénient d'être irradiant. L'examen consiste à injecter un produit de contraste au patient, par la veine du pli du coude, de manière à opacifier le flux sanguin. En réglant le temps et le taux d'injection, le radiologue arrive à faire de sorte que les emboles apparaissent comme des taches sombres à l'intérieur de la masse blanche de l'artère pulmonaire et de ses ramifications. L'objectif final est de fournir un outil informatique de détection automatique de ces caillots pour assister le radiologue. Etant donné la grande quantité d'informations à traiter (quelques centaines de coupes 2D de minimum 512x512 points par image), il est possible que des emboles dans des artères segmentaires ou sous segmentaires (après 2 niveaux de bifurcations) restent non détectées. Une méthode automatique pourrait dès lors attirer l'attention du radiologue sur les zones à risque. Mais, la segmentation de cet arbre pulmonaire est relativement complexe.

Ceci est principalement dû à la forme allongée des structures anatomiques, aux nombreux points de bifurcations et à la qualité des images 3D, présentant du bruit et autres artefacts. De plus, lié à cette qualité, se pose le problème au sens du traitement de l'image, des vaisseaux qui se touchent et donc de frontières virtuelles ou mal définies, en particulier, l'aorte et la veine cave présentent des contacts francs avec l'artère pulmonaire. Un processus de segmentation 3D sans apport de connaissance a priori a été mis en place et testé.

### 1.1 Etat de l'art

Une étude bibliographique récente [1] montre que les méthodes utilisées pour segmenter des structures tubulaires complexes (à plusieurs échelles) sont principalement de type "croissance de région". Nous proposons alors une méthode de segmentation 3D originale, baptisée Slice Marching [2], basée sur l'algorithme de Fast Marching [3] très souvent utilisée avec succès en imagerie médicale et étendue aux formes tubulaires par Deschamps et Cohen [4]. L'originalité de notre méthode est de mettre en œuvre un front d'onde à largeur variable en considérant le concept de tranches de vaisseau (groupe de voxels) liées au temps d'arrivée calculé par l'algorithme de fast marching. La

figure 1 illustre ce principe de tranches. Ce choix se justifie également au regard du grand nombre de données à traiter. Des structures de données ont pu être développées de manière à allouer de la mémoire que là où la méthode est active. De plus, des caractéristiques anatomiques telle que la section des vaisseaux ou leur courbure peuvent être exploitées soit d'un point de vue médical soit pour propager le front de propagation en modifiant sa vitesse par exemple. Notre approche solutionne également les problèmes de sur-bifurcation des méthodes de type Zahlten / Bruijns [5][6], trop sensibles aux irrégularités de surface des vaisseaux, dues au bruit d'acquisition et autres artéfacts. Une autre approche permettant d'atteindre les mêmes objectifs a été proposée récemment par Masutani [7]. Leur méthode fait appel aux techniques de morphologie mathématique. Notre première approche a l'inconvénient de segmenter aussi les structures tubulaires autres que le réseau pulmonaire. Pour palier à ce problème, un modèle de connaissance de la topologie des vaisseaux est intégré à notre modèle de départ.

## 2 Description du Slice Marching

La méthode de Slice Marching a été présentée dans une publication précédente [2]; nous rappelons succinctement son principe.

### 2.1 Propagation du front d'onde

L'équation de propagation est l'équation eikonale (eq 1):

$$|\nabla T(\bar{X})| F(\bar{X}) = 1, \quad \text{avec } T(\bar{X}) = 0 \text{ sur le germe,} \quad (1)$$

$T(\bar{X})$  étant le temps d'arrivée du contour (surface en 3D) en chaque point  $(\bar{X})$  de l'espace, étant donné sa position initiale et sa vitesse de propagation suivant sa normale,  $F(\bar{X})$ . Le contour initial, que nous dénommons germe, est le lieu des points où la valeur de  $T$  est imposée à 0. La solution  $T(\bar{X})$  est calculée par l'algorithme de Fast Marching décrit par Sethian [3]. Le front d'onde pour un temps d'arrivée donné est la surface iso- $T$  correspondante. Notons que le germe (un voxel unique) dans notre application est placé à l'intérieur de l'artère pulmonaire, à proximité du coeur.

### 2.2 Concept de tranche de vaisseau

En suspendant le calcul de la solution quand le temps d'arrivée  $T(\bar{X})$  devient supérieur à un seuil donné  $T_{tranche}$ , et en utilisant une vitesse de propagation quasiment constante, proche de l'unité, à l'intérieur des vaisseaux, nous remarquons que l'ensemble des voxels atteints définissent une tranche dont l'épaisseur dépend du seuil  $T_{tranche}$ .

Nous choisissons la fonction de vitesse  $F(\bar{X})$  comme pratiquement nulle à l'extérieur du vaisseau. Ceci permet de ralentir la progression du contour actif à la frontière des vaisseaux. Ceci est réalisé en pratique en se basant sur la luminance des voxels, puisque nous travaillons avec des vaisseaux opacifiés qui apparaissent clairs dans l'image. Cela ne suffit pas, car le contour continue d'avancer à cette frontière, et c'est la raison pour laquelle nous utilisons un

mécanisme de gel du contour, dans le même ordre d'idée que l'approche de Deschamps et Cohen [4]. Ceci est réalisé en supprimant du front actif, à chaque itération, les voxels dont le temps d'arrivée est supérieur à une valeur donnée, choisie arbitrairement. Le contour cesse donc de grandir sur le bord des vaisseaux.

En itérant le processus, nous avançons, tranche par tranche dans le vaisseau, jusqu'à en atteindre la fin (limité à la résolution du scanner).

Nous définissons le concept de tranche  $\mathcal{S}$  par :

$$\mathcal{S}_k \triangleq \{\bar{X} \mid T_k \leq T(\bar{X}) < T_{k+1}\}. \quad (2)$$

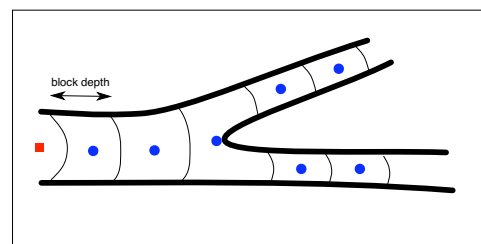


FIG. 1: Concept de tranche de vaisseau. A partir du germe de départ, le contour grandit dans le vaisseau en le découpant en tranches successives.

### 2.3 Vitesse de propagation $F$

La vitesse de propagation doit être choisie pratiquement nulle à l'extérieur des vaisseaux, et proche de l'unité à l'intérieur. De plus, celle-ci doit être strictement positive, c'est une contrainte de l'algorithme de Fast Marching. Partant de la luminance  $I(\bar{X})$  en chaque voxel  $\bar{X}$ , nous utilisons cette vitesse :

$$F = \epsilon \quad \text{si } I(\bar{X}) < I_{th} \quad (3)$$

$$= I(\bar{X}) \quad \text{sinon} \quad (4)$$

où  $\epsilon$  est une valeur proche de 0 et  $I_{th}$  un seuil proche de l'unité (nous utilisons 0.9, puisque les vaisseaux sont opacifiés, leur luminance étant donc proche de l'unité).

### 2.4 Détection des bifurcations

Parallèlement à l'avancée du contour actif dans l'artère pulmonaire, une structure d'arbre contenant les tranches successives est créée. Ceci est réalisé en pratique en scindant chaque tranche  $\mathcal{S}_k$  en autant de groupes connexes de voxels et en utilisant les liens de parenté.

## 3 Adjunction d'un modèle de connaissances anatomiques

Les contacts francs entre vaisseaux opacifiés conduisent à une segmentation erronée de l'artère pulmonaire puisque le contour actif se propage librement d'un vaisseau à l'autre. Ces contacts entre vaisseaux adjacents sont dus à plusieurs phénomènes, tels que la résolution limitée du scanner, le bruit d'acquisition, l'effet de volume partiel et l'éventuelle



trop grande quantité de produit de contraste. Nos images montrent que ce problème est récurrent, et qu'une solution spécifique doit être développée. Cela semble difficile à solutionner sans l'utilisation de connaissances a priori sur les vaisseaux, en particulier, les méthodes basées sur la morphologie mathématique échouent puisque ces contacts peuvent avoir une surface comparable ou supérieure à celle des sections des vaisseaux impliqués. Nous avons donc opté pour l'utilisation d'un modèle de la topologie des vaisseaux du thorax. Ce modèle doit permettre de représenter la topologie et la forme des vaisseaux, et est utilisé pour influencer la propagation du contour actif. En effet, il doit permettre de re-crée les frontières manquantes entre les vaisseaux (figure 2). Enfin, ce modèle doit être réutilisable d'un patient à l'autre, car sa création est une étape fastidieuse; une méthode de recalage doit donc être utilisée.

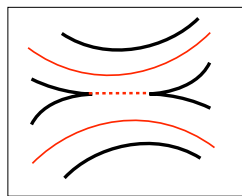


FIG. 2: Utilisation d'un modèle pour recréer les frontières manquantes entre les vaisseaux.

### 3.1 Définition du modèle

Ce modèle est défini par un ensemble de courbes paramétriques 3D qui représentent le centre des vaisseaux principaux du thorax (veine cave, aorte, artères pulmonaires, veines pulmonaires). Nous avons choisi les courbes de Bézier d'ordre 4 pour une facilité de manipulation (déplacement de points de contrôle à la souris), ces courbes ayant la propriété d'interpoler ses points de contrôle. Une section de vaisseau (la partie comprise entre 2 bifurcations) est modélisée par un certain nombre de segments de courbes de Bézier, chacun défini par 4 points de contrôle. Une continuité géométrique (C1) est imposée par contraintes sur les points de contrôle de segments successifs. Ce modèle est représenté à la figure 3.

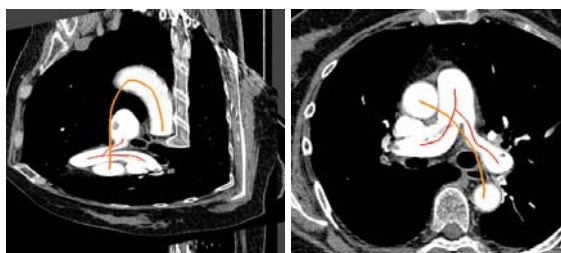


FIG. 3: L'artère pulmonaire et l'aorte sont modélisées par des courbes paramétriques en 3D.

### 3.2 Utilisation du modèle pour la segmentation

Nous introduisons la fonction de potentiel des vaisseaux  $P(\bar{X})$ , définie sur tout le domaine de l'image,

$$P_i(\bar{X}) = R_i/D_i(\bar{X}) \quad (5)$$

$i$  faisant référence aux sections de vaisseaux,  $R_i$  étant le rayon moyen de celle-ci et  $D_i(\bar{X})$  la distance euclidienne entre  $\bar{X}$  et le vaisseau  $i$ .

A partir de cette fonction de potentiel, nous définissons la fonction d'indicateur de vaisseau,  $V(\bar{X})$  de cette manière :

$$V(\bar{X}) = 1 \quad \text{si } \max_i(P_i(\bar{X})) - \max_{j \neq i_{\max}}(P_j(\bar{X})) > \lambda \quad (6)$$

$$\epsilon \quad \text{sinon} \quad (7)$$

avec  $i_{\max} = \arg(\max_i(P_i(\bar{X})))$ .  $\lambda$  est un paramètre ( $\lambda > 0$ ) permettant de choisir la largeur des frontières recrées, et  $\epsilon$  une valeur positive proche de zéro.

Cette fonction est alors utilisée pour modifier la vitesse de propagation du front d'onde comme suit :

$$F'(\bar{X}) = F(\bar{X})V(\bar{X}). \quad (8)$$

Par construction, la fonction  $V(\bar{X})$  est pratiquement nulle lorsque les fonctions de potentiel des vaisseaux sont égales (collision de potentiel). La conséquence directe est de recréer la frontière potentiellement manquante entre 2 vaisseaux proches, en ralentissant la progression du contour actif ( $V(\bar{X})$  impose la frontière). A l'inverse, quand un vaisseau est seul, alors l'image impose la frontière, comme elle le faisait avant l'utilisation du modèle. En pratique,  $V(\bar{X})$  est calculé sur une grille sous-échantillonnée (facteur 8) par un algorithme de carte de distance (nous avons également choisi le Fast Marching, puisque déjà mis en oeuvre), et linéairement interpolé lors de son évaluation sur la grille originale.

### 3.3 Recalage modèle-image

L'idée est de fournir un modèle unique qui doit être recalé sur l'image des différents patients. Cela est réalisé en utilisant un certain nombre de points de référence, ou points fiduciels, dont la position est définie en termes anatomiques dans l'espace du modèle. Ces points fiduciels sont localisés sur l'image du patient, et nous obtenons donc deux ensembles de points correspondants. A partir de cette correspondance, nous définissons une transformation continue, non-linéaire de l'espace par thin-plate [8]. Cette transformation est appliquée au modèle, qui est alors recalé sur l'image du patient. En pratique, nous utilisons 5 points fiduciels mais d'avantage de points peuvent être utilisés si l'image et le modèle présentent des différences importantes. La figure 4 illustre ce procédé.

## 4 Détails expérimentaux

Nous avons testé cette méthode sur des images MSCT de patients admis pour suspicion d'embolie pulmonaire. Ce scanner de type MX 8000, IDT, Philips, Cleveland OH

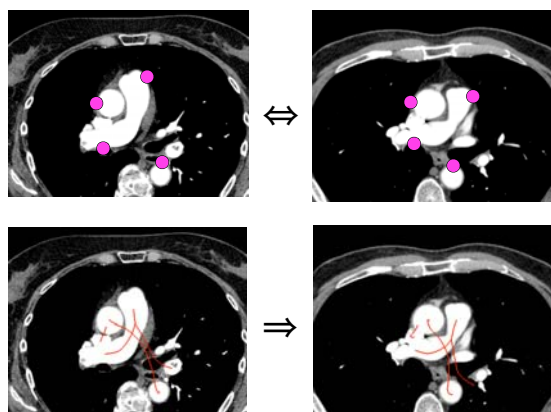


FIG. 4: Les points fiduciels sont définis sur le modèle et ensuite localisés sur l'image du patient. La transformation par thin-plate est évaluée et appliquée au modèle pour le recaler à l'image.

peut acquérir 38 images par seconde et générer plus de 400 images en coupe millimétrique. La taille de la matrice est de 512 par 512 en 12 bits par voxel. 100 mL de produit de contraste non-ionique a été injecté par la veine du pli du coude à un taux de 4 mL/s avec délais variables dans le but d'opacifier l'artère pulmonaire. La figure 5 montre une coupe 2D de la segmentation résultante, respectivement sans l'utilisation du modèle et avec.

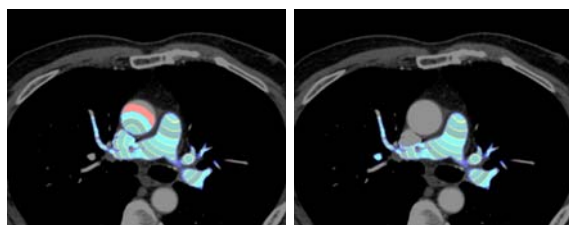


FIG. 5: Résultat de la segmentation. A gauche : segmentation sans utilisation du modèle, le contour se propage dans la veine cave et l'aorte (non désiré). A droite : Utilisation du modèle, le contour reste dans l'artère pulmonaire.

## 5 Discussion

L'utilisation d'un modèle anatomique pour aider le modèle de propagation permet de solutionner le cas des vaisseaux jointifs, avec une intervention limitée de l'utilisateur (moins de 10 points fiduciels doivent être localisés). Le modèle doit être suffisamment générique pour être utilisé sur divers patients, et c'est pour cette raison que la modélisation de l'artère pulmonaire doit être arrêtée après 2 bifurcations, car au-delà, la variabilité est trop grande. La segmentation n'utilise plus que les données de l'image à partir de là. Enfin, puisque nous avons l'intention de détecter des caillots à l'intérieur de l'artère pulmonaire, il convient de mesurer l'influence de ceux-ci sur la phase de segmentation.

La méthode a été testée avec succès sur 5 jeux d'images, même si on note parfois des contacts possibles entre le réseau veineux et artériel, plus loin dans l'arborescence, qui a conduit à l'utilisation d'une contrainte pour empêcher le contour de remonter par les veines pulmonaires. Cette contrainte consiste à empêcher le retour vers des vaisseaux de plus grosse section. D'autre part, on note également que les frontières recrées par le modèle permettent d'éviter la segmentation de l'aorte et de la veine cave. Ces frontières présentent parfois une certaine déviation par rapport à la véritable frontière telle qu'on peut l'imaginer sur l'image, mais cela n'a pas d'incidence dans notre application. Nous nous intéressons maintenant au problème de détection des embolies à l'intérieur de l'artère pulmonaire segmentée.

## References

- [1] C. Kirbas and F. K. H. Quek. A review of vessel extraction techniques. Technical report, VISLab, Wright State University, Dayton, Ohio, Nov. 2002.
- [2] R. Sebbe, B. Gosselin, E. Coche, and B. Macq. Pulmonary arteries segmentation and feature extraction through slice marching. *Proc. of the 14th ProRISC workshop on Circuits, Systems and Signal Processing (ProRISC 2003)*, Veldhoven (Netherlands), November 2003.
- [3] J. A. Sethian. *Level Set Methods and Fast Marching Methods*. Cambridge University Press, 1999.
- [4] T. Deschamps and L. D. Cohen. Fast extraction of tubular and tree 3d surfaces with front propagation methods. In *16th IEEE International Conference on Pattern Recognition (ICPR'02)*, Quebec, Canada, Aug. 2002.
- [5] C. Zahlten, H. Juergens, and H.-O. Peitgen. Reconstruction of branching blood vessels from ct-data. *Proceedings of the Eurographics Workshop on Visualization in Scientific Computing*, Rostock, pages 41–52, June 1994.
- [6] J. Bruijns. Fully-automatic branch labelling of voxel vessel structures. *Proceedings of VMV 2001, Stuttgart*, Nov. 2001.
- [7] Y. Masutani, H. MacMahon, and K. Doi. Computerized detection of pulmonary embolism in spiral ct angiography based on volumetric image analysis. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 21(12):1517–1523, December 2002.
- [8] F. L. Bookstein. Principal warps: Thin-plate splines and the decomposition of deformations. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(6):567–585, 1989.



# Segmentation automatique d'images à faible résolution et faible contraste : Application à l'IRM cardiaque du petit animal

R. LEDEE<sup>1</sup>, R. LECONGE<sup>1</sup>, C. CAVARO-MENARD<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LESI (Laboratoire d'Electronique, Signaux, Images) EA 1715 Université d'Orléans Polytech<sup>1</sup>Orléans, site Galilée BP 6744, 12 rue de Blois 45067 Orléans Cedex 2

<sup>2</sup> LISA (Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés) CNRS FRE 2656 Université d'Angers, 62, avenue Notre Dame du Lac, 49000 Angers

[Roger.Ledee@univ-orleans.fr](mailto:Roger.Ledee@univ-orleans.fr) [Remy.Leconge@univ-orleans.fr](mailto:Remy.Leconge@univ-orleans.fr) [Christine.Menard@univ-angers.fr](mailto:Christine.Menard@univ-angers.fr)

**Résumé** – Nous proposons une nouvelle approche pour la segmentation automatique des contours myocardiens sur des IRM de rats afin de permettre dans un travail ultérieur la quantification de l'infarctus du myocarde chez le rongeur. Dans ce travail, nous adaptons à la qualité des images, un modèle de contours actifs classique dirigé par un champ de vecteurs gradient (*gradient vector flow* ou GVF). Un filtre gaussien, dont la variance est déterminée automatiquement, constitue l'étape de prétraitement. L'initialisation automatique du contour initial est basée sur la localisation des lignes de fond de vallées du GVF. Deux processus de contours actifs continus sont ensuite mis en œuvre avec au départ de leur évolution, une force ballon négative pour diriger le premier vers l'endocarde et une positive pour celui dédié à l'épicarde. Ce double processus de segmentation est testé et évalué sur différents types d'acquisition en IRM cardiaque.

**Abstract** – We propose a new approach for the automatic segmentation of myocardic contours on IRM of rats in order to allow in a later work the quantification of the myocardial infarction of rodents. In this work, we adapt to the image's quality an active contours model guided by a field of gradient vectors (*gradient vector flow* or GVF). A Gaussian filter whose variance is automatically set up constitutes the step of pre processing. At the beginning of their evolution, two processes of continuous active contours are driven by a negative balloon force towards the endocardial border for the first one and positive force for the second which is dedicated to the epicardial border. The automatic initialization of initial contour is based on the localization of the basic lines of valleys of the GVF. This double process of segmentation is tested and evaluated on various types of acquisition in cardiac IRM.

## 1. Introduction

L'infarctus du myocarde est une lésion nécrotique conséquence d'une occlusion brutale de la circulation coronaire. Ceci déclenche une ischémie myocardique régionale sévère, qui, si elle pérennise, aboutit à des lésions cellulaires irréversibles. La gravité de cette maladie dépend surtout de la taille de l'infarctus qui influence les fonctions ventriculaires. L'IRM est actuellement l'imagerie de référence pour la détection, la caractérisation mais également pour la quantification de l'infarctus et l'étude des fonctions ventriculaires. Elle permet aussi de suivre l'évolution de la maladie au cours du temps. Cependant, les agents de contraste sont souvent requis pour améliorer la délimitation entre les zones myocardiques nécrosées et les zones saines par augmentation du contraste entre ces deux régions. La mise au point de nouveaux produits de contraste pour étudier la viabilité myocardique post infarctus ou l'évaluation de nouveaux médicaments pour la cancérologie par exemple passe par une phase d'expérimentation animale. Pour ces développements, des images de cœur de rat sont réalisées sur un mini imageur IRM à haut champ magnétique de 7 Teslas. Malheureusement, ces images présentent une plus faible résolution et un plus faible contraste que les IRM cardiaques humaines, de part la vitesse élevée du battement cardiaque du rat. La segmentation réalisée sur le matériel annexe (de type PC) est manuelle et donc fastidieuse au regard du nombre d'animaux nécessaires aux études pré-cliniques. La segmentation automatique s'avère donc une nécessité.

Il existe en routine clinique des logiciels de détection automatique des contours myocardiens mis au point pour des IRM de cœur humain tel que celui commercialisé par la société IöDP. Ce dernier a été testé et s'avère totalement inadapté à l'imagerie de micro-IRM chez le rongeur.

Dans la littérature, la segmentation des structures cardiaques exploite différentes approches comme celles recensées dans les articles de Clarke [1], d'Hammoude [2] et de Frangi et *al.* [3] par exemple. Parmi les différents travaux récents présentés, les résultats les plus prometteurs sont obtenus en exploitant le principe des contours actifs d'une part [4-7] et du flux de vecteur gradient (GVF) proposé par Xu et Prince en 1998 [8] d'autre part. Les auteurs de [7] soulignent toutefois que la plupart des méthodes de contours actifs sont sensibles au bruit et que le contour initial doit être proche du contour désiré. De plus, les phénomènes de flux stagnant sont la cause de faux contours et la présence des muscles papillaires ajoute une difficulté au challenge de la segmentation si on veut ou non en tenir compte. Pour contrer ces problèmes, ils ont opté pour une approche combinant des informations basées régions et basées contours et en intégrant des informations *a priori* sur la forme des structures cardiaques. Makowski [5] intègre également des informations sur la taille des muscles papillaires dans son algorithme qui fonctionne en deux phases ; la première met en œuvre la force de ballon proposée par Cohen [9] et la deuxième les snakes classiques de Kass, Witkin et Terzopoulos [10]. Les derniers travaux [6-7] montrent qu'il reste encore quelques

difficultés pour obtenir une segmentation entièrement automatique. Le réglage des paramètres des modèles est fonction des images à traiter et s'effectue sur la base de l'expérience [7]. Pour minimiser ce réglage, Santarelli [6] propose d'augmenter le rapport signal à bruit en introduisant une étape de filtrage anisotropique non linéaire avant la mise en œuvre du GVF-snake de Xu [8]. La segmentation du myocarde se déroule ensuite en deux temps. A partir d'une courbe initiale, l'endocarde est recherché et le résultat initialise ensuite un nouveau contour actif pour la localisation de l'épicarde. Il s'avère que l'initialisation des contours actifs est souvent manuelle et donc très simple ; un point initial [5], une courbe fermée tracée manuellement à l'intérieur [6] ou à l'extérieur [7] de la cavité cardiaque.

Nous proposons dans cette contribution une stratégie assez similaire à celle de Santarelli [6] mais en initialisant automatiquement le contour actif au centre du myocarde ; le contour évoluera donc dans une zone homogène. L'inconvénient d'initialiser au centre de la cavité cardiaque sur nos images est la présence à cet endroit de flux stagnant qui perturbera l'évolution d'un contour actif. L'obtention du contour initial est basé sur une exploitation de la carte GVF et les travaux de Yu et Bajaj [11].

Le contour initial se trouve alors situé entre les contours endocardique et épicaudique. Pour éviter que le contour actif ne se dirige aléatoirement par morceaux sur les bords interne et externe du myocarde [7], deux contours actifs initialisés par la même courbe initiale évolueront l'un vers l'endocarde et l'autre vers l'épicarde. Il sera repris alors l'idée d'ajouter au modèle de Xu la force ballon.

De part le principe d'acquisition, nos images ont une faible résolution et présente un faible contraste. Une étape de pré traitement est une phase importante nécessaire pour garantir la reproductibilité des résultats. Pour cette étape, nous proposons d'exploiter l'idée de Xu [8] qui a montré l'intérêt du filtre gaussien sur le calcul de la carte GVF mais dont le coefficient  $\sigma$  de son filtre est choisi manuellement. Nous déterminons automatiquement cette valeur en fonction de la qualité des images et ceci à l'aide d'un critère.

Cet algorithme de segmentation automatique sera testé et évalué sur différents types d'acquisition en IRM cardiaque.

## 2. Matériel et méthodes

### 2.1 Les données IRM

La fréquence cardiaque d'un rat est de 300 à 400 battements par minute. Pour s'affranchir du mouvement cardiaque, l'acquisition est synchronisée sur l'onde R du signal ECG. Avec un temps de répétition de 1000 ms et un temps d'écho effectif de 31.7 ms, les images obtenues comme celle présentée en figure 1 ont une taille de 128\*128 pixels pour un champ de vision de 40\*40 mm.

Elle correspond à une épaisseur de coupe de 2 mm et le nombre d'accumulations est de 8. La zone du cœur est définie dans un carré de 13 mm de côté soit 40\*40 pixels environ.

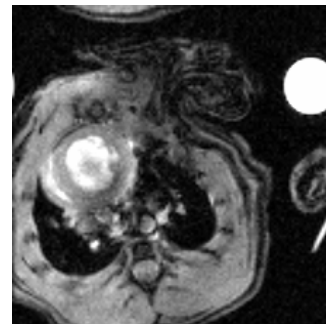


FIG. 1 : Exemple d'une coupe originale complète

### 2.2 GVF - snake

Le GVF correspond à une diffusion isotrope du champ de vecteurs gradients classique. Il est défini comme étant le champ de vecteurs  $\mathbf{v}(x,y) = [u(x,y), v(x,y)]$ ,  $(x,y)$  étant les coordonnées de chaque vecteur dans l'image, qui minimise la fonctionnelle d'énergie suivante :

$$\mathcal{E} = \iint \mu (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) + |\nabla f|^2 |\mathbf{v} - \nabla f|^2 dx dy \quad (1)$$

Où  $u_x, u_y, v_x, v_y$  désignent les dérivées de  $u$  et  $v$  par rapport à  $x$  et  $y$  respectivement.  $\nabla$  représente l'opérateur gradient :  $\nabla f = [f_x, f_y]$  et  $f$  correspond à la carte des contours (gradient de l'image ou gradient de l'image lissée par un filtre gaussien).  $\mu$  est un paramètre de régularisation réglant le rapport d'influence entre les deux termes de l'intégrale. Ce paramètre est fixé en fonction du bruit présent dans l'image :  $\mu$  est grand pour un bruit important.

La solution de ce problème d'optimisation doit satisfaire l'équation d'Euler :

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v} - (\mathbf{v} - \nabla f) |\nabla f|^2 = 0 \quad (2)$$

Où  $\nabla^2$  représente l'opérateur Laplacien.

Une solution numérique peut être trouvée avec l'introduction d'une variable temporelle  $t$  dans l'équation 2. Le champ de vecteurs est alors la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\mathbf{v}_t = \mu \nabla^2 \mathbf{v} - (\mathbf{v} - \nabla f) |\nabla f|^2 \quad (3)$$

Avec  $\mathbf{v}_t$  la dérivée première par rapport à  $t$ .

Pour garantir la convergence de l'algorithme, le pas de temps doit vérifier l'équation 4 [8] :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x \Delta y}{4\mu} \quad (4)$$

Dans notre cas,  $\Delta x$  et  $\Delta y$  sont unitaires et  $\Delta t$  est fixé à 1, ce qui impose la contrainte suivante :  $\mu < 0.25$

Une fois le champ GVF calculé, il est introduit dans l'équation d'Euler associée à la fonctionnelle d'énergie d'un snake comme suit :

$$\mathbf{x}_t = \alpha \mathbf{x}''(s,t) - \beta \mathbf{x}''''(s,t) + \mathbf{v} \quad (5)$$

Avec  $\mathbf{x}_t$  la dérivée première de  $\mathbf{x}(s,t)$  par rapport à  $t$ ,  $\mathbf{x}''$  et  $\mathbf{x}''''$  sont les dérivées secondes et quatrième de  $\mathbf{x}$  par rapport à la variable de parcours du contour  $s$  ( $s$  appartient à l'intervalle  $[0, 1]$ ) et  $\mathbf{v}$  est la force externe solution de l'équation 3. L'ensemble forme le GVF – snake.

### 2.3 Filtrage adaptatif

La détermination de la carte GVF à partir de l'image filtrée avec un filtre gaussien est plus robuste en présence de bruit [8]. Un filtre gaussien se caractérise par son écart-type  $\sigma$ . Ce type de filtre a la particularité d'atténuer le bruit mais également de lisser les contours. Afin de quantifier son influence, le PSNR (Peak Signal-to-Noise Ratio) communément utilisé comme mesure de qualité en compression d'images a été calculé. Il s'exprime comme l'équation 6 avec  $MAX_I = 255$  (les images sont en niveaux de gris codés sur un octet) et dans laquelle  $I(i,j)$  est l'image d'origine et  $I_G(i,j)$  est l'image filtrée :

$$PSNR = 10 \log \left( \frac{MAX_I^2}{MSE} \right) \quad \text{avec} \quad (6)$$

$$MSE = \frac{1}{MN} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \|I(i,j) - I_G(i,j)\|^2$$

Le PSNR décroît lorsque l'écart type  $\sigma$  du filtre gaussien augmente comme l'attestent les courbes reportées sur la figure 3 pour différentes images IRM cardiaque (figure 2).

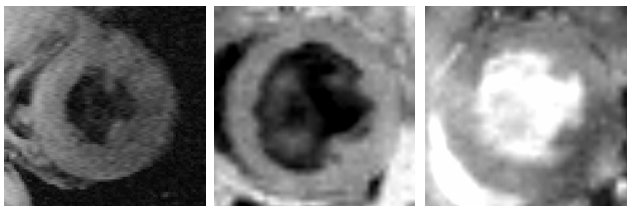


FIG. 2 : Les trois images utilisées pour les tracés de la figure 3. De gauche à droite : l'image d'un cœur humain (Xu), de cœurs de rat en mode T1-SE et en mode T1-EG

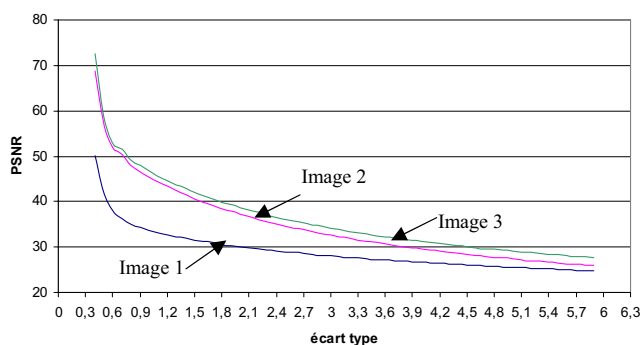


FIG. 3 : Calcul du PSNR en fonction de  $\sigma$

Les résultats de la figure 3 montrent que le PSNR tend asymptotiquement vers 25 dB environ pour  $\sigma > 5$ , ce qui entraîne un filtre dont le masque est relativement grand. Nous proposons alors un critère simple qui consiste à choisir  $\sigma$  lorsque le PSNR vaut 30dB. Une procédure par dichotomie permet d'avoir rapidement la taille du filtre. Dans [8], Xu choisit une valeur manuellement de 2.5 pour l'image IRM du

cœur humain (image 1 de la figure 2). Avec notre procédure, le  $\sigma$  déterminé est de 2 sur cette image.

### 2.4 Contour initial

#### 2.4.1 Carte des vallées

La carte GVF obtenue pour l'image 2.a lissée est reportée figures 4a et 4b. Il est constaté que le GVF présente des crêtes et des vallées (figure 4b) ; les crêtes correspondant aux contours des objets à segmenter. Sur l'ensemble des images cardiaques, une vallée apparaît au centre du myocarde. Cette situation est due à la présence de contours de chaque côté du centre de la structure. La vallée qui se traduit par un minimum dans la carte GVF est analogue au squelette du myocarde dans l'image en niveau de gris. Une nouvelle carte pour localiser l'ensemble des vallées présentes dans l'image est alors établie à partir des travaux de Yu et Bajaj [11]. Ils dénomment cette carte la SSM (Skeleton Strength Map). La carte des vallées s'établit donc comme suit :

$$SSM(\vec{r}) = \max(0, \sum_{\vec{r}' \in N(\vec{r})} \frac{GVF(\vec{r}') \cdot (\vec{r}' - \vec{r})}{\|\vec{r}' - \vec{r}\|}) \quad (7)$$

Où  $\vec{r}$  est le vecteur des coordonnées de la carte,  $GVF(\vec{r})$  est l'orientation du GVF en  $\vec{r}$  et  $N(\vec{r})$  l'ensemble des huit directions autour de  $\vec{r}$ . L'opérateur  $\cdot$  désigne le produit scalaire. Un exemple de carte obtenu est reporté en figure 4c.

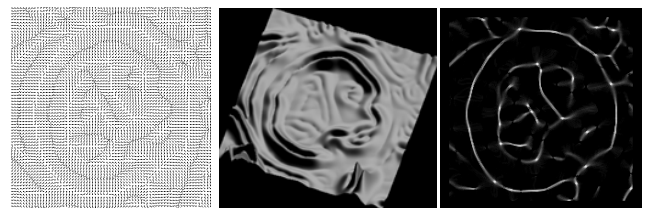


FIG. 4 : Cartes des orientations du GVF (4a), des amplitudes (4b) et des vallées (4c)

#### 2.4.2 Contour initial

Ces cartes normalisées (figure 4c) présentent des points de valeur maximale situés sur les vallées. Afin de les localiser, un seuillage à mi-hauteur est effectué. L'analyse de l'histogramme des distances de ces points par rapport à un point central permet la localisation d'une courbe unique qui sert d'initialisation au procédé de contour actif. Le barycentre de ces points fournit ce point central qui se situe à l'intérieur de la cavité cardiaque. Cette étape n'est possible que si la structure à segmenter se trouve quasi au centre de l'image.

L'analyse des histogrammes des distances conduit à l'hypothèse qu'ils contiennent un nombre de familles parmi lesquelles se trouve celle de la courbe initiale recherchée. Cette courbe étant de forme quasi circulaire les histogrammes présenteront un nombre important de points pour cette famille. En partant de l'hypothèse que chaque famille présente une distribution gaussienne, le maximum de l'histogramme est détecté ainsi que sa largeur à mi-hauteur. Les points retenus pour le contour initial seront ceux compris entre la valeur du centre de la gaussienne plus ou moins deux écarts type.

## 2.5 Contours actifs

A partir du contour initial, deux processus de contours actifs continus dont l'énergie externe est celle du GVF fonctionnent identiquement. Au départ de leur évolution, il est adjoint une force ballon négative pour diriger le premier vers l'endocarde et une positive pour celui dédié à l'épicarde. Les contours actifs sont stoppés par analyse de l'évolution de l'amplitude du GVF le long des contours.

## 3. Résultats

Nous avons appliqué notre approche sur l'image de Xu (image 1 de la figure 2) et sur un ensemble de dix images de cœur de rat en mode T1-SE et en mode T1-EG. Des résultats sont présentés en figure 5 dont les images de départ sont celles de la figure 2. Les résultats présentés en ligne correspondent à l'ordre de la présentation des images.

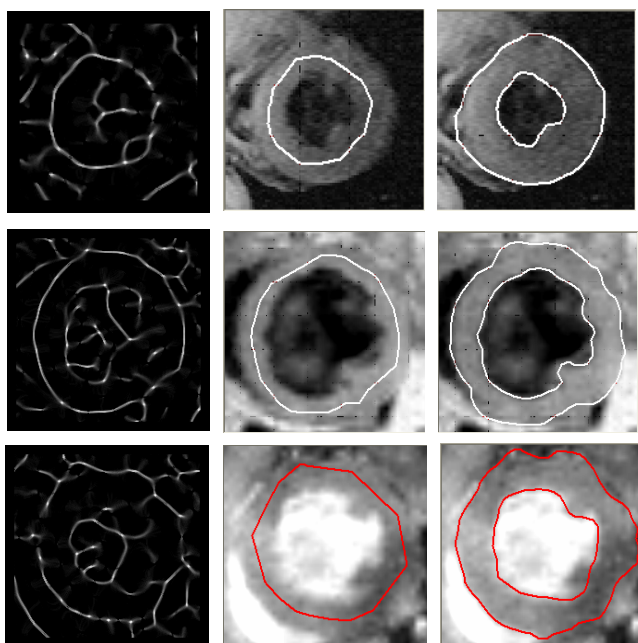


FIG. 4 : Images des vallées (colonne 1), Superposition images de départ et courbes initiales (colonne 2), Résultats de la segmentation (colonne 3)

Ces résultats sont encourageants car la segmentation obtenue est généralement conforme aux résultats attendus. Sur l'ensemble de nos images de cœur de rats, nous obtenons 70% de résultats corrects. En effet dans certains cas de figure (image mal cadrée, partie du myocarde manquante,...) le positionnement de notre contour initial est imprécis, ce qui conduit à un résultat final erroné.

## 4. Conclusion

Dans ce travail, une nouvelle approche pour la segmentation automatique des contours myocardiens sur des IRM de rats a été proposée. Elle met en œuvre un modèle de contours actifs classique dirigé par un champ de vecteur gradient (GVF) adapté à la qualité des images. Les

différentes étapes sont automatiques. Testée et évaluée sur différents types d'acquisition en IRM cardiaque, la méthode donne des résultats encourageants. Les efforts actuels portent sur une amélioration de la robustesse du processus d'initialisation.

**Remerciements** : Les auteurs remercient le Service Commun d'Analyses Spectroscopiques de l'Université d'Angers pour les acquisitions et son intérêt pour l'étude.

## Références

- [1] L.P. Clarke, R.P. Velthuisen, M.A. Camacho, J.J. Heine, M. Vaidyanathan, L.O. Hall, R.W. Thatcher, M.L. Silbiger. *MRI Segmentation: methods and applications*. Magnetic Resonance Imaging, vol. 13, n° 3, pp. 343-368, 1995.
- [2] A. Hammoude. *Endocardial border identification in two-dimensional echocardiographic images: review of methods*. Comp Med Imaging Graph, vol. 22, n° 3, pp.181-193, 1998.
- [3] A.F. Frangi, W.J. Niessen, M.A. Viergever. *Three-dimensional modelling for functional analysis of cardiac images: a review*. IEEE Trans Med Imaging, vol. 20, n° 1, pp. 2-25, 2001.
- [4] S. Ranganath. *Contour extraction from cardiac MRI studies using snakes*. IEEE Transactions on Medical Imaging, vol. 14, n° 2, pp 328-338, 1995.
- [5] P. Makowski, T.S. Sorensen, S.V. Therkildsen, A. Materka, H. Stodkilde-Jorgensen, E.M. Pedersen. *Two-phase active contour method for semiautomatic segmentation of the heart and blood vessels from MRI images for 3D visualization*. Computerized Medical Imaging and Graphics, vol. 26, pp. 9-17, 2002.
- [6] M.F. Santarelli, V. Positano, C. Michelassi, M. Lombardi, L. Landini. *Automated cardiac MR image segmentation: theory and measurement evaluation*. Medical Engineering and Physics, vol. 25, pp. 149-159, 2003.
- [7] C. Pluempitwiriwajew, J.M.F. Moura, Y.-J.L. Wu and C. Ho. *STACS: New active contour scheme for cardiac MR Image segmentation*. IEEE Transactions on Medical Imaging, vol. 24, n° 5, pp 593-603, 2005.
- [8] C. Xu, J.L. Prince. *Snakes, Shapes, and Gradient Vector Flow*. IEEE Transactions on Image Processing, vol.7, pp. 359-369, 1998.
- [9] L. Cohen, I. Cohen. *Finite-Element methods for active contour models and balloons for 2D and 3D images*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 15, n° 6, pp 617-634, 1993.
- [10] M. Kass, A. Witkin, D. Terzopoulos. *Snakes: Active Contour Models*. International Journal of Computer Vision, vol. 1, n° 4, pp. 321-331, 1988.
- [11] Z. Yu, C. Bajaj. *A segmentation-free approach for skeletonization of gray-scale images via anisotropic vector diffusion*. 2004 IEEE Computer Society Conference on CVPR, Washington, D.C., June-July 2004.

# Segmentation du contour de l'endocarde sur des séquences d'images d'échographie cardiaque

Jérôme LEBOSSÉ<sup>1</sup>, François LECÉLLIER<sup>1</sup>, Marinette REVENU<sup>1</sup>, Eric SALOUX<sup>2</sup>

<sup>1</sup>GREYC UMR CNRS 6072 - Equipe Image  
6 Boulevard Maréchal Juin, 14050 CAEN CEDEX, France

<sup>2</sup>CHU de Caen  
Avenue de la Côte de Nacre, 14033 CAEN CEDEX, France

Jerome.Lebosse@greyc.ensicaen.fr, Francois.Lecellier@greyc.ensicaen.fr,  
Marinette.Revenu@greyc.ensicaen.fr, saloux-e@chu-caen.fr

**Résumé** – La segmentation d'images échocardiographiques fait l'objet de nombreuses recherches. Cet article propose une méthode utilisant les Modèles Actifs de Mouvement et d'Apparence (AAMM) combinés avec une prise en compte de la sémantique de l'image. Les AAMM peuvent modéliser les différents paramètres de l'image comme la forme du ventricule gauche, sa texture interne et l'aspect temporel des images. Concernant la sémantique de l'image, nous avons inclus la texture du myocarde dans le modèle. L'écart entre la segmentation experte et la segmentation automatique a ensuite été déterminé par des mesures telles que la mesure de Vinet et la distance de Hamming et des mesures morphologiques. Nous avons donc pu vérifier que nos résultats sont proches de la segmentation experte.

**Abstract** – Segmentation of echocardiography images is the subject of intensive research activity. This paper introduces a method using Active Appearance and Motion Models (AAMM) combined with semantic information of the image. AAMM can model all the image parameters such as the left ventricular shape, its texture and the temporal aspect of the echocardiographic images. As for as the semantic information is concerned, we have included the texture of the myocard in the model. The difference between expert and automatic segmentation has been assessed by Vinet measure, Hamming distance and morphological measures. Our study stands that our results are close to expert segmentation.

## 1 Introduction

Nous avons cherché à segmenter l'endocarde sur des images d'échographie cardiaque en vue apicale dans le but d'effectuer un diagnostic précoce de pathologies. Il existe déjà certains travaux sur ce thème, dont les travaux de Jacob [5] qui s'est appuyé sur une approche contours actifs contraints par la forme de l'objet, et de Hamarneh [4] qui s'est basé sur des snakes et les Modèles Actifs de Forme. Nous avons mis en oeuvre une méthode de segmentation avec apprentissage, reposant sur les Modèles Actifs de Mouvement et d'Apparence (Active Appearance and Motion Models [7] [1]) avec adaptation du modèle de bruit. Nous avons pris en compte non seulement la texture interne, mais aussi la texture externe de l'endocarde, ce qui améliore nettement les résultats. Nous utilisons le terme texture par abus de langage pour désigner les niveaux de gris de la région à segmenter. Nous rappellerons le principe des AAMM, puis nous expliciterons les adaptations effectuées pour correspondre à la sémantique de l'image, et enfin nous discuterons des résultats expérimentaux.

## 2 Le principe des AAMM

Les AAMM sont une évolution des AAM (Modèles Actifs d'Apparence) prenant en compte le mouvement pour des images 2D + Temps. Les AAM sont eux-mêmes une extension de la méthode des ASM (Modèles Actifs de Forme) modélisant outre la forme de l'objet à segmenter, la texture interne de l'objet et

ses variations. L'apprentissage de la forme a bien un sens dans notre cas, car nous segmentons des images de ventricule gauche avec l'objectif d'effectuer des diagnostics précoces, donc avec un ventricule gauche très peu déformé par rapport à la normalité. Cette méthode se décompose en trois grandes étapes : l'apprentissage du modèle à partir d'images expertisées, puis l'apprentissage d'expérimentations pour guider l'évolution du contour, et enfin la segmentation d'images inconnues. Nous allons maintenant détailler ces étapes.

### 2.1 L'apprentissage du modèle

Cette première phase correspond à l'acquisition des données. Celles-ci nous sont fournies par un expert ayant segmenté un ensemble d'images d'échographie. L'acquisition se fait aussi bien sur le plan forme - annotation d'un nombre précis de points sur le contour de l'objet, que sur le plan texture - maillage de la forme et lecture des niveaux de gris des pixels à l'intérieur de l'objet. Ce maillage triangulaire obtenu par une triangulation de Delaunay n'est pas simple à créer car il ne faut pas que les triangles sortent de la forme dans le cas où elle ne serait pas convexe. Pour cela nous vérifions la position du centre de gravité de chaque triangle de Delaunay et dans le cas où il est en dehors de la forme nous l'éliminons. Vient ensuite une phase de normalisation : pour la forme, un alignement suivant leur position, facteur d'échelle et orientation par analyse de Procrustes [3], et pour la texture, une élimination des différences de contraste qui pourraient survenir entre les acquisitions. Et enfin la troisième étape, l'analyse statistique [2], semblable pour



la forme et la texture, consiste en une Analyse en Composantes Principales pour décrire les modes de variation et obtenir une description compacte de ceux-ci. Cela nous permet d'obtenir le premier modèle dit combiné (forme et texture). Ce modèle correspond au modèle moyen en forme et en texture de la partie d'image à segmenter.

## 2.2 L'apprentissage des expérimentations

Cette phase permet d'apprendre différentes transformations du modèle et leurs effets sur la forme et la texture de l'objet analysé, pour ensuite «savoir» comment modifier le modèle lors de la segmentation. C'est cette phase qui est la plus originale dans les AAMM car elle permet de prédire l'évolution du contour lors d'une future segmentation.

Le principe de cet apprentissage est de faire subir au modèle combiné une série de variations en position pour évaluer les erreurs induites par celles-ci et ensuite pouvoir savoir comment déplacer le modèle dans des cas similaires. L'ensemble de ces erreurs est stocké dans trois matrices. Les différents déplacements de la forme du modèle moyen concernent la translation, la rotation, l'homothétie auxquels on ajoute une variation des autres paramètres du modèle combiné. Ces variations sont notées dans le tableau 1. La première matrice stocke les écarts de position par rapport au modèle moyen ; c'est la matrice des transformations, notée  $T$ . La seconde matrice stocke les informations relatives aux variations du modèle combiné, elle est notée  $C$ . La dernière ne concerne que la texture, elle est notée  $G$ . Une fois ces trois matrices obtenues on détermine les deux matrices qui seront utilisées lors de la segmentation.  $R_c$  et  $R_t$  sont obtenues par les relations :  $C = R_c G$  et  $T = R_t G$ . Ce sont ces matrices qui permettront de prédire l'évolution du contour lors de la phase de segmentation.

Transformation	Variation
Translation en x	$\pm 6, \pm 3, \pm 1$ pixels
Translation en y	$\pm 6, \pm 3, \pm 1$ pixels
Homothétie	95%, 97%, 99%, 101%, 103%, 105%
Rotation	$\pm 5, \pm 3, \pm 1$ degrés
Autres paramètres	$\pm 0.5\sigma_i, \pm 0.25\sigma_i$

FIG. 1: Tableau récapitulatif des mesures effectuées

## 2.3 Algorithme de segmentation

L'initialisation de la phase de segmentation consiste à «poser» le modèle moyen expérimenté sur l'image. Pour déterminer la position initiale du modèle on extrait le secteur d'échographie par une binarisation de l'image. Puis on recherche l'enveloppe convexe de la région la plus grande. Et enfin on compare la taille du secteur obtenu avec la taille des autres secteurs de la même séquence d'échographie pour conserver uniquement le plus grand. Le modèle est alors positionné au centre de ce secteur. On calcule le vecteur de texture normalisé, puis les paramètres de position. Ensuite on compare l'image transformée - normalisée en texture et en position - avec le modèle. Selon l'erreur et le nombre d'itérations de l'algorithme, on recommence la normalisation, en modifiant légèrement les paramètres à l'aide des deux matrices obtenues à l'étape précédente

ou on termine en appliquant au modèle les transformations affines inverses pour segmenter l'image.

Ce qui donne l'algorithme suivant.

### Fonction Calcul\_erreur(i) :

Générer le vecteur de texture normalisé  $g_m$  à partir du modèle.  
Echantillonner l'image selon la forme du modèle et calculer son vecteur de texture  $g_{image}$ .  
Normaliser  $g_{image}$  en  $g_{im}$ .  
Evaluer le vecteur d'erreur  $\delta g_i = g_{im} - g_m$ .  
Evaluer l'erreur  $E_i = \|\delta g_i\|$

Fin

Initialisation :  $k = [1.5, 0.5, 0.25, 0.125]^T$ ,

Initialisation : modèle = Modèle combiné obtenu à l'étape décrite en 2.2

Initialisation :  $E = 0$

### Répéter

$E_{précédente} = E$   
Calcul\_erreur(0)  
Prédire la transformation  $\delta t = R_t \delta g_0$   
et les déplacements du modèle combiné  $\delta c = R_c \delta g_0$   
 $i \leftarrow 1$

### Répéter

Mettre à jour le modèle combiné  $c = c - k_i \delta c$ .  
Transformer la forme pour inverser la transformation  $\delta t$ .  
Calcul\_erreur(i)  
 $i \leftarrow i+1$

**jusqu'à ce que** ( $E_i < E_0$  OU  $i > 4$ )

Sauver l'erreur finale  $E = E_i$

**jusqu'à ce que** ( $E < E_{précédente}$ )

## 3 Adaptation de la méthode à la sémantique de l'image

### 3.1 Explicitation des connaissances sur l'image

Le coeur est formé de deux ventricules et de deux oreillettes. Tout le muscle cardiaque est constitué de myocarde. La paroi externe du coeur, c'est à dire l'interface coeur-autre organe est formée par une couche de péricarde. La paroi interne est ce que l'on nomme endocarde, cette paroi est très fine et impossible à visualiser sur les images. Pour segmenter cette paroi, on cherche la limite interne du myocarde.

Pour comprendre la méthode de segmentation experte, nous devons revenir sur l'image d'échographie. Cette dernière montre différents points importants pour la segmentation. Tout d'abord la paroi inter-ventriculaire est constituée de myocarde et est tapissée par l'endocarde. Pour repérer l'endocarde il suffit donc de positionner le contour de segmentation sur le bord du myocarde pour la paroi (ou septum) inter-ventriculaire. La paroi

située à droite de l'image correspond à la paroi entre le coeur et le poumon. Cette paroi est bien entendu du myocarde, mais son contraste est nettement moins bon. Le contour ne peut donc pas s'appuyer sur les informations «visibles». Pour le positionner l'expert se sert du pilier antéro-latéral mitral et des cordages de l'appareil sous valvulaire mitral. (figure 1) Le contour se positionne à la droite de ces deux structures physiques. L'intérieur du ventricule, mis à part les structures nommées ci-dessus ne comporte aucune structure anatomique particulière. Il est essentiellement constitué du sang qui le traverse.

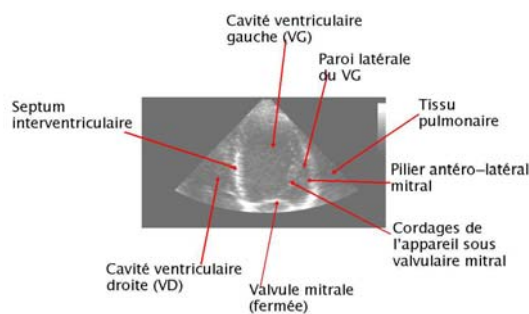


FIG. 2: Exploration par la fenêtre apicale 4 cavité : Structures anatomiques visibles sur l'image

### 3.2 Impact sur la méthode

La méthode présentée dans le paragraphe 2 ne tient pas compte de ces connaissances, or elles sont fondamentales pour l'expert. Pour cela nous avons pris en compte les différentes caractéristiques de l'image. Tout d'abord pour le bruit, nommé speckle, nous avons effectué une normalisation de la texture. Pour cela nous avons utilisé une fonction de transformation obtenue à partir des histogrammes cumulés des images et de la densité de probabilité cumulée d'une distribution gaussienne :

$$CP(z) = \frac{1}{2} \left( 1 - f\left(\frac{-z}{\sqrt{2}}\right) \right)$$

qui permet d'obtenir une image à histogramme gaussien, condition de l'application de l'ACP.

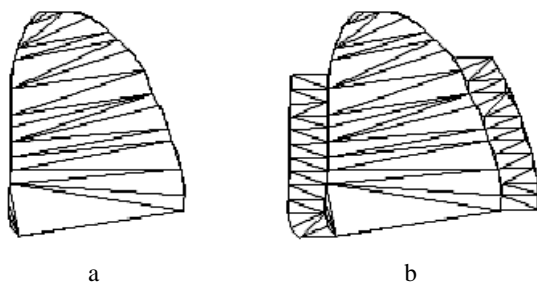


FIG. 3: a. Maillage interne de la forme, b. Maillage interne et externe de la forme

Ensuite pour prendre en compte le modèle perceptuel, nous avons utilisé des bandes externes latérales pour l'apprentissage et la segmentation. Cela permet de considérer non seulement

la texture interne mais aussi la texture externe du ventricule gauche. Comme nous l'avons vu précédemment, l'intérieur du ventricule est essentiellement constitué du sang qui le traverse. Donc la texture interne présente peu d'intérêt, c'est ce qui nous a poussé à ajouter des bandes pour la prise en compte de la texture externe. Les bandes sont uniquement situées sur les parois latérales du contour, car sur le haut de l'image d'échographie le bruit est plus important que les informations que l'on pourrait en extraire. Et dans le bas de l'image, la valve mitrale présente un déplacement très important qui ne renseigne pas sur la position de l'endocarde. (figures 2 et 3)

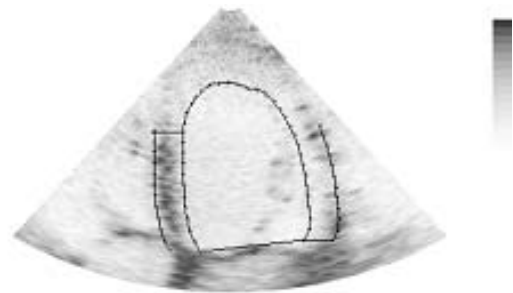


FIG. 4: Contour et bandes latérales pour l'acquisition de texture

## 4 Le processus d'expérimentation et les résultats

### 4.1 Le processus d'expérimentation

Tout d'abord, l'expert a segmenté des images d'échographie. Pour l'aider dans cette tâche nous avons conçu un programme qui extrait 7 images en systole et 7 en diastole ainsi que leurs contours tracés par l'expert. Les nombre d'images utilisées permet de synchroniser toutes les acquisitions, le rythme cardiaque des différentes séquences pouvant varier de manière importante. Les contours tracés sont représentés par des points, trois points anatomiques, la pointe du ventricule, le point septo-basal et le point latéro-basal, et une trentaine d'autres points suivant le contour tracé. Pour éviter les problèmes dus à la valve, le contour n'est pas échantillonné suivant le plan de la mitrale. Ensuite nous avons créé les bandes latérales sur les images expertisées, leur largeur et hauteur ayant été déterminées à l'issue des tests. Enfin nous avons utilisé les AAMM pour un apprentissage prenant en compte la séquentialité dans les images d'échographie. Cela nous a permis d'obtenir un modèle 2D + Temps de la forme de l'endocarde. Et ensuite nous avons lancé le programme de segmentation sur des images non comprises dans la base d'apprentissage. Un exemple de résultat est présenté sur les figures ci-dessous. Enfin nous avons demandé à l'expert de segmenter ces images pour une validation du logiciel.

### 4.2 Les résultats

Les résultats expérimentaux sont visuellement prometteurs. Cependant, pour une validation clinique, il nous faut des me-



sures comparatives entre la segmentation expert et les résultats expérimentaux. Nous avons donc utilisé deux mesures classiques pour la validation d'une segmentation et des mesures morphologiques. Les mesures classiques de comparaison de contour et de régions sont la mesure de Vinet et la distance au point le plus proche (distance de Hamming). La mesure de Vinet consiste à compter le nombre de pixels communs à l'objet segmenté par l'expert et à l'objet segmenté par le logiciel. Puis à calculer le rapport :  $\frac{R_i - R_i \cap V_j}{R_i}$  où  $R_i$  correspond au nombre de pixels de la région de l'endocarde expertisée et  $V_j$  à ceux de la région calculée. Nous obtenons pour notre base de test de plus de 300 images une moyenne de 0,14 pour la distance de Vinet, sachant que plus cette distance est proche de 0, meilleure est la segmentation. Ensuite concernant la distance au point le plus proche, la distance moyenne est d'environ 1,5 pixel, ce qui est assez faible. Pour obtenir des mesures « morphologiques », nous avons calculé la taille du grand axe, le déplacement de points, la fraction d'éjection et le volume du coeur par la méthode de Simpson. Cette méthode permet de calculer le volume à partir d'images 2D en considérant le coeur comme un « empilement » de cylindres minces. L'écart moyen pour le volume est de 6 ml, pour la taille du grand axe 5 mm, pour le déplacement 2 mm et pour la fraction d'éjection 5%. Nous ne pouvons pas comparer ces résultats à d'autres car à notre connaissance aucun article ne fait référence au même type de comparaison.

Mesure	Moyenne	Ecart type
Vinet	0.14	0.03
Hamming	1.5	0.37
Volume	6ml	0.82
Grand Axe	5mm	0.75
Déplacement	2mm	0.42
Fraction d'éjection	5%	0.04

FIG. 5: Tableau récapitulatif des mesures effectuées

## 5 Conclusion

Ces premiers résultats sont très satisfaisants et nous allons donc poursuivre la recherche dans ce sens. Pour cela nous allons utiliser les contours actifs basés régions [6] combinés avec un apprentissage de forme et texture. Ainsi nous espérons réussir à diminuer les écarts entre valeur expertisée et logicielle, et effectuer un diagnostic précoce de certaines pathologies. En effet, cette approche permet d'utiliser réellement un a priori sur la texture et de mixer des informations régions intrinsèques à l'image analysée et des informations apprises. Il faudra également prendre en compte un paramètre sur lequel nous ne pouvons pas jouer qui est la variation de la segmentation experte inter expert, mais également intra expert.

## Références

[1] J.G. Bosch, S.C. Mitchell, B.P.F. Lelieveldt, F. Nijland, O. Kamp, M. Sonka *Automatic Segmentation of Echocardiographic Sequences by Active Appearance Motion Mo-*

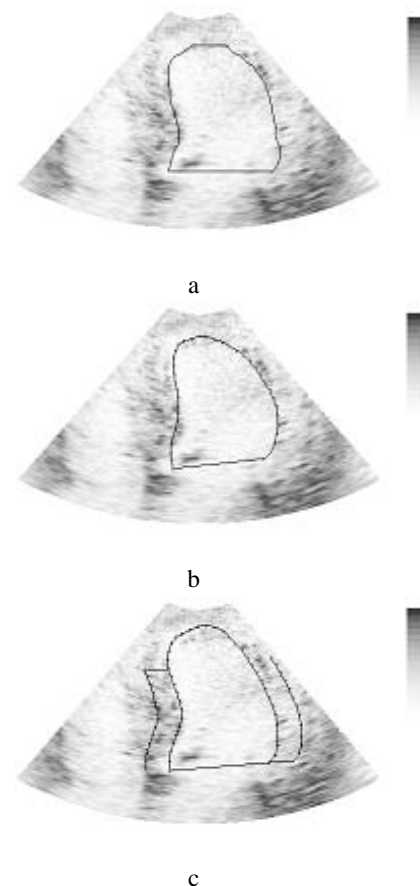


FIG. 6: a. Segmentation expert b. Segmentation automatique sans prise en compte des bandes c. Segmentation automatique avec prise en compte des bandes

del, IEEE Transactions on Medical Imaging, vol. 21, n° 11, pp. 1374-83, 2002.

[2] I. Dryden, K. Mardia *Statistical Shape Analysis*, John Wiley and Sons, 1998.

[3] C. Goodall *Procrustes methods in the statistical analysis of shape*, Journal Royal Statistical Society, Series B, 53:285-339, 1991.

[4] G. Hamarneh, T. Gustavsson *Combining Snakes and Active Shape Models for Segmenting the Human Left Ventricle in Echocardiographic Images*, IEEE Computers in Cardiology, vol.27, pp. 115-118, 2000.

[5] G. Jacob, J. Noble, C. Behrenbruch, A. Kelion, A. Banning *A Shape-Space-Based Approach to Tracking Myocardial Borders and Quantifying Regional Left-Ventricular Function Applied in Echocardiography*, IEEE Transaction on Medical Imaging, vol.21, n°3, pp. 226-238, 2002.

[6] S. Jehan-Besson, M. Barlaud, G. Aubert *Contours actifs basés régions pour la segmentation des objets en mouvement dans les séquences à caméra fixe ou mobile*, GRETSI, Tome 1, pp. 517-520, 2001.

[7] M. Stegmann *Active Appearance Models*, Master Thesis, Lyngby - Technical University of Denmark, 2000.

# Synthèse de champs scalaires multifractals : application à la synthèse de texture.

Pierre CHAINAIS, Jian-Jin LI

LIMOS UMR 6158 - Université Clermont-Ferrand II  
ISIMA - Campus des Cézeaux  
63173 Aubière, France  
pierre.chainais@isima.fr, jianjin.li@isima.fr

**Résumé** — Nous étendons la définition des cascades infiniment divisibles de 1 à  $N \geq 2$  dimensions et résumons leurs principales propriétés (distributions, lois d'échelle...). Nous obtenons une méthode originale de synthèse de champs scalaires stochastiques multifractals dans un espace à  $N$  dimensions. L'implémentation de cette méthode s'avère très simple. En dimension  $N = 2$ , l'application à la synthèse de textures illustre la richesse des propriétés de ces processus. Nous obtenons une classe de textures possédant de nombreux degrés de liberté et permettant la synthèse directement sur une surface courbe, par exemple sur une sphère. D'autres applications sont envisagées en imagerie, en turbulence, en astrophysique...

**Abstract** — We generalize the definition of infinitely divisible cascades from 1 to  $N \geq 2$  dimensions and review their main properties (distributions, scaling laws...). We obtain an original method to synthesize multifractal stochastic scalar fields in an  $N$  dimensional space. The implementation of this method is quite simple. In dimension  $N = 2$ , the application to texture synthesis illustrates the versatility of these processes. We get a class of textures having a large number of degrees of freedom which allows to synthesize directly on a curved surface, for instance on a sphere. Various applications are considered in image processing, turbulence, astrophysics...

## 1 Introduction

Un ensemble de travaux récents [3, 4, 7, 8, 19] a introduit la famille des *cascades infiniment divisibles*, une vaste classe de processus multifractals possédant de “bonnes propriétés” (accroissements stationnaires, lois d'échelles continues). Cependant, ces processus n'ont jusqu'à présent été définis qu'en dimension 1 dans le but de modéliser des séries temporelles  $X(t)$  issues par exemple d'écoulements turbulents en mécanique des fluides ou de données de télétrafic internet. Disposer d'un modèle pour des champs scalaires multifractals dans un espace à  $N$  dimensions élargirait le champ d'action de cet outil et ouvrirait de nouvelles perspectives.

Plus précisément, pour un processus scalaire positif  $X(\mathbf{x})$  défini sur  $\mathbb{R}^N$ , l'analyse multifractale utilise souvent le comportement des moyennes par boîte sur des boules de rayon  $r$  et de volume  $V_r$

$$\varepsilon_r(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_r} \int_{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| < r} X(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (1)$$

En résumé, l'invariance d'échelle est alors décrite par un ensemble d'exposants multifractals  $\tau(q)$  définis par :

$$\mathbb{E}[\varepsilon_r(\mathbf{x})^q] \propto r^{\tau(q)}. \quad (2)$$

Lorsque le formalisme multifractal est vérifié [20], une simple transformation de Legendre relie ces exposants  $\tau(q)$  au spectre multifractal  $D(h)$  du processus  $X(\mathbf{x})$  :

$$D(h) = \min_{q \in \mathbb{R}} [qh - \tau(q)] \quad (3)$$

Le spectre multifractal nous informe sur la nature et l'importance des singularités présentes dans le processus  $X(\mathbf{x})$ . L'objectif est de disposer d'une méthode de synthèse de processus vérifiant des lois d'échelle prescrites telles que celles décrites par (2), ce qui revient à prescrire le spectre multifractal  $D(h)$  si l'on considère la relation (3).

Le passage en dimension  $N \geq 2$  offre un éventail de degrés de liberté supplémentaires. Pour illustrer l'intérêt et la richesse de cette classe de processus, nous nous intéresserons plus particulièrement au cas  $N = 2$  qui mène naturellement à la synthèse de textures si l'on interprète le processus comme un niveau de gris ou un champ de déformation. La synthèse de texture est essentiellement le domaine réservé des infographistes qui ont développé un large panel de méthodes [11]. Notons que la plupart des méthodes stochastiques existantes reposent sur l'utilisation du mouvement Brownien fractionnaire ou de ses variantes [9, 13–15], ce qui n'est pas le cas ici.

## 2 Cascades infiniment divisibles en dimension N

Définir les cascades infiniment divisibles revient à construire la densité d'une mesure multifractale  $Q_\ell(t)$  grâce à une cascade multiplicative généralisée. Cette construction repose notamment sur l'utilisation d'un cône de sommet  $(t, r = 0)$  dans le demi-plan temps-échelle en dimension 1. Il s'avère que cette construction s'étend de manière très naturelle de 1 dimension à  $N$  dimensions pour obtenir un

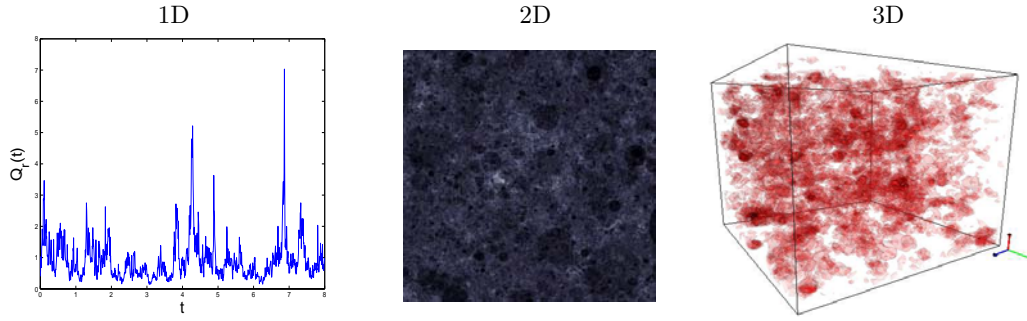


FIG. 1 – Exemples de cascades infiniment divisibles respectivement en dimensions 1, 2 et 3.

champ scalaire multifractal  $Q_\ell(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ , ayant lui aussi de “bonnes propriétés”. Des exemples de réalisations sont présentés figure 1.

#### Définition 1.

Soit  $\mathcal{P}^+$  le demi espace-échelle  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$ . Soit  $G$  une distribution infiniment divisible de fonction génératrice des moments  $\tilde{G}(q) = e^{-\rho(q)}$ . Soit  $M$  une mesure stochastique additive<sup>1</sup> infiniment divisible indépendamment distribuée par  $G$ , de support  $\mathcal{P}^+$ , associée à sa mesure de contrôle  $dm(\mathbf{x}, r)$  (par ex.  $dm(\mathbf{x}, r) = d\mathbf{x}dr/r^{N+1} \cdot \mathbb{I}_{[0,1]}$ ). Un cône d’influence  $\mathcal{C}_\ell(\mathbf{x})$  est défini pour chaque  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  par  $\mathcal{C}_\ell(\mathbf{x}) = \{(\mathbf{x}', r') : \ell \leq r' \leq 1, \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| < r'/2\}$  – fig. 2.

Une cascade infiniment divisible  $Q_\ell(\mathbf{x})$  de résolution  $\ell \in ]0, 1[$  est définie par :

$$Q_\ell(\mathbf{x}) = \frac{\exp M(\mathcal{C}_\ell(\mathbf{x}))}{\mathbb{E}[\exp M(\mathcal{C}_\ell(\mathbf{x}))]} \quad (4)$$

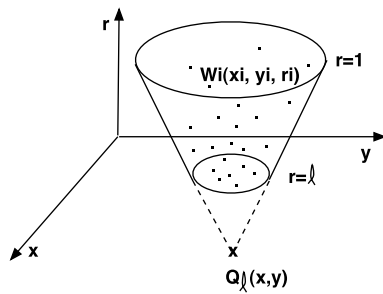


FIG. 2 – Construction “espace-échelle” d’une cascade infiniment divisible  $Q_\ell(\mathbf{x})$ . Une cascade Poisson composée  $Q_\ell$  est le produit des multiplicateurs aléatoires  $W_i(x_i, y_i, r_i)$  appartenant au cône  $\mathcal{C}_\ell(\mathbf{x})$ .

Il faut noter que la grande échelle dans la définition de  $\mathcal{C}_\ell(\mathbf{x})$  est ici arbitrairement fixée à 1 sans perte de généralité. Choisir une grande échelle  $L \neq 1$  revient simplement au changement d’unité  $(\mathbf{x}, r) \rightarrow (\mathbf{x} \cdot L, r \cdot L)$ . La loi  $G$  peut être par exemple la loi Normale, la loi de Poisson, une loi de Poisson composée, une loi Gamma... Le choix est

<sup>1</sup>La mesure stochastique  $M$  est telle que

$$\mathbb{E}[\exp [qM(\mathcal{E})]] = \exp [-\rho(q)m(\mathcal{E})].$$

Pour tout couple de sous-ensembles disjoints  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  de  $\mathcal{P}^+$ ,  $M(\mathcal{E}_1)$  et  $M(\mathcal{E}_2)$  sont des variables aléatoires indépendantes telles que  $M(\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2) = M(\mathcal{E}_1) + M(\mathcal{E}_2)$ .

large puisque la plupart des lois connues sont infiniment divisibles [12]. La synthèse s’avère particulièrement simple dans le cas des lois de Poisson composées, une famille très vaste de distributions infiniment divisibles [5, 8, 19]. Elle se décompose alors en trois grandes étapes : le tirage d’une réalisation d’un processus ponctuel  $\{(\mathbf{x}_i, r_i)\}$  dans un domaine du demi espace-échelle  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$  ; le tirage des multiplicateurs  $W_i$  selon la loi choisie ; le calcul de  $Q_\ell(\mathbf{x}) \propto \prod_{(\mathbf{x}_i, r_i) \in \mathcal{C}_\ell(\mathbf{x})} W_i$ .

L’expression des moments de  $Q_\ell$  est une conséquence immédiate de la définition :

$$\mathbb{E}[Q_\ell^q] = \exp[-\varphi(q)m(\mathcal{C}_\ell)]. \quad (5)$$

On en déduit que, lorsque  $dm(\mathbf{x}, r) = d\mathbf{x}dr/r^{N+1} \cdot \mathbb{I}_{[0,1]}$  et  $\ell \ll 1$ , ces cascades infiniment divisibles  $Q_\ell(\mathbf{x})$  ont précisément un comportement en lois d’échelles tel que celui décrit par (2) dans la gamme d’échelles  $\ell \leq r \ll 1$  avec

$$\tau(q) = \rho(q) - q\rho(1) \quad (\tau(1) = 0). \quad (6)$$

Rappelons que la gamme des valeurs de  $q$  dans laquelle ce comportement est bien défini est contrainte d’une part par l’existence de  $\rho(q) = -\ln \tilde{G}(q)$  mais aussi par les limites imposées par l’effet de linéarisation décrit dans [17] que l’on observe en dimension  $N$  : les bornes  $(q_-^*, q_+^*)$  sont solution de  $\tau(q) - q\tau'(q) = N$ .

De plus, ces processus sont homogènes, définis continûment en espace et en échelle, et isotropes. D’un point de vue théorique, toutes ces propriétés sont de “bonnes propriétés”. Cependant, notamment en vue de l’application à la synthèse de texture, nous aimerions introduire une inhomogénéité ou une anisotropie contrôlée.

Une possibilité consiste à étendre la définition 1 ci-dessus au cadre plus général suivant :

#### Définition 2 (avec noyau d’intégration).

Soit  $f(\mathbf{x})$  une fonction positive à support compact centrée en zéro. On pose :

$$Q_\ell(\mathbf{x}) = \frac{\exp \int f\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{r'}\right) dM(\mathbf{x}', r')}{\mathbb{E} \left[ \exp \int f\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{r'}\right) dM(\mathbf{x}', r') \right]} \quad (7)$$

Ainsi, la géométrie de la fonction  $f(\mathbf{x})$  permettra d’introduire de l’anisotropie (d’où des effets visuels intéressants en 2D ou 3D) si  $f(\mathbf{x})$  a un comportement variable en fonction de la direction de  $\mathbf{x}$ . Un exemple simple consiste à remplacer le cône circulaire de la définition 1 par un cône elliptique, un rectangle, ou plus généralement un motif quelconque. On peut de plus envisager de faire varier la

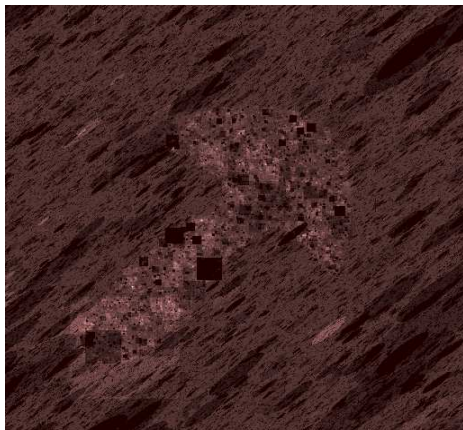


FIG. 3 – Exemple de cascade infiniment divisible avec un noyau d'intégration  $f(\mathbf{x})$  variant en fonction de la position. On utilise ici respectivement un carre et une ellipse.

fonction  $f(\mathbf{x})$  d'un endroit à l'autre et de contrôler localement le processus. La figure 3 illustre ces possibilités.

De plus, la régularité de la fonction  $f(\mathbf{x})$  permettra de contrôler les petites échelles et d'atténuer par exemple les discontinuités qui peuvent apparaître lorsqu'on utilise la définition 1. On pourra typiquement utiliser une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact de somme 1 (ex :  $f(\mathbf{x}) = 2\cos^2(\pi\|\mathbf{x}\|)$  pour  $\|\mathbf{x}\| < 1/2$ ) au lieu de la fonction cylindrique  $\mathbb{I}_{\{\|\mathbf{x}\| < 1/2\}}$ . Une plus grande régularité aux petites échelles donne souvent un résultat visuel plus agréable, avec notamment des contours moins marqués. La comparaison entre la figure 3 (noyaux discontinus) et la figure 4 (noyaux  $\mathcal{C}^\infty$ ) illustre cet effet. Une présentation plus détaillée est donnée dans [5].

### 3 Applications

Les cascades infiniment divisibles fournissent une méthode très souple de synthèse de champs scalaires multifractals. La richesse de cette classe de processus leur confère un grand intérêt potentiel pour la modélisation (ex : modèle de bruit, champs scalaires turbulents, matériaux poreux...).

En dimension 2, ces modèles sont de bons candidats pour la modélisation des images naturelles [5, 6, 21] qui présentent des *propriétés d'invariance d'échelle* très similaires. Les propriétés des cascades infiniment divisibles se révèlent aussi particulièrement adaptées à la synthèse de texture. La densité  $Q_\ell(\mathbf{x})$  peut être interprétée au choix comme un niveau de gris ou une altitude entre autres. Par conséquent, nous disposons d'une méthode de synthèse procédurale de textures multifractales, homogènes (stationnaires dans le cas 1D), définies continûment en espace et en échelle, isotropes (définition 1) ou non (définition 2).

Le caractère procédural de la synthèse permet d'éviter toute limitation de taille ou apparition d'artefact lié à la répétition de motifs de base. La construction est continue, à la fois en espace et en échelle, et ne fait pas intervenir de grille dyadique par exemple. L'information peut ainsi

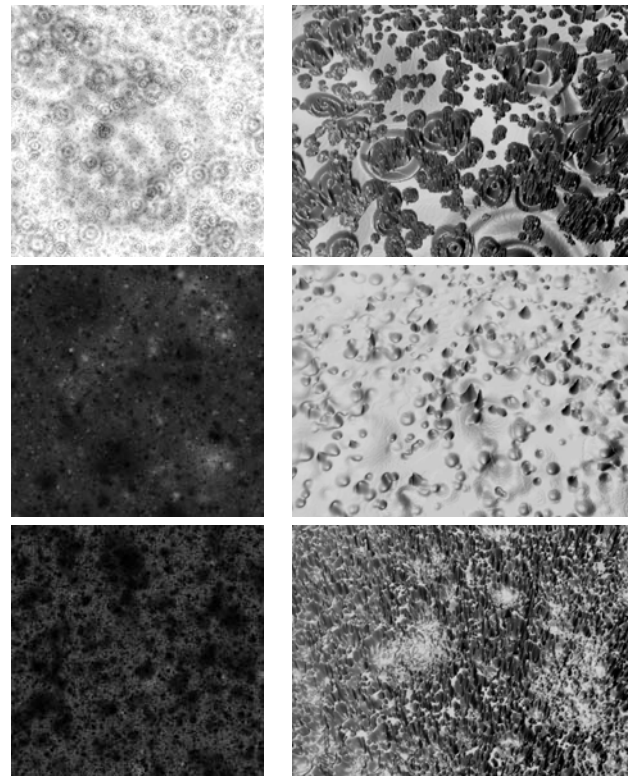


FIG. 4 – Exemples de textures issues de cascades Poisson composées : représentations respectivement en niveaux de gris (à g.) et en champ de déformation 3D (à dr.).

être générée à un *niveau de détail arbitrairement petit*. En pratique, on peut “zoomer” à l'infini sur une texture en générant progressivement les détails nécessaires. On peut aussi abandonner l'homogénéité pour contrôler localement les propriétés de la texture (noyau d'intégration, résolution, grande échelle, distribution  $G...$ ) en respectant des contours quelconques prescrits – fig. 3.

On peut intégrer à leur définition un motif géométrique de base prescrit par le noyau d'intégration  $f(\mathbf{x})$  et ainsi *introduire de l'anisotropie* – fig. 3. Cette anisotropie peut éventuellement n'être que locale si l'on applique en plus à chaque terme  $f((\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)/r_i)$  une rotation aléatoire (d'angle  $\theta_i$ ) rendant la texture globalement isotrope.

Enfin, la méthode de synthèse s'adapte facilement aux *surfaces courbes* (ex : sphère) en évitant les problèmes d'aliasing et les artefacts d'un mapping classique. On obtient ainsi une texture directement sur la sphère sans apparition de pôles ni équateur –figure 5.

Les cascades infiniment divisibles semblent bien convenir à la synthèse de textures invariantes d'échelle, mais ne sont pas forcément adaptées à la synthèse de textures quelconques. Pour une mise en pratique, il faut d'abord disposer d'outils d'analyse suffisamment précis qui permettront de s'assurer de leur pertinence pour modéliser une texture particulière. Les nombreux travaux de développement d'estimateurs pour l'analyse multifractale de ces dernières années sont alors un outil précieux. On peut désormais caractériser assez précisément une texture multifractale [1, 2, 16, 18] à l'aide de son spectre multifractal, ses dis-



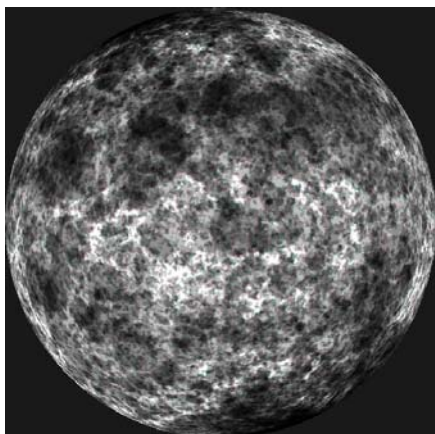


FIG. 5 – Exemple d’une texture générée directement sur la sphère (niveaux de gris).

tributions marginales, son comportement dans différentes directions...

Dans le cadre d’une modélisation physique, donc à but scientifique, les propriétés statistiques priment sur le rendu esthétique et une telle analyse fixe assez de paramètres pour que la validation de toutes ces propriétés soit suffisamment satisfaisante. Nous travaillons actuellement à la modélisation d’images du soleil dans l’extrême ultraviolet provenant du télescope spatial EIT embarqué par la mission SoHO [10].

Dans le cadre de l’infographie, le rendu visuel passe avant tout. Si l’adéquation des propriétés statistiques assure souvent une grande similitude visuelle entre la texture initiale et la cascade infiniment divisible synthétique, l’œil demeure un outil d’analyse extrêmement exigeant. Le développement logiciel d’un réel outil d’infographie utilisant les cascades infiniment divisibles nécessitera certainement encore des efforts importants, dont par exemple la création d’une base d’images de référence pour différents jeux de paramètres (dans cet esprit, voir par exemple [www.allegorithmic.com](http://www.allegorithmic.com)).

**Logiciels :** un ensemble de fonctions en MATLAB, C et OpenGL permettant la synthèse et la visualisation en 2D et en 3D seront prochainement disponibles sur notre page Web.

## Références

- [1] P. Abry, S. Jaffard, and B. Lashermes. Revisiting scaling, multifractal and multiplicative cascades with the wavelet leader lens. In *Proc. of SPIE on Wavelet Applications in Industrial Processing II*, volume 5607, Philadelphia, USA, 2004.
- [2] A. Arneodo, N. Decoster, P. Kestener, and S.G. Roux. *A wavelet-based method for multifractal image analysis : from theoretical concepts to experimental applications.*, volume 126 of *Advances in Imaging and Electron Physics*, pages 1–98. Academic Press, 2003.
- [3] E. Bacry and J.F. Muzy. Log-infinitely divisible multifractal processes. *Comm. in Math. Phys.*, 236 :449–475, 2003.
- [4] J. Barral and B. Mandelbrot. Multiplicative products of cylindrical pulses. *Probab. Theory Relat. Fields*, 124 :409–430, 2002.
- [5] P. Chainais. Multi-dimensional infinitely divisible cascades. In preparation.
- [6] P. Chainais. Multi-dimensional infinitely divisible cascades to model the statistics of natural images. In *Proc. of Int. Conf. on Image Proc.*, 2005.
- [7] P. Chainais, R. Riedi, and P. Abry. Scale invariant infinitely divisible cascades. In *Int. Symp. on Physics in Signal and Image Processing, Grenoble, France, January 2003*.
- [8] P. Chainais, R. Riedi, and P. Abry. On non scale invariant infinitely divisible cascades. *IEEE Transactions on Information Theory*, 51(3), March 2005.
- [9] S. Deguy and A. Benassi. A flexible noise model for designing maps. In *Vision, Modelling and Visualization (VMV01)*, Stuttgart, Germany, November 2001.
- [10] J.-P. Delaboudinière and the EIT Team. EIT : Extreme-Ultraviolet Imaging Telescope for the SOHO Mission. *Solar Physics*, 162 :291–312, 1995.
- [11] D.S. Ebert, F.K. Musgrave, D. Peachey, K. Perlin, and S. Worley. *Texturing and Modeling*. Morgan Kaufmann ; International Thomson, San Francisco, CA, 2003.
- [12] William Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume 2. John Wiley and Sons, Inc., New-York, London, Sidney, 1966.
- [13] Alain Fournier, Don Fussell, and Loren Carpenter. Computer rendering of stochastic models. *Commun. ACM*, 25(6) :371–384, 1982.
- [14] S. Haruyama and B.A. Barsky. Using stochastic modeling for texture generation. *IEEE Comput. Graphics Appl.*, pages 7–19, March 1984.
- [15] Lance M. Kaplan and C.-C. Jay Kuo. Texture roughness analysis and synthesis via extended self-similar (ESS) model. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(11) :1043–1056, 1995.
- [16] P. Kestener. *Analyse multifractale 2D et 3D à l’aide de la transformation en ondelettes : application en mammographie et en turbulence développée*. PhD thesis, Université de Bordeaux I, 2003.
- [17] B. Lashermes, P. Abry, and P. Chainais. New insights into the estimation of scaling exponents. *Int. J. of Wavelets, Multires. and Info. Proc.*, 2(4) :497–523, 2004.
- [18] B. Lashermes, S. Jaffard, and P. Abry. Wavelet leaders based multifractal analysis. In *Proc. of Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Proc.*, Philadelphia, USA, 2005.
- [19] J.F. Muzy and E. Bacry. Multifractal stationary random measures and multifractal random walks with log-infinitely divisible scaling laws. *Phys. Rev. E*, 66, 2002.
- [20] R. H. Riedi. *Multifractal Processes*, pages 625–716. Birkhauser, 2003. eds Doukhan, Oppenheim and Taqqu.
- [21] A. Srivastava, A.B. Lee, E.P. Simoncelli, and S.-C. Zhu. On advances in statistical modeling of natural images. *Journal of mathematical imaging and vision*, 18 :17–33, 2003.

# Application d'outils fractals pour la classification d'images microscopiques de matières grasses laitières

Antoine ECHELARD, Jacques LEVY-VÉHEL, Ina TARALOVA

Institut de Recherche en Communication et Cybernétique de Nantes

1, rue de la Noë, BP 92 101, 44321 Nantes CEDEX 03, France

antoine.echelard@irccyn.ec-nantes.fr

jacques.levy-vehel@irccyn.ec-nantes.fr, ina.taralova@irccyn.ec-nantes.fr

**Résumé** – De nombreuses caractéristiques du beurre, comme sa "tartinabilité", dépendent de la cristallisation, qui est observable sur les images microscopiques de matière grasse laitière. Comme la microstructure revêt souvent un aspect irrégulier, les outils fractals semblent particulièrement adaptés à l'étude de ces images. Dans ce papier, des techniques fractales reflétant la texture de l'image sont appliquées pour séparer le type, le site de production et le jour de maturation de différents beurres. Les images sont obtenues à partir de beurres produits dans des conditions industrielles. L'influence de la cristallisation a été observée sur ces paramètres fractals. Des corrélations prometteuses avec le jour de maturation ont été démontrées. De plus, il a été possible de séparer différents types de beurre et différents sites de production.

**Abstract** – Numerous butter features, such as "spreadability", depend on the crystallization, which is observable on microscopical images of milk fat. As microstructures often reveal rough or irregular aspect, fractal tools appear to be particularly adapted to their study.

In this paper, fractal techniques quantifying the texture of the image are applied to separate type, plant and day of ripening of different butters. The images are taken from butters produced in industrial conditions. The influence of the crystallization on the fractal parameters has been observed. Fractal quantifiers have demonstrated promising correlations with the day of ripening of the butter. Moreover, they have also shown to be efficient in separating different kinds of butters.

## 1 Introduction

De nombreux travaux sur la valorisation du lait sont axés vers le développement de moyens technologiques permettant d'améliorer les propriétés fonctionnelles et nutritionnelles de la matière grasse laitière. Les études visent la production de fractions à teneur réduite en cholestérol et en acides gras saturés pour la préparation de "laits santé", de beurres frigo-tartinables, de beurres allégés et de fractions à fonctionnalité améliorée pour des utilisations spécifiques (ex. boulangerie et chocolaterie).

Toutes ces propriétés dépendent principalement de la microstructure, qui est mesurée traditionnellement par la rhéologie mais peut être observée également sur des images microscopiques. Ces images présentent souvent un aspect irrégulier. L'utilisation d'outils fractals semble donc appropriée pour analyser ce type d'images.

Les travaux sur l'analyse fractale de la microstructure des gels et des matières grasses (beurre de coco, huiles, yaourts, fromages...) sont généralement fondés sur des modèles reliant les propriétés microscopiques et macroscopiques du matériau. Ainsi, Shih [6] développe un modèle qui relie les propriétés élastiques à une dimension fractale des flocons dans le gel colloïdal. Wu et Morbidelli [7] proposent une théorie d'échelle pour relier les paramètres structurels avec les propriétés rhéologiques. Marangoni [4] évalue une dimension fractale des images microscopiques de la matière grasse afin de modéliser des propriétés élastiques. Dans ces articles, la dimension fractale figure comme paramètre dans le modèle analytique qui sert à estimer des propriétés rhéologiques.

Nous utilisons dans ce travail des techniques fractales indé-

pendamment d'une modélisation fondée sur la rhéologie pour évaluer directement sur les images la cristallisation des matières grasses. Un avantage de cette méthode par rapport aux techniques classiques de pénétrométrie est sa plus grande légèreté de mise en oeuvre. De plus, elle est applicable dès le jour de fabrication du beurre. Les techniques de pénétrométrie classiquement utilisées pour évaluer la rhéologie ne peuvent, elles, être utilisées à cette date, à cause de la trop grande mollesse du beurre à ce moment-là. Nous avons étudié différents paramètres fractals, parmi lesquels les plus pertinents se sont avérés être la dimension de boîte, la dimension de régularisation, la lacunarité et les normes de Besov.

Cet article est organisé comme suit : la section 2 expose le matériel et les méthodes d'acquisition employées, la section 3 présente de manière générale les paramètres fractals retenus pour l'étude, la section 4 énonce et discute les résultats obtenus, et la section 5 conclut l'article.

## 2 Matériel et méthodes

Nous avons travaillé avec des images microscopiques de deux types de beurre : beurre croissant (utilisé comme son nom l'indique dans la préparation des croissants), et beurre Nizo. Le beurre Nizo est obtenu par une méthode de maturation continue de la crème. Il recouvre 90% de la production industrielle de beurre. Il a été prélevé des échantillons de ces deux types de beurre sur différents sites industriels (deux pour le beurre Nizo, trois pour le beurre croissant). Les échantillons sont prélevés sur les sites à la sortie des conditionneuses et transportés

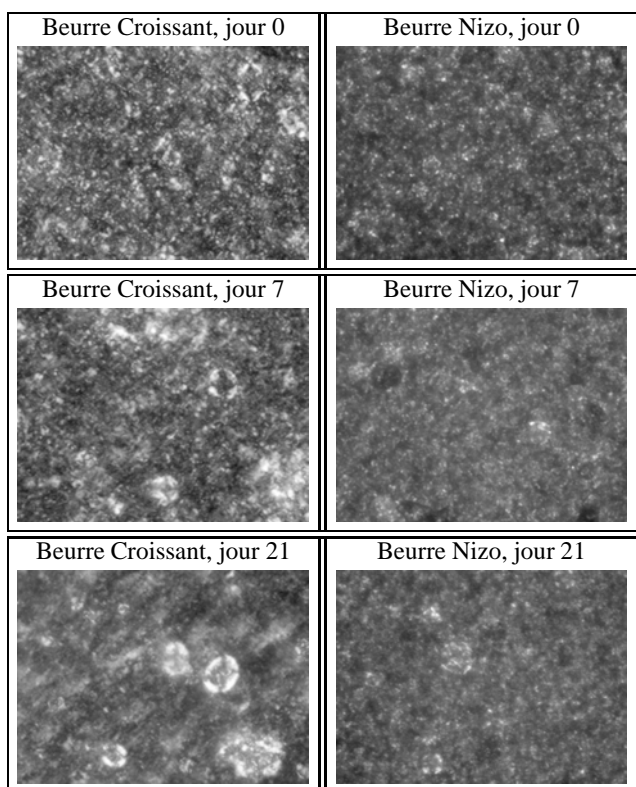


FIG. 1 – Images de beurre

en container isotherme jusqu'aux locaux de l'ENILIA<sup>1</sup>, organisme avec lequel nous avons mené ce travail. Les échantillons sont ensuite suivis pendant leur maturation qui dure 21 jours. Pour chaque type de beurre et chaque site, cinq images par jour correspondant à cinq champs visuels différents ont été acquises aux jours J0, J+1, J+7, J+14, J+21, où J0 est le jour de prélèvement du beurre. La procédure est répétée trois fois pour différentes épaisseurs de l'échantillon. Le grossissement du microscope est 400x (1 pixel  $\leftrightarrow$  1.18  $\mu$ m). Nous avons ainsi disposé de 60 images de taille 1104x812 pixels par beurre et par site.

Sur les images obtenues (Fig. 1), on constate la présence de cristaux en forme de croix de Malte (plus clairs), et d'une masse grise informe, correspondant à de la matière non cristallisée, ou bien à des cristaux superposés. Les cristaux sont particulièrement visibles sur les images de beurre croissant. Suivant les types de beurre, les cristaux sont plus ou moins grands et nets, tandis que, suivant le jour de maturation, la cristallisation progressant, la surface informe diminue et les cristaux deviennent plus grands et moins nombreux.

En résumé, les échantillons de beurre se différencient par : le type de beurre utilisé, son degré de maturation et son lieu de production. Nous avons cherché à faire apparaître ces différences en appliquant certains outils fractals.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ecole Nationale d'Industrie Laitières et des Industries Agro-alimentaires. Site : <http://www.enilia.com>

<sup>2</sup>Tous ces outils sont disponibles dans la boîte à outils FRACLAB, téléchargeable à : <http://www.irccyn.ec-nantes.fr/irccyn/Projets/FracLab/FracLab.htm>

### 3 Présentation des outils fractals

#### 3.1 Dimension de boîte

La dimension de boîte [2] est un paramètre fractal classique qui permet de caractériser la manière dont un objet remplit l'espace. Elle a été calculée sur des images en noir et blanc (Les images noir et blanc sont obtenues par seuillage sur les images en niveaux de gris. Voir explications au paragraphe 4.1). Pour l'obtenir, on calcule une suite  $N(k)$  définie comme suit : Pour chaque  $k$ , on recouvre l'image d'un quadrillage de carrés de côté  $1/2^k$ , puis  $N(k)$  est le nombre de carrés non vides (c.a.d. qui contiennent au moins un pixel blanc).

La dimension de boîte mesure la vitesse à laquelle  $N(k)$  tend vers l'infini. Plus précisément,  $N(k)$  est proportionnel à  $2^{kd}$ , où  $d$  est la dimension recherchée.

Le but étant d'évaluer  $d$ , on trace  $\log N(k)$  en fonction de  $\log k$  puis on détermine un intervalle sur lequel ce tracé semble affine.  $d$  est la pente de la droite obtenue.

Précisons que le même type de calcul peut aussi caractériser l'image en niveau de gris (i. e. en 3D), mais que les résultats n'ont pas été concluants dans l'application présentée ici.

#### 3.2 Dimension de régularisation

Une autre dimension fractionnaire, appelée "dimension de régularisation" [5], a donné des résultats intéressants. Celle-ci n'a pas été calculée sur l'image binarisée, mais sur l'image en niveaux de gris. Le but n'est donc plus de caractériser la manière dont certains pixels remplissent l'image, mais plutôt d'obtenir une information sur la régularité de sa texture.

Soit  $I(x, y)$  l'image, où  $I(x, y)$  est le niveau de gris du pixel  $(x, y)$ .  $I$  est lissée par convolution avec, par exemple, un noyau gaussien  $K_\sigma$  de variance  $\sigma$ . Notons  $I_\sigma$  l'image régularisée  $I_\sigma = K_\sigma * I$ . Supposons que  $I$  est si irrégulière que la surface  $(x, y, I(x, y))$  de  $\mathbb{R}^3$  a une aire infinie.

Les images  $I_\sigma$  sont telles que pour tout  $\sigma > 0$ , leurs surfaces  $(x, y, I_\sigma(x, y))$  ont une aire finie  $S_\sigma$ . Quand  $\sigma$  tend vers 0,  $I_\sigma$  tend vers  $I$  et  $S_\sigma$  tend vers l'infini. La dimension de régularisation  $\dim_R$  mesure la vitesse de convergence de  $S_\sigma$  vers l'infini. Formellement :  $\dim_R = 2 + \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\log(S_\sigma)}{-\log \sigma}$ , quand la limite existe (une limite inférieure est évaluée dans le cas contraire).

De manière analogue à la dimension de boîte, la dimension de régularisation est estimée par une régression linéaire de  $\log S_\sigma$  en fonction de  $\log \sigma$ .

#### 3.3 Lacunarité

Deux images de même dimension fractionnaire peuvent différer énormément. La lacunarité [3] est un paramètre fractal du second ordre qui décrit la texture d'une image. De même que la dimension de régularisation, nous l'avons appliquée sur l'image en niveaux de gris.

La lacunarité évalue l'homogénéité de la répartition des intensités lumineuses. Si on suppose l'image totalement homogène, l'intensité lumineuse  $m$  présente dans une fenêtre de taille  $\epsilon$  est la même pour toutes les fenêtres. La lacunarité décrit la "dispersion" des intensités lumineuses réellement présentes dans ces fenêtres de taille  $\epsilon$  par rapport à  $m$  :  $L = \langle (\frac{m'}{m} - 1)^2 \rangle$  où  $m'$  est l'intensité lumineuse observée dans la fenêtre



de taille  $\epsilon$ . Les crochets désignent la moyenne sur les fenêtres de taille  $\epsilon$ .

La lacunarité permet de mesurer la distribution de trous dans l'image : si celle-ci comporte de grands contrastes (à l'échelle  $\epsilon$ ), alors la lacunarité de l'image sera élevée. A l'inverse, si l'image est homogène, alors sa lacunarité sera faible.

### 3.4 Norme de Besov

Nous exposons le calcul en 1D pour plus de clarté. Soit  $X$  un signal dans  $L^2(\mathbb{R})$  et  $c_{jk}$  ses coefficients d'ondelettes sur une base ayant une régularité suffisante (voir [5] pour plus de détails). Alors  $X$  appartient à l'espace de Besov  $B_{p,q}^s$  si :

$$\|X\|_{B_{p,q}^s}^q = \sum_j \left[ 2^{j(s+1/2-1/p)} \left( \sum_k |c_{jk}|^p \right)^{1/p} \right]^q < \infty$$

Le paramètre  $s$  mesure la régularité du signal, et les paramètres  $p$  et  $q$  la manière de définir cette régularité.

## 4 Analyse et discussion

Sur les images, on observe des cristaux dont l'aspect varie avec le type de beurre et le stade de maturation. Les paramètres exposés dans la section 3 peuvent être interprétés comme reflétant certaines propriétés des cristaux telles que leur taille, leur densité, ou la quantité de matière non cristallisée.

Nous avons donc cherché à discriminer les différents groupes de beurres au moyen de paramètres fractals. L'intérêt de cette démarche est la suivante : un outil qui distingue les jours les uns des autres fournit un renseignement sur l'état de maturation du beurre, même en l'absence de modèle. De même, un outil qui distingue les beurres entre eux peut permettre de se rendre compte si un beurre n'est pas conforme à ce qu'on souhaite obtenir. Enfin, discriminer les sites de production peut permettre de mettre en évidence des variations de technologie ou de matières premières.

Chacun des paramètres précédemment exposés a été étudié dans le cadre de la séparation des beurres, des lieux de production et des jours de suivi. Nous présentons ici les résultats les plus concluants : chaque paramètre permettait de séparer au mieux certains groupes.

### 4.1 Evolution de la dimension de boîte avec la maturation

Avant de calculer cette grandeur, nous avons effectué un seuillage, le but étant d'obtenir des images où les pixels blancs correspondent à des cristaux, ces cristaux étant plus clairs que le fond. A cause du nombre d'images traitées, le seuil a dû être calculé automatiquement, ce qui est assez délicat : la luminosité moyenne et le contraste de l'image dépendent de l'éclairage lors de la photographie. Cet éclairage pouvant varier, il semble nécessaire que l'image binarisée dépende le moins possible de ces deux paramètres, c'est à dire qu'une variation de la luminosité ou du contraste de l'image en niveaux de gris ne modifie pas trop l'image binarisée. Une idée naturelle est alors de choisir le seuil comme la somme de la moyenne et d'un multiple de l'écart-type de la distribution des niveaux de gris.

Nous avons ainsi constaté qu'un seuil empirique fixé à la moyenne + 2 écarts-type permettait d'isoler assez bien la surface occupée par les cristaux. (Fig. 2) Nous avons vérifié sur

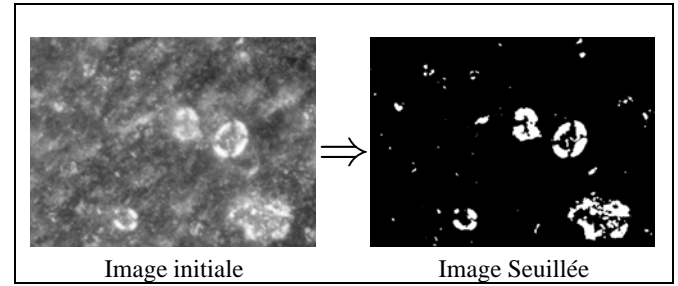


FIG. 2 – Exemple de seuillage

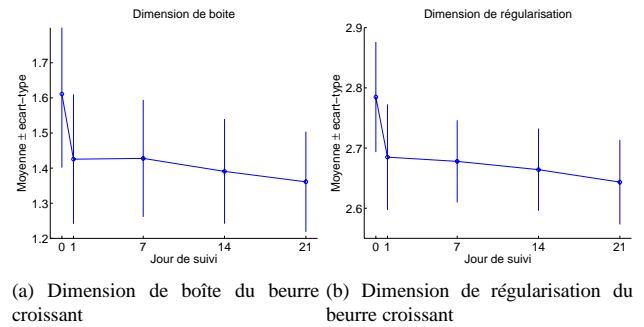


FIG. 3 – Evolution en fonction du jour

un grand nombre d'images que ce type de seuillage donnait des résultats satisfaisants.

Sur les images des premiers jours, les cristaux sont plutôt petits et uniformément distribués. Vue de loin, l'image peut apparaître comme entièrement remplie de cristaux. Quand les cristaux s'agrègent, leur surface augmente, mais il se trouve plus d'espace entre eux, et, à condition de regarder toujours l'image d'assez loin, ils apparaissent alors plus comme des "points".

La dimension de boîte permet de distinguer ces changements. En simplifiant, si de petits cristaux sont répartis partout dans l'image, toutes les boîtes vont être pleines, donc  $N(k)$  va évoluer comme  $2^{2k}$  tandis que si on a juste quelques cristaux isolés dans l'image dont la taille reste inférieure à celle des boîtes, on aura toujours une boîte non vide par cristal et  $N(k)$  sera constant, égal au nombre de cristaux. La situation réelle n'est pas aussi marquée, mais on a pu effectivement constater une tendance décroissante de cette grandeur avec le jour (Fig 3(a)). Précisons que les images analysées sont celles de beurres préparés dans des conditions industrielles. Les résultats sont représentatifs, chaque moyenne étant évaluée sur 180 images (pour les trois sites), malgré des barres d'erreur relativement fortes.

### 4.2 Evolution de la dimension de régularisation avec la maturation du beurre

Pendant la maturation du beurre, on observe la formation de nouveaux cristaux, l'aggrégation de cristaux déjà existants et la diminution de la surface informe. Les cristaux étant une partie plutôt régulière de l'image, contrairement à la surface informe, l'irrégularité de l'image diminue au cours du temps. La dimension de régularisation doit donc diminuer avec la cristallisation du beurre. Les résultats sur le beurre croissant Fig. 3(b) montrent que la dimension de régularisation est bien corrélée avec la maturation du beurre, et décroît avec le temps. De même

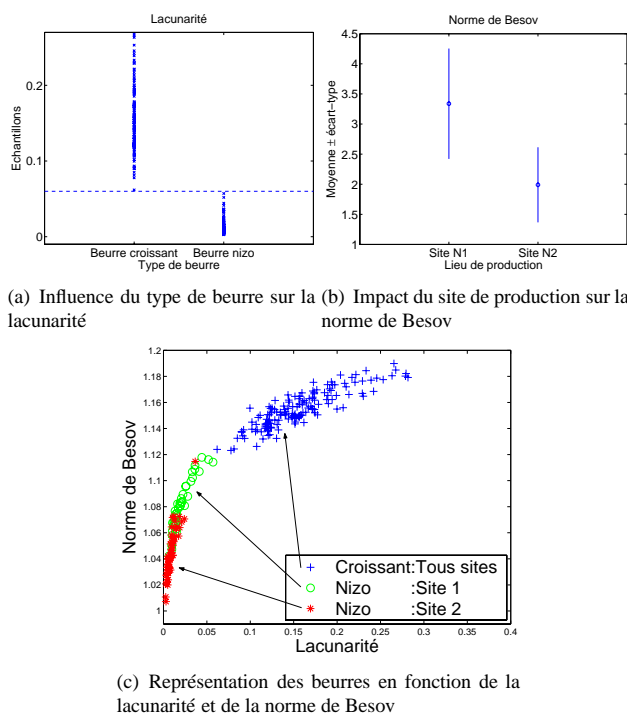


FIG. 4 – Séparation du type de beurre et du site de production

que précédemment, les résultats sont représentatifs étant donné le grand nombre d'images analysées (180 par jour).

### 4.3 Séparation des types de beurre avec la lacunarité

La lacunarité, du fait qu'elle évalue l'homogénéité de la texture de l'image, permet de séparer les deux types de beurre : les images du beurre croissant présentent beaucoup de vides et ne sont pas homogènes, à cause de la présence de gros cristaux en forme de croix de Malte. En comparaison, les images du beurre Nizo sont beaucoup plus homogènes. Les valeurs de la lacunarité sont alors beaucoup plus faibles pour le beurre croissant que pour le beurre Nizo. La figure 4(a) montre que la lacunarité sépare parfaitement les deux types de beurre sur tous les échantillons (Environ 360 par type de beurre) et pour tous les sites. De plus, on constate que la concentration des échantillons est faible pour les valeurs de lacunarité proche de la valeur critique  $L = 0.06$ . La lacunarité apparaît donc comme réellement adaptée à la séparation du type de beurre.

### 4.4 Norme de Besov et site de production

La séparation des différents sites industriels a été effectuée en utilisant la norme de Besov des images dans des espaces de Besov bien choisis [1].

Le choix de ces espaces s'est effectué ainsi : Nous avons calculé la norme de Besov dans 45 espaces différents (pour  $s = 0.3, 0.4, 0.5$ ;  $p = 1, 2, 3$ ;  $q = 1, 2, 3$ ) puis, après avoir constaté que ces normes formaient deux groupes de résultats à l'intérieur desquels les corrélations étaient très fortes, nous avons gardé un représentant du groupe qui permettait de discriminer au mieux les deux sites (Il s'agissait de la norme de Besov calculée pour  $s = 0.5$ ;  $p = 1$ ;  $q = 1$ ).

Nous avons pu séparer les sites produisant le beurre Nizo (voir figure 4(b)), mais pas le beurre croissant. Les résultats se sont ainsi révélés complémentaires des résultats de pénétrométrie : avec des outils statistiques de type analyse en composantes principales sur les mesures classiques de pénétrométrie, il a été possible de séparer les sites de production du beurre croissant, mais pas ceux du beurre Nizo. Les normes de Besov se sont avérées également pertinentes en combinaison avec d'autres paramètres fractals. Ainsi, la figure 4(c) présente la classification par site et par type de beurre en fonction de la lacunarité et des normes de Besov ; ce critère combiné a permis de séparer avec succès à la fois le beurre croissant du beurre Nizo, et les beurres Nizo entre eux selon le site industriel où ils ont été fabriqués. Nous avons étudié différentes combinaisons de facteurs, mais c'est couplée à la lacunarité que la norme de Besov permet de discriminer au mieux les différents groupes. L'intérêt de cette séparation est par exemple de détecter les beurres qui ne seraient pas conformes à ce que l'on souhaite.

## 5 Conclusion

En conclusion, les techniques fractales semblent être bien adaptées pour évaluer la maturation des beurres Nizo et croissant, séparer ces deux types de beurre, et discriminer les sites industriels où sont produits les beurres Nizos. Contrairement aux méthodes de pénétrométrie, les résultats sont disponibles immédiatement ; nous pouvons ainsi quantifier le stade de cristallisation dès le premier jour de maturation. De plus, les techniques d'analyse d'images sont plus faciles à mettre en oeuvre.

## Remerciements

Les auteurs remercient Franck Sobolewski et Sophie Breau, de l'ENILIA Surgères, pour les images de beurre et les discussions et commentaires précieux dont ils nous ont fait part.

## Références

- [1] R.A. DeVore. Nonlinear approximation. *Acta Numerica*, pages 1–99, 1998.
- [2] Falconer K. *Fractal Geometry - Mathematical Foundations and applications*. John Wiley, second edition, 2003.
- [3] J. Levy Vehel. About lacunarity, some links between fractal and integral geometry and an application to texture segmentation. *ICCV*, 90 :380–384, 1990.
- [4] Alejandro G. Marangoni and Suresh S. Narine. Identifying key structural indicators of mechanical strength in networks of fat crystals. *Food Research International*, 35 :957–969, 2002.
- [5] F. Roueff and J. Lévy Véhel. A regularization approach to fractional dimension estimation. In *Fractals* 98, 1998.
- [6] W. D. Shih, W. Y. Shih, S.I. Kim, J. Liu, and I.A. Aksay. Scaling behavior of the elastic properties of colloidal gels. *Physical Review A*, 42(8) :4772–4779, 1990.
- [7] H. Wu and M. Morbidelli. A model relating structure of colloidal gels to their elastic properties. *Langmuir*, 17 :1030–1036, 2001.

# Contributions à l'étude des performances statistiques des estimateurs multifractals

Stéphane G. ROUX<sup>1</sup>, Bruno LASHERMES<sup>1</sup>, Patrice ABRY<sup>1</sup>, Stéphane JAFFARD<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Physique, CNRS UMR 5672

École Normale Supérieure de Lyon 46, allée d'Italie, 69364 Lyon, France

<sup>2</sup>CNRS UMR, dépt. d'Analyse et de Mathématiques Appliquées,  
Université Paris XII, créteil, France.

stephane.roux@ens-lyon.fr, bruno.lashermes@ens-lyon.fr  
patrice.abry@ens-lyon.fr, jaffard@univ-paris12.fr

**Résumé** — Nous nous intéressons à différents estimateurs des exposants des lois d'échelle, construits sur des analyses en ondelette. L'un de ces estimateurs est notamment défini à partir d'une technique récente d'analyse multifractale, dite des *coefficients leaders*. Nous comparons leurs performances statistiques sur un processus multifractal particulier, la marche aléatoire multifractale, choisi pour son caractère simple et représentatif d'une large classe de multifractals. Nous mettons en évidence que l'erreur quadratique moyenne des estimateurs prend une forme générale qui ne dépend que de l'écart à la monofractalité du processus étudié. Nous illustrons l'intérêt de l'estimateur leaders.

**Abstract** — We consider various wavelet based estimators for scaling exponents of multifractal processes. One of these estimators is based on a new multifractal formalism the wavelet leaders. Their statistical performance are studied using a specific multifractal process, the Multifractal Random Walk, chosen for its being representative though simple of a large class of multifractals. We show that the mean square error presents a general shape which depends only on the departure of the process from monofractality. We show also the relevance of the wavelet leaders.

## 1 Motivations

Au cours de cette dernière décennie, des comportements en loi d'échelle, des phénomènes d'invariance d'échelle ont été observés dans de nombreuses applications de natures très différentes. Pour appréhender l'invariance d'échelle, on remplace couramment le signal  $X(t)$  à étudier par des coefficients multirésolution  $T_X(a, t)$  qui dépendent à la fois du temps  $t$  et de l'échelle d'analyse  $a$ . On définit alors l'invariance d'échelle à travers le comportement en loi de puissance en fonction de  $a$  des puissances  $q$ -èmes d'une fonctionnelle des  $T_X(a, t)$  :

$$S(a, q) = \frac{1}{n_a} \sum_{k=1}^{n_a} F(|T_X(a, t(k))|)^q = c_q |a|^{\zeta(q)}, \quad (1)$$

où  $n_a$  désigne le nombre de coefficients à l'échelle  $a$ . Les  $T_X(a, t)$  peuvent en particulier être les coefficients d'ondelettes ou les accroissements de  $X$ .

L'analyse pratique des phénomènes d'invariance d'échelle sur des données expérimentales, consiste à mettre en évidence ces lois de puissance et à mesurer les exposants  $\zeta(q)$  correspondants. Souvent, cette estimation est réalisée à partir de la mesure de la pente d'une droite observée dans le diagramme  $\ln S(a, q)$  versus  $\ln a$ . Alors que les performances statistiques de tels estimateurs ont été largement étudiées pour les processus autosimilaires [1, 2], celles-ci sont bien moins connues pour les processus multifractals, notamment pour ceux dont les exposants  $\zeta(q)$  suivent une

loi non linéaire en  $q$ .

Dans cet article, nous nous concentrons sur quatre déclinaisons d'estimateurs *ondelette* d'exposants  $\zeta(q)$ . Nous étudions leurs performances statistiques à partir d'une mise en œuvre sur un processus multifractal particulier, la *Marche Aléatoire Multifractale* [3]. Ce dernier est choisi à la fois pour son caractère représentatif d'une large classe de multifractals et pour son caractère simple (ses propriétés multifractales sont définies par un nombre réduit de paramètres) et facile à simuler numériquement.

## 2 Ondelettes versus leaders

Les coefficients de la transformée en ondelettes continue (TOC) résultent de la comparaison par produits scalaires  $T_X(a, t)$  de  $X$  contre les dilatées et translatées d'une fonction  $\psi_0$ , appelée ondelette-mère :

$$T_X(a, t) = \int X(u) |a|^{-1} \psi_0(a^{-1}(u - t)) du. \quad (2)$$

L'ondelette mère est principalement caractérisée par un entier  $N \geq 1$  appelé le nombre de moments nuls défini par  $\int t^k \psi_0(t) dt \equiv 0, \forall k = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Les coefficients de la transformée en ondelettes discrète (TOD) consistent essentiellement en une restriction de ceux de la TOC à une grille dyadique :

$$d_X(j, k) = T_X(2^j, k2^j). \quad (3)$$

Cette transformée bénéficie notamment d'un coup de calcul significativement plus faible que la précédente. Pour une présentation plus détaillée des transformées en ondelettes, le lecteur est renvoyé à [4].

On définit ensuite une version squelettisée de la TOC, les maxima du module de la transformée en ondelette, ou TOMM, développée par A. Arnéodo et ses collaborateurs, (voir par exemple [5]). Pour cela, on extrait, à chaque échelle les maxima du module de la transformée en ondelettes. De manière récursive et en partant de la plus petite échelle, on relie chaque maximum obtenu à cette échelle au maximum le plus proche de l'échelle supérieure. On obtient ainsi un ensemble de lignes de maxima, un *squelette*, noté  $\mathcal{L}$ . Sur ce squelette, on remplace ensuite les  $T_X(a, t) \in \mathcal{L}$  par leurs maxima, observés à une échelle plus fine sur la même ligne du squelette :

$$M_X(a, t) = \sup_{(t, a') \in \mathcal{L}, a' < a} |T_X(a', t)|. \quad (4)$$

À partir de la TOD a été très récemment proposée une analyse dite des coefficients *leaders*, TOL, [6]. Ces coefficients *leaders* se définissent par :

$$L_X(j, k) = \sup \left\{ \bigcup_{0 \leq j' \leq j} \left\{ \bigcup_{m=m_1}^{m_2} \{|d(j, m)|\} \right\} \right\}, \quad (5)$$

avec  $m_1 = 2^{j-j'}(k-2)+1$ ,  $m_2 = 2^{j-j'}(k+1)$  et  $L_X(0, \cdot) = 0$ . Cela signifie simplement que le coefficient leader  $L_X(j, k)$  est obtenu comme le maximum dans un voisinage local de tous les  $d_X(j, k)$  situés à des échelles inférieures. Le voisinage temporel local est défini par les deux coefficients adjacents à celui considéré (cf. figure 1).

Dans la suite, nous utiliserons ces quatre ensembles de coefficients dans l'équation 1.

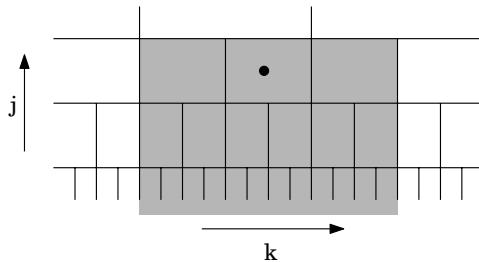


Figure 1: **Coefficient leader** : Sur la grille dyadique correspondant à la TOD, le coefficient leader matérialisé par le point est obtenu en prenant le maximum du module des  $d_X(j, k)$  localisés dans la zone grisée et ce jusqu'à la plus petite échelle.

### 3 Marche Aléatoire Multifractale

**Définition.** La Marche Aléatoire Multifractale (MAM) a été initialement définie dans [3] selon :

$$X(k) = \sum_{k=1}^n G_H(k) e^{\omega(k)}. \quad (6)$$

Les processus  $G_H(k)$  et  $\omega(k)$  sont indépendants,  $G_H(k)$  désigne le bruit gaussien fractionnaire, de paramètre  $H$  et  $\omega(k)$  un bruit gaussien corrélé selon :

$$\text{cov}(\omega(k_1), \omega(k_2)) = c_2 \ln(L/(|k_1 - k_2| + 1)), \quad (7)$$

si  $|k_1 - k_2| < L$  et 0 sinon. Ce processus est donc entièrement défini par trois paramètres  $H$ ,  $c_2$  et  $L$ , ce dernier définit l'*échelle intégrale*. Par ailleurs, la synthèse pratique des processus implique nécessairement une résolution finie, au moins due au caractère échantillonné, éventuellement à certains détails de la construction (cf. [7]). Celle-ci sera notée ici  $a_R$  et prise arbitrairement à 1 sans caractère restrictif. En réalité, seul le rapport  $L/a_R$  importe. Enfin, ce processus est, par construction, non stationnaire mais à accroissements stationnaires.

**Invariance d'échelle.** Les propriétés d'invariance d'échelle de ce processus peuvent être rassemblées dans les relations suivantes. Pour la TOC et la TOD, pour  $q > -1$  et pour  $1 \leq a = 2^j \leq L$ , nous avons :

$$\mathbb{E}|T_X(a, t)|^q = B_q a^{\zeta(q)}, \quad (8)$$

$$\mathbb{E}|d_X(j, k)|^q = B_q 2^{j\zeta(q)}, \quad (9)$$

avec

$$\zeta(q) = (H + c_2)q - c_2 q^2/2. \quad (10)$$

Cela indique que l'écart au comportement linéaire en  $q$  de la fonction  $\zeta(q)$  est entièrement caractérisé par le seul paramètre  $c_2$ . De plus, il est possible de montrer que pour la TOMM et la TOL, pour  $1 \leq a = 2^j \leq L$  et pour  $q \in [q_*^-, q_*^+]$ , nous avons :

$$\frac{1}{n_a} \sum_{k=1}^{n_a} |T_X(a, k)|^q = B_q a^{\zeta(q)}, \quad q \in [0, q_*^+],$$

$$\frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} |d_X(2^j, k)|^q = B_q 2^{j\zeta(q)}, \quad q \in [0, q_*^+],$$

$$\frac{1}{n_a} \sum_{k=1}^{n_a} M_X(a, k)^q = B_q a^{\zeta(q)}, \quad q \in [-q_*^-, q_*^+],$$

$$\frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} L_X(2^j, k)^q = B_q 2^{j\zeta(q)}, \quad q \in [-q_*^-, q_*^+].$$

Il est essentiel de noter que la limitation de la validité de ces lois de puissance à une gamme restreinte de valeurs de  $q$  constitue une propriété fondamentale et générale des processus multifractals (cf. [8]). La *Marche Aléatoire Multifractale* correspond au cas particulièrement simple où :  $q_*^+ = -q_*^- = \sqrt{2/c_2} = q_*$ .

**Extension.** La marche aléatoire peut être vue comme un cas particulier d'une construction plus générale de processus infiniment divisibles multifractals (voir, par exemple, [7, 9]).

### 4 Estimateurs

**Définitions.** Nous allons considérer quatre estimateurs construits sur les quatre coefficients multirésolution définis précédemment. Nous noterons donc  $F_X(a, j, k)$  pour

$|T_X(a_j, k)|, |d_X(j, k)|, M_X(a_j, k), L_X(j, k)$  respectivement. Les estimateurs sont définis par régressions linéaires du logarithme de  $S(a_j, q) = 1/n_j \sum_{k=1}^{n_j} F_X(a_j, k)^q$  en fonction de  $\log_2 a_j$  par :

$$\hat{\zeta}(q) = \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \log_2 S(a_j, q), \quad (11)$$

où les poids  $w_j$  prennent la forme

$$w_j = (S_0 x_j - S_1) / (\alpha_j (S_0 S_2 - S_1^2)), \quad (12)$$

avec  $S_p = \sum_{j=j_1}^{j_2} x_j^p / \alpha_j$ ,  $p = 0, 1, 2$ . Ici, les  $\alpha_j$  qui quantifient la confiance accordée à chaque  $\log_2 S(a_j, q)$  sont pris tous égaux à 1. Pour les TOD et TOL, les  $a_j$  prennent naturellement les valeurs  $a_j = 2^j$ . On utilise pour TOC et TOD,  $q \in [0, q_*]$ , pour TOMM, TOL  $q \in [-q_*, q_*]$ . Nous n'aborderons pas ici la question de la sélection de la gamme d'échelle. Elle est supposée fixe et connue a priori.

**Commentaires.** Le défaut des estimateurs TOC et TOD vis-à-vis d'une analyse multifractale correcte est de ne pas offrir de solutions ni pratique ni théorique à l'estimation des  $\zeta(q)$  pour la gamme de  $q$  négatifs,  $q \in [q_*, 0]$ . En effet, d'une part, cette procédure serait instable pour le calcul de puissances  $q$ -èmes négatives de coefficients d'ondelettes proches de 0 ; d'autre part, elle n'est soutenue par aucun résultat théorique. Il est cependant connu qu'une étude pertinente des propriétés multifractales de  $X$  doit passer par l'étude des  $q$  négatifs. C'est historiquement l'une des raisons qui a présidé à la définition de la TOMM (cf. [5]). Dans cette approche, il est essentiel de noter que la somme  $S(a, q)$  est prise sur les lignes de maxima appartenant au squelette seulement, ( $l \in \mathcal{L}$ ), donc sur un ensemble de points restreints. L'intérêt et la pertinence de cette méthode, développée par A. Arneodo et ses collaborateurs, ont été établis et éprouvés dans une abondante littérature [5]. L'intérêt et la pertinence de la TOL pour l'analyse multifractale ont été établis dans [6] et discuté et illustré dans [10]. Elle présente aussi l'avantage d'avoir un coût de calcul très inférieur à la TOMM et de se généraliser facilement, théoriquement et pratiquement, à des dimensions supérieures.

## 5 Performances des estimateurs

### 5.1 Méthodologie.

Pour étudier les performances statistiques de ces estimateurs, nous procédons par simulations numériques. Nous fabriquons par synthèse numérique un grand nombre de réalisations  $n_{real}$  de MAM de longueur  $n * n_L$ , où  $n$  est le nombre de points par échelle intégrale  $L$  et  $n_L$  le nombre d'échelles intégrales. On applique chacun des quatre estimateurs ci-dessus à chacune des réalisations et on obtient une estimation  $\hat{\zeta}_l^i(q)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ;  $l = 1, \dots, n_{real}$ . En moyennant sur les réalisations, on peut mesurer la valeur moyenne  $\langle \hat{\zeta}_l^i(q) \rangle_l$  et la variance  $\langle \langle \hat{\zeta}_l^i(q) \rangle_l \rangle_l$  des estimateurs  $\hat{\zeta}_l^i(q)$ . On peut alors calculer l'erreur quadratique moyenne :  $E_q^i = ((\langle \hat{\zeta}_l^i(q) \rangle_l - \zeta(q))^2 + \langle \langle \hat{\zeta}_l^i(q) \rangle_l \rangle_l)^{1/2}$ . Ici,

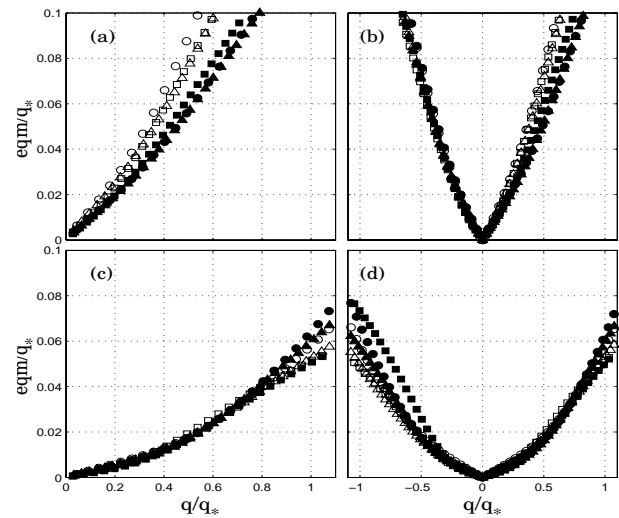


Figure 2: Erreur quadratique moyenne  $E_q^i/q_*$  en fonction de  $q/q_*$ . Pour  $H = 0.8$  et  $c_2 = 0.1$  ( $\circ, \bullet$ ),  $c_2 = 0.05$  ( $\square, \blacksquare$ ) et  $c_2 = 0.01$  ( $\triangle, \blacktriangle$ ); pour la TOC (symboles pleins) et la TOD (symboles vides) à gauche et la TOMM (symboles pleins) et la TOL (symboles vides) à droite. Les graphes du haut correspondent à  $(n, n_L) = (1024, 2)$ , ceux du bas à  $(1024, 64)$ .

la résolution est fixée et on fait varier la durée des signaux de deux façons : soit, à échelle intégrale fixée, on augmente le nombre d'échelles intégrales  $n_L$  disponibles à l'analyse ; soit, à nombre d'échelles intégrales fixé, on augmente l'échelle intégrale  $L$ . Nous présentons des résultats pour  $nb_{real} = 500$ ,  $(n, n_L) = (2^{12}, 2), (2^{12}, 2^6), (2^{16}, 2)$  et pour les couples  $(H, c_2)$  avec  $H = 0.5, 0.8$  et  $c_2 = 0.1, 0.05$  et  $0.01$ . Nous avons choisi  $20a_R \leq a_j \leq L/4$ . Les ondelettes utilisées sont des Daubechies2 pour TOD et TOL et des dérivées secondes de gaussienne pour TOC et TOMM. Toutes les procédures de synthèse et d'estimation ont été implantées par nos soins en MATLAB et/ou C et sont accessibles sur demande.

### 5.2 Résultats

**Forme universelle.** Pour chacun des quatre estimateurs, les figures 2 et 3 présentent les courbes  $E_q^i/q_*^+$  en fonction de  $q/q_*^+$  pour les différents jeux de paramètres  $H, c_2$ . Le premier résultat obtenu réside dans le fait que, à  $H$  fixé, les courbes :

$$E_q^i/q_* = f_{n, n_L}^i(H, q/q_*), \quad (13)$$

se superposent les unes aux autres quelle que soient les valeurs de  $c_2$  (ou de façon équivalente de  $q_*^+$ ). En d'autres termes, les courbes décrivant l'erreur quadratique moyenne des estimateurs sont homothétiques les unes des autres à condition d'être renormalisées par  $q_*^+$ , qui rend compte de l'écart à la monofractalité. Ceci est valable pour les quatre estimateurs étudiés. Une comparaison des figures 2 et 3 montre de plus que les fonctions  $f_{n, n_L}^i$  semblent ne dépendre que très faiblement de la valeur du paramètre  $H$ . Enfin, l'étude des  $f_{n, n_L}^i$  indique que  $f_{n, n_L}^i \sim$

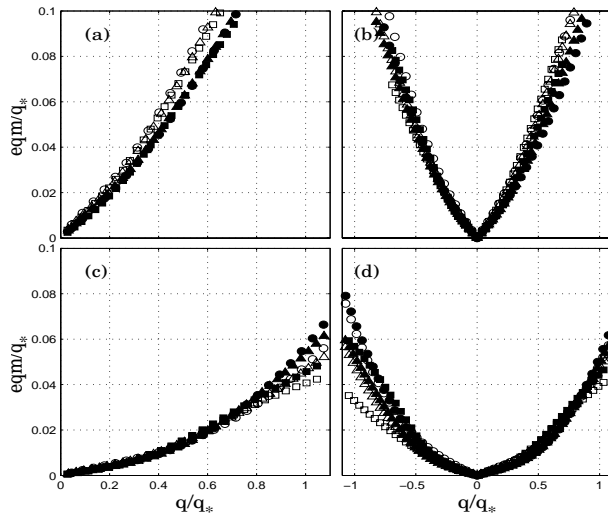


Figure 3: Erreur quadratique moyenne  $E_q^i/q_*$  en fonction de  $q/q_*$ . Pour  $H = 0.5$  et  $c_2 = 0.05$  ( $\circ$ ,  $\bullet$ ),  $c_2 = 0.1$  ( $\square$ ,  $\blacksquare$ ),  $c_2 = 0.01$  ( $\triangle$ ,  $\blacktriangle$ ); pour la TOC (symboles pleins) et la TOD (symboles vides) à gauche et la TOMM (symboles pleins) et la TOL (symboles vides) à droite. Les graphes du haut correspondent à  $(n, n_L) = (1024, 2)$ , ceux du bas à  $(1024, 64)$ .

$\frac{1}{\sqrt{n_L}}(C^i(n))^2(q/q_*^+)^2$ , où les  $C^i(n)$  décroissent avec  $n$ .

**Performances comparées.** En termes de comparaisons des quatre estimateurs étudiés, nous observons que :  
– TOMM et TOL donnent systématiquement de meilleures estimations que TOC et TOD, et ce, quelle que soit  $n \cdot n_L$  ;  
– pour  $q > 0$ , et pour des signaux de faible longueur, les performances de TOC et TOMM sont meilleures que celles de TOD et TOL, respectivement. Lorsque la durée des signaux augmente, cet écart disparaît rapidement ;  
– pour  $q < 0$ , les performances d'estimation de TOL sont sensiblement meilleures que celles de TOMM. Cette différence semble augmenter quand la taille des signaux augmente.

De plus, il faut noter que les quatre estimateurs étudiés présentent tous un biais systématique. Pour  $H$  fixé, ce biais augmente avec  $c_2$ . Ce biais est en général moindre pour TOL et TOMM que pour TOD et TOC (courbes non présentées).

## 6 Conclusions et Perspectives

Nous avons étudié quatre estimateurs *ondelette* pour les exposants de loi d'échelle sur un processus multifractal représentatif, la Marche Aléatoire Multifractale. Nous montrons que les performances statistiques de TOL et TOMM sont systématiquement meilleures que celles de TOC et TOD. Notre étude indique aussi que TOMM est préférable pour les signaux courts et les  $q > 0$ , alors que la méthode TOL présente de meilleures performances pour les  $q < 0$  et ce quelles que soient la taille des signaux et les valeurs des paramètres les définissant. Il faut également noter que la méthode TOL a un coût de calcul signi-

ficativement plus faible que celui de la TOMM, ce qui renforce l'intérêt de leur utilisation quand la durée des signaux augmente. De plus, la méthode TOL présente l'avantage d'être aisément généralisable aux dimensions supérieures, contrairement à la TOMM. Nous montrons que pour le cas particulier de la MAM, les courbes de l'erreur quadratique moyenne prennent une forme générale à condition d'être correctement renormalisées à l'aide du paramètre  $q_*^+ = \sqrt{2/c_2}$  qui rend compte de l'écart à la monofractalité. Il convient maintenant de conforter la portée générale des résultats obtenus ici dans le cas pédagogique de la MAM à de plus larges classes de processus multifractals, notamment à des processus pour lesquels  $-q_*^- \neq q_*^+$  ou pour lesquels l'écart à la monofractalité n'est pas contrôlé par un seul paramètre. Ce travail est en cours de réalisation.

## References

- [1] D. Veitch, P. Abry, A wavelet-based joint estimator of the parameters of long-range dependence, *IEEE Trans. on Info. Theory*, 45 (3) : 878–897, 1999.
- [2] B. Audit, E. Bacry, J.F. Muzy, A. Arneodo, Wavelet-based estimators of scaling behavior, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 48 (11), 2938–2954, 2002.
- [3] E. Bacry, J. Delour, J.F. Muzy, Multifractal Random Walk, *Phys. Res. E*, 64: 026103, 2001.
- [4] S. Mallat, A Wavelet Tour of Signal Processing *Academic Press*, San Diego, CA, 1998.
- [5] J.F. Muzy, E. Bacry, A. Arneodo, The multifractal formalism revisited with wavelets, *Int. Journal of Bifurcation and Chaos*, 4(2): 245–302, 1994.
- [6] S. Jaffard, Wavelet Techniques in multifractal analysis Fractal Geometry and applications : a jubilee of Benoit Mandelbrot, eds. M. Lapidus et M. van Frankenhuysen, *Proc. of Symp. in Pure Mathematic*, 2004.
- [7] P. Chainais, R. Riedi, P. Abry, On Non Scale Invariant Infinitely Divisible Cascades, *IEEE trans. on Info. Theory*, à paraître, 2005.
- [8] B. Lashermes, P. Abry, P. Chainais, New Insights into the Estimation of Scaling Exponents, “*Wavelets in Statistics*” *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, 2(4): 497–523, 2004.
- [9] J.F. Muzy, E. Bacry, A. Arneodo, Multifractal stationary random measures and multifractal random walks with log-infinitely divisible scaling laws *Phys. Rev. E*, 66, 2002.
- [10] P. Abry, S. Jaffard, B. Lashermes, Revisiting Scaling, Multifractal, and Multiplicative Cascades with the Wavelet Leader Lens. *Optic East, Wavelet Applications in Industrial Applications II*, Vol. 5607:103–117, Philadelphia, USA, 2004.

# Débruitage multifractal par évolution interactive

Evelyne LUTTON, Jacques LEVY VEHEL, Pierre GRENIER

INRIA - équipe COMPLEX,  
B.P. 105, 78153 Le Chesnay cedex, France  
<http://fractales.inria.fr>

[Evelyne.Lutton@inria.fr](mailto:Evelyne.Lutton@inria.fr), [Jacques.Levy\\_Vehel@inria.fr](mailto:Jacques.Levy_Vehel@inria.fr), [Pierre.Grenier@inria.fr](mailto:Pierre.Grenier@inria.fr)

## Résumé –

Nous présentons dans ce papier une méthode interactive de débruitage fondée sur une technique de débruitage multifractal bayésien adaptée aux signaux complexes. Cette technique nécessite le réglage d'un jeu de paramètres, et le résultat dépend fortement de facteurs psychovisuels et subjectifs. L'originalité de l'approche réside dans l'emploi d'un algorithme évolutionnaire interactif pour gérer l'ajustement des paramètres. Nous présentons des résultats comparatifs de débruitage, qui prouvent l'efficacité et la flexibilité de la méthode.

## Abstract –

We present in this paper a multifractal bayesian denoising technique based on an interactive EA. The multifractal denoising algorithm that serves as a basis for this technique is adapted to complex images and signals, and depends on a set of parameters. As the tuning of these parameters is a difficult task, highly dependent on psychovisual and subjective factors, an interactive EA has been used to drive this process. Comparative denoising results are presented. The proposed technique yield efficient denoising in many cases, comparable to classical denoising techniques. The versatility of the interactive implementation is however a major advantage to handle difficult images like IR or medical images.

## 1 Introduction

Les algorithmes évolutionnaires interactifs (AEI) ont actuellement beaucoup d'applications dans différents domaines, où les quantités que l'on cherche à optimiser sont liées à un jugement subjectif. Le contexte spécifique de l'interaction humaine contraint les techniques d'évolution artificielle d'une façon différente des approches évolutionnaires classiques (facteur fatigue de l'utilisateur, notamment). L'évolution doit être guidée efficacement tout en évitant des interactions systématiques et ennuyeuses pour l'utilisateur [2, 1, 3]. Cela impose usuellement l'emploi de population de faible taille et l'exploitation maximale des phases d'interaction avec l'utilisateur (initialisations, évaluation des solutions, modifications directes des génomes [4]).

Le travail que nous présentons ici concerne une technique de débruitage d'images complexes dépendant d'un jeu de paramètres. L'ajustement du paramétrage est pris en charge par un algorithme interactif, permettant ainsi de gérer des problèmes comme l'imprédictibilité des buts de l'utilisateurs, le fait qu'il puisse changer de but au cours du déroulement de l'algorithme, le fait que son jugement dépend de facteurs psychovisuels et du mode d'utilisation des résultats. L'emploi d'un algorithme évolutionnaire (autrement dit d'un algorithme d'optimisation stochastique gérant en parallèle une population de solutions) est clairement un atout pour la flexibilité de l'outil.

## 2 Débruitage multifractal bayésien

Le principe de la méthode de débruitage est le suivant : pour une image bruitée  $I_1$ , nous recherchons l'image débruitée  $I_2$  qui a un spectre multifractal donné et pour laquelle la probabilité que l'addition d'un bruit blanc gaussien de variance  $\sigma$  à  $I_2$

produit l'image observée  $I_1$  est maximale.

En notant  $y$  un coefficient générique de la décomposition en ondelettes de l'image bruitée à l'échelle  $j$ , nous obtenons les coefficients suivants à la même échelle pour l'image débruitée (voir [5]):

$$\hat{x} = \operatorname{argmax}_{x>0} \left( jg \left( \frac{\log_2(\hat{K}x)}{-j} \right) - \frac{(|y| - x)^2}{2\sigma^2} \right) \operatorname{sgn}(y) \quad (1)$$

où

- $\hat{K}$  est une constante (qui dépend de l'échelle  $j$ ) telle que  $\hat{K}|y| < 1$  pour tous les coefficients  $y$  à l'échelle  $j$  de l'image bruitée. Dans la suite  $\hat{K}$  est l'inverse du coefficient maximal de chaque échelle.
- $g$  est la fonction qui définit le spectre a priori de l'image débruitée. Des tests intensifs sur des images naturelles conduisent à choisir des spectres de la forme suivante :  $g$  est défini sur  $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ , à valeurs dans  $[0, 1]$ , et il existe un unique  $\alpha_{\text{mod}} \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$  tel que  $g(\alpha_{\text{mod}}) = 1$ . Enfin  $g$  est affine sur  $[\alpha_{\min}, \alpha_{\text{mod}}]$  et aussi sur  $[\alpha_{\text{mod}}, \alpha_{\max}]$ .

Les fonctions  $g$  sont ainsi déterminées par 5 valeurs :  $\alpha_{\min}, \alpha_{\text{mod}}, \alpha_{\max}, g(\alpha_{\min})$  et  $g(\alpha_{\max})$ .

Une fois choisi l'ensemble de valeurs précédent, le calcul des coefficients d'ondelette optimaux définis par l'équation (1) est un calcul déterministe simple. Les résultats de la méthode dépendent donc du jeu de paramètres précédents, ainsi que du choix de la base d'ondelettes.



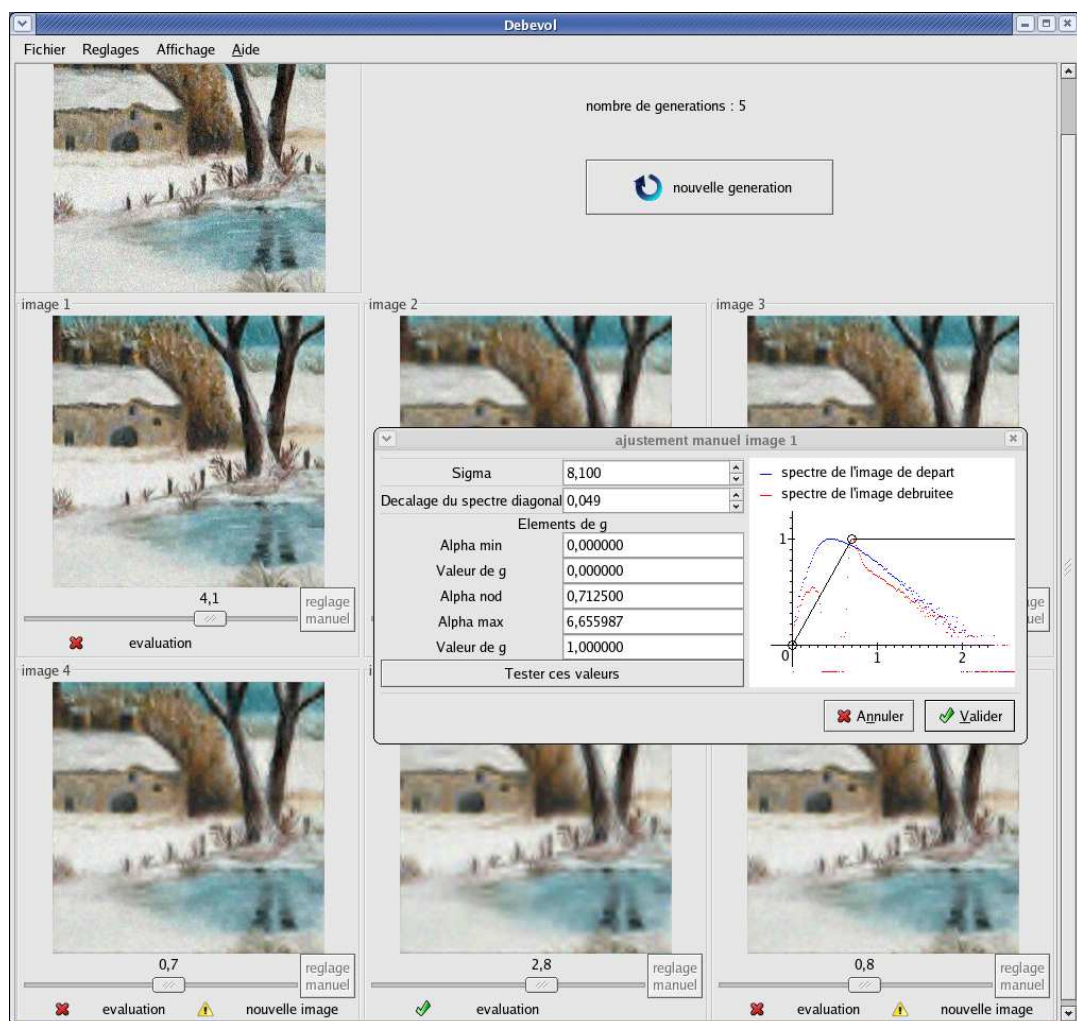


FIG. 1: Interface de l'algorithme interactif

### 3 Optimisation interactive des paramètres de débruitage

Le choix des paramètres précédents peut être considéré comme un problème d'optimisation où la fonction que l'on optimise est donnée par l'utilisateur au vu des résultats de la méthode. Nous proposons une approche évolutionnaire interactive pour traiter ce problème d'optimisation.

Les algorithmes évolutionnaires désignent un ensemble de techniques d'optimisation stochastique fondées sur une transposition informatique des principes d'évolution Darwinienne. Actuellement les algorithmes dits "génétiques" sont les plus médiatisés parmi ces techniques, mais il en existe d'autres (programmation génétique, stratégies d'évolution, évolution grammaticale, etc ...) qui diffèrent par leur interprétation des principes Darwiniens [6].

La composante commune de ces techniques est qu'elles font évoluer des populations de points d'un espace de recherche sous l'action conjuguée de variations aléatoires (croisement par échange d'informations entre plusieurs points, mutation par perturbation locale sur un point) et d'un processus de sélection ("les meilleurs gagnent," au regard d'une fonction définie sur l'espace de recherche considéré, dite fonction d'évaluation ou

"fitness"). Sous certaines conditions (autrement dit suivant le dosage des différentes composantes de la boucle d'évolution), il est prouvé que l'on peut parvenir à l'optimum global de l'espace de recherche considéré [7, 8].

On parle d'évolution interactive lorsque ce que l'on cherche à optimiser ne peut s'exprimer à l'aide d'une fonction mathématique ou d'un algorithme, et dépend d'un jugement subjectif que seul un utilisateur humain peut fournir. Impliquer un humain dans la boucle évolutionnaire impose en outre des contraintes d'économie d'interactions (liée au risque de fatigue de l'utilisateur) et de maintien de la diversité au sein des populations. Actuellement ces techniques d'évolution interactive sont de plus en plus employées, par exemple pour l'optimisation de mouvements en robotique, pour l'optimisation de prothèses auditives ou d'implants cochléaires [9]. Une excellente revue de ce thème se trouve dans [1].

Dans le cas présent, de débruitage d'images, la population manipulée est constituée d'un petit nombre d'individus, chacun d'entre eux représentant un paramétrage de la méthode de débruitage. Les individus sont présentés à l'utilisateur par le biais du résultat de débruitage leur correspondant. L'interface présente simultanément l'image à débruiter et le jeu d'images débruitées, que l'utilisateur a à évaluer, voir figure 1.

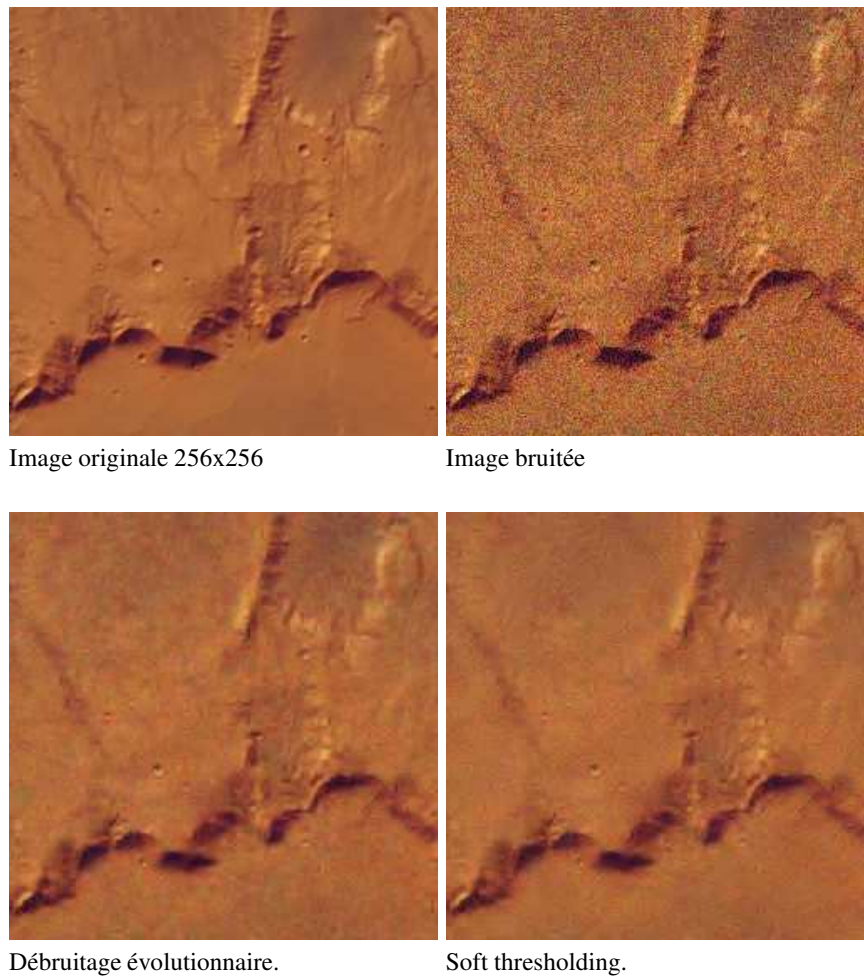


FIG. 2: Tests comparatifs sur une image de la surface de Mars.

Le génôme évolué par l'algorithme évolutionnaire est fait de 7 gènes réels : 5 valeurs définissant la fonction  $g$  de la formule (1) pour les coefficients horizontaux et verticaux (des contraintes assurent que la forme générale de la fonction  $g$  est respectée), une valeur de décalage qui permet de définir la fonction  $g$  des coefficients diagonaux (on suppose qu'elle diffère de celle des autres coefficients uniquement par décalage), et la variance du bruit  $\sigma$ .

La fonction à optimiser (fitness) est donnée par l'utilisateur via un curseur attaché à chaque image.

Le moteur évolutionnaire consiste à remplacer, à chaque fois que l'utilisateur clique sur "génération suivante," les génômes les plus mauvais de la population par de nouveaux individus, obtenus en effectuant une sélection par tournoi de taille 3, suivie d'un croisement barycentrique aléatoire et d'une mutation uniforme (voir [10]).

L'utilisateur a en outre la possibilité de modifier directement les individus de la population grâce à une fenêtre spécialisée (voir figure 1, la fenêtre "ajustement manuel image 1"), lui permettant de voir immédiatement le résultat de la modification d'un ou plusieurs paramètres du génôme. Il peut par exemple tester en direct ce que donne une modification du spectre a priori (courbe continue noire dans la figure 1) en cliquant sur les points de contrôle pour les déplacer. Si le résultat lui convient, il peut valider cette modification pour la réinjecter dans

la population courante. Cette solution modifiée à la main entrera alors dans le processus évolutionnaire au même titre qu'une solution créée automatiquement par croisement/mutation.

Ce processus évolutionnaire fortement interactif permet de converger vers des solutions de débrouillage adaptées le mieux possible à l'utilisateur, voire même de suivre ses changements d'avis. Sur les résultats d'un débrouillage, un médecin aura en effet une exigence différente de celle d'un opérateur en télédétection ou en imagerie radar. Par ailleurs, l'évaluation du débrouillage d'une image dépend très fortement des structures que l'on souhaite détecter ou de son utilisation ultérieure.

## 4 Résultats et conclusion

Les figures 2 et 3 présentent des résultats comparatifs avec une méthode de seuillage des coefficients de la transformée en ondelette [11].

Une version non interactive de la méthode a aussi été programmée pour tester les performances de la méthode de débrouillage multifractal (la fonction optimisée par l'algorithme génétique est alors la distance  $L_2$  de l'image débrouillée à l'image originale non bruitée), voir [10]. Ces expérimentations prouvent que la méthode est capable de donner un résultat meilleur (au sens de la distance  $L_2$ ) que les méthodes de débrouillage par

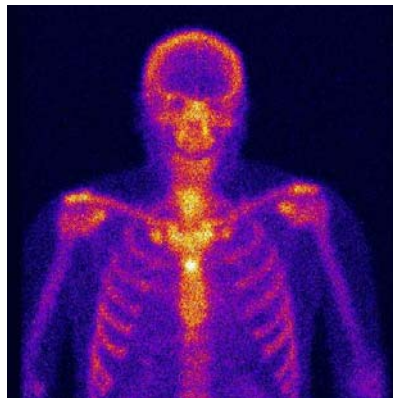
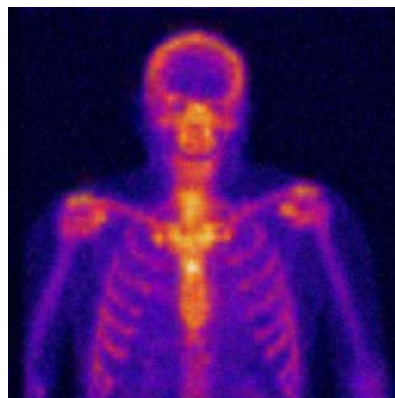
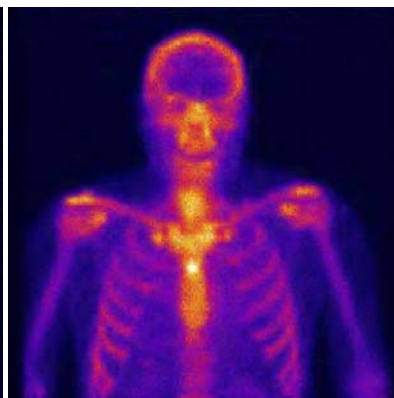


Image initiale



Débruitage évolutionnaire.



Soft thresholding

FIG. 3: Exemple de résultat sur une image 512x512 de scintigraphie osseuse.

seuillage des coefficients d'ondelette.

La méthode de débruitage interactif évolutionnaire est disponible dans la dernière version de la boîte à outils Fraclab :

<http://fractales.inria.fr>

## Références

- [1] Hideyuki Takagi. Interactive evolutionary computation : System optimisation based on human subjective evaluation. In *IEEE Int. Conf. on Intelligent Engineering Systems (INES'98)*, Vienna, Austria, Sept 17-19 1998.
- [2] Riccardo Poli and Stefano Cagnoni. Genetic programming with user-driven selection : Experiments on the evolution of algorithms for image enhancement. In *2nd Annual Conf. on Genetic Programming*, 1997.
- [3] Wolfgang Banzhaf. *Handbook of Evolutionary Computation*, chapter Interactive Evolution. Oxford University Press, 1997.
- [4] J. Chapuis and E. Lutton. Artie-fract : Interactive evolution of fractals. In *4th International Conference on Generative Art*, Milano, Italy, December 12-14 2001.
- [5] Jacques Lévy Véhel and Pierrick Legrand. Bayesian multifractal signal denoising. In *IEEE ICASSP Conference*, 2003.
- [6] Evelyne Lutton. Darwinisme artificiel: une vue d'ensemble. *Traitement du Signal, numéro spécial "Gestion intelligente de senseurs"*, december 2004.
- [7] Thomas E. Davis and Jose C. Principe. A Simulated Annealing Like Convergence Theory for the Simple Genetic Algorithm . In *Proceedings of the Fourth International Conference on Genetic Algorithm*, pages 174–182, 1991. 13-16 July.
- [8] R. Cerf. *Artificial Evolution, European Conference, AE 95, Brest, France, September 1995, Selected papers*, volume Lecture Notes in Computer Science 1063, chapter Asymptotic convergence of genetic algorithms, pages 37–54. Springer Verlag, 1995.
- [9] Claire Bourgeois République. Optimising hearing aids fitting evolutionary algorithms and bluetooth technology. In *Proceeding of the 22th IASTED, Artificial Intelligence and Applications, AIA'04, volume 1*, 2004. pp 90-96.
- [10] Evelyne Lutton, Pierre Grenier, and Jacques Lévy Véhel. An interactive ea for multifractal bayesian denoising. In *EVOIASP*, 2005. Lausanne.
- [11] D.L Donoho. De-noising by soft-thresholding. *IEEE, Trans. on Inf. Theory*, 3(41):613–627, 1995.

# Vers une théorie unificatrice pour le traitement numérique/analogique des signaux

Michael UNSER

Laboratoire d'imagerie biomédicale  
École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL)  
CH-1015, Lausanne, Suisse  
Michael.Unser@epfl.ch

**Résumé** — Nous proposons un cadre Hilbertien, inspiré de la théorie des ondelettes, permettant de relier de façon exacte les formulations traditionnelles—numérique et analogique—pour le traitement des signaux. Contrairement à la théorie d'échantillonnage de Shannon, notre approche utilise des fonctions de base à support borné, ce qui la rend plus intéressante pour le calcul numérique. Le modèle continu sous-jacent est de type "spline exponentiel" (avec fonction de transfert rationnelle) qui présente l'avantage d'être fermé par rapport aux opérations de base du traitement du signal: système différentiel, convolution et modulation en temps continu. L'intérêt principal de la méthode est qu'elle permet un calcul exact de type continu par application d'un opérateur correspondant dans le domaine discret, pour autant que l'on adapte les fonctions de base de façon adéquate. Le formalisme est particulièrement adapté au traitement hybride des signaux car il permet une prise en compte conjointe de tous les éléments numériques et analogiques du système. Nous illustrerons cet aspect avec des exemples concrets de systèmes hybrides pour une conversion A/N ou N/A améliorée. De façon plus fondamentale, le cadre proposé explique la ressemblance frappante qui existe entre les opérateurs élémentaires numériques et analogiques en théorie du signal.

**Abstract** — We introduce a Hilbert-space framework, inspired by wavelet theory, that provides an exact link between the traditional—discrete and analog—formulations of signal processing. In contrast to Shannon's sampling theory, our approach uses basis functions that are compactly supported and therefore better suited for numerical computations. The underlying continuous-time signal model is of exponential spline type (with rational transfer function); this family of functions has the advantage of being closed under the basic signal-processing operations: differentiation, continuous-time convolution, and modulation. A key point of the method is that it allows an exact implementation of continuous-time operators by simple processing in the discrete domain, provided that one updates the basis functions appropriately. The framework is ideally suited for hybrid signal processing because it can jointly represent the effect of the various (analog or digital) components of the system. This point will be illustrated with the design of hybrid systems for improved A-to-D and D-to-A conversion. On the more fundamental front, the proposed formulation sheds new light on the striking parallel that exists between the basic analog and discrete operators in the classical theory of linear systems.

## References

- [1] I.J. Schoenberg, *Cardinal spline interpolation*, Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1973.
- [2] L.L. Schumaker, *Spline functions: Basic theory*, Wiley, New York, 1981.
- [3] M. Unser, "Splines: A perfect fit for signal and image processing," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 16, no. 6, pp. 22–38, 1999.
- [4] M. Unser and T. Blu, "Cardinal exponential splines: Part I—Theory and filtering algorithms," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, no. 4, pp. 1425–1438, April 2005.
- [5] M. Unser, "Cardinal exponential splines: Part II—Think analog, act digital," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 53, no. 4, pp. 1439–1449, April 2005.
- [6] M. Unser and T. Blu, "Generalized smoothing splines and the optimal discretization of the Wiener filter," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 53, no. 6, pp. 2146–2159, June 2005.



# Caractérisation des Fonds Marins par Décomposition Modale Empirique

Abdel-Ouahab BOUDRAA, Claire POLLET, Jean-Christophe CEXUS et Zineb SAIDI

IRENav, Ecole Navale/E<sup>3</sup>I<sup>2</sup>, (EA 3876) ENSIETA  
Ecole Navale, Lanvéoc-Poulmic, BP600, 29240 Brest-Armées, France  
{boudra,pollet,cexus,saidi}@ecole-navale.fr

**Résumé** — Dans cet article, on s'intéresse au problème de la caractérisation des fonds marins à partir de profils bathymétriques. Les fonds marins sont considérés comme une superposition d'ondulations de sables (oscillations) de différentes hauteurs et longueurs d'ondes (dunes, rides...) dont la séparation est une étape importante en exploration géologique et géophysique. Pour séparer les différentes ondulations nous proposons une analyse multirésolution, de type "ondelettes", basée sur une technique récente : la Décomposition Modale Empirique. Cette approche considère les signaux (profils bathymétriques) à l'échelle de leurs oscillations locales. La méthode est testée sur des images simulées et réelles.

**Abstract** — The aim of this work is the characterization of seafloor using bathymetric profiles. Seafloor may be viewed as a superposition of fast oscillations (sand waves) superimposed to slow oscillations (ripples) and their separation is an important step in geophysical and geological exploration. To separate these oscillations a multiresolution approach, seen as a type of wavelet decomposition, based on a recent technique, referred to as Empirical Mode Decomposition (EMD) is proposed. This method considers bathymetric profiles at the scale of their local oscillations. The method is tested on simulated and real images.

## 1 Introduction

La forme des fonds marins est variée et liée à la nature des fonds (sédiments non cohésifs tels que sables, graviers) et à leur environnement (présence de courants marins et/ou de houle littorale entraînant mise en suspension, transport sédimentaire, dépôt et pavage) [1]. L'identification des profils bathymétriques peut donc être une aide à la caractérisation des fonds marins. C'est un problème spatial multi-échelles. Ainsi un profil bathymétrique peut être vu comme la superposition de différentes ondulations allant des oscillations rapides (rides) aux oscillations lentes (dunes). Comme chaque ondulation correspond à une gamme de fréquences, une approche possible pour séparer un profil bathymétrique en oscillations est d'utiliser une décomposition en sous-bandes. Récemment Huang et al. [2] ont introduit une méthode de décomposition en sous-bandes, locale et auto-adaptative pour l'analyse des signaux non stationnaires appelée Décomposition Modale Empirique (DEM ou EMD pour Empirical Mode Decomposition). L'EMD est entièrement pilotée par les données et, contrairement à la transformée de Fourier ou aux ondelettes, cette décomposition ne repose sur aucune famille de fonctions (ondelette mère) définie a priori. L'EMD peut être vue comme l'équivalent de l'analyse en composantes principales mais dédiée aux signaux non stationnaires. Tout signal peut être décomposé en une somme d'un nombre fini de composantes, type AM-FM, appelées modes ou IMFs (pour Intrinsic Mode Function). Un mode est une IMF si sa moyenne est nulle et si les nombres de ses maxima et de ses minima sont les mêmes ou différents de un. L'EMD n'a pas de base théorique mais est uniquement

définie par un algorithme dit de tamisage (sifting process). Le tamisage d'un signal est réalisé en deux étapes : (i) la détection des extrema du signal et (ii) l'interpolation par ces extrema<sup>1</sup>.

## 2 Processus du Tamisage

L'EMD est défini par un processus dit de tamisage (sifting process) dont les étapes sont données par le pseudo-code suivant:

**Algorithme de Tamisage**

**Etape 1)** Fixer le seuil  $\epsilon$ ,  $j \leftarrow 1$  ( $j^{eme}$  IMF)

**Etape 2)**  $r_{j-1}(t) \leftarrow x(t)$  (résidu)

**Etape 3)** Extraire l'IMF :

- (a)  $h_{j,i-1}(t) \leftarrow r_{j-1}(t)$ ,  $i \leftarrow 1$  ( $i$  nombre de tamisage)
- (b) Identifier les extrema locaux de  $h_{j,i-1}(t)$
- (c) Calculer l'enveloppe supérieure  $U_{j,i-1}(t)$  et l'enveloppe inférieure  $L_{j,i-1}(t)$  par interpolation (splines cubiques) de  $h_{j,i-1}(t)$
- (d) Calculer la moyenne des enveloppes :  

$$\mu_{j,i-1}(t) \leftarrow (U_{j,i-1}(t) + L_{j,i-1}(t))/2$$
- (e) Mise à jour :  $h_{j,i}(t) \leftarrow h_{j,i-1}(t) - \mu_{j,i-1}(t)$ ,  $i \leftarrow i + 1$
- (f) Calculer le critère d'arrêt :

$$SD(i) = \sum_{t=0}^T \frac{|h_{j,i-1}(t) - h_{j,i}(t)|^2}{(h_{j,i-1}(t))^2}$$

- (g) Décision : Répéter (b)-(f) jusqu'à ce que  $SD(i) < \epsilon$  et affecter  $IMF_j(t) \leftarrow h_{j,i}(t)$  ( $j^{eme}$  IMF)

<sup>1</sup>Ce travail est financé par le CPER, piloté par l'Ifremer, Contrat No. 03/2 210 614, Volet: Détection et caractérisation des fonds marins.



**Etape 4)** Mise à jour résidu :  $r_j(t) \leftarrow r_{j-1}(t) - IMF_j(t)$

**Etape 5)** Répéter l'étape 3 avec  $j \leftarrow j + 1$

jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'extrema de  $r_j(t)$

où  $T$  est la durée du signal et " $\leftarrow$ " est l'opération d'affectation. Le tamisage est répété plusieurs fois ( $i$  fois) jusqu'à ce que  $h$  soit une IMF vérifiant les conditions: C1) chaque mode a le même nombre (à un près) de passage par zéro et d'extrema; C2) la moyenne des enveloppes supérieures et inférieures des modes est nulle. Le résultat du tamisage conduit à une représentation du type :

$$x(t) = \sum_{j=1}^N IMF_j(t) + r_N(t) \quad (1)$$

$N$  est le nombre de mode trouvé. En pratique le critère d'arrêt,  $SD$ , est compris entre 0.2 et 0.3. Notons que l'EMD ne nécessite pas de pré-traitement. La méthode est entièrement pilotée par les données.

### 3 Simulation de Profils Bathymétriques

Nous avons simulé des profils bathymétriques représentant le fond de la mer afin de tester par la suite, sur ces signaux connus proches de la réalité physique, la méthode EMD et valider le concept de caractérisation des fonds marins. De nombreux articles de la littérature traitent de la génération de surfaces 1D ou 2D [3],[4]. Généralement la surface décrite par le champ de hauteurs  $z(\mathbf{r})$  est considérée comme la réalisation d'un processus stochastique. Elle est obtenue 1) en générant une densité spectrale de puissance  $W_s(\mathbf{K})$  prédéfinie mais dans laquelle phase et amplitude sont choisies de manières aléatoires, 2) en transformant le spectre précédant dans le domaine spatial par transformée de Fourier inverse.

Nous simulons les surfaces à partir de  $z_{rid}(\mathbf{r})$  issu d'un spectre  $W_s(\mathbf{K}) = W_{rid}(\mathbf{K})$  correspondant à des rides de sable [5].

$$\begin{aligned} W_{rid}(\mathbf{K}) &= \frac{l^2 \eta^2}{4\pi} \left[ \exp\left[-\frac{l^2(K_x - K_{cx})^2 + l^2(K_y - K_{cy})^2}{2}\right] \right. \\ &\quad \left. + \exp\left[-\frac{l^2(K_x + K_{cx})^2 + l^2(K_y + K_{cy})^2}{2}\right] \right] \\ &\quad \text{si } |\mathbf{K}| > K_h \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

A la fréquence spatiale  $\mathbf{K}_c = (K_{cx}; K_{cy})$  correspond la longueur d'onde moyenne des rides.  $K_h$  est une fréquence spatiale de coupure. La longueur de corrélation  $l$  est la même dans les directions  $X$  et  $Y$ . Les rides sont orientées selon la direction  $X$  (crête des rides parallèle à l'axe  $Ox$ ). La figure 1 présente un relief de fonds marins simulé à partir de la méthode décrite précédemment. Le fond est modélisé par des rides de longueurs d'ondes moyennes de 0.2 m.

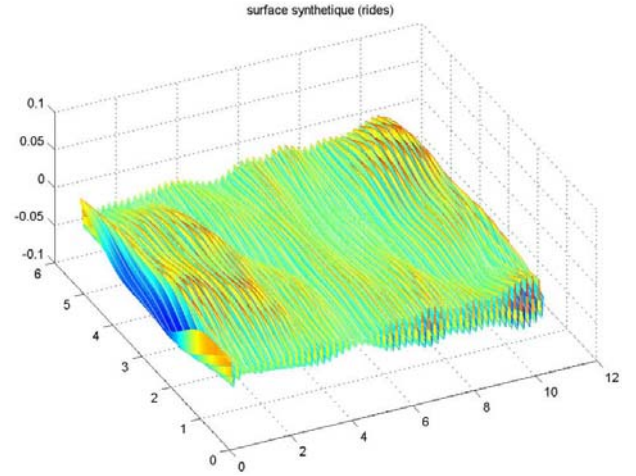


FIG. 1: Exemple de surface synthétisée de dimension 10 m par 5 m ( $l = 0.6\text{m}$ ;  $K_h = 10 \text{ m}^{-1}$ ;  $\eta = 202.6$ ;  $K_c = 31.5 \text{ m}^{-1}$ ), échantillonnage spatial tous les 0.02m.

### 4 Résultats

L'application de l'EMD à des images nécessite une interpolation bi-dimensionnelle (2D). Pour le moment il n'y a pas d'algorithme 2D efficace, au même titre que le cas 1D, pour l'analyse des données images [6]-[7]. Dans le cas de la caractérisation des fonds marins à partir de profils bathymétriques, les motifs de fond ont souvent une direction privilégiée (par exemple crête des dunes perpendiculaire au courant) et on se limite donc dans notre cas à une décomposition  $N \times 1D$ , i.e., ligne par ligne de l'image bathymétrique dans la direction privilégiée (on prend soin auparavant d'effectuer une rotation de l'image si besoin).  $N$  est la largeur de l'image. L'analyse de chaque ligne bathymétrique ne donnant pas le même nombre d'IMFs, le nombre d'images "empiriques" sera donné par la ligne bathymétrique dont le nombre d'IMFs est minimal. L'image empirique correspondant au mode  $i$  est construite ligne par ligne, chaque ligne correspondant à l'IMF  $i$ . La figure 2(a) montre une image de bathymétrie obtenue par un Sonar multifaisceaux. Un exemple d'une ligne bathymétrique est représenté par la figure 2(b) suivie des différents IMFs en allant des oscillations fortes (faibles longueurs d'ondes) vers les oscillations faibles (grandes longueurs d'ondes). Le dernier graphe correspond à la tendance globale du profil. Les figures 3 et 4 montrent les images empiriques correspondant aux images synthétique (figure 1) et réelle (figure 2(a)). La décomposition de la figure 2(b) est confirmée par les images empiriques représentées par la figure 4. Les figures 3(a)-(d) et 4(a)-(d) représentent des rides avec des longueurs d'ondes différentes. Les figures 3(a)-(d) mettent en évidence le fait que les rides simulées de longueur d'onde fixe (0.2m) ne constituent pas une seule IMF. Les Figures 4(e)-(f) représentent des images de dunes. La figure 5 représente les fréquences instantanées des trois IMFs du profil no. 45. La figure 5(c) montre que la fréquence instantanée est globalement constante ce qui suggère que l'IMF correspondante peut être associée à une dune. Par contre l'IMF 1 (Figure 5(a)),



où la fréquence instantanée varie fortement, correspond plutôt à une ride. Même si la fréquence instantanée est constante sur l'ensemble du profil no. 45 de l'image empirique no. 7 (figure 5c), l'apparition du pic peut être du au fait qu'à partir de ce dernier l'hypothèse de direction privilégiée n'est plus valable ou alors du à un problème d'acquisition de l'image Sonar. Une étude plus approfondie de cet aspect est en cours.

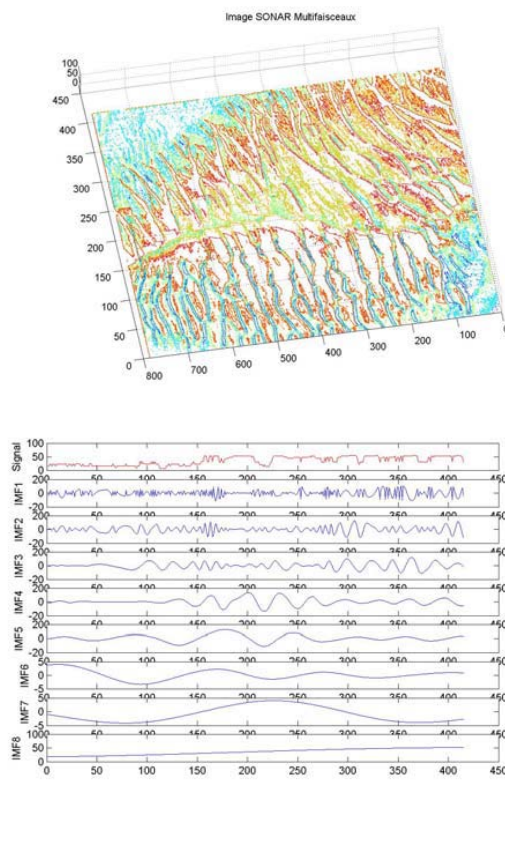


FIG. 2: (a) Image Sonar multifaisceaux. (b) Décomposition modale empirique d'un profil bathymétrique.

## 5 Conclusion

Les résultats de la décomposition des profils bathymétriques montrent que les modes empiriques obtenus sont très proches des ondulations du fond marin et qu'une classification de ces modes en oscillations de base telles que des dunes ou rides est alors possible. Une analyse sur plusieurs images avec vérité terrain est nécessaire pour une bonne correspondance entre les images empiriques obtenues et les images des dunes (petite et grande) et les images des rides (différentes longueurs d'ondes).

## References

- [1] P. Blondel and B.J. Murton, Handbook of seafloor sonar imagery, ed Wiley-Praxis, 1997, pp 200-205.

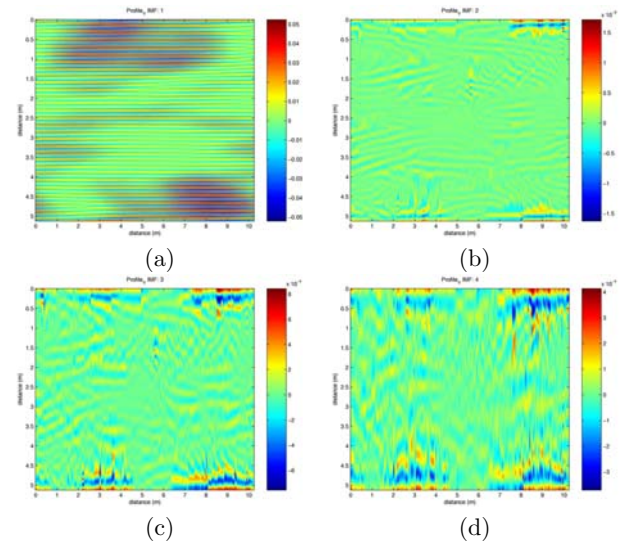


FIG. 3: Images empiriques de l'image synthétique. (a) Première image empirique (b) Deuxième image empirique (c)-(d) Dernières images empiriques.

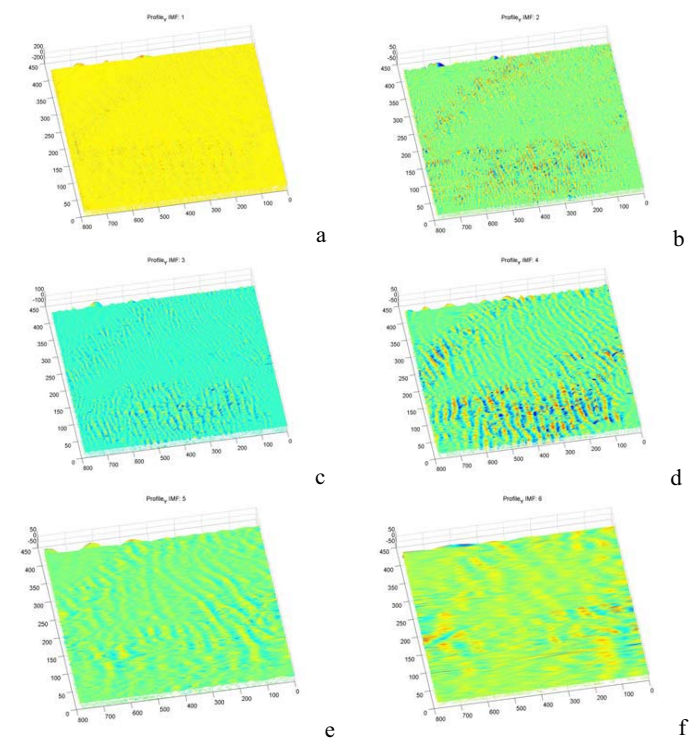


FIG. 4: Images empiriques de l'image Sonar. (a) Première image empirique (b) Deuxième image empirique (c)-(f) Dernières images empiriques.

- [2] N.E. Huang et al., "The empirical mode decomposition and Hilbert spectrum for non-linear and non-stationary time series analysis", *Proc. Roy. Soc. London A*, vol. 454, pp. 903-995, 1998.
- [3] E. Thorsos, "The validity of the Kirchhoff approxi-

- mation for rough surface scattering using a Gaussian roughness spectrum", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 83(1), pp 78-92, 1988.
- [4] APL-UW Technical report 9407, "APL-UW high frequency ocean environmental acoustic models handbook", 1994.
- [5] E. Pouliquen, A.P. Lyons and N.G. Pace, " Penetration of acoustic waves into rippled sandy seafloors ", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 108(5), pp 2071-2081, 2000.
- [6] A. Linderhed, "2D empirical mode decomposition in the spirit of image compression", *Wavelet and ICA Applications IX, SPIE Proceedings*, Orlando, vol. 4736, pp. 1-8, 2002.
- [7] J.C. Nunes, et al., "Image analysis by bi-dimensional empirical mode decomposition," *Image and Vision Computing*, vol. 21, no. 12, pp. 1019-1026, 2003.

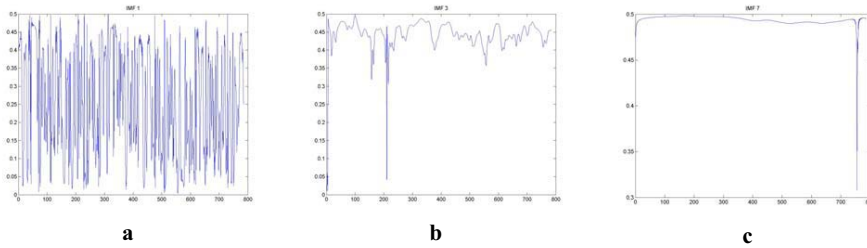


FIG. 5: Fréquences Instantanées de trois profils bathymétriques. (a) IMF 1 (ride). (b) IMF3 (ride). (c) IMF7 (dune).

# La Décomposition Modale Empirique à la recherche de l'Onde Circumpolaire Antarctique

Sylvie ROQUES<sup>1</sup>, Frédérique RÉMY<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire d'Astrophysique  
Observatoire Midi-Pyrénées, 14 avenue Edouard Belin, 31400 Toulouse, France

<sup>2</sup>Laboratoire d'Etudes en Géophysique et Océanographie Spatiales  
Observatoire Midi-Pyrénées, 14 avenue Edouard Belin, 31400 Toulouse, France  
sylvie.roques@obs-mip.fr, frederique.remy@notos.cst.cnes.fr

**Résumé** – Nous présentons une application de la Décomposition Modale Empirique (EMD) à la détection de l'onde circumpolaire Antarctique (OCA), une des manifestations les plus marquantes de la variabilité australe. Cette variabilité est analysée à partir de relevés de stations de météorologie côtières du continent Antarctique, fournissant des données de température depuis 1955. Grâce à l'EMD couplée à une analyse par ondelettes, l'OCA est ainsi détectée pour la première fois au sol. Celle-ci n'avait été observée jusqu'à présent que dans l'atmosphère, l'océan et les glaces de mer du système austral, mais sa présence sur le continent Antarctique lui-même n'avait encore jamais été décelée.

**Abstract** – We present an application of the Empirical Mode Decomposition (EMD) to the detection of the Antarctic circumpolar wave (ACW), one of the strongest demonstration of the Southern variability. This variability is analyzed from data of meteorological coastal stations of the Antarctica continent providing temperature time-series since 1955. Thanks to EMD associated to a wavelet analysis, the ACW is detected for the first time on the ground. Until now, it had been observed only in the atmosphere, the ocean and the freshwater ices of Southern system, but its presence on the continent Antarctica itself had never been revealed.

## 1 Contexte général

Les différents couplages qui lient l'Antarctique, le système austral (atmosphère, océan et glace de mer) et les plus hautes latitudes doivent être mieux compris pour mener des études réalistes sur le changement climatique global de notre planète à long terme. L'analyse des données regroupant l'évolution de paramètres physiques (pression atmosphérique, température, vitesse du vent, etc.) et leur interprétation en termes de réchauffement climatique et de variation du niveau de la mer sont donc capitales pour mieux contraindre les différents couplages contrôlant la climatologie australe et mieux décrire la variabilité naturelle de l'Antarctique [1]. Toutefois, ces couplages sont encore mal connus et mal décrits. En effet, ils sont difficiles à identifier car leurs échelles de temps sont relativement longues comparativement à la durée des observations existantes.

L'onde circumpolaire Antarctique (OCA) est l'une des manifestations les plus marquantes de la variabilité australe. On sait déjà que cette onde tourne autour de l'Antarctique en 8 à 10 ans. On sait qu'elle affecte au moins l'étendue des glaces de mer, la pression atmosphérique, la température, la salinité et les vents de l'océan austral [2-3]. Mais elle n'est pas perceptible sur le continent lui-même et pratiquement aucune étude n'existe sur le sujet, si bien qu'il reste impossible de connaître le rôle primordial du continent Antarctique dans la variabilité climatique. Une des raisons est qu'il n'y a pas, sur le continent, d'équivalent des différentes données (par exemple de température de

surface) disponibles sur l'océan de façon globale depuis les années 1980. Par ailleurs, les modèles météorologiques sont beaucoup moins bien contraints sur le continent et la variabilité naturelle y est extrêmement plus forte.

En ce qui concerne les observations sur le continent lui-même, les séries temporelles issues des satellites ne commencent qu'avec le lancement d'ERS 1 en 1991 et sont donc trop courtes face aux échelles de temps des fluctuations naturelles du climat polaire. C'est pourquoi notre objectif est d'essayer de décrire la variabilité de la météorologie Antarctique à partir des données "au sol" les plus longues qui existent à ce jour. Il s'agit des relevés de température d'une douzaine de stations météorologiques côtières réparties de façon relativement régulière autour du continent Antactique et qui fournissant des données de température depuis 1955 (voir Fig. 1 pour un exemple). Celles-ci, obtenues dans un environnement difficile, sont bruitées et montrent essentiellement un très fort signal saisonnier.

Ainsi, la recherche d'un signal extrêmement faible, signature de l'onde circumpolaire Antarctique, obtenu par différentes stations avec différents rapports signal sur bruit, perdu dans de fortes composantes saisonnières et inter-saisonnières, nécessite une analyse par des méthodes de traitement multi-échelle pour être décelé.

Nous montrerons comment une décomposition modale empirique associée à une analyse par ondelettes des modes pertinents, permet de détecter la présence cette onde sur le continent Antarctique, et de caractériser sa rotation.

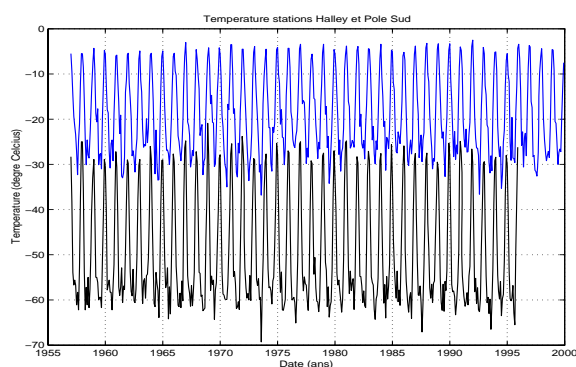


FIG. 1 – Variations de température sur les stations de Halley (courbe du haut) et du Pôle Sud (courbe du bas). On remarque la très forte variabilité saisonnière et inter-saisonnière, l'instabilité des hivers plus forte qu'en été et le fait que les hivers sont plus longs que les étés, ce qui constitue notamment une limitation à l'analyse de Fourier.

## 2 Différentes approches

Jusqu'à présent, les approches utilisées pour étudier la richesse de ces signaux au sol ont reposé sur des études statistiques et des analyses de covariance menées par les glaciologues. Sauf pour quelques stations, il est déjà possible de détecter très légèrement une onde à 4 ans. On peut également montrer que des stations proches ont un comportement similaire. Toutefois, il n'a pas été possible de détecter la moindre "onde tournante". Même une analyse en composantes principales n'apporte pas d'information supplémentaire significative. Les résultats les plus probants que nous avons initialement pu mettre en évidence reposent sur une analyse en poursuite adaptée ou *matching pursuit* [4].

La Figure 2 illustre cette décomposition sur les données de la station de Halley. Le résultat présenté est le seul ayant permis de déceler une composante "à 8 ans". Aucune des autres stations ne peut le mettre en évidence. Cette composante apparaît relativement loin dans la décomposition hiérarchique (atome numéro 97) et correspond à une énergie environ 100 fois plus faible que celle représentant les variations saisonnières (qui elles sont bien visibles), c'est-à-dire presque au niveau du bruit. Une des raisons est qu'il n'y a pas, dans la famille de fonctions utilisée pour la décomposition, une forme d'onde adaptée à un signal de si faible énergie. C'est la raison pour laquelle il apparaît la nécessité d'une décomposition multi-échelle qui soit réellement adaptative pour mettre en évidence l'onde recherchée.

## 3 Décomposition modale empirique

Ceci nous a conduit à nous intéresser à des décompositions temps-échelle plus adaptées au signal. Huang et al. (1998) ont récemment introduit une technique de décomposition adaptative d'un signal non stationnaire, la décomposition modale empirique (EMD), permettant une décomposition sur une base de fonctions non-linéaires extraite du signal lui-même. Le principe est d'identifier ité-

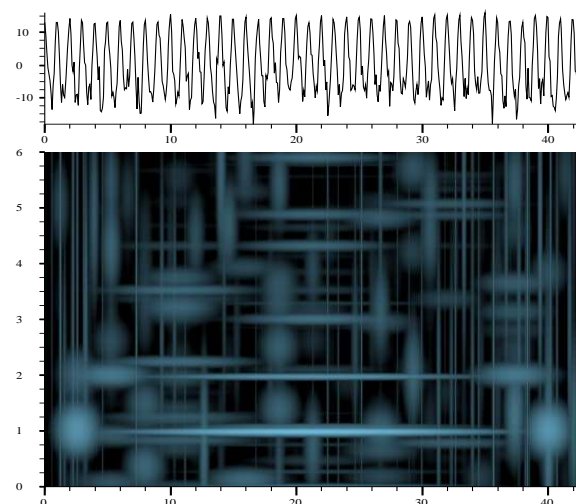


FIG. 2 – Décomposition en poursuite adaptée (en bas) des données de température de la station de Halley (en haut). Par projections successives du signal sur les éléments de base d'un dictionnaire de fonctions oscillantes, à chaque pas une information est encodée et permet une représentation concise des vibrations élémentaires contenues dans le signal. Abscisses : temps en an. Ordonnées : fréquence en  $\text{an}^{-1}$ . Les variations saisonnières sont bien visibles ainsi qu'une oscillation à 8 ans non concluante (un des derniers atomes parmi 100), qui apparaît en bas du diagramme, centrée sur l'échantillon 16 et de durée de vie d'environ 7 ans

rativement des modes intrinsèques en séparant à l'échelle d'une oscillation des contributions de plus en plus lentes. L'approche algorithmique consiste à construire pas à pas une base de fonctions (d'amplitudes et de fréquences variables, mais globalement de plus en plus basses-fréquences) présentant un certain nombre de propriétés remarquables, puisqu'elle amène à une décomposition complète, locale, adaptative et presque orthogonale (le degré de non orthogonalité pouvant être quantifié).

Dans le principe, il faut identifier les échelles de temps révélant des caractéristiques physiques du signal étudié, et de le décomposer en des "modalités intrinsèques" (ou modes) par un procédé de "tamisage" isolant les différents régimes. On peut montrer que la méthode proposée s'apparente à un filtrage non-linéaire dépendant du temps et auto-adaptatif [6]. De nombreux auteurs soulignent toutefois la nécessité de disposer d'une véritable compréhension théorique évitant de recourir à des simulations extensives. En effet, à ce jour, cette décomposition, comme son nom l'indique, n'est définie que par l'algorithme permettant de la mettre en œuvre et n'a quasiment pas fait l'objet de développements théoriques.

Sur le plan pratique, le signal étant donné, une enveloppe supérieure et une enveloppe inférieure sont construites en ajustant par des fonctions splines cubiques les maxima et les minima locaux du signal. Leur moyenne étant ensuite soustraite au signal, on obtient un résidu sur lequel la procédure (repérage des extrema, calcul de enveloppes, soustraction de la moyenne) va être ré-itérée. Pour que les résidus successifs obtenus soient des moda-

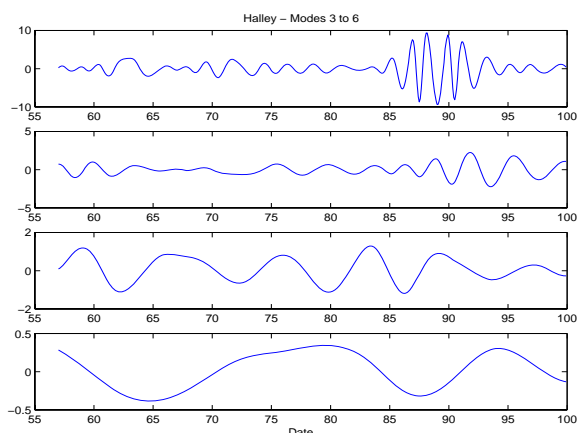


FIG. 3 – En descendant : troisième à sixième modes intrinsèques du signal. Abscisses : années. Ordonnées : amplitude de variation autour de la moyenne.

lités intrinsèques du signal, deux conditions doivent être remplies : le nombre d'extrema et le nombre de passages par zéro des résidus doivent différer au plus de 1, et à tout instant, la valeur moyenne entre l'enveloppe supérieure et l'enveloppe inférieure doit être nulle. Si ces conditions sont toujours vérifiées au premier itéré, ce n'est plus le cas par la suite, et l'algorithme simple que nous venons de décrire doit en pratique être raffiné par un processus de "tamisage" conduisant à la satisfaction des ces deux conditions. Cet algorithme technique et simple à mettre en œuvre est décrit par exemple dans [6].

## 4 Résultats

Nous avons appliqué une EMD sur les signaux de l'ensemble des stations. On obtient alors autant de décompositions sous forme de modalités intrinsèques. Pour se fixer les idées, une partie de la décomposition modale empirique de la série de température de la station britannique Halley est représentée sur la figure 3. Ce sont les modes 3 à 6 de la décomposition. Leur interprétation est immédiate : le troisième est caractéristique des influences océaniques. Le quatrième est le cycle quasi-quadiennal observé également dans les données océanographiques spatiales. Ces deux modes sont très énergétiques et peuvent probablement être à mêmes d'affecter l'analyse des tendances issues des données des satellites. Le cinquième mode est un cycle à 8 ans, caractéristique de l'onde circumpolaire Antarctique, et sur lequel nous allons revenir. Le sixième représente une tendance à long terme. Les modes non représentés correspondent aux perturbations météorologiques quasi-mensuelles et aux cycles saisonniers.

Pour les données de toutes les stations, les résultats obtenus sont similaires à ceux présentés sur la Figure 3. Le mode 5 est caractéristique d'une onde non-stationnaire à 8 ans, ou le mode 4 dans quelques rares cas (signalons que l'onde circumpolaire Antarctique présente deux minima et deux maxima et tourne en 8 ans, si bien qu'en un lieu sa périodicité apparente est de 4 ans).

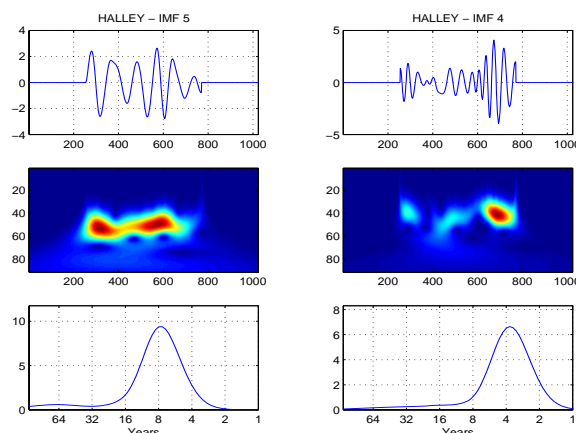


FIG. 4 – Étude des modes intrinsèques 4 et 5 de la station Halley. En haut : représentation des modes ; au milieu : transformées en ondelettes des modes ; en bas ; spectre global en ondelettes. L'analyse des résultats fait bien apparaître les périodicités attendues à 4 ans et 8 ans.

## 5 Couplage avec les ondelettes

En complément de cette analyse, les modes 5 (à 8 ans) et 4 (à 4 ans) issues de toutes les stations ont été décomposés sur une base d'ondelettes de Morlet [7] comme on peut le voir sur la Figure 4 pour la station Halley. L'objectif de cette nouvelle opération est double : déterminer un spectre global d'ondelettes pour chaque mode, donnant accès à une fréquence "moyenne", et analyser les phases de cette transformée afin de détecter une onde tournante. En effet, l'avantage de la décomposition modale empirique résidant simplement (mais fondamentalement) dans sa capacité à déployer le signal original sur des bandes de fréquence pertinentes, passer chacune de ces modalités au crible d'une analyse par ondelettes nous permettra de comprendre la répartition en énergie des modes, leur modulation et leur évolution.

En ce qui concerne les amplitudes (et on peut se référer pour cela à la Figure 4) l'idée est tout simplement d'étudier la médiane des spectres d'ondelettes des modes 5 de toutes les stations. Le spectre d'ondelettes présente par construction, contrairement à la transformée de Fourier, une résolution accrue en basse fréquence, ce qui conduit à une meilleure précision pour localiser la fréquence d'un phénomène à grande échelle. La Figure 5 présente le résultat ainsi obtenu où l'onde à 8 ans est parfaitement identifiée. L'onde à 4 ans l'est également sur la médiane des modes 4 (rappelons la périodicité apparente de 4 ans de l'OCA).

Si l'on s'intéresse à présent aux phases des phénomènes, dans le but de repérer une onde tournante, la caractérisation des phases instantanées des modes peut s'effectuer facilement. Sur la Figure 6, les phases instantanées des modes 5 de toutes les stations sont représentées après une interpolation linéaire. Le résultat confirme bien l'idée d'une onde tournante, puisque ces phases correspondent bien à la fois à la vitesse d'une onde à 8 ans et à la position géographique de chaque station. Afin de confirmer ce résultat, l'idée simple que nous avons mise en œuvre a consisté à



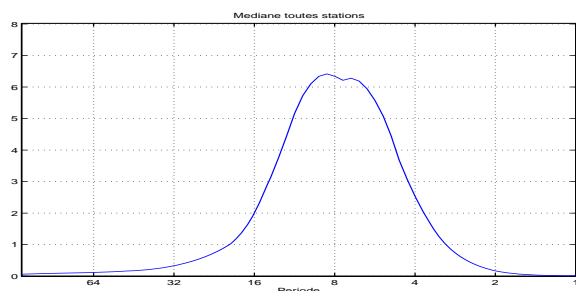


FIG. 5 – Médiane des spectres globaux d'ondelettes obtenus sur l'ensemble des stations de l'Antarctique (identiques à ceux représentés Fig. 4 en bas). Abscisse : période en an. Ordonnées : amplitude normalisée.

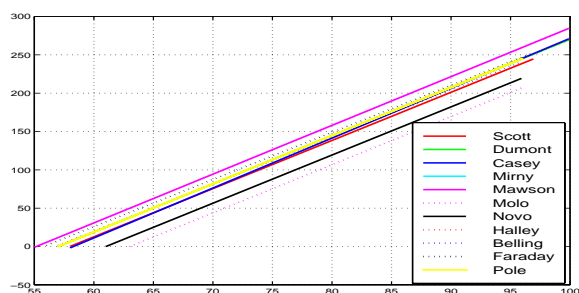


FIG. 6 – Phases des modes 5 (à 8 ans). Abscisse : date mod. 1900. Ordonnées : phase "déroulée" (non-mod.  $2\pi$ ).

étudier la phase de la transformée en ondelettes du mode pertinent en la considérant à la longitude de la station ayant observé le signal ayant conduit à ce mode. La Figure 7 illustre cette idée. La succession des maxima et des minima confirme bien le fait que l'onde circumpolaire Antarctique tourne, et la pente d'une droite imaginaire reliant chaque maximum (ou minimum) pour chaque station donne facilement la vitesse de rotation.

## 6 Conclusion

Nous avons pu identifier, grâce à la décomposition modale empirique, un mode à 8 ans sur les données des stations météorologiques de l'Antarctique. Un spectre global d'ondelettes a permis d'en mesurer les caractéristiques moyennes, et la phase de la décomposition en ondelette des modes pertinents a conduit également à la confirmation qu'il s'agit bien d'une onde tournante.

Ainsi, d'après ces travaux préliminaires, il semble bien que l'onde circumpolaire Antarctique soit bien détectable sur le continent à partir de ces données et avec la méthodologie employée. Il semble aussi que la confiance en celle-ci puisse nous permettre d'affirmer que l'onde est plus particulièrement perceptible dans certains secteurs côtiers de l'Antarctique et nous donne ainsi des indices pour mieux en comprendre la propagation et la cause. Pour plus de détails, on pourra se référer à [8].

Beaucoup de travail reste encore à réaliser sur les relations entre phases pour comprendre comment se déplace ce signal. En particulier, les phases présentées sur la Fi-

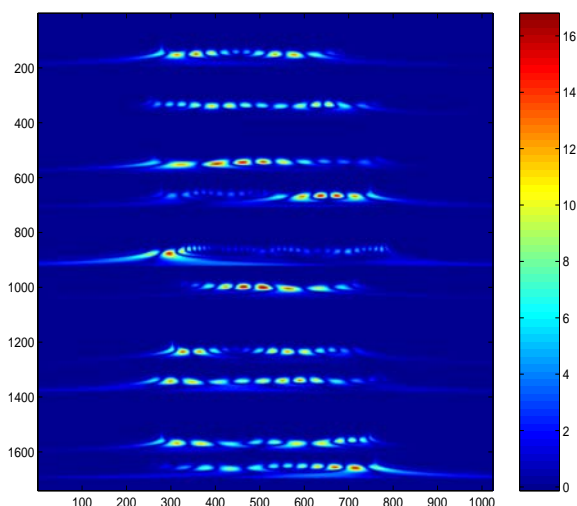


FIG. 7 – Phases des transformées en ondelettes des modes 5 (à 8 ans) recalées en longitude. Abscisse : échantillonnage en mois. Ordonnées : dixièmes de degrés de longitude.

gure 6 ont subi un ajustement linéaire. Leur caractère non-linéaire suggérerait que le centre de cette onde tournante se déplacerait également sur le continent. Le mouvement de l'onde ne serait donc pas circulaire mais de type cycloïdal. La réponse à cette question nécessitera un certain nombre de simulations numériques et une modélisation.

On observe également sur certaines stations une modulation qui pourrait correspondre à ce que les océanographes observent [2-3]. Il faudra en rechercher les causes dans la situation géographique de celles-ci, qui peuvent être situées dans des zones où les interactions entre l'océan austral et le continent sont plus intenses qu'ailleurs. Cela peut constituer une piste pour comprendre certains des mécanismes climatiques de la région.

## Références

- [1] Rémy F., Testut L. and Legresy B., *Climate Dynamics*, 19, 267-276, 2002.
- [2] Connolley, W.M., *J. of Geophys. Res.*, 108 (C4), 3-1,3-12, 2003.
- [3] White, W. B. and R.G. Peterson, *Nature*, 380, 699-702, 1996.
- [4] Mallat S. and Zhang Z., *IEEE Trans. Signal Process.*, 41(12), p. 3397, 1993.
- [5] Huang N.E., Shen Z., Long S.R., Wu M.C., Shih E.H., Zheng Q., Tung C.C. and Liu H.H., *Proceedings of the Royal Society of London, A*, v. 454, 903-995, 1998.
- [6] Magrin-Chagnolleau I. and Baraniuk R.G., *Proceedings of the 69th SEG Meeting*, Houston, Texas, USA, 1999.
- [7] Torrence C. and G.P. Compo, *A Practical Guide to Wavelet Analysis*, *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, 79, 61-78, 1998.
- [8] Roques S. et Rémy F., à paraître dans *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, 2005.

# Utilisation des contours actifs ou « snake » pour l'extraction des arêtes de représentations temps-fréquences : Application à l'analyse des contractions utérines

J. TERRIEN<sup>1</sup>, C. MARQUE<sup>1</sup> et G. GERMAIN<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Université de Technologie de Compiègne, Centre de recherche de Royallieu, BP 20529, 60205 Compiègne cedex, France

<sup>2</sup>INRA, Département de physiologie animale, Centre de recherche de Jouy-en-josas, 78352 Jouy-en-josas cedex, France

jeremy.terrien@utc.fr, catherine.marque@utc.fr, guy.germain@jouy.inra.fr

**Résumé** – L'analyse et la caractérisation des représentations temps-fréquences d'un signal réel est souvent complexe. Pour simplifier ces représentations, on utilise généralement leurs arêtes ou chaînes de maxima énergétiques locaux. Nous proposons dans ce travail, une approche originale pour l'extraction des arêtes basée sur une méthode de traitement d'image : les contours actifs ou « snakes » associée à la méthode Gradient Vector Flow ou méthode du flux du vecteur de gradient, comme force d'attraction du contour actif. La méthode GVF-snake, appliquée sur différentes représentations temps-fréquences et pour des signaux diversement bruités, est robuste comparée à une méthode classique de traitement du signal. Le temps d'exécution est principalement fonction de la taille du contour actif. De plus, les erreurs d'extraction sont relativement faibles, quelle que soit la situation étudiée. Cette nouvelle approche a aussi été testée sur des représentations temps-fréquences de contractions utérines enregistrées chez le singe pendant la grossesse. Les erreurs d'extraction obtenues sur ces signaux réels se sont aussi révélées meilleures que celles obtenues avec la méthode classique.

**Abstract** – The analysis and the characterisation of the time-frequency of a real signal is often difficult. In order to simplify these representations, ridges or local energetic maxima are generally used. In this study, we propose an original approach, for the ridges extraction, based on an image processing method : active contours or "snakes" associated with the Gradient Vector Flow method as the external attraction force of the active contour. The GVF-snake method, applied on different time-frequency representations and for signals with different noise level, is robust compared to a classical method of signal processing. The execution time of our method is mainly dependant of the active contour length. Moreover, the extraction errors are relatively low, whatever the studied situation. This new approach has been also tested on time-frequency representations of uterine contractions recorded on monkey during gestation. The obtained extraction errors, on these real signals, were also better than the errors obtained with the classical method.

## 1. Introduction

La représentation temps-fréquence (RTF) de signaux réels est de plus en plus utilisée pour leurs analyses, notamment en génie biomédical. Cependant, l'analyse ou la caractérisation des RTF d'un signal peut être complexe ou difficile. Afin de simplifier ces tâches, les RTF sont parfois réduites à leurs arêtes ou maxima énergétiques locaux. Plusieurs algorithmes existent qui permettent d'extraire et de chaîner les maxima énergétiques locaux d'une RTF. Cependant, la présence de bruit dans le signal d'intérêt, ou la présence d'interférences dans le plan temps-fréquence, peut générer de nombreux maxima locaux et donc diminuer les performances de certains algorithmes. Dans ce travail, nous proposons une approche originale d'extraction des arêtes d'une RTF de signaux mono ou multi-composantes basée sur une méthode de traitement d'image : les contours actifs ou « snake ».

Les contours actifs sont des courbes paramétriques (fermées ou non) capables de se déformer de manière itérative vers une zone d'intérêt d'une image. Ils sont utilisés en traitement d'image dans de nombreuses applications comme l'imagerie médicale [1] ou l'analyse de séquences vidéo [2]. Dans notre application, nous considérons une RTF

comme une image où les zones d'intérêts à détecter sont les arêtes.

L'électromyogramme utérin, ou électrohystérogamme (EHG), représente l'activité électrique générée par le muscle utérin pendant les contractions. Ce signal comprend deux composantes fréquentielles : l'onde FWL (Fast Wave Low) et l'onde FWH (Fast Wave High) [3]. L'analyse des caractéristiques de ces deux composantes peut permettre de prédire un risque d'accouchement prématuré chez la femme même à des termes de gestation relativement bas [4]-[5]. L'extraction correcte de ces deux composantes semble donc prépondérante dans le diagnostic. Dans une autre étude, portant sur des contractions externes enregistrées chez la femme, nous avons pu observer que l'algorithme spécialement développé pour l'analyse de l'EKG [6], appelé méthode locale, ne donnait pas toujours de bons résultats, notamment lors de l'analyse de contractions polyphasiques (contractions présentant une bouffée d'activité principale suivie de plusieurs autres bouffées de moindre énergie).

La méthode locale réalise l'extraction sur tout le plan temps-fréquence des maxima locaux d'énergie supérieure à un certain seuil. Il y a ensuite chaînage des maxima selon un critère de distance fréquentielle afin de constituer les arêtes. On recherche ensuite, pour tous les



maxima locaux  $M(a,b)$ , un possible successeur dans la zone  $\{a+\Delta t, b\pm\beta\}$ , où  $\Delta t$  est la résolution temporelle et  $\beta$  un réel positif. La dernière étape de cet algorithme réalise le lien entre les différentes arêtes, pour former une seule et même arête, lorsque celle-ci est interrompue, selon un critère de distances temporelle et fréquentielle. Deux arêtes  $r_i$  et  $r_j$  sont considérées comme appartenant à la même arête si :

$$0 < dt(Fr_i, Pr_j) < \lambda t \text{ et } df(Fr_i, Pr_j) < \lambda f \quad (1)$$

où  $dt$  est une distance temporelle,  $df$  une distance fréquentielle,  $Fr_i$  le dernier maximum local de l'arête  $r_i$  et  $Pr_j$  le premier de l'arête  $r_j$ . Les points manquants au sein d'une arête sont obtenus par interpolation linéaire ou polynomiale.

Après avoir défini les contours actifs, nous présenterons la formulation des énergies intervenant dans leur déformation. Les performances de notre algorithme, en termes de vitesse d'exécution et d'erreur d'extraction, seront ensuite évaluées sur signaux synthétiques. Nous présenterons aussi une application de cette méthode sur l'EKG, en vue d'une caractérisation des contractions enregistrées de manière interne chez la guenon pendant la grossesse.

## 2. Modèle de contour actif

### 2.1. Définition

Mathématiquement, un contour déformable est une courbe  $\mathbf{X}(s) = (X(s), Y(s))$  avec  $s \in [0, 1]$ , qui se déplace dans le domaine spatial d'une image de manière à minimiser la fonctionnelle d'énergie suivante [7]:

$$\varepsilon(\mathbf{X}) = S(\mathbf{X}) + P(\mathbf{X}) \quad (2)$$

Le premier terme représente la fonction d'énergie interne, et se définit comme :

$$S(X) = \frac{1}{2} \int_0^1 \alpha(s) \left| \frac{\partial X}{\partial s} \right|^2 + \beta(s) \left| \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} \right|^2 ds \quad (3)$$

Les paramètres de pondération  $\alpha(s)$  et  $\beta(s)$  (généralement définis constants) peuvent être utilisés pour contrôler respectivement la force de tension et la rigidité du modèle. Le second terme est la fonction d'énergie externe. Cette fonction  $P(x,y)$  est dérivée de l'image. Elle doit posséder des valeurs fortes au niveau des frontières d'un objet ou des zones d'intérêt. Le contour déformable est traité de manière dynamique en exprimant  $\mathbf{X}(s)$  comme une fonction du temps  $t$  aussi bien que de  $s$  :  $\mathbf{X}(s,t)$ .

La formulation traditionnelle des forces externes peut générer des champs de force qui ne permettent pas précisément de détecter les objets présentant des frontières concaves. De plus, le contour initial doit être positionné le plus près possible de la frontière à détecter, afin de pouvoir attirer convenablement le modèle. De manière à contourner ces problèmes, Xu et Prince [8]-[9] utilisent une équation de diffusion vectorielle qui diffuse le gradient d'une image vers des zones distantes des frontières. La nouvelle expression du champ de force est appelée Gradient Vector Flow (GVF) ou flux du vecteur de gradient. La force externe est remplacée

par un champ de vecteur  $V(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$  qui minimise la fonctionnelle d'énergie :

$$\varepsilon = \iint \mu \left\{ (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) + |\nabla f|^2 |V - \nabla f|^2 \right\} dx dy \quad (4)$$

Où  $\mu$  est un paramètre de régulation et  $f$  la carte de contour prenant de fortes valeurs sur les zones d'intérêt. La minimisation de l'équation (4) aboutit aux équations d'Euler :

$$\mu \nabla^2 u - (u - f_x)(f_x^2 + f_y^2) = 0 \quad (5a)$$

$$\mu \nabla^2 v - (v - f_y)(f_x^2 + f_y^2) = 0 \quad (5b)$$

où  $\nabla^2$  représente l'opérateur Laplacien et  $f_x$ ,  $f_y$  les dérivées de  $f$  par rapport à  $x$  et à  $y$  respectivement. Les équations (5a) et (5b) peuvent être résolues en traitant  $u$  et  $v$  comme fonctions du temps [9]. La méthode GVF présente une large distance d'attraction et permet d'obtenir une bonne convergence du contour actif sur des objets possédant des frontières concaves.

### 2.2. Initialisation et déformation

L'initialisation d'un contour actif peut être déterminante pour le résultat de la déformation, notamment avec la définition traditionnelle des forces externes. Dans cette étude, nous avons décidé d'initialiser le contour actif de manière fixe pour chacune des situations rencontrées. Le contour actif est disposé de manière parallèle à l'axe des temps de la RTF et initialisé à la fréquence moyenne du signal d'intérêt.

La déformation du contour actif est un processus itératif. Les itérations sont stoppées soit lorsqu'un critère de déformation est constant ou inférieur à un seuil entre deux itérations successives, soit lorsqu'un nombre maximal d'itérations est atteint. Nous avons choisi d'arrêter la déformation si les changements de position fréquentielle du contour actif, sur trois itérations successives, sont inférieurs à un seuil. Le nombre maximal d'itérations a été fixé à 2250. Les différents coefficients de pondération des différentes énergies (internes et externes) ont été déterminés et fixés après une étude préliminaire.

## 3. Evaluation

Chaque famille de RTF possède des caractéristiques propres en termes de répartition énergétique et de sensibilité au bruit présent dans le signal analysé. Afin de tester la robustesse de la méthode GVF-Snake et de la comparer à la méthode dite locale, nous avons utilisé comme signal de référence un signal présentant une modulation de fréquence sinusoïdale. Nous avons aussi testé différents niveaux de bruit, exprimés en pourcentage de l'énergie totale du signal (0, 5, 10, 20 et 30 %). Sur chacun de ces signaux, nous avons calculé la RTF par transformée en ondelette continue (scalogramme), Wigner-Ville (WV), Pseudo Wigner-Ville Lissée (PWVL) et modélisation autorégressive (AR). Pour chacune de ces situations, nous avons synthétisé 30 signaux différents.

Afin d'obtenir un critère d'évaluation des différentes extractions, nous devons utiliser une arête de référence pour chacune des situation. Nous avons utilisé comme arête de

référence, pour les signaux synthétiques, la loi de fréquence instantanée qui a servi à leur synthèse. Pour les contractions, nous avons édité manuellement les arêtes de référence par sélection, pour chaque instant d'une RTF, des maxima locaux correspondant à FWH et FWL. Nous avons ensuite défini une fonction d'erreur qui somme la distance fréquentielle entre l'arête trouvée et l'arête de référence sur toute la longueur des ridges. Cette fonction est ensuite normalisée par la longueur de l'arête de référence. La fonction de distance fréquentielle que nous avons employé est :

$$g(df) = \begin{cases} 0.2 \times |df| & \forall |df| < 5 \\ 1 & \forall |df| \geq 5 \end{cases} \quad (6)$$

Nous avons aussi évalué le temps d'exécution de chacun des algorithmes pour chacune des situations.

## 4. Résultats

En ce qui concerne les temps d'exécution, la méthode GVF-snake présente un temps d'exécution presque constant quel que soit le niveau de bruit pour une méthode d'obtention de la RTF donnée. Par contre la méthode dite locale, présente des temps d'exécution fonction du niveau de bruit et de la méthode d'analyse. Nous avons obtenu des temps d'exécution inférieurs pour Tps1, quel que soit le niveau de bruit, pour les méthodes WV et PWVL (Figure 1 et 2).

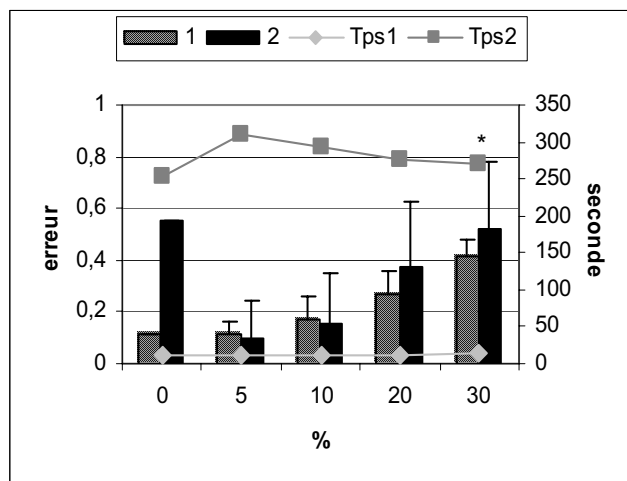


Fig. 1 : Evolution de l'erreur moyenne d'extraction (1 : GVF-Snake, 2 : Méthode locale) et du temps d'exécution (Tps1 et Tps2), pour WV en fonction du bruit exprimé en pourcentage de l'énergie totale du signal. (\* Différence significative à 5%)

Les erreurs d'extraction obtenues par la méthode GVF-snake sont moins sensibles à l'augmentation du niveau de bruit. Seules les erreurs obtenues sur la représentation WV augmentent fortement avec l'augmentation du niveau de bruit.

Toutes les erreurs obtenues à l'aide des résultats de déformation effectués sur la représentation PWVL, AR (Figure 3) et le scalogramme (Figure 4), sont inférieures ou égales à 0.1 pour un niveau de bruit inférieur à 30 %.

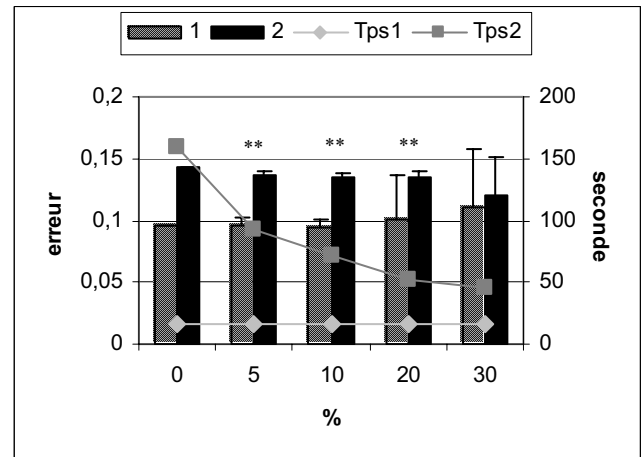


Fig. 2 : Evolution de l'erreur moyenne d'extraction (1 : GVF-Snake, 2 : Méthode locale) et du temps d'exécution (Tps1 et Tps2), pour PWVL, en fonction du bruit exprimé en pourcentage de l'énergie totale du signal. (\*\* différence significative à 1%)

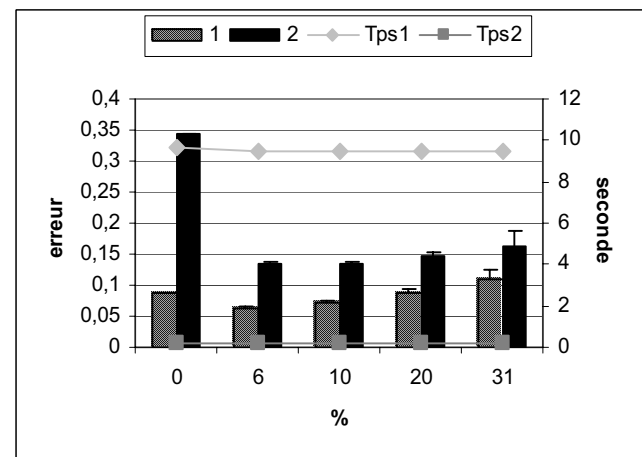


Fig. 3 : Evolution de l'erreur moyenne d'extraction (1 : GVF-Snake, 2 : Méthode locale) et du temps d'exécution (Tps1 et Tps2), pour la méthode AR, en fonction du bruit exprimé en pourcentage de l'énergie totale du signal ( $p < 1\%$  partout).

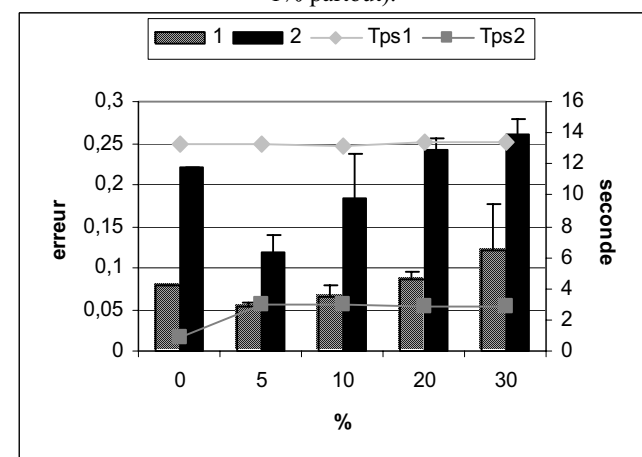


Fig. 4 : Evolution de l'erreur moyenne d'extraction (1 : GVF-Snake, 2 : Méthode locale) et du temps d'exécution (Tps1 et Tps2), pour scalogramme, en fonction du bruit exprimé en pourcentage de l'énergie totale du signal ( $p < 1\%$  partout).

L'erreur maximale est obtenue pour la représentation WV avec le niveau de bruit maximal.

Les erreurs moyennes obtenues par la méthode locale sont presque toutes significativement supérieures à celles obtenues par notre méthode. Les erreurs obtenues sur WV, pour les niveaux de bruit 5, 10 et 20 %, ne sont pas significativement différentes entre les deux méthodes. Cette méthode semble néanmoins donner des erreurs plus faibles.

Nous avons aussi testé la méthode GVF-snake sur des contractions de grossesse ( $n = 90$ ), certaines monophasiques et d'autres polyphasiques, obtenues sur une même guenon. Les RTF de chacune des contractions ont été obtenues par modélisation AR [10]. Les résultats obtenus ont été évalués grâce à l'édition manuelle des arêtes de chacune des contractions pour définir les ridges de référence. Nous avons évalué les erreurs concernant FWL, FWH et l'erreur totale définie comme la somme des erreurs FWL et FWH. Les erreurs obtenues avec la méthode GVF-snake sont inférieures à celles obtenues par la méthode locale sauf pour FWL (Figure 5). Les différentes erreurs sont toutes significativement différentes à 1 %. L'amélioration des erreurs d'extraction concerne principalement FWH, ainsi que les erreurs obtenues sur les contractions polyphasiques (résultats non représentés).

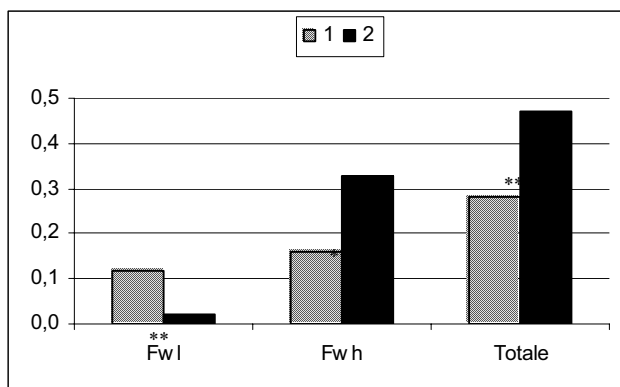


Fig. 5 : Evolution de l'erreur médiane d'extraction (1 : GVF-Snake, 2 : Méthode locale), pour FWL, FWH et l'erreur totale. (\*\* erreurs significativement différentes à 1%)

## 5. Conclusions et perspectives

Nous proposons une méthode rapide et robuste d'extraction automatique des arêtes de différentes RTF. La méthode GVF-snake semble une méthode peu sensible au bruit présent dans le signal d'intérêt et donne des erreurs d'extraction d'arêtes relativement faibles, malgré une initialisation relativement éloignée de l'arête recherchée. L'utilisation de la méthode du flux du vecteur de gradient permet d'extraire des arêtes même fortement modulées en fréquence (modulation sinusoïdale/signaux réels). Cette méthode utilise plusieurs paramètres qui doivent être adaptés par optimisation, aussi bien à la nature des composantes spectrales à extraire, qu'au type de représentation spectrale utilisée. La méthode GVF-snake semble être un outil

performant pour l'analyse des RTF des contractions utérines enregistrées chez le singe. Nous allons l'utiliser pour l'analyse des relations existant entre l'EHG et l'effet mécanique des contractions (pression intra-utérine), ainsi que pour étudier l'évolution de l'EHG au cours de la grossesse. Cependant, il est nécessaire d'augmenter le nombre de contractions étudiées.

## Références

- [1] M. Wei, Y. Zhou, and M. Wan, "A fast snake model based on non-linear diffusion for medical image segmentation," *Computerized Medical Imaging and Graphics*, vol. 28, pp. 109-117, 2004.
- [2] A. Yao and C. H. Wu, "An automated image-based technique for tracking sequential surface wave profiles," *Ocean Engineering*, vol. 32, pp. 157-173, 2005.
- [3] D. Deveux, C. Marque, S. Mansour, G. Germain, and J. Duchêne, "Uterine electromyography: A critical review," *Am. J. Obstet. Gynecol.*, vol. 169, pp. 1636-1653, 1993.
- [4] H. Leman, C. Marque, and J. Gondry, "Use of the electrohysterogram signal for the characterization of contractions during pregnancy," *IEEE Trans. on Biomed. Eng.*, vol. 46, pp. 1222-1229, 1999.
- [5] M. L. Voisine, C. Marque, H. Leman, and J. Gondry, "Analysis of uterine electromyogram for the monitoring of preterm birth. Instrumentation development and data analysis," *Proceedings of the 4th International Workshop on Biosignal Interpretation (BSI'2002)*, pp. 75-78, IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, Como, Italy, 24-26 June 2002.
- [6] H. Leman, C. Marque, "Ridge extraction from the scalogram of the uterine electromyogram," *TFTS 1998*, Pittsburg, Octobre 1998.
- [7] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos, "Snakes: active contour models," *IJCV*, vol. 1, pp. 321-322, 1988.
- [8] C. Xu and J.L. Prince, "Gradient Vector Flow: A New External Force for Snakes," *Proc. IEEE Conf. on Comp. Vis. Patt. Recog. (CVPR)*, Los Alamitos: Comp. Soc. Press, pp. 66-71, June, 1997.
- [9] C. Xu and J. L. Prince, "Snakes, Shapes, and Gradient Vector Flow," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 7, pp. 359-369, 1998.
- [10] D. Deveux, "Evaluation quantitative de certaines caractéristiques de distributions temps-fréquence: Application à l'EMG utérin," Ph.D. dissertation, Univ. Technol. Compiègne, Compiègne, France, 1995.

# Analyse et représentation de signaux transitoires : application à la compression, au débruitage et à la détection de ruptures

Michel FLIESS<sup>1</sup>, Cédric JOIN<sup>2</sup>, Mamadou MBOUP<sup>3</sup>, Hebertt SIRA-RAMÍREZ<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Équipe ALIEN, INRIA Futurs & Équipe MAX, LIX (CNRS, UMR 7161)  
École polytechnique, 91128 Palaiseau, France

<sup>2</sup>Équipe ALIEN, INRIA Futurs & CRAN (CNRS, UMR 7039)  
Université Henri Poincaré (Nancy I), BP 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy

<sup>3</sup>Équipe ALIEN, INRIA Futurs & UFR de Mathématiques et Informatique  
Université René-Descartes, 45 rue des Saints-Pères, 75270 Paris cedex 06, France

<sup>4</sup>Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección de Mecatrónica  
Cinvestav-IPN, Avenida IPN No. 2508, Colonia San Pedro Zacatenco, AP 14740, 07300 México, D.F., Mexique  
Michel.Fliess@polytechnique.fr, Cedric.Join@cran.uhp-nancy.fr  
Mamadou.Mboup@math-info.univ-paris5.fr, hsira@mail.cinvestav.mx

**Résumé** – Nous abordons le débruitage, la détection de ruptures et la compression par une approche inhabituelle de l’analyse et de la représentation des signaux. Algèbre différentielle, algèbre non commutative et calcul opérationnel conduisent à des méthodes simples et efficaces d’identification paramétrique de signaux et systèmes, qu’ils soient stationnaires ou non. Les estimateurs proposés, valables pour le calcul des dérivées, présentent une excellente robustesse à une large variété de bruits, sans nécessité de connaître leurs propriétés statistiques. Ils reposent sur des formules explicites, d’où des calculs très rapides.

**Abstract** – Noise removal, detection of abrupt changes and compression are studied via an unusual approach of signal analysis and representation. Differential algebra, noncommutative algebra and operational calculus lead to quite efficient and simple identification methods for signals and systems, which may be stationary or not. We thus obtain real time estimators, which

- yield excellent approximations of the signal derivatives,
- are robust with respect to a large variety of noises without any necessity of knowing their statistical properties,
- depend on explicit algebraic formulae.

## 1 Introduction

La compression des signaux, le débruitage et la détection de ruptures sont des sujets d’actualité que nous abordons par une approche inhabituelle [6, 7] de l’analyse et de la représentation des signaux. L’analyse de Fourier, dont l’hégémonie est indiscutable lorsqu’il s’agit de représenter des signaux stationnaires, montre ses limites en présence de phénomènes transitoires. Dans ces situations, les représentations à base d’*atomes temps-fréquence*, qui, de Gabor à Meyer [13], ont aujourd’hui culminé avec les ondelettes, semblent être les plus appropriées. Cette dualité temps-fréquence qui, corrige bien des imperfections des transformations de Fourier, se heurte néanmoins au principe d’incertitude de Heisenberg-Gabor<sup>1</sup>. Pour illustrer ce propos, on peut citer l’échec, souligné en [11], de la représentation par paquets d’ondelettes, ou de cosinus locaux, d’un signal comprenant des structures à haute énergie avec des étalements temps-fréquence différents. Ce même exemple de signal est analysé ici, à la lumière de l’approche que nous proposons.

L’idée directrice de cette approche n’est pas nouvelle : elle

repose sur une représentation locale, c’est-à-dire par morceaux, du signal, par des atomes temporels, ici des polynômes. L’estimation des ces polynômes, en revanche, relève d’une nouvelle théorie de l’identification de signaux et systèmes, bâtie autour de l’algèbre différentielle, de l’algèbre non commutative, et du calcul opérationnel. Elle apporte une solution au problème de l’estimation des dérivées d’un signal bruité, qui, à notre connaissance, est encore ouvert. Cette solution est à la base de notre démarche pour le débruitage. Elle conduit aussi à une méthode de segmentation, utilisée dans une phase de compression.

Les bases mathématiques de cette théorie sont brièvement présentées dans la section suivante. La méthode d’estimation des dérivées est décrite dans la section 3. Enfin, dans la section 4, les estimateurs proposés sont appliqués à trois problèmes : *i*) l’estimation des dérivées d’un signal transitoire bruité, *ii*) la détection des discontinuités, le débruitage et la reconstruction d’un signal polynomial par morceaux contaminé par un bruit et *iii*) la compression d’un signal audio.

La généralisation aux images et vidéos, c’est-à-dire aux signaux multidimensionnels, est abordée en [5].

<sup>1</sup>Renvoyons à [4] pour ce sujet et, plus généralement, pour l’approche fréquentielle.

## 2 Cadre mathématique

### 2.1 Identifiabilité linéaire

Un *corps différentiel* [2, 10]  $\mathcal{K}$  est, ici, de caractéristique nulle et *ordinaire*, c'est-à-dire muni d'une seule dérivation, notée  $\frac{d}{ds}$ . Une *constante* est un élément  $c \in \mathcal{K}$  de dérivée nulle. L'ensemble des constantes de  $\mathcal{K}$  est un sous-corps, dit *sous-corps des constantes*. Un *corps de constantes* est un corps différentiel qui ne contient que des constantes. Soit  $k_0 \subseteq k \subset k(s) \subseteq K$  une *tour de corps*<sup>2</sup> différentiels, où le corps de constantes  $k = k_0(\Theta)$ , est engendré par un ensemble fini, éventuellement vide,  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$  de *paramètres (constants)*, supposés transcendants par rapport au corps de constantes  $k_0$ . Tout élément  $x \in K$  est un *signal*.

**Exemple 1** Le corps de Mikusiński  $\mathcal{M}$ , engendré par les opérateurs de Mikusiński [14, 15], est un corps différentiel par rapport à la dérivation algébrique  $\frac{d}{ds}$ , qui, rappelons-le, correspond à la multiplication par  $-t$ . Son sous-corps de constantes est  $\mathbb{C}$ .

L'ensemble des opérateurs différentiels linéaires  $\sum_{\text{fin}} a_\alpha \frac{d^\alpha}{ds^\alpha}$ ,  $a_\alpha \in k_0(s)$ , est un anneau non commutatif, principal à gauche et à droite [12], noté  $k_0(s)[\frac{d}{ds}]$ , qui contient l'*algèbre de Weyl* [12]  $k_0[s][\frac{d}{ds}]$ . Un opérateur différentiel est dit *propre* (resp. *strictement propre*) si, et seulement si, les  $a_\alpha$  le sont (rappelons qu'une fraction rationnelle est dite (strictement) propre si, et seulement si, le degré du numérateur est (strictement) inférieur à celui du dénominateur). Il est dit *polynômial en  $\frac{1}{s}$*  si, et seulement si,  $a_\alpha \in k_0[\frac{1}{s}]$ .

Les paramètres  $\Theta$  sont dits *linéairement identifiables* (cf. [7, 8]) par rapport à  $x \in K$  si, et seulement si,  $\Theta$  vérifie l'équation matricielle :

$$P \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_r \end{pmatrix} = Q \quad (1)$$

où les coefficients des matrices  $P$ , carrée  $r \times r$ , et  $Q$ , colonne  $r \times 1$ , appartiennent à  $\text{span}_{k_0(s)[\frac{d}{ds}]}(1, x)$ , et  $\det(P) \neq 0$ .

### 2.2 Estimateurs

Soit  $N/k_0(s)$  une extension de corps différentiels, telle que  $K$  et  $N$  soient *linéairement disjoints* sur  $k_0(s)$ . Tout élément de  $N$  est appelé *bruit*, ou *perturbation*. Un bruit  $n$  est dit *structuré* si, et seulement si, il est annihilé par  $\eta \in k_0(s)[\frac{d}{ds}]$ ,  $\eta \notin k_0(s)$  :  $\eta n = 0$ . Sinon, le bruit est dit *non structuré*. Soit  $Q(K \otimes_{k_0(s)} N)$  le corps de fractions, qui est un corps différentiel, de l'anneau différentiel intègre  $K \otimes_{k_0(s)} N$ . Introduisons le *capteur*, ou la *mesure*, *bruité*  $y \in Q(K \otimes_{k_0(s)} N)$ ,  $y = x + n^{\text{str}} + n^{\text{nst}}$ , où  $n^{\text{str}}$  et  $n^{\text{nst}}$  sont des bruits structurés ou non. Alors, (1) devient

$$P \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_r \end{pmatrix} = Q + R^{\text{str}} + R^{\text{nst}} \quad (2)$$

où  $y$  remplace  $x$  dans  $P$  et  $Q$ , les coefficients de  $R^{\text{str}}$  (resp.  $R^{\text{nst}}$ ), matrice colonne  $r \times 1$ , appartiennent à  $\text{span}_{k(s)[\frac{d}{ds}]}(n^{\text{str}})$  (resp.  $\text{span}_{k(s)[\frac{d}{ds}]}(n^{\text{nst}})$ ). En multipliant les deux membres

de (2) par  $\Delta \in \text{Ann}_{k_0}(R^{\text{str}})$ , où  $\text{Ann}_{k_0}(R^{\text{str}}) \subseteq k_0(s)[\frac{d}{ds}]$  est l'idéal à gauche des annihilateurs des coefficients de  $R^{\text{str}}$ , on obtient, si  $\det(\Delta P) \neq 0$ , l'*estimateur*

$$\Delta P \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_r \end{pmatrix} = \Delta Q + \Delta R^{\text{nst}} \quad (3)$$

L'estimateur est dit *propre* (resp. *strictement propre*, *polynômial en  $s^{-1}$* ) si, et seulement si, tout coefficient de  $\Delta P$  et  $\Delta Q$  est somme d'une fraction rationnelle propre (resp. strictement propre, polynômiale en  $s^{-1}$ ) et de termes de la forme  $\varpi y$ , où  $y \in \mathcal{Y}$  et  $\varpi \in k_0(s)[\frac{d}{ds}]$  est propre (resp. strictement propre, polynômiale en  $s^{-1}$ ). Il est dit *minimal* si, et seulement si,  $\Delta$  est un générateur monogène de l'idéal principal à gauche  $\text{Ann}_{k_0}(R^{\text{str}})$ .

**Proposition 1** Il existe un estimateur (3) que l'on peut choisir minimal et/ou propre (resp. strictement propre, polynômial en  $s^{-1}$ ).

## 3 Estimation des dérivées temporelles

À la série convergente  $x(t) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{t^n}{n!}$ ,  $a_n \in \mathbb{C}$ , correspond la série opérationnelle convergente [14]

$$x = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{s^{n+1}} \in \mathcal{M}$$

appelée *signal analytique*, ou, pour éviter toute confusion avec une terminologie habituelle depuis Gabor et Ville (cf. [3]), *signal analytique en temps*. Avec le développement de Taylor tronqué  $x_N(t) = \sum_{n=0}^N a_n \frac{t^n}{n!}$ , l'équation différentielle

$$\frac{d^{N+1}}{dt^{N+1}} x_N = 0$$

correspond dans le domaine opérationnel à

$$s^{N+1} x_N - s^N x_N(0) - s^{N-1} \dot{x}_N(0) \dots - x_N^{(N)}(0) = 0$$

Les dérivées à l'origine  $x_N^{(i)}(0) \triangleq \left. \frac{d^i}{dt^i} x_N(t) \right|_{t=0}$  sont ainsi obtenues à partir du système d'équations linéaires

$$s^{-\nu} \frac{d^m}{ds^m} \left\{ x_N^{(N)}(0) + x_N^{(N-1)}(0)s + \dots + x_N(0)s^N \right\} = s^{-\nu} \frac{d^m}{ds^m} \{ s^{N+1} x_N \} \quad (4)$$

$m = 0, \dots, N$ ,  $\nu \geq N+1$ . Ce système étant triangulaire avec des éléments diagonaux non nuls, les paramètres  $x_N^{(i)}(0)$ ,  $i = 0, \dots, N$ , et par conséquent les coefficients  $a_0, \dots, a_N$  sont linéairement identifiables. Remplaçons  $x_N$  par  $x$  dans (4) : on obtient ainsi l'*estimée opérationnelle*  $[x^{(i)}(0)]_{e_N}$  de  $x^{(i)}(0)$ .

Pour le passage au numérique, il suffit, selon les règles usuelles du calcul opérationnel (voir, par exemple, [14, 15]), de remplacer en (4)

$$\begin{aligned} & - \frac{c}{s^\alpha}, \alpha \geq 1, c \in \mathbb{C}, \text{ par } c \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}, t \geq 0; \\ & - \frac{1}{s^\alpha} \frac{d^m x}{ds^m} \text{ par l'intégrale itérée d'ordre } \alpha \end{aligned}$$

$$\int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{\alpha-1}} (-1)^n \tau^n x(\tau) dt_{\alpha-1} \dots dt_1 d\tau = \frac{(-1)^n}{(\alpha-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^n x(\tau) d\tau \quad (5)$$

<sup>2</sup>Voir, par exemple, [2] pour toutes les notions courantes d'algèbre commutative.

Notons,  $[x^{(i)}(0)]_{e_N}(t)$  l'estimée numérique ainsi obtenue de  $x^{(i)}(0)$ , pour un temps d'estimation  $t$ . Le résultat suivant est essentiel pour la mise en œuvre pratique, qui repose sur un compromis entre  $t$  et  $N$  :

**Proposition 2** *Il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de 0 tel que, pour  $t \in \mathcal{V}$ ,  $[x^{(i)}(0)]_{e_N}(t)$  soit définie. Alors,*

$$\lim_{t \downarrow 0} [x^{(i)}(0)]_{e_N}(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} [x^{(i)}(0)]_{e_N}(t) = x^{(i)}(0) \quad (6)$$

*Remarque 1*

- Les itérations des intégrales produisent une moyennisation, donc un filtrage passe-bas, qui permet d'atténuer l'effet des perturbations non structurées, c'est-à-dire de ce qui est appelé usuellement bruits (voir [7, 8]).
- La fenêtre temporelle d'estimation peut être choisie très petite, ce qui permet une implémentation en temps réel.

## 4 Exemples

### 4.1 Dérivées d'un signal académique bruité

Soit  $x(t) = \text{Re}(f(t)) + n^{\text{nst}}$ , où  $\text{Re}(\bullet)$  désigne la partie réelle, et

$$f(t) = \frac{K_0}{\sqrt{S_0}} g\left(\frac{t-u_0}{S_0}\right) \exp(i\xi_0 t) + \frac{K_1}{\sqrt{S_1}} g\left(\frac{t-u_1}{S_1}\right) \exp(i\xi_0 t) + \frac{K_2}{\sqrt{S_1}} g\left(\frac{t-u_0}{S_1}\right) \exp(i\xi_1 t) + \frac{K_3}{\sqrt{S_0}} g\left(\frac{t-u_1}{S_0}\right) \exp(i\xi_1 t) \quad (7)$$

$K_0 = 0.4326$ ,  $K_1 = -1.6656$ ,  $K_2 = 0.1253$ ,  $K_3 = 0.2877$ ,  $\xi_0 = 2\pi 73$ ,  $\xi_1 = 2\pi 123$ ,  $S_0 = 1.5$ ,  $S_1 = 3$ ,  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = 4$ ;  $g(t) = 0.54 + 0.46 \cos(2\pi t)$  est une *fenêtre de Hamming*. Cet exemple, emprunté à [11], parag. 9.4.3, et, en raison de son étalement temps-fréquence, délicat à analyser par ondelettes, a le mérite de permettre la validation des simulations numériques. Nous avons choisi, ici, un bruit  $n^{\text{nst}}$  centré et gaussien, d'intensité forte. L'excellence de nos estimations est attestée par le zoom de la figure 1.

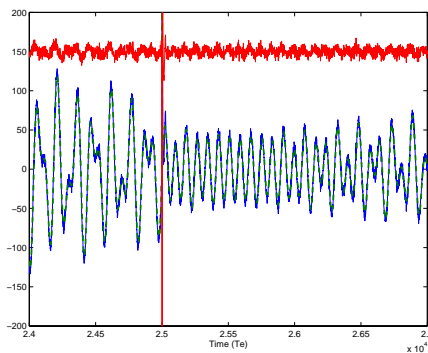


FIG. 1 – Estimation de  $\frac{d}{dt}x$  (-),  $\frac{d}{dt}x$  (- -)

### 4.2 Détection de ruptures en présence de bruit

Nous considérons ici le problème d'estimation de signaux réguliers par morceaux, pour lequel les limitations des estimateurs sont largement évoquées dans la littérature [11]. La figure 2 montre un exemple de signal polynômial de degré  $N = 3$  par morceaux, contaminé par un bruit blanc gaussien. Le niveau

du bruit,  $\text{SNR} = 21.9$  dB, est celui de l'exemple traité dans [11, p.439]. La taille du signal est  $L = 4096$ , comme dans [11].

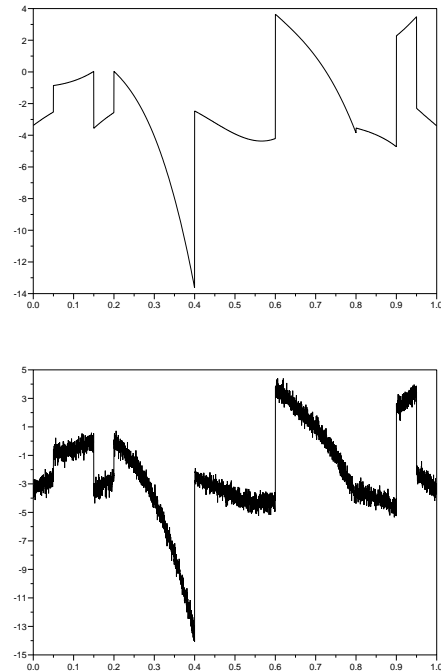


FIG. 2 - Signal polynomial par morceaux, et avec bruit  $\text{SNR} = 21.9$  dB.

Pour chaque fenêtre d'estimation  $I_\Delta(t) = [t, t + \Delta]$ , on obtient les estimées numériques  $[x^{(i)}(0)]_{e_3}(t)$ ,  $i = 0, \dots, N$ . La localisation des discontinuités étant inconnue, on s'intéresse dans un premier temps à la variation des coefficients  $a_i(t)$ ,  $i = 0, \dots, N$  du signal polynômial ainsi identifié sur chaque fenêtre  $I_\Delta(t)$ . Le coefficient  $a_3$ , normalisé puis seuillé à 0.1, est représenté, avec des zooms, sur la figure 3, pour de petites fenêtres glissantes, larges de 50 échantillons.

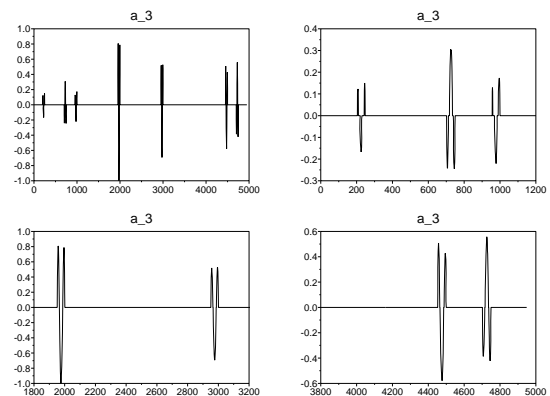


FIG. 3 – Variations des coefficients

Notons que toutes les discontinuités, excepté le saut à  $t = 0.8$  (échantillon 4000) qui est complètement noyé dans le bruit, sont localisées avec une bonne précision, comme le montre les zooms. Les points de ruptures étant identifiés, une seconde estimation, réalisée sur des fenêtres de longueur  $\Delta$  correspondant aux différents morceaux, permet d'obtenir le signal débruité  $[x^{(0)}(0)]_{e_3}(t)$  représenté sur la figure 4.

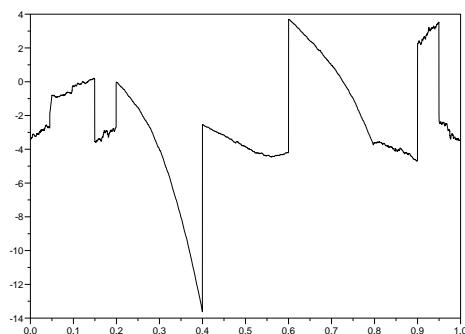


FIG. 4 - Signal débruité, SNR=27.74 dB

On peut noter que la rupture qui avait été noyée dans le bruit est ici bien restituée. Enfin, si l'on utilise le signal débruité  $[x^{(0)}(0)]_{e_3}(t)$  pour ré-estimer comme précédemment les coefficients des polynômes, on obtient le résultat de la figure 5, qui montre une reconstruction quasi-parfaite du signal original.

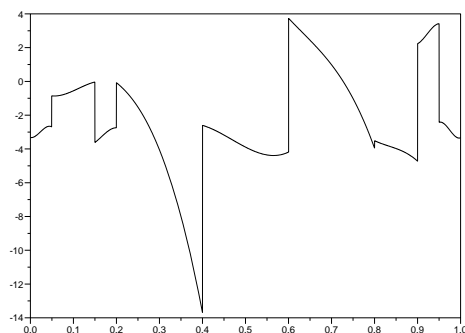


FIG. 5 - Signal reconstruit, SNR=39.58 dB

Notons aussi que la simplicité de notre traitement est à comparer avec la démarche utilisant les ondelettes présentée dans [1].

### 4.3 Compression d'un signal musical

Nous estimons les dérivées d'ordres 1 et 2 d'un signal musical, qui présente aussi un fort étalement temps-fréquence. Pour la compression, nous utilisons

- des splines polynômiaux de degré 2 que nous calculons par moindres carrés;
- des fenêtres temporelles dont les longueurs variables sont spécifiées par un seuil sur la variation de la dérivée seconde;
- des méthodes standard de quantification.

La figure 6 illustre les calculs qui, soulignons-le, sont rapides pour le codage et, encore plus, pour le décodage. Le *taux de compression*  $\frac{(3+1) \times \text{nombre de polynômes}}{\text{nombre de points du signal d'origine}}$ , où 3 correspond aux 3 coefficients d'un polynôme de degré 2, vaut 0,2. Il est égal à 0,33 sans quantification. Alors, le son reconstitué est impossible à distinguer de l'original. La qualité reste bonne en dépit du bruit de quantification, qui serait réduit avec des techniques plus avancées de quantification [9], améliorant de même le taux de compression.

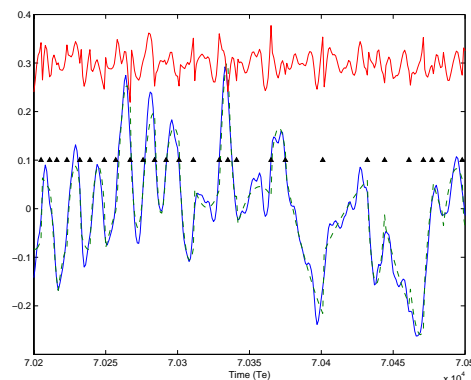


FIG. 4 - Signal d'origine (-), reconstruit (- -), indicateurs d'intervalles (Δ)

## Références

- [1] P. L. Dragotti and M. Vetterli, "Wavelet Footprints : Theory, Algorithms and Applications", *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 51, may 2003, pp. 1306-1323.
- [2] A. Chambert-Loir, *A Field Guide to Algebra*, Springer, Berlin, 2005.
- [3] P. Flandrin, *Temps-fréquence*, 2<sup>e</sup> Éd., Hermès, Paris, 1998.
- [4] M. Fliess, *Réflexions sur la question fréquentielle en traitement du signal*, manuscrit.
- [5] M. Fliess, C. Join, M. Mboup, A. Sedoglavic, *Estimation des dérivées d'un signal multidimensionnel avec applications aux images et aux vidéos*, Actes 20<sup>e</sup> coll. GRETSI, Louvain-la-Neuve, 2005.
- [6] M. Fliess, C. Join, M. Mboup, H. Sira-Ramírez, *Compression différentielle de transitoires bruités*, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I, 339, 2004, 821-826.
- [7] M. Fliess, M. Mboup, H. Mounier, H. Sira-Ramírez, *Questioning some paradigms of signal processing via concrete examples*, in *Algebraic Methods in Flatness, Signal Processing and State Estimators*, H. Sira-Ramírez, G. Silva-Navarro (Eds.), Editorial Lagares, México, 2003, pp. 1-21.
- [8] M. Fliess, H. Sira-Ramírez, *An algebraic framework for linear identification*, ESAIM Control Optim. Calc. Variat., 9 (2003) 151-168.
- [9] A. Gersho, R.M. Gray, *Vector Quantization and Signal Compression*, Kluwer, Boston, 1992.
- [10] E. Kolchin, *Differential Algebra and Algebraic Groups*, Academic Press, New York, 1973.
- [11] S. Mallat, *Une exploration des signaux en ondelettes*, Éditions École Polytechnique, Palaiseau, 2000.
- [12] J.C. McConnell, J.C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [13] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs*, t. 1, Hermann, Paris, 1990.
- [14] J. Mikusiński, *Operational Calculus*, 2<sup>nd</sup> ed., vol. 1, PWN, Varsovie & Oxford University Press, Oxford, 1983.
- [15] K. Yosida, *Operational Calculus*, Springer, New York, 1984.



# Synthèse temps-fréquence de signaux transitoires dans un contexte de tomographie acoustique océanique discrète

Lionel CROS<sup>1</sup>, Cornelia IOANA<sup>1</sup>, Gwladys THEUILLON<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire Extraction et Exploitation de l'Information en Environnements Incertains (E<sup>3</sup>I<sup>2</sup>)  
2 rue François Verny, 29806 Brest, France

<sup>2</sup>Centre Militaire d'Océanographie (CMO)  
13 rue Chatellier, BP30316 29603 Brest Cedex, France

Lionel.Cros@ensieta.fr, ioanaco@ensieta.fr, gwladys.theuillon@shom.fr

**Résumé** – Nous nous intéressons à synthétiser, dans un plan temps-fréquence, des signaux acoustiques répondant aux contraintes de la Tomographie Océanique Discrète (TOD), à partir de sources d'opportunité naturellement présentes dans le milieu. La synthèse optimale des signaux autorise la confusion entre une émission naturelle et artificielle, offrant l'avantage de contrôler les paramètres temporels, spatiaux et fréquentiels. L'intérêt et le potentiel de la méthode de synthèse proposée sont illustrés par un résultat obtenu dans un contexte de TOD, à partir de données réelles.

**Abstract** – In this paper, we describe a method to synthesize, in a time-frequency plane, acoustic signals adapted to the Discrete Oceanic Tomography (DOT) by using opportunity sources naturally present in the ocean. The optimal signal synthesis allows to make no difference between a natural and a synthetic emission and make possible the control of the temporal, spatial and spectral parameters. A result obtained from real underwater data illustrates the interest and the potential of the proposed synthesis method in a DOT context.

## 1 Introduction

L'objectif de la Tomographie Acoustique Océanique (TAO) est de déterminer, en mesurant les paramètres de propagation (retards, atténuations, etc.), les caractéristiques géoacoustiques de l'environnement dans lequel se propagent les ondes acoustiques [1]. À partir d'une expérimentation de tomographie constituée d'une phase d'émission, de propagation et de mesure du champ acoustique induit, les distorsions causées par la propagation permettent de retrouver par inversion, les propriétés d'intérêt du milieu.

Afin de réduire les effets nuisibles sur la faune marine et d'assurer une discrétion voulue par les opérations militaires, un domaine d'intérêt s'est développé autour du concept de la tomographie océanique passive qui fonctionnent avec les signaux d'opportunité existants naturellement dans le milieu. Dans ce cas, l'émission de signaux est interdite.

Une étape de difficulté intermédiaire dans cette recherche de discrétion consiste à effectuer des émissions furtives. Ainsi intervient la notion de Tomographie Océanique Discrète (TOD) qui peut être définie comme un système de tomographie active dont le signal émis est choisi de façon à assurer la discrétion de l'émission.

Le principe de traitement des données d'un système de TOD peut s'illustrer par le schéma présenté FIG. 1. La première opération réalisée par un système de TOD est la *réception*, par un hydrophone, de signaux acoustiques provenant du milieu sous-marin environnant. Compte tenu de la diversité des signaux susceptibles d'être reçus (signaux à bande étroite, à large bande, émissions longues, impulsions courtes, etc.), une première étape d'*analyse* permet d'identifier les structures utiles pour la tomographie active. Le résultat de cette étape consiste

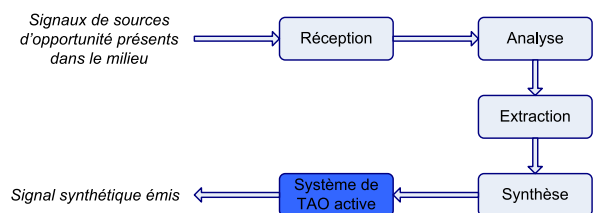


FIG. 1 – Organisation de la chaîne de traitement du signal dans un système de TOD.

principalement en la caractérisation de paramètres spécifiques aux signaux reçus. Ceux-ci permettront d'envisager l'*extraction* d'éléments exploitables pour la TOD et ensuite, d'effectuer la *synthèse* du signal performant pour la TAO qui possède un effet auditif similaire aux les signaux présents dans le milieu. Par la suite, le signal synthétique fera office de forme d'onde pour le système de TAO active.

## 2 Procédure de synthèse proposée

L'identification des problèmes de traitement du signal associés à la TOD, a permis de formuler les exigences imposées aux sous-systèmes de TOD. Ainsi, une condition pour obtenir de bonnes performances pour le système de TAO est de sélectionner des structures temps-fréquence à produit BT important mais restant néanmoins à un niveau de complexité raisonnable [2, 3]. De plus, pour des raisons de discrétion, il est nécessaire d'avoir un maximum d'information pour produire le même effet auditif que le signal naturel. Aussi, les deux objectifs de la TOD qui sont d'assurer de bonnes performances

pour la TAO et un niveau de discrétion optimal, introduisent des exigences contradictoires.

Nous avons cependant identifié une approche capable de répondre à ce compromis. Il s'agit du concept «Auditory Modeling» (AM). Néanmoins, un certain nombre de difficultés liées à l'exploitation de l'information fournie par cet outil reste à résoudre. Il s'agit de l'extraction de l'information et de la synthèse du signal pour la TAO.

## 2.1 Analyse

La TOD utilise des signaux naturels se trouvant dans l'environnement sous-marin. Il s'agit principalement de sons émis par des cétacés, de bruits de bateaux, de vagues, etc. Étant donné que la majorité de ces signaux appartiennent à la bande spectrale auditive, le meilleur analyseur dont nous disposons, à l'heure actuelle, semble être l'oreille humaine. En effet, le système auditif humain possède de remarquables capacités pour détecter et reconnaître des sons de différentes origines et peut fonctionner correctement avec un faible rapport signal sur bruit. C'est la raison pour laquelle, l'AM constitue une solution satisfaisante pour répondre aux besoins du système de TOD.

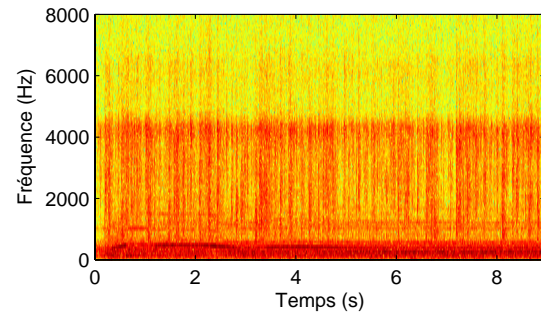
Ce modèle auditif complet, dont les aspects théoriques sont développés dans [4], est basé à la fois sur la physiologie des mammifères et sur la perception humaine. Il est constitué d'un ensemble de transformations (transformée en ondelettes, compressions non linéaires, etc.) qui fournit, dans un plan temps-échelle, une représentation fidèle de l'information préservée et amplifiée par le système auditif humain. Tous les modèles biophysiques du système auditif peuvent être réduits en 3 étapes principales : analyse, transduction et réduction. Si l'on ignore le lissage temporel et spatial, le modèle complet peut se résumer à l'expression suivante :

$$y(t; s) = \max \left( \frac{\partial}{\partial s} \left\{ g \left( \frac{\partial}{\partial t} \{ x(t) * h(t; s) \} \right) \right\}, 0 \right) * \Pi_T(t)$$

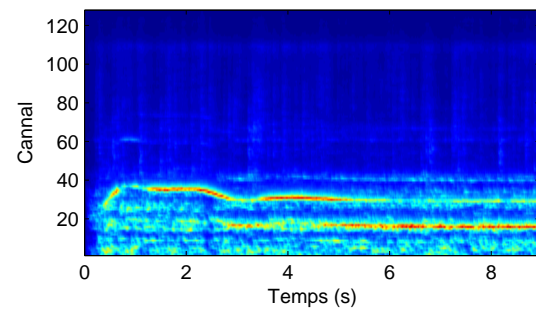
où  $t$  et  $s$  sont respectivement une variable temporelle et une variable spatiale,  $x(t; s)$  le signal acoustique,  $h(t; s)$  la réponse impulsionnelle du filtre de la cochlée localisée au pt  $s$  le long de celle-ci,  $g(\cdot)$  une fonction non linéaire,  $\Pi_T(t)$  la fonction porte de largeur  $T$  et  $*$  la convolution par rapport à  $t$ .

La première étape du traitement auditif est représenté par une transformée en ondelette. Un banc de filtre de 128 canaux, uniformément espacé sur l'axe spatial, est construit par dilatation d'une ondelette mère construite par rapport à la réponse impulsionnelle du modèle biophysique de la membrane basilaire à la région correspondant approximativement à 1kHz. Chaque canal est ensuite indexé de 0 à 127.

La représentation temps-échelle issue de l'AM est appelée «Auditory Representation» (AR). Elle est constituée par une structure bidimensionnelle dans laquelle chaque ligne est associée à la sortie d'un filtre d'analyse. Cette représentation met en évidence plusieurs composantes énergétiques du signal perçues par l'oreille humaine. Grâce au système nerveux central, les détails qui ne sont pas représentatifs pour la compréhension du signal acoustique analysé sont ignorés. Ce processus de réduction de l'information est appelé «compression de l'information auditive». Cet effet est confirmé par les tests effectués sur un enregistrement de bruit de bateau illustré en FIG. 2. L'AR du signal acoustique (cf. FIG. 2(b)) contient moins de données que



(a) Spectrogramme.



(b) «Auditory Representation».

FIG. 2 – Comparaison entre le spectrogramme (a) et l'«Auditory Representation» (b) d'un signal acoustique réel.

le spectrogramme (cf. FIG. 2(a)). La transformée en ondelettes justifie la différence d'échelle entre les deux représentations.

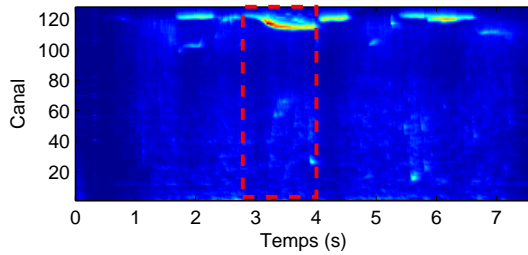
L'extraction d'informations à partir de l'AR garantit ainsi un niveau de discrétion optimal de l'émission des structures qui en sont extraites. Cet outil servira de référence pour effectuer la synthèse d'un signal acoustique discret.

## 2.2 Extraction

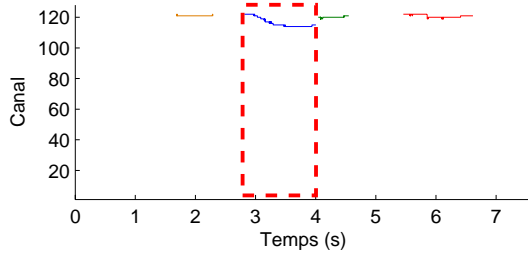
L'information auditive étant distribuée dans des bandes fréquentielles adjacentes, l'analyse indépendante des signaux dans chaque sous-bande n'est pas souhaitable. De plus, en raison de différents effets de propagation (multi-trajets, atténuations, artefacts, etc.), les structures présentes dans l'AR sont caractérisées par des pertes d'énergie. Nous avons donc besoin d'un recours à une technique performante de regroupement de l'information des bandes adjacentes. Pour ce faire, nous proposons l'utilisation d'une méthode basée sur l'algorithme de Viterbi afin d'estimer des lois de fréquence instantanée dans un plan temps-fréquence [5, 6]. L'algorithme de Viterbi peut être étendu comme un outil général pour grouper des parties du plan temps-fréquence appartenant à la même composante du signal.

Le critère retenu pour l'extraction de composantes temps-fréquence à partir de l'AR, consiste à sélectionner celles dont le produit BT est important. Ceci est équivalent à rechercher les composantes les plus énergétiques. Ce critère est intégré dans cet algorithme de détection qui va trier les chemins les plus énergétiques dans l'ordre décroissant.

La figure 3(b) montre le résultat obtenu par cet algorithme appliqué à un signal contenant des cris de dauphins [7]. Seules les 4 premières composantes temps-fréquences extraites de l'AR (cf. FIG. 3(a)), les plus énergétiques, sont représentées. Les 4



(a) «Auditory Representation».



(b) Les 4 premiers trajets détectés par l'algorithme temps-fréquence de Viterbi

FIG. 3 – Détection de composantes temps-fréquence à partir de l'AR d'un signal réel.

trajets détectés correspondent aux 4 principales structures mise en évidence par l'AM. Dans ce qui suit, nous nous intéresserons à synthétiser la partie du signal encadrée en pointillés rouges (cf. FIG. 3).

### 2.3 Synthèse

La composante retenue, modélisée par l'algorithme précédent, est représentée en fonction des canaux de l'AR. Une modélisation polynômiale de la phase de celle-ci permet d'éviter les discontinuités inhérentes qui apparaissent dans le contexte du travail sur un nombre fini de sous bandes (cf. FIG. 3(b)) et permet de synthétiser un signal qui sera utilisé comme émission pour le système de TAO.

L'estimation polynômiale de la Loi de Fréquence Instantanée (LFI) s'effectue par le calcul des coefficients du polynôme d'approximation au sens des moindres carrés pour un ordre peu élevé ( $P = 7$ ) :

$$LFI(t) = \sum_{k=0}^{P=7} a_k t^k \quad (1)$$

L'intégration de  $LFI(t)$  par rapport au temps permet d'obtenir une estimation simple de la phase instantanée :

$$\phi(t) = 2\pi \sum_{k=0}^{P=7} \frac{a_k}{k+1} t^{k+1} \quad (2)$$

Maintenant le signal  $s(t)$  peut être synthétiser simplement à partir de l'estimation de la phase instantanée, sous la forme d'un signal analytique :

$$s(t) = A e^{j\phi(t)} \quad (3)$$

où l'amplitude  $A$  est considérée constante et la phase  $\phi(t)$  est définie par (2).

La figure 4 résume les opérations effectuées lors de la procédure de synthèse. Tout d'abord, le signal Acoustique Sous-Marin (ASM) reçu est analysé par l'AM pour fournir l'AR de

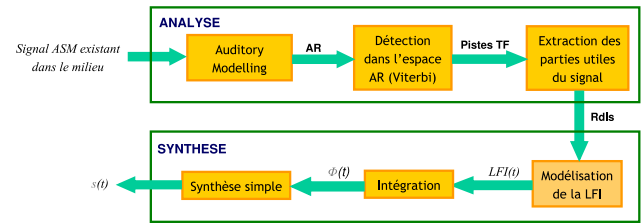


FIG. 4 – Organisation du système de traitement du signal proposé pour la TOD.

ce dernier. L'algorithme de Viterbi employé permet de détecter, à partir de l'AR, les pistes temps-fréquence les plus énergétiques. Celle dont le produit BT est le plus important est extraite et sa LFI estimée est ensuite modélisée puis intégrée par rapport au temps pour fournir une estimation de la phase instantanée de la composante retenue. Enfin, la synthèse sous la forme (3) permet l'obtention du signal synthétique  $s(t)$ .

Cette procédure de synthèse a été testée sur des données sous-marines réelles pour analyser ses performances dans le cadre de la TOD.

## 3 Résultats expérimentaux

Sous l'hypothèse d'une propagation par rayons acoustiques, la nature multi-trajets des arrivées constitue la principale distorsion observable par la mesure des temps de trajets et des atténuations de différents rayons acoustiques.

La phase d'inversion nécessite la connaissance de la réponse impulsionnelle (RI) du canal acoustique entre l'émetteur et le récepteur. Si l'on a  $P$  trajets, la RI peut s'écrire sous la forme :

$$h(t) = \sum_{n=1}^P \alpha_n \delta(t - \tau_n) \quad (4)$$

où  $\delta(t)$  est l'impulsion de Dirac,  $\alpha_n$  et  $\tau_n$  représentent respectivement l'atténuation et le retard du  $n^{\text{ème}}$  trajet.

Ainsi, le modèle de mesures disponibles est fourni par :

$$m(t) = h(t) * (r(t) + s(t)) + b(t) \quad (5)$$

$$= \sum_{n=1}^P \alpha_n r(t - \tau_n) + b(t) + \sum_{n=1}^P \alpha_n s(t - \tau_n) \quad (6)$$

où  $r(t) + s(t)$  représente le signal propagé dans le canal par le bruit ambiant  $r(t)$  auquel s'ajoute le signal synthétique émis  $s(t)$ .  $b(t)$  est un bruit supposé blanc et stationnaire au sens large.

Connaissant le signal émis  $s(t)$  et supposant que la mesure est constituée uniquement d'une arrivée décalée et atténuée, l'estimateur du maximum de vraisemblance du temps de propagation s'exprime simplement à partir de l'intercorrélation entre la mesure et le signal émis  $\Gamma_{s,m}(\tau)$  (sortie du filtrage adapté). D'où l'estimation du temps de propagation :

$$\tilde{\tau} = \arg \max_{\tau} [\Gamma_{s,m}(\tau)] \quad (7)$$

Dans le cas où la mesure est constituée d'arrivées multiples, sous la condition que les arrivées soient toutes résolues, l'estimation des différents temps de propagation s'obtient grâce à (7) en cherchant le  $n^{\text{ème}}$  maximum local correspondant au  $n^{\text{ème}}$  trajet.

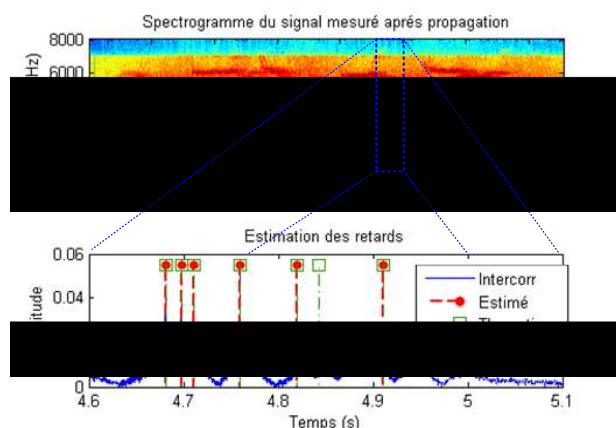


FIG. 5 – Estimation des temps de propagation obtenus par filtrage adapté.

Dans ce contexte, les performances de la TAO dépendent de l'efficacité de l'analyse et de la synthèse. Ainsi, l'extraction correcte de l'information contenue dans l'AR permet d'obtenir une bonne estimation de la RI du canal. L'évaluation des performances du système TOD s'effectue donc dans le contexte d'une configuration TAO active dont le signal émis est obtenu par l'architecture de synthèse proposée précédemment.

Nous considérons que la source d'opportunité se trouve à proximité du bateau sur lequel le système de traitement TOD est placé. Une fois le signal reçu, il est analysé à l'aide de l'AM. L'extraction des parties à produit BT important permettra la synthèse d'un signal avec des propriétés utiles pour la tomographie active. Par la suite, ce signal est émis dans la même bande de fréquence que le signal réel mais avec un décalage bien défini et contrôlé. Les caractéristiques de ce signal synthétique seront utilisées pour concevoir la procédure de filtrage adapté.

Afin de tester les performances d'estimation des temps de propagation du canal acoustique, nous avons utilisé un algorithme qui fournit un modèle numérique de la RI d'un canal à partir d'une configuration physique réelle. Cette RI est constituée de 7 chemins de propagation distincts.

La partie du signal encadrée en pointillés sur la figure 3, a été synthétisée. Le signal synthétique résultant, est ensuite inséré, après la partie extraite, avec une amplitude atténuée de moitié. Une estimation du signal reçu par le récepteur est obtenue par la convolution de la RI avec le signal précédent. La figure 5 donne une représentation graphique de l'estimation des retards de propagation du canal qui s'effectue par filtrage adapté basé sur l'intercorrélation (trait plein) entre le signal synthétique émis et le signal propagé dans le canal et mesuré par le récepteur. Les impulsions verticales indiquent les retards théoriques (carrés vides), et estimés (cercles pleins). Ainsi, il est possible, dans ce cas, d'estimer 6 retards sur 7 (cf. FIG. 5), tout en assurant une discrétion jugée satisfaisante par les membres de l'équipe travaillant sur cette approche.

## 4 Conclusions et perspectives

Nous avons proposé une architecture de traitement du signal pour la TOD. Le point clé de ce concept étant la simulation d'un système de tomographie active par l'émission de signaux

similaires à ceux existants dans le milieu.

La méthode développée permet de répondre deux objectifs fixés par la TOD qui sont d'assurer de bonnes performances pour la TAO et un niveau de discrétion optimal à l'émission sonore. Afin de répondre à ces exigences l'architecture de traitement est concentrée autour du concept Auditory Modelling. A partir de l'AR, une méthode basée sur l'algorithme de Viterbi permet d'extraire la composante dont le produit BT est le plus important. La modélisation polynomiale de la phase de cette composante permet de synthétiser le signal utilisé comme émission pour la TOA. Sous les hypothèses d'une propagation multi-trajets par rayons acoustiques, les tests effectués ont montré qu'il était possible d'estimer des temps de propagation nécessaires à la phase de déconvolution de la RI du canal sous-marin.

La procédure étant fonctionnelle pour des signaux comportant des structures à bande large, il reste maintenant à s'intéresser à d'autres sources d'opportunité importantes comme le bruit émis par des bateaux ou par des vagues. Pour ces derniers, il est difficile de faire apparaître des structures temps-fréquence cohérentes à produit BT important et de ce fait, la méthode synthétique mise en place n'est plus adaptée. Une solution envisagée consiste à analyser les phases des composantes de ces signaux afin de retrouver une cohérence de phase qui permettrait la réalisation d'une procédure de filtrage adapté.

**Remerciements** – Les auteurs ont plaisir à remercier le Centre Militaire d'Océanographie du SHOM pour cette étude réalisée dans le cadre du contrat de recherche CA/2003/06/CMO.

## Références

- [1] W. Munk, P. Worcester, and C. Wunsch, *Ocean Acoustic Tomography*. New York : Cambridge, 1995.
- [2] J.-P. Hermand, "Broad-band geoacoustic inversion in shallow water from waveguide impulse response measurements on a single hydrophone : theory and experimental results," *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, vol. 21, pp. 324–346, 1999.
- [3] J. Le Gac, *Deux approches de l'inversion géoacoustique : Inversion par signaux large bande et Approche Variationnelle*. PhD thesis, Université de Toulon et de Var, April 2003.
- [4] X. Yang, K. Wang, and S. Shamma, "Auditory representations of acoustic signals," tech. rep., University of Maryland, 1991.
- [5] L. Stankovic, I. Djurovic, A. Ohsumi, and H. Ijima, "Instantaneous frequency estimation by using wigner distribution and viterbi algorithm," in *Proceeding of ICASSP*, vol. VI, pp. 121–124, April 2003. Hong Kong, China.
- [6] C. Cornu, I. Djurovic, C. Ioana, A. Quinquis, and L. Stankovic, "Time-frequency detection using gabor filter banks and viterbi based grouping algorithm," in *International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing ICASSP*, March 2005.
- [7] Cornell Lab of Ornithology, "Whale communication research." [en ligne]. Disponible sur : <<http://birds.cornell.edu/brp/SoundsBlueWhale.html>>.

# Amélioration de l'estimation spectrale par modélisation AR multi-dimensionnelle et découpage en sous-bandes

David BONACCI, Corinne MAILHES

IRIT/ENSEEIH/TéSA

2 rue Charles Camichel, BP 7122, 31071 Toulouse cedex 7, France

david.bonacci@enseeiht.fr, corinne.mailhes@enseeiht.fr

**Résumé** – Le découpage en sous-bandes est réputé pour ses très bonnes performances en matière d'estimation fréquentielle, en particulier lorsqu'on utilise des méthodes paramétriques. Cet article présente une méthode d'estimation spectrale basée sur le découpage en sous-bandes et la modélisation auto-regressive multi-dimensionnelle qui permet d'exploiter la connaissance des inter-corrélations entre les signaux de sous-bande afin d'améliorer les performances de l'estimation fréquentielle. Le principe de la méthode est présenté puis appliquée à la résolution de 2 fréquences très proches dans le cas de signaux composés de deux fréquences pures très proches noyées dans du bruit. Des simulations effectuées sur des données synthétiques illustrent les performances de ce nouvel estimateur qui ouvre des perspectives intéressantes.

**Abstract** – Subband decomposition has been shown to achieve very good performances for frequency estimation, particularly when parametric methods are used. This paper introduces a subband multichannel autoregressive spectral estimation method allowing to exploit the knowledge of intercorrelations between subseries in order to improve frequency estimation performances. This method is detailed then applied to a signals composed by a sum of 2 close sinusoids embedded in noise. Simulation results illustrate the interest of the proposed method.

## 1 Introduction

L'intérêt du découpage en sous-bandes pour l'estimation spectrale en général a été démontré dans la littérature du traitement du signal par des auteurs tels que [1] ou [2]. En ce qui concerne l'estimation spectrale paramétrique, les principaux avantages du traitement appliqué à des signaux de sous-bande sont en particulier la réduction de l'ordre des modèles (conduisant à une diminution du nombre de conditionnement des matrices d'autocorrélation [3]), la blancheur des DSP (densités spectrales de puissance) [4] et la réduction des puissances d'erreur de prédiction linéaire pour la modélisation AR (auto-régressive) [1]. Dans le cas de signaux à spectre de raies, on montre très facilement que l'espacement entre 2 pics du spectre et les SNR (rapports signal à bruit) locaux augmentent d'un facteur égal au facteur de décimation  $M$  du banc de filtres [4]. L'estimation spectrale paramétrique dans les sous-bandes engendre bien sûr aussi divers problèmes. En particulier, le problème du recouvrement spectral peut se présenter : le même harmonique peut apparaître dans 2 sous-bandes différentes lorsque celui-ci se trouve au voisinage de la frontière de ces 2 sous-bandes. Ce problème a déjà été traité dans [5] et [6] qui proposent des procédures non temps-réel permettant d'éliminer les problèmes de recouvrement spectral et de discontinuité du spectre lorsqu'on fait du découpage en sous-bandes. Ces procédures s'appliquent aussi bien à des bancs de filtres uniformes tels que celui représenté figure 1 qu'à des bancs de filtres non-uniformes. Le deuxième problème de l'estimation spectrale paramétrique appliquée après découpage en sous-bandes est lié à la décimation : il s'agit de l'augmentation de variance des estimateurs d'auto-corrélation à cause de la diminution du nombre d'échantillons de signal disponibles. Cet article étudie les apports de la **Modélisation AR Multi-dimensionnelle** appliquée

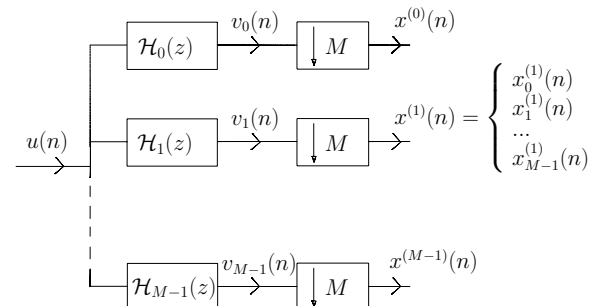


FIG. 1 – Banc de filtres d'analyse uniforme avec  $M$  sous-bandes et un facteur de décimation  $M$ .

aux sous-séries issues de la décimation après **Découpage en Sous-bandes (MARM-DS)**, dans le cas de signaux à spectre de raies.

## 2 Le modèle étudié

Soit la  $j^{\text{ème}}$  branche du banc de filtres représenté figure 1. On note  $u(n), n = 0, \dots, N-1$  la séquence d'entrée aléatoire,  $\mathcal{H}_j(z)$  la transmittance du filtre passe-bande associé et  $v_j(n), n = 0, \dots, N-1$  la sortie échantillonnée de ce filtre. La décimation de ce signal filtré  $v_j(n)$  est faite  $M$  fois (par un décimateur d'ordre  $M$ ) en prenant à chaque fois un instant initial différent  $n = 0, \dots, M-1$ . Ceci conduit à la construction de  $M$  sous-séries  $x_m^{(j)}(n)$  comportant chacune  $N/M$  échantillons (voir fig. 1) :

$$x_m^{(j)}(n) = v_j(Mn - m) \quad \forall m = 0, \dots, M-1. \quad (1)$$

Pour clarifier les notations, on omettra dans la suite de ce document l'indice  $j$  de la sous-bande considérée et on note  $\underline{x}(n) =$



$[x_0(n), \dots, x_{M-1}(n)]^T$  le vecteur de dimension  $M$  constitué des différents échantillons des sous-séries pris à l'instant  $n$ . La matrice d'auto-corrélation de ce vecteur est définie par :

$$K_x(q) = E[\underline{x}(n)\underline{x}^H(n-q)], \quad (2)$$

où  $q = -(N/M - 1), \dots, (N/M - 1)$ ,  $E[\cdot]$  désigne l'opérateur d'espérance mathématique et  $^H$  la transposée hermitienne. Les termes diagonaux de cette matrice  $K_x(q)$  sont les auto-corrélations des  $M$  sous-séries et les éléments non-diagonaux sont les inter-corrélations entre ces sous-séries issues de la même sous-bande. On peut montrer que ces inter-corrélations correspondent à l'autocorrélation du signal filtré  $v_j(n)$  avant le décodeur. Plus précisément :

$$r_{x_{m_1}x_{m_2}}(k) = r_v(Mk + m_2 - m_1), \quad \forall m_1, m_2. \quad (3)$$

Au lieu d'exprimer la valeur de  $x_m(n)$  pour  $m$  fixé en fonction de  $x_m(n-1), \dots, x_m(n-p)$  (où  $p$  représente l'ordre du modèle) comme dans le cas de la modélisation AR classique, l'ensemble du vecteur  $\underline{x}(n)$  est exprimé comme une fonction des vecteurs aux instants précédents  $\underline{x}(n-1), \dots, \underline{x}(n-p)$ . Une étude théorique approfondie de la modélisation AR multi-dimensionnelle se trouve dans de nombreux ouvrages tels que [7, p. 457]. Toutefois, l'application de l'AR multi-dimensionnel aux sous-séries de chaque branche du banc de filtres n'a jamais été étudiée à notre connaissance. Cette méthode que nous appelons MARM-DS permet ainsi de tirer parti de toute l'information connue a priori sur les sous-séries issues de la décimation, et en particulier de leurs inter-corrélations. L'expression du prédicteur multi-dimensionnel d'ordre  $p$  est rappelé ci-dessous :

$$\hat{\underline{x}}(n) = -\sum_{k=1}^p A_k \underline{x}(n-k), \quad (4)$$

où les  $A_k$  sont des matrices de taille  $M \times M$  (matrices de prédiction). Le vecteur d'erreurs de prédiction linéaire  $\underline{e}(n)$  correspondant s'exprime alors par :

$$\underline{e}(n) = \underline{x}(n) - \hat{\underline{x}}(n) = \underline{x}(n) + \sum_{k=1}^p A_k \underline{x}(n-k). \quad (5)$$

### 3 Principe de l'estimation spectrale multi-dimensionnelle en sous-bandes

Étant donné le modèle (4), on commence par estimer les  $p$  matrices de prédiction  $A_k$ . De même que pour la modélisation AR classique, le principe est de minimiser la puissance d'erreur de prédiction linéaire. Dans le cas multi-dimensionnel, ceci revient à minimiser la somme des erreurs de prédiction associées à chaque composante mono-dimensionnelle de (5). Ceci conduit au système de  $p$  équations matricielles suivant [7] :

$$K_x(q) = -\sum_{k=1}^p A_k K_x(q-k), \quad \forall q \in \{1, \dots, p\}. \quad (6)$$

Le calcul des matrices  $A_k$  à partir de (6) nécessite l'inversion d'une matrice-bloc de matrices de Toeplitz de dimensions  $(Mp) \times (Mp)$ . Cette structure particulière pour l'inversion a été étudiée en détail par Wiggins et Robinson dans [8] qui ont mis au point un algorithme robuste, temps-réel, récursif en ordre et proche de l'algorithme de Levinson-Durbin pour la modélisation AR classique. La principale différence entre ces deux

algorithmes est que dans le cas multi-dimensionnel, les matrices de coefficients de prédiction arrière et avant ne sont plus liées par une simple relation. D'autres travaux intéressants sur les matrices-bloc de matrices de Toeplitz peuvent se trouver dans [9]. De même que pour la modélisation AR classique, il est facile de démontrer que le vecteur d'erreurs de prédiction est centré ( $E[\underline{e}(n)] = 0$ ). De plus, les propriétés statistiques au deuxième ordre de  $\underline{e}(n)$  sont les suivantes :

$$E[\underline{e}(n)\underline{e}^H(n-s)] = \begin{cases} 0 & \text{if } s \neq 0 \\ \Sigma & \text{if } s = 0 \end{cases} \quad (7)$$

où

$$\Sigma = K_x(0) + \sum_{k=1}^p A_k K_x^H(k). \quad (8)$$

Ceci montre que le vecteur d'erreurs de prédiction  $\underline{e}(n)$  d'un processus AR auto-régressif est un bruit blanc vectoriel. A noter qu'on montre dans [10] que ceci revient à supposer que chaque composante  $x_m(n)$  du vecteur  $\underline{x}(n)$  peut se modéliser par comme un processus ARMA. En utilisant ce dernier résultat, une estimée  $\hat{\Sigma}$  de la matrice  $\Sigma$  peut aisément s'obtenir à partir d'estimateurs d'auto-corrélation classiques.

Les matrices  $A_k$  et  $\Sigma$  étant estimées, l'analyse spectrale multi-dimensionnelle consiste à estimer une matrice de spectres croisée  $P_x(f)$ . Cette matrice est définie comme la transformée de Fourier discrète de la matrice de corrélations  $K_x(q)$  :

$$P_x(f) = DFT[K_x(q)], \quad (9)$$

où la transformée de Fourier est calculée séparément sur chaque composante de la matrice d'auto-corrélation. Cette définition entraîne que la matrice  $P_x(f)$  est à symétrie hermitienne. Les DSP recherchées de chaque composante mono-dimensionnelle de  $\underline{x}(n)$  sont situées sur la diagonale de  $P_x(f)$  et les éléments non diagonaux sont les inter-spectres entre ces différentes composantes. On pose :

$$A = I + \sum_{k=1}^p A_k e^{-i2\pi f k} \quad (10)$$

où  $I$  est la matrice identité de taille  $M \times M$ . La matrice  $A$  a les mêmes dimensions  $M \times M$ . L'estimateur AR multi-dimensionnel se calcule comme suit [7, p. 460] :

$$\hat{P}_{AR}(f) = (\hat{A})^{-1} \hat{\Sigma} (\hat{A}^{-1})^H \quad (11)$$

et les  $M$  DSP AR estimées de  $x_0(n), \dots, x_{M-1}(n)$  se situent sur la diagonale principale de  $\hat{P}_{AR}(f)$ . A noter que ces DSP sont théoriquement égales mais pas numériquement. Ainsi, l'estimateur final  $S_x(f)$  de la DSP des signaux de sous-bande s'obtient en moyennant les éléments diagonaux de  $\hat{P}_{AR}(f)$ . La DSP  $S_u(f)$  du signal à analyser se déduit ensuite de la connaissance du banc de filtres.

### 4 Résultats de simulations

La méthode employée pour conduire les simulations présentées ci-dessous sans problème de recouvrement spectral est celle présentée dans [6]. Celle-ci entraîne l'emploi d'un dispositif de glissement fréquentiel (par exponentielles complexes) placé en amont du banc de filtres et nécessite l'emploi d'un

banc de filtres RIF (Réponse Impulsionnelle Finie) à encoches ("comb filters") d'ordre  $L$  multiple de  $M$ , centrés sur les milieux de chaque sous-bande. Plus précisément, le module au carré de la fonction de transfert du  $j^{\text{ème}}$  filtre est donné par

$$|\mathcal{H}_j(e^{i2\pi f})|^2 = \begin{cases} \frac{1}{L} \frac{\sin^2 \pi(f-F_j)L}{\sin^2 \pi(f-F_j)} & \text{if } f \neq F_j \\ L & \text{if } f = F_j \end{cases} \quad (12)$$

où  $j$  est l'indice de la sous-bande considérée ( $j \in \{0, \dots, M-1\}$ ) et  $F_j = j\frac{0.5}{M} + \frac{0.25}{M}$  est le centre de la  $j^{\text{ème}}$  sous-bande. La transmittance de ces filtres passe périodiquement par 0 avec la période  $1/L$ , ce qui représente la condition décrite dans [6] pour qu'il n'y ait pas de recouvrement spectral. La réponse fréquentielle du banc de filtres d'analyse est représentée figure 2 pour  $M = 4$  et  $L = 16$ .

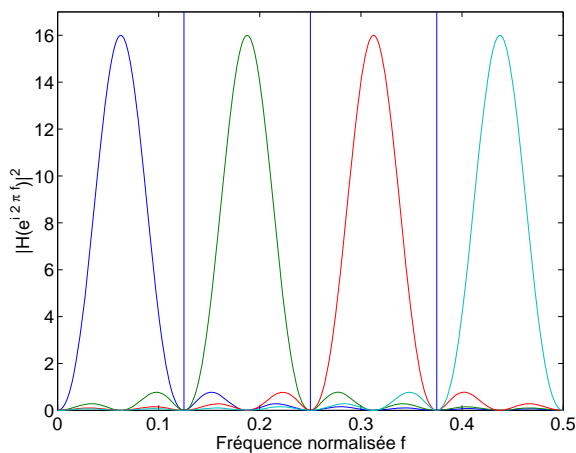


FIG. 2 – Transmittance du banc de filtres pour  $M = 4$  et  $L = 16$ .

Nous avons choisi d'illustrer l'intérêt de la méthode MARM-DS sur l'analyse spectrale d'un signal constitué de deux fréquences pures très proches noyées dans du bruit blanc additif. Dans l'exemple ci-après, les deux fréquences sont  $f_1 = 0.1$  et  $f_2 = 0.108$  pour un nombre d'échantillons de signal de  $N = 100$ . Le rapport signal à bruit est de 7 dB. L'analyse spectrale de plusieurs réalisations (10 sont représentées sur les courbes) de ce signal est effectuée de 3 façons différentes. Le premier estimateur est obtenu par analyse AR classique "large-bande" d'ordre  $p_{full} = 16$ , c'est-à-dire appliquée directement sur le signal original  $u(n)$ . Le second dérive de l'analyse AR classique "sous-bandes", appliquée sur l'un des sous-signaux en sortie des décimateurs de la figure 1 indifféremment pour  $m = 0, \dots, M-1$  (dans ce cas,  $L = 16$ ,  $M = 4$  et  $p = 4$ ). Enfin, le dernier estimateur est celui proposé dans cet article : MARM-DS. Notons qu'il est préférable d'utiliser un ordre  $p = p_{full}/M$  pour une juste comparaison de l'estimation spectrale paramétrique large-bande et sous-bande étant donné que le nombre d'échantillons d'autocorrélation disponibles est souvent limité par le nombre d'échantillons de signal  $N$ .

Le premier critère étudié pour comparer ces 3 estimateurs est la puissance d'Erreur de Prédiction Linéaire (EPL). Pour l'estimateur large-bande, il n'y a qu'une matrice d'autocorrélation quelque soit la fréquence considérée. En revanche, les estimateur sous-bande et MARM-DS reposent sur la procédure décrite dans [6] qui nécessite une estimation spectrale spécifique pour chaque fréquence considérée. C'est la raison pour laquelle

ces EPL dépendent de la fréquence. Sur la figure 3, celles-ci sont moyennées dans chaque sous-bande. Dans le cas de l'estimateur MARM-DS, les EPL mono-dimensionnelles représentées sont issues de la diagonale de la matrice  $\Sigma$  (8). Les résul-

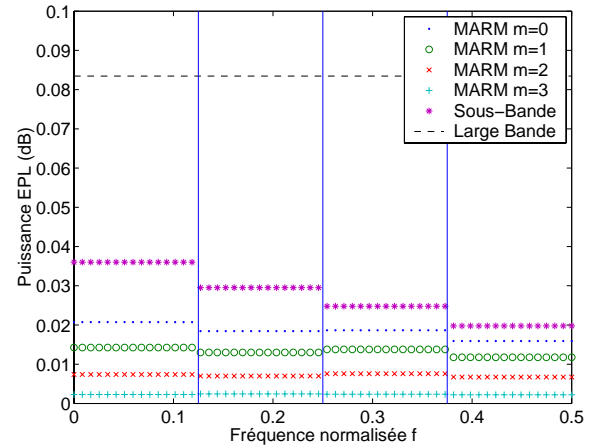


FIG. 3 – Erreurs de Prédiction Linéaire pour les 3 méthodes.

tats sont en faveur de la méthode MARM-DS pour laquelle les puissances d'EPL demeurent les plus faibles  $\forall m$ .

Concernant le critère de précision de l'estimateur fréquentiel, la figure 4 permet de comparer les variances des 3 estimateurs à la borne de Cramer-Rao pour un signal constitué d'une unique sinusoïde plongée dans du bruit (fréquence  $f_1 = 0.1$  et  $N = 200$  échantillons de signal). Le rapport signal à bruit est de 10 dB et les ordres de modélisation et paramètres des filtres d'analyse sont les mêmes que précédemment. Le tracé est effectué en fonction du nombre de réalisations afin de vérifier qu'on a bien convergé dans la statistique de Monte-Carlo. On constate que le fait de moyenner les  $M = 4$  estimateurs

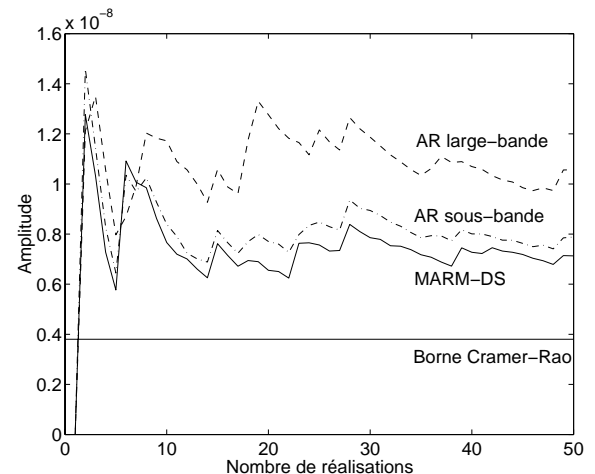


FIG. 4 – Variance en fonction du nombre de réalisations.

donnés par la méthode MARM-DS permet bien de réduire la variance.

Enfin, pour le critère de résolution fréquentielle sur le signal composé d'une somme de 2 fréquences pures, la figure 5 présente le résultat de l'analyse "large-bande" (ordre  $p_{full} = 16$ ).



Suivant les réalisations du signal, ce type d'analyse ne permet pas souvent de discriminer les 2 fréquences. La figure 6 fournit le résultat de l'analyse AR classique "sous-bandes". Le résultat est plus satisfaisant que l'analyse AR "large-bande", comme attendu [2]. La figure 7 met en évidence l'intérêt de la MARM-DS. Le banc de filtres utilisé est le même que dans la figure précédente, l'ordre du modèle également. Dans ce cas, les deux fréquences sont clairement résolues, pour toutes les réalisations du signal. Ceci s'explique par le fait que la MARM-DS sait utiliser toute l'information contenue dans les signaux issus des sous-bandes par l'utilisation des  $M$  sous-séries obtenues après décimation.

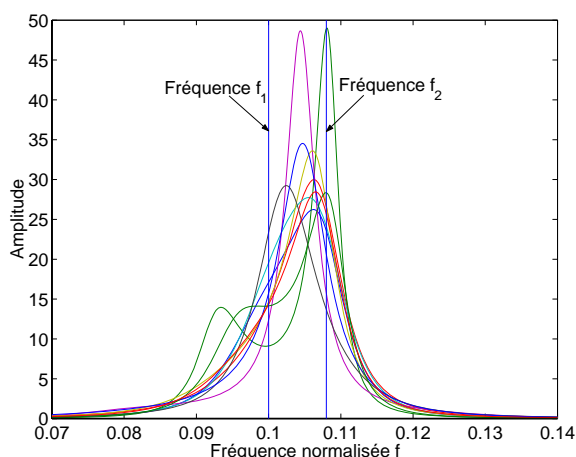


FIG. 5 – AR large-bande.

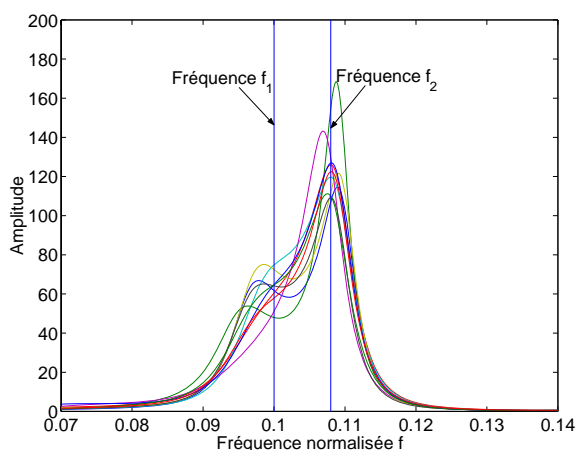


FIG. 6 – AR sous-bandes.

## 5 Conclusion

Cet article était destiné à étudier l'apport de la modélisation AR multi-dimensionnelle appliquée aux signaux de sous-bande en termes de résolution spectrale (résolution de pics très proches). Le gain observé par rapport à la modélisation AR classique s'explique en particulier par la capacité de la méthode proposée à exploiter toute l'information a priori dont on dispose par la connaissance de la fonction d'auto-corrélation du signal filtré  $v_j(n)$  sur une des branches du banc de filtres.

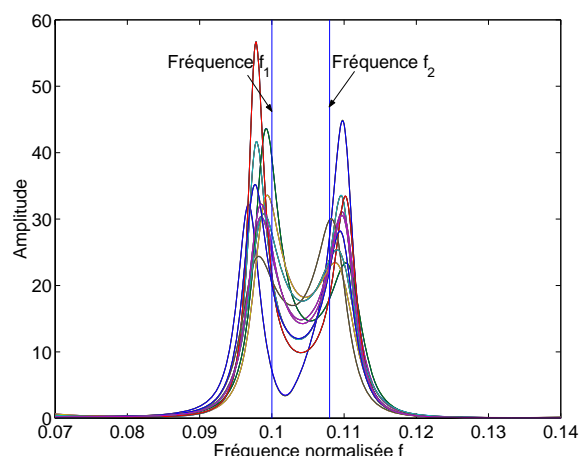


FIG. 7 – MARM-DS.

Une perspective intéressante serait d'utiliser un banc de filtres adaptatifs conçu pour minimiser la puissance d'erreur de prédiction linéaire multi-dimensionnelle des signaux de sous-bandes, sous la contrainte de respecter la condition d'anti-repliement.

## Références

- [1] S. Rao and W. A. Pearlman, "Analysis of linear prediction, coding and spectral estimation from subbands," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 42, no. 4, pp. 1160-1178, july 1996.
- [2] A. Tkacenko and P. P. Vaidyanathan, "Sinusoidal frequency estimation using filter banks," *Proc. IEEE ICASSP-01*, Salt Lake City, Utah, pp. 825-828, may 2001.
- [3] G. H. Golub and C. F. Van-Loan, *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 1989.
- [4] A. Tkacenko and P. P. Vaidyanathan, "The Role Of Filter Banks in Sinusoidal Frequency Estimation," *J. Franklin Inst.*, vol. 338, no. 5, pp. 517-547, aug. 2001.
- [5] D. Bonacci, P. Michel and C. Mailhes, "Subband decomposition and frequency warping for spectral estimation," *Proc. EUSIPCO-2002*, Toulouse, France, pp. 147-150, sep. 2002.
- [6] D. Bonacci, C. Mailhes and P. M. Djurić, "Improving frequency resolution for correlation-based spectral estimation methods using subband decomposition," *Proc. IEEE ICASSP-03*, no. 6, pp. 329-332, apr. 2003.
- [7] S. M. Kay, *Modern Spectral Estimation : Theory and Applications*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall, 1988.
- [8] R. A. Wiggins and E. A. Robinson, "Recursive solution to the multichannel filtering problem," *J. Geophys. Res.*, vol. 70, pp. 1885-1891, 1965.
- [9] M. Wax and T. Kailath, "Efficient inversion of doubly block Toeplitz matrix," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 8, pp. 170-173, apr. 1983.
- [10] M. Gharbi and N. Martin, "Filtrage Autoregressif Vectoriel," *Proc. GRETSI-1983*, Nice, France, vol. 2, pp. 971-976, may 1983.

# Vers une carte d'identité spectrale

N. MARTIN<sup>1</sup>, C. MAILHES<sup>2</sup>, K. SAHLI<sup>1</sup>, G. LEJEUNE<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LIS - Site Campus BP 46, 961 rue de la Houille Blanche, 38402 Saint Martin d'Hères Cedex, France,

<sup>2</sup> IRIT - TésA - ENSEEIHT, 2 rue Camichel, BP7122, 31071 Toulouse Cedex 7, France,

[Nadine.Martin@lis.inpg.fr](mailto:Nadine.Martin@lis.inpg.fr), [Corinne.Mailhes@n7.fr](mailto:Corinne.Mailhes@n7.fr), [Kheira.Sahli@lis.inpg.fr](mailto:Kheira.Sahli@lis.inpg.fr), [Gerard.Lejeune@lis.inpg.fr](mailto:Gerard.Lejeune@lis.inpg.fr)

**Résumé** – Ce papier présente une stratégie d'analyse permettant de détecter, caractériser et classier les différentes structures spectrales d'un processus stationnaire inconnu. Le terme « structures spectrales » englobe les fréquences pures, les motifs à bande étroite et les pics de bruit. La stratégie d'analyse spectrale est basée sur l'utilisation de plusieurs analyses spectrales successives et complémentaires. La méthode proposée permet ensuite d'élaborer une carte d'identité de chaque structure spectrale détectée. Cette carte d'identité provient de la fusion de cartes intermédiaires, obtenues après chacune des analyses spectrales successives. Cette fusion aboutit à la classification de chacune des structures spectrales détectées dans une des quatre classes suivantes : fréquence pure, motif bande étroite, alarme ou rejet.

**Abstract** – This paper studies a new spectral analysis strategy for detecting, characterizing and classifying the different “spectral structures” of an unknown stationary process. A “spectral structure” is defined as a sinusoidal wave, a narrow band signal or a noise peak. The spectral analysis strategy is based on the use of several successive and complementary spectral analyses. Then, the proposed methodology provides a way to calculate a “spectral identity card” of each spectral structure, similarly to a real I.D. card. This I.D. card including all information related to this structure results from the fusion of intermediate cards, which are obtained from different spectral analysis algorithms. The I.D. card permits the classification of the detected spectral structure into one of the following four classes: Pure Frequency, Narrow Band, Alarm and Reject.

## 1. Introduction

Cet article propose une stratégie d'analyse spectrale dans le but de détecter, caractériser et classier un ensemble de structures spectrales présentes dans le spectre d'un signal stationnaire totalement inconnu. Cet ensemble de structures spectrales recherchées est constitué d'ondes sinusoïdales, appelées fréquences pures (FP), de bandes étroites (BE) ou de pics de bruit (B). L'intérêt d'une telle analyse se retrouve dans de nombreuses applications, telles que dans les domaines vibratoires, acoustiques, sismiques ou radars, pour lesquels les signaux à analyser sont riches d'un point de vue du nombre et de la variété des composantes spectrales. Des stratégies d'analyse automatique de tels signaux ont été proposées récemment, toutes à base de transformée de Fourier (TF). Dans [1], les auteurs proposent de minimiser une fonction de coût après avoir ré-échantillonné le signal de manière adéquate et en utilisant une estimation préalable de la période recherchée. Cette méthode, intéressante par son coût de calcul et ses performances, est toutefois restreinte à l'analyse de signaux mono-modes. L'analyse de signaux à plusieurs composantes fréquentielles est abordée dans [2]. Les auteurs proposent de résoudre un système non-linéaire construit à partir des échantillons du spectre autour du pic spectral d'intérêt, calculés par la TF du signal fenêtré. Dans [3], une procédure automatique analyse le même signal avec deux résolutions différentes, un test statistique détecte les pics de signal des pics de bruit. L'idée d'utiliser les avantages de plusieurs méthodes d'analyse spectrale et de les combiner est aussi à la base de la stratégie présentée dans le présent papier. Pour analyser des signaux multi-composantes, constitués de FP et BE noyés dans un bruit coloré additif, nous proposons d'utiliser plusieurs analyses spectrales

successives à base de TF. Nous poursuivons ainsi les idées que nous avons déjà publiées dans [4], [5]. Cet article propose un nouveau test de détection qui tient compte de la statistique du bruit, une validation de la caractérisation des pics par des simulations de Monte Carlo et une étape finale de classification. La méthode proposée conduit à l'élaboration d'une « carte spectrale » de chaque motif du spectre, représentant une véritable carte d'identité, contenant toutes les informations relatives à ce motif. Cette carte est le résultat de la fusion de cartes obtenues par des analyses spectrales complémentaires. Cette stratégie fait l'objet d'un dépôt de brevet [6].

La méthode proposée se décompose en deux étapes :

1. *Analyse et interprétation* :  $L$  estimations spectrales complémentaires sont appliquées au signal. Pour chaque estimation et pour chaque pic détecté selon une statistique adaptée est créée une carte spectrale qui liste les caractéristiques de ce pic. Les cartes spectrales décrivant la même bande de fréquence mais issues d'un estimateur différent sont associées selon un critère de correspondance. La mise en correspondance de ces cartes forme une « suite ».
2. *Interprétation comparative et classification* : Nous proposons un critère de fusion des cartes au sein d'une suite dans le but d'en définir une seule, la carte d'identité spectrale du motif détecté. Une des caractéristiques de la carte finale d'identité conduit à un classement des structures détectées.

## 2. Analyse et interprétation

### 2.1 Analyse multi-PFA

A chaque estimation spectrale  $\hat{\gamma}_i(\nu)$ ,  $i=1$  à  $L$  et chaque fréquence  $\nu$ , un test de détection doit permettre de choisir entre les deux hypothèses suivantes :

$H_0: \gamma_i(\nu) = \gamma_b(\nu)$   $H_1: \gamma_i(\nu) = \gamma_b(\nu) + \gamma_s(\nu)$ ,  
où  $\gamma_b(\nu)$  est la Densité Spectrale de Puissance (DSP) continue d'un bruit gaussien stationnaire de moyenne nulle,  $\gamma_s(\nu)$  la DSP d'un signal réel déterministe de  $N$  points à puissance moyenne finie et non nécessairement continue.

La statistique de l'estimateur spectral  $\hat{\gamma}_i(\nu)$  sous les hypothèses  $H_0$  et  $H_1$  dépend bien évidemment de la méthode d'analyse spectrale utilisée. Toutefois, sous l'hypothèse  $H_0$ ,

$$\frac{r}{\gamma_b(\nu)} \hat{\gamma}_i(\nu) = \chi_r^2 \quad (1)$$

$r$  étant un degré de liberté équivalent défini à partir de la moyenne et de la variance de la DSP du bruit estimée  $\hat{\gamma}_b(\nu)$ :

$$r = 2 \frac{(E\{\hat{\gamma}_b(\nu)\})^2}{\text{Var}\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}} \quad (2)$$

Cette loi peut être vérifiée exactement dans le cas d'estimateurs simples comme l'estimateur Welch-WOSA [5] sans recouvrement des segments. Pour les autres estimateurs spectraux utilisés dans le cadre de cette stratégie d'analyse, cette hypothèse a été soit démontrée, soit validée par des simulations [5]. Ainsi, la statistique (1) ne dépend ni de la fréquence, ni de la DSP du bruit mais uniquement des paramètres de la méthode à travers le calcul de  $r$ . Notons que pour les méthodes d'analyse spectrale utilisées, l'expression théorique de  $r$  peut être établie au préalable. Toutefois, la mise en œuvre du test optimal de Neyman-Pearson nécessite la connaissance de la loi des observations sous  $H_0$  et sous  $H_1$ . Or, sous l'hypothèse  $H_1$ , aucune loi n'a pu être établie et validée pour l'ensemble des méthodes d'analyse spectrale utilisées, les estimateurs basés sur des périodogrammes moyennés avec recouvrement ou ceux basés sur des corrélogrammes ne suivent plus des lois du chi-deux décentrées sous l'hypothèse  $H_1$ .

C'est pourquoi nous avons choisi d'établir un test de détection sous-optimal basé sur (1), sachant que sa loi sous  $H_0$  est connue. Dans (1), la DSP du bruit intervient directement. Nous proposons de l'estimer grâce à une méthode originale, un filtre  $n$ -passes, filtre conçu après une comparaison de différents types de filtres, filtres médians, percentiles, tri-trou et morphologiques, filtres 2 passes [8]. Un filtre  $n$ -passes itère des étapes de détection avec des filtrages non-linéaires [5]. Ainsi, la DSP du bruit est estimée par filtrage de  $\hat{\gamma}_i(\nu)$  et sera notée  $\tilde{\gamma}_b(\nu)$ .

La loi de  $\tilde{\gamma}_b(\nu)$  est difficile à établir de manière exacte. Dans un premier temps, nous avons considéré que  $\tilde{\gamma}_b(\nu)$  est obtenu pour chaque fréquence  $\nu_i$  comme un moyennage particulier de  $2M+1$  valeurs de  $\hat{\gamma}_i(\nu)$  autour de la fréquence d'intérêt. Sous cette hypothèse, nous pouvons montrer que sous l'hypothèse  $H_0$ ,

$$\frac{r}{\gamma_b(\nu)} (2M+1) \tilde{\gamma}_b(\nu) = \chi_{r(2M+1)}^2 \quad (3)$$

Par conséquent, sous  $H_0$ , un test  $T$  défini comme le rapport des estimations de  $\gamma_i(\nu)$  sur  $\gamma_b(\nu)$  s'écrit :

$$T = \frac{\hat{\gamma}_i(\nu)}{\tilde{\gamma}_b(\nu)} = \frac{\chi_r^2 / r}{\chi_{r(2M+1)}^2 / [r(2M+1)]} \quad (4)$$

Ce test suit une loi du  $F(r, r(2M+1))$  [7]. Le test est ainsi établi sur la statistique  $T$ . Le choix d'une probabilité de fausse alarme ( $PFA$ ) permet de calculer le seuil  $\mu$  de la règle

du test. Si  $T \leq \mu$ , l'hypothèse  $H_0$  est acceptée tandis que si  $T > \mu$ , l'hypothèse  $H_1$  est acceptée.

Le paramètre  $M$  du filtre permettant l'estimation de la DSP du bruit doit être choisi en fonction de la fenêtre spectrale correspondant à la méthode d'analyse spectrale utilisée. Si  $B$  représente la largeur de cette fenêtre,  $M$  doit être tel que  $2M+1 > 2B$ . Toutefois, afin de bien suivre les évolutions du  $\gamma_b(\nu)$ , il est préférable de se limiter à  $2M+1 < 6B$ .

L'originalité de la méthode de détection ne réside pas en la statistique utilisée, approche relativement classique si ce n'est le filtrage non-linéaire proposé, mais surtout en la manière de l'utiliser. Le spectre estimé est décomposé en une *partition* de structures élémentaires, chaque structure représentant un « pic » potentiel du spectre. Le test de détection est appliqué à chaque fréquence correspondant au maximum du pic.

De plus, la probabilité de non détection n'étant pas calculable, plutôt que de choisir une seule  $PFA$  pour mener le test de détection, nous proposons un test « multi- $PFA$  ». Le test de détection est effectué pour plusieurs valeurs de  $PFA$  pour chaque fréquence d'intérêt. A chaque pic détecté noté  $\hat{\gamma}_{pic,i}(\nu)$  est associée la  $PFA$  la plus faible qui a permis de le détecter. Cette «  $PFA$  conjointe » fournit une indication sur le niveau de bruit local de ce pic.

## 2.2 Ajustement spectral et carte d'identité spectrale

Chaque pic  $\hat{\gamma}_{pic,i}(\nu)$  détecté est ensuite soumis à une procédure d'ajustement par rapport à un modèle de fréquence pure. Nous proposons une technique itérative d'ajustement spectral du pic avec la fenêtre spectrale  $\mathcal{Q}_{dec,i}(\nu)$  de l'estimateur de la DSP, fenêtre sur-échantillonnée et centrée sur chaque pic de façon à minimiser l'erreur quadratique normalisée définie par :

$$e(pic,i) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{(\hat{\gamma}_{pic,i}(\nu_k) - \mathcal{Q}_{dec,i}(\nu_k))^2}{\hat{\gamma}_{pic,i}(\nu_{k_{max}})^2} \quad (5)$$

avec  $k_{max} = \arg(\max \hat{\gamma}_{pic,i}(\nu_k))$ .

Les valeurs de  $k_1$  et  $k_2$  sont déterminées suivant que l'erreur est calculée sur tout le pic,  $e_{tot}(pic,i)$ , ou avec les points du pic au-dessus de la bande à -3 dB,  $e_{3dB}(pic,i)$ . Cette méthode est sous-optimale par rapport à un estimateur du maximum de vraisemblance mais avec un coût de calcul fortement réduit, ce qui est indispensable étant donné le nombre élevé de pics. Pour chaque  $\hat{\gamma}_{pic,i}(\nu)$  ajusté nous pouvons lister un ensemble de caractéristiques : la fréquence centrale ajustée du pic, l'amplitude temporelle (calculée à partir du maximum ajusté, de l'estimation de la variance du bruit et de la bande équivalente de la fenêtre spectrale), la variance estimée du bruit, le rapport signal à bruit local (RSB), le RSB émergent fonction de l'estimateur, un intervalle fréquentiel ou support du pic, les erreurs d'ajustement  $e_{tot}(pic,i)$  et  $e_{3dB}(pic,i)$ , la  $PFA$  conjointe.

Les deux erreurs seraient nulles pour une FP, avec une fréquence d'échantillonnage infinie et une estimation de la variance du bruit sans erreur. Ce n'est évidemment pas le cas en pratique. Afin d'évaluer des seuils sur ces erreurs en vue de classer les pics, nous avons réalisé des simulations de Monte Carlo à partir de 50 réalisations d'un bruit blanc ajouté d'une fréquence pure. Les phénomènes observés seraient localement identiques pour des signaux multicomposantes noyés dans un bruit coloré.

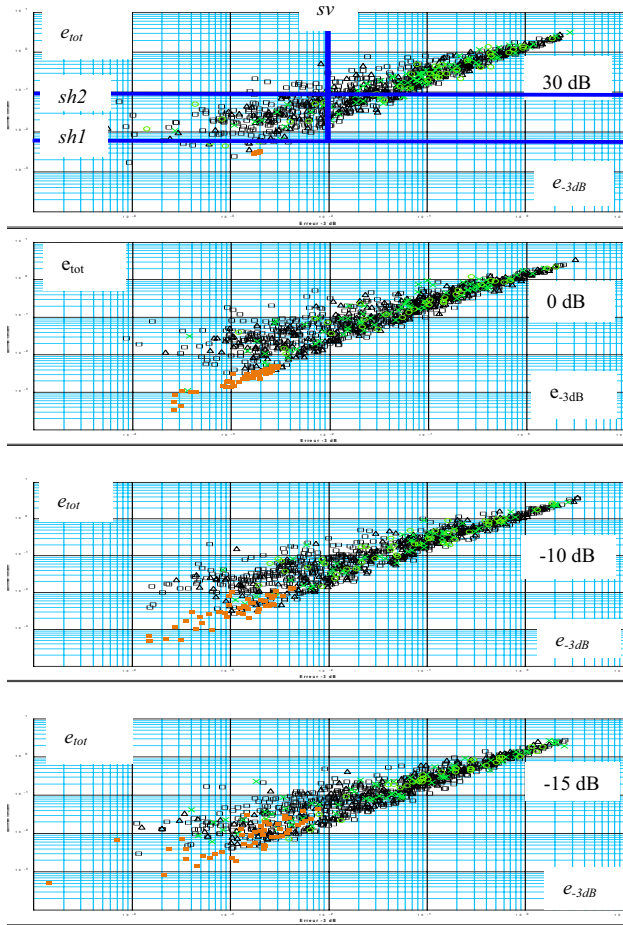


FIG. 1 : Simulations de Monte Carlo, 1 fréquence pure à 110 Hz, échantillonnée à 1000 Hz, bruit blanc additif, RSB égal à 30,0, -10 et -15 dB,  $N=10\,000$ , taille FFT= 32768, analyse Welch-WOSA, 1 segment, fenêtre de Blackman, filtre  $n$ -passes,  $PFA = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$ ; 50 réalisations de bruit. Code des couleurs : pics détectés à la fréquence pure (carrés orange), pics détectés à une autre fréquence (ronds jaunes-PFA 10-6), (croix vertes-PFA 10-5), (triangles noirs-PFA 10-4), (carrés évidés-PFA 10-3).

La figure 1 montre que l'erreur  $e_{tot}$  d'une FP est inférieure à un seuil  $sh1$  alors que celle d'un pic de bruit est supérieure à un seuil  $sh2$ . Pour ne pas surcharger les figures, les seuils ne sont indiqués que sur la première courbe. Entre ces deux seuils, nous avons délimité une zone de doute pour laquelle une erreur  $e_{3dB}$  faible, inférieure à un seuil  $sv$ , caractérise des FP avec une probabilité plus forte que pour une erreur  $e_{3dB}$  supérieure à ce seuil  $sv$ .

Les valeurs des seuils (Cf. tableau 1) sont fixées à partir de l'ensemble des simulations de Monte Carlo. Elles sont donc vraies pour les mêmes conditions d'analyse, en particulier le filtre  $n$ -passes utilisé pour l'estimation de la variance du bruit. L'utilisation d'un autre filtre nécessite un réajustement des seuils. Néanmoins, grâce à la zone de doute, la sensibilité du choix des seuils est minime. Il est important de noter qu'une FP est détectée avec une  $PFA$  faible même si le signal est bruité, ceci étant dû à la nature du test.

A chacune de ces zones, nous avons associé une distance notée  $d_{k1}$ ; Le deuxième indice égal à 1 indique un doute FP

par rapport à un pic de bruit. L'indice  $k$  est lié aux zones précédemment décrites. La valeur associée à cette distance est croissante avec le doute à partir d'une distance initiale  $d_{00} = 0$  caractérisant la présence d'une FP. Cette distance est en fait un degré d'appartenance à une classe. A ce point, nous avons défini 4 classes, une par zone délimitée dans l'espace (erreur  $e_{tot}$ , erreur  $e_{3dB}$ ).

TAB 1 : Valeurs des seuils sur les erreurs pour une variance de bruit estimé par un filtre  $n$ -passes,  $N > 1000$ , taille FFT  $> 2 \times N$

$sh1$	$sh2$	$sv$
$6.10^{-3}$	$10^{-1}$	$10^{-2}$

Lorsque le signal déterministe ajouté n'est pas une FP mais un signal BE, les erreurs  $e_{tot}$  et  $e_{3dB}$  sont par définition supérieures aux valeurs obtenues par un modèle FP. Ainsi, dans toutes les classes autres que celle du modèle FP, il y a un doute sur le fait que le signal soit FP et BE. Les signaux BE n'ont de sens que s'ils se distinguent du bruit donc si la  $PFA$  conjointe est plutôt faible. Ces pics se verront alors associés une valeur de distance  $d_{k2}$  telle que l'indice 2 indique un doute entre une FP et un signal BE et telle que la force du doute soit codée par la valeur  $k$ . Une valeur de  $k$  importante signifie un doute important et le pic a une probabilité forte d'être un BE.

Ainsi, chaque classe autre que la classe FP est divisée en deux sous-classes suivant la valeur de la  $PFA$  conjointe. Le récapitulatif des classes ainsi définies est représenté dans le tableau 2.

TAB. 2 : Calcul d'une distance  $d_{kl}$  fonction des caractéristiques  $PFA, e_{tot}(pic, i), e_{3dB}(pic, i)$  du pic.

$PFA > 10^{-5}$ Doute FP/B $l=1$	$PFA \leq 10^{-5}$ Doute FP/BE $l=2$	Erreurs décroissantes
$d_{41} = d_{31}$	$d_{42} = 4 \times d_{12}$	$e_{tot}(pic, i) > sh2$ $e_{3dB}(pic, i) > sv$
$d_{31} = 3 \times d_{11}$	$d_{32} = 3 \times d_{12}$	$e_{tot}(pic, i) > sh2$ $e_{3dB}(pic, i) \leq sv$
$d_{21} = 2 \times d_{11}$	$d_{22} = 2 \times d_{12}$	$sh1 \leq e_{tot}(pic, i) \leq sh2$ $e_{3dB}(pic, i) > sv$
$d_{11}$	$d_{12}$	$sh1 \leq e_{tot}(pic, i) \leq sh2$ $e_{3dB}(pic, i) \leq sv$
Classe FP quelle que soit la PFA $l=k=0$ $d_{00} = 0$		$e_{tot}(pic, i) \leq sh1$

Chaque pic  $\hat{\gamma}_{pic,i}(v)$  est muni d'une distance  $d_{pic,i}$  égale à l'une des distances  $d_{kl}$  suivant la valeur des erreurs d'ajustement  $e_{tot}(pic, i)$  et  $e_{3dB}(pic, i)$ , ainsi que de la  $PFA$  conjointe qui a permis la détection du pic. Cette distance  $d_{pic,i}$  est rajoutée à la liste des caractéristiques du pic défini au début de ce paragraphe. Cette liste constitue ce que nous avons appelé la carte d'identité spectrale du pic.

### 2.3 Mise en correspondance des cartes spectrales : création de suites

Les cartes spectrales sont établies pour chaque pic  $\hat{\gamma}_{pic,i}(v)$  et pour  $i=1$  à  $L$ . Un critère simple de correspondance entre deux cartes est défini par  $I(C_iPk) \cap I(C_jPk) \neq \emptyset$ ,  $I(C_iPk)$  étant le support en fréquence du pic  $k$  au cycle  $i$ , complété de critères lorsque les pics ne sont pas détectés par tous les estimateurs. Les cartes mises en correspondance correspondent à un ensemble que nous avons appelé



« suite ». L'ensemble des cartes d'une suite décrit la même structure spectrale.

### 3. Interprétation comparative et classification

Dans chaque suite, les cartes spectrales sont fusionnées suivant une procédure que nous proposons. Si la suite présente plus d'un doute (indice  $l$  de  $d_{pic,i}$  non constant sur la suite) ou si des alarmes (sur la PFA ou le niveau de bruit) ont été levées, le pic est classé dans la classe « Alarme », reflet d'une mauvaise estimation de la ligne de fond. Ensuite, pour chaque suite sont calculées une distance moyenne  $d_{pic}$  et un écart-type  $\sigma_{pic}$ ,

$$d_{pic} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L d_{pic,i} \quad \sigma_{pic} = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L d_{pic,i}^2 - d_{pic}^2}, \quad (6)$$

un indice de stabilité  $St_{pic}$ ,

$$St_{pic} = 100(1 - \sigma_{pic}/2), \quad (7)$$

Cet indice, valeur en pourcentage, a été calculé en tenant compte des variations extrêmes possibles dans une suite, ce calcul est possible étant donné la discrétisation des distances  $d_{pic,i}$ . Il est le reflet de la stabilité des différents estimateurs de la suite. Les valeurs des PFA conjointes de la suite permettent d'affecter un niveau symbolique de RSB local.

Une distance finale ou fusionnée,  $d_{pic,f}$ , évaluée par

$$d_{pic,f} = \min_{k,l} |d_{pic}, d_{kl}|, \quad (8)$$

caractérise la structure spectrale associée à la suite toujours en fonction du tableau 2. L'indice  $St_{pic}$  associé est un indicateur précieux à associer à cette décision. Un pourcentage de 100% indique une conclusion identique dans toutes les cartes de la suite, soit pour tous les estimateurs. A l'inverse, un pourcentage faible indique une variabilité importante entre les estimateurs. En définitive, pour chaque suite, une carte finale d'identité spectrale du pic détecté contient les caractéristiques fusionnées précédemment décrites.

Finalement, la classification consiste à regrouper les cartes finales contenant la même distance  $d_{pic,f}$ . Nous proposons la stratégie suivante :

- Classe FP = cartes finales /  $d_{pic,f} = d_{00}$  ;
- Classe BE = cartes finales /  $d_{pic,f} \in \{d_{12}, d_{22}, d_{32}, d_{42}\}$  ;
- Classe Rejet = cartes finales /  $d_{pic,f} \in \{d_{11}, d_{21}, d_{31}, d_{41}\}$  ;
- Classe Alarmes.

D'autres stratégies plus fines peuvent être envisagées en tenant compte de l'indice de stabilité, des RSB locaux ou des PFA conjointes de détection.

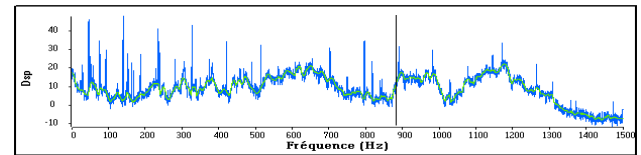
### 4. Applications sur signaux réels

La procédure proposée a été conçue et validée à partir d'une base de 130 signaux réels, signaux vibratoires et acoustiques fournis par EDF et la DGA. La figure 2 illustre le calcul des distances pour les pics détectés sur un zoom fréquentiel d'un signal vibratoire réel de 10 000 points échantillonné à 3000 Hz.

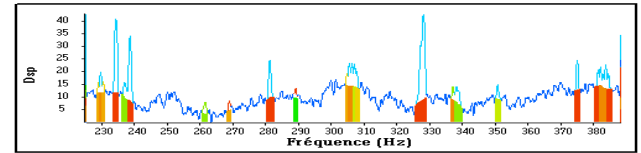
### 5. Conclusion

La stratégie d'analyse spectrale présentée dans cet article conduit à un procédé automatique, sans aucun choix de paramètres, qui ne nécessite aucune information *a priori* sur le contenu spectral du signal. Le bruit est additif, non blanc et de variance inconnue. L'exploitation des propriétés des

estimateurs spectraux permet une identification rigoureuse et précise des motifs spectraux. L'approche actuelle permet d'extraire et de caractériser les fréquences pures et les structures BE présentes dans un signal d'au moins 1000 points, le modèle de référence étant la fenêtre spectrale des estimateurs spectraux. Des travaux sont en cours dans le but de proposer un test qui tiendrait compte d'une loi du spectre estimé du bruit plus adapté au filtrage non-linéaire utilisé. Il serait plus juste de définir des seuils complexes dans l'espace des erreurs pic-fenêtre spectrale afin de mieux définir les classes sous-jacentes. Finalement, une extension intéressante consisterait à étudier les variations de ces erreurs par rapport à des modèles de BE, les deux sous-classes d'intérêt étant les BE de type aléatoire et ceux de type déterministe.



DSP (courbe bleue) estimée par l'estimateur Welch-WOSA, 1 segment, fenêtre de Blackman, taille FFT = 131 072  
DSP (courbe verte) estimée par filtrage n-passes de la DSP du signal avec  $2M+1=65$



Zoom fréquentiel avec indication de la PFA conjointe (couleur supérieure des pics) et de la distance  $d_{kl}$  (couleur inférieure des pics) pour chaque pic détecté

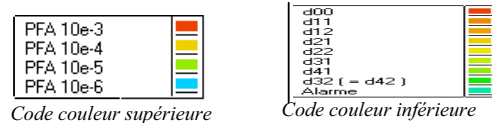


FIG. 2: Interprétation de la DSP d'un signal vibratoire réel pour un estimateur spectral.

### Références

- [1] J.Schoukens, Y.Rolain, G.Simon, R.Pintelon, *Fully automated spectral analysis of periodic signals*, IEEE Tr. Ins. Meas., vol 52, n°4, August 2003, pp.1021-1024.
- [2] L-M.Zhu, H-X. Li, H.Ding, *Estimation of multi-frequency signal parameters by frequency domain non-linear least squares*, Mech. Syst. and Sig. Proc., Elsevier Ed., vol 19, 2005, pp. 955-973.
- [3] D.Rabijns, G.Vandersteen, W.Van Moer, *An automatic detection scheme for periodic signals based on spectrum analyzer measurements*, IEEE Trans Instr. Measur., vol 53, n°3, June 2004, pp. 847-853.
- [4] M.Durnerin et al., *Démarche d'analyse spectrale en vue d'une interprétation automatique, application à un signal d'engrenages*, GRETSI 1997, 15-19 septembre 1997, Grenoble, France, pp. 539-542
- [5] M.Durnerin, *Une stratégie pour l'interprétation en analyse spectrale – détection et caractérisation des composantes d'un spectre*, thèse INPG, Septembre 1999, téléchargeable [www.lis.inpg.fr](http://www.lis.inpg.fr)
- [6] N.Martin, G.Lejeune, M.Durnerin, C.Mailhes, *Procédé d'identification automatique de composantes spectrales d'un signal*, déposé le 12 novembre 2004, n° 04/52613.
- [7] N.L.Johnson, S.Kotz, N.Balakrishnan, *Continuous univariate distributions*, vol 1 (1994) et 2 (1995), Wiley Interscience.
- [8] W. A. Struzinski, E. D. Lowe, *A performance comparison of four noise background normalization schemes proposed for signal detection systems*. Journal Acoust. Soc. Am., no. 78, p. 936-941 - September 1985.

# Représentations temps-fréquence adaptées aux ondes guidées

Grégoire LE TOUZÉ<sup>1</sup>, Barbara NICOLAS<sup>1</sup>, Jérôme. I. MARS<sup>1</sup>, Jean-Louis LACOUME<sup>1</sup>, Dominique FATTACCIOLI<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire des Images et des Signaux  
INPG/ENSIEG, Grenoble, France

<sup>2</sup>Centre Technique des Systèmes Navals  
Toulon, France  
gregoire.letouze@lis.inpg.fr

**Résumé** – Cette étude élabore des représentations temps-fréquence tenant compte de modèles de propagation dans le cadre de l'acoustique sous-marine, elles sont testées sur des données réelles pour deux types classiques de guides d'onde.

**Abstract** – This study offer a time-frequency representation construction based on physical model of propagation on underwater environment. Representations are built and test on real dataset for two classical waveguide model.

## 1 Introduction

Les progrès récents en représentation temps-fréquence reposent sur la mise au point de méthodes adaptées aux signaux traités. Nous développons ici une méthodologie originale dans laquelle la RTF est supervisée par les connaissances *a priori* issues de la physique de propagation en Acoustique Sous-Marine (ASM). Nous présentons d'abord la méthodologie générale des RTF adaptées applicables aux signaux propagés dans un guide d'ondes. Nous construisons ensuite des RTF adaptées au guide parfait (guide sans perte) et au guide de Pekeris [1] qui décrivent tous deux la propagation des ondes d'Ultra Basse Fréquence en ASM. Nous exposons enfin des exemples de traitements sur des signaux réels.

## 2 Contexte et objectif

En ASM, on modélise généralement le milieu océanique petits fonds par un guide d'ondes. Dans ce guide, à partir d'une distance suffisamment grande, les signaux de pression (issus d'une source impulsionnelle) se décomposent en modes. Ces modes sont le fruit d'une propagation dispersive dans le guide. Les paramètres géoacoustiques du guide (nombre de couches, profondeurs des couches, vitesses de propagation, densités) associés à la théorie des modes établissent une relation entre la vitesse de groupe des ondes et la fréquence pour chaque mode entier  $m$ . Si, par ailleurs, la distance source-capteur  $R$  est connue, on peut déduire la répartition de l'énergie par mode dans le plan temps-fréquence. Cette énergie suit pour chaque mode une courbe  $\nu_m = u_m(\tau)$  reliant la fréquence  $\nu$  au retard de groupe  $\tau$  et d'équation connue.

L'objectif de notre démarche est de construire des RTF adaptées aux signaux propagés dans un guide d'ondes en tenant compte des courbes théoriques connues *a priori*.

Ces RTF permettront une localisation plus précise de l'énergie de chacun des modes. Les deux objectifs qu'elles doivent remplir sont donc :

- La séparation des différents modes dans le plan temps-fréquence
- La conservation de l'énergie motivée par le fait que nous voulons pour certaines applications (comme l'estimation de la profondeur d'une source [3]) pouvoir comparer les énergies des différents modes entre elles.

## 3 Le problème temps-fréquence

Toute RTF est soumise à l'incertitude temps-fréquence (inégalité d'Heisenberg-Gabor) qui empêche une localisation précise des motifs à la fois en temps et en fréquence (d'où la nécessité d'un compromis temps-fréquence). Cette limitation provoque un étalement inévitable des motifs spectraux dans le temps autour des courbes théoriques. Les motifs spectraux-temporels des différentes courbes se chevauchent, y compris avec des méthodes qui tentent de contourner l'incertitude temps-fréquence comme la méthode adaptative de Lagunas [8]. Seules les méthodes super-résolutives telle la méthode auto-régressive fournissent une résolution suffisante mais elles ne conservent pas l'énergie.

## 4 Méthodologie générale

Nous présentons ici une méthodologie et les conditions auxquelles doivent répondre les modèles de guides pour permettre la construction de RTF adaptée à la propagation. Nous partons de la relation de dispersion qui unie pour un mode le temps et la fréquence :  $\nu_m = u_m(\tau)$ . Quelle que soit la configuration du guide (plusieurs couches, gradient de vitesse...), cette relation peut être établie (même si c'est numériquement [9]) à condition de connaître les paramètres de la propagation (nombre de couches, hauteurs,

vitesse et distance source-capteur).

#### 4.1 Principes de la construction

Nous appliquons ici une méthodologie de construction de RTF dite "atomique", consistant à projeter le signal sur un dictionnaire d'atomes pavant le plan temps-fréquence.

Comme dans toute représentation de cette nature (la transformée de Fourier à court terme d'où est issu le spectrogramme en est un exemple) les atomes sont construits à partir d'une fenêtre  $h(t)$  gaussienne (pour optimiser l'incertitude temps-fréquence) par translation autour du temps  $\tau$ , par modulation fréquentielle suivant  $\xi(t)$  et éventuellement pondération afin que la représentation conserve l'énergie (comme nous le verrons par la suite). Les atomes obéissent donc à l'équation générale suivante :

$$h_{\tau,\xi}(t) = h_{\tau}(t)e^{j\xi(t)} \quad (1)$$

avec  $\tau \in D_f$  et  $\nu \in \mathbb{R}$  car la physique de propagation nous renseigne sur le fait que le signal est limité dans le temps par le temps d'arrivée et le temps de coupure. Si il n'existe pas de pondération (comme dans le spectrogramme où les atomes sont uniformes), on a  $h_{\tau}(t) = h(t - \tau)$ .

L'originalité qui fait intervenir la physique de propagation consiste à projeter le signal sur les courbes théoriques des modes qui obéissent à l'équation  $\nu_m = u_m(\tau)$ . Pour ce faire, et afin de s'adapter au mieux au signal, on le projette sur des atomes possédant la phase instantanée  $\phi_m(t)$  des modes théoriques.

La fréquence instantanée est la dérivée de la phase instantanée, on retrouve donc la phase  $\phi_m(t) = 2\pi \int \nu_m dt$ . La projection sur des atomes de modulation  $\xi(t) = \phi_m(t)$  donne :

$$\Psi_h(\tau, m) = \int x(t)h_{\tau}(t)\exp(j\phi_m(t)) dt \quad (2)$$

Nous aimerions alors passer d'une représentation dans le plan temps-mode à une représentation dans le plan temps-fréquence. La version temps-fréquence de l'équation 2 s'obtient en effectuant la substitution issue de l'inversion de la relation de dispersion :  $m' = v(\nu, \tau)$ . On obtient finalement :

$$TFR_h(\tau, \nu) = |\Psi_h(\tau, m)|_{m=m'}^2 \quad (3)$$

On peut voir cette technique comme la projection du signal sur les courbes de dispersion des modes. La relation  $m' = v(\nu, \tau)$  permet de passer des courbes théoriques (pour  $m$  entier) à tout l'espace temps-fréquence ( $m$  plus nécessairement entier). L'originalité de cette méthode peut se voir dans la forme du pavage du plan temps-fréquence par les atomes. En effet, les atomes de projection diffèrent d'un lieu à un autre dans le plan temps-fréquence (ce qui n'est pas le cas pour la transformée de Fourier à court terme : les atomes pavent alors de manière uniforme le plan temps-fréquence). Des exemples de pavages sont schématisés figure 1.

#### 4.2 Conditions à remplir

Afin de permettre la construction des RTF adaptées telle que nous l'avons définie, les modèles théoriques des

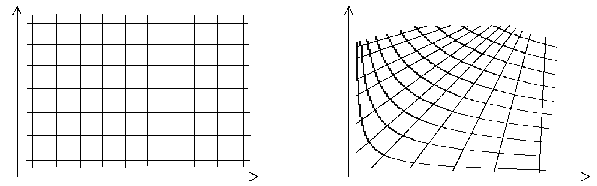


FIG. 1 – Pavage du plan temps-fréquence par les atomes de projection pour la transformée de Fourier à court terme & pour une méthode adaptée

guides doivent respecter certaines conditions.

Si l'on se place dans les domaines de définition temporel et fréquentiel significative du signal (c'est-à-dire les domaines dans lesquels l'énergie du signal est utile), les tracés des courbes théoriques qui déterminent la projection du signal doivent remplir les conditions suivantes :

- Existence de la relation  $m = v(\nu, \tau)$  signifiant qu'à chaque point utile du plan temps-fréquence, correspond une courbe de projection.
- Univocité de la relation  $m = v(\nu, \tau)$ . En effet, à un point de la relation temps-fréquence ne doit correspondre qu'une courbe de projection. Dans le cas contraire le dictionnaire d'atomes donnerait lieu à plusieurs pavages superposés du plan temps-fréquence et cela signifierait que les courbes de modes sont susceptibles de se croiser dans le plan temps-fréquence pour 2 valeurs entières de  $m$ .

Enfin, pour conserver l'énergie, les atomes doivent constituer une base (et non une "frame") et donc remplir la condition de fermeture définie dans [5] :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{D_f} h_{\tau,\nu}(t)h_{\tau,\nu}^*(t') d\tau d\nu = \delta(t - t') \quad (4)$$

Cette relation doit être valable sur les ensembles de définition spectro-temporels du signal. L'application de cette condition entraîne la formation d'une base redondante -  $\{h_{\tau,\nu}(t); \tau \in D_f \text{ et } \nu \in \mathbb{R}\}$  ainsi qu'une redéfinition de la fenêtre de projection de base  $h_{\tau}(t)$  qui n'est plus nécessairement une version translatée de la fenêtre de base  $h(t)$ .

### 5 RTF adaptée au modèle parfait

Une méthode suivant cette méthodologie a été exposée dans [4] pour le guide parfait (guide le plus simple à deux couches et réflexion parfaite). Dans ce guide, la relation  $\nu_m = u_m(\tau)$  est pour le  $m^{ième}$  mode [2] :

$$\nu_m = \frac{(2m-1)C_1^2 \tau}{4D\sqrt{(C_1\tau)^2 - R^2}} \quad (5)$$

où  $C_1$  est la vitesse de propagation dans l'eau,  $C_2$  la vitesse de propagation dans la couche sédimentaire,  $D$  la profondeur du guide et  $R$  la distance source-récepteur. On a par ailleurs le domaine de définition temporel :  $D_f = \left[ \frac{R}{C_1}, \frac{RC_2}{C_1^2} \right]$ .

Aucune précision n'est donnée dans [4] quant à la conservation de l'énergie du signal. Nous avons donc dans un premier temps rendu cette représentation énergétique.



## 6 RTF adaptée au modèle de Pekeris simplifié

Le modèle de guide parfait est un modèle très approximatif. Nous voulons donc, en partant des mêmes principes créer une représentation adaptée au modèle de guide d'ondes de Pekeris. C'est un modèle à 2 couches qui tient donc compte du coefficient de réflexion (qui entraîne le déphasage  $\Phi(\tau)$ ) variable selon l'angle d'incidence. Il s'avère être beaucoup plus réaliste que le modèle parfait. Dans ce modèle, l'équation de dispersion des modes  $\nu_m = u_m(\tau)$  reliant la fréquence au temps n'a pas de solution analytique. Nous avons obtenu une approximation analytique de cette relation donnant un modèle de Pekeris approché. On peut ainsi construire la RTF adaptée au guide de Pekeris et établir la condition de fermeture pour rendre la famille d'atomes de projection admissible et ainsi aboutir à une RTF énergétique.

## 7 Applications et Résultats

Nous appliquons ces deux RTF sur un cas concret issu d'une campagne de mesures en Mer du Nord pour lequel la distance source-capteur  $R = 3500m$  est relativement faible. Les courbes théoriques des 7 premiers modes sont présentées figure 2. Le spectrogramme [6] de la trace marine est montré figure 3, son spectrogramme réalloué [7] figure 4, sa représentation de Lagunas [8] figure 5, la version quadratique de sa représentation adaptée au modèle parfait figure 6, et celle adaptée au modèle de Pekeris figure 7. On peut voir les bénéfices qui peuvent être apportés par ce type de représentations vis-à-vis des méthodes classiques (spectrogramme, spectrogramme réalloué et méthode de Lagunas). Pour ces dernières en effet, le compromis temps-fréquence ne permet pas de distinguer les modes les uns des autres, seules les méthodes adaptées y parviennent. Les modes pourront ainsi être comparés et étudiés. On constate par ailleurs que la localisation est légèrement plus précise dans le cas de Pekeris que dans le cas parfait (moins d'interférences entre modes).

Nous présentons un autre exemple provenant d'une campagne dans le Golfe du Lion pour lequel  $R = 14000m$ . Dans ce cas, du fait d'une plus grande distance  $R$ , on apprécie mieux les bénéfices qui peuvent être tirés de l'adaptation au modèle de Pekeris vis-à-vis du modèle parfait (figure 8 et 9). On mesure ainsi l'intérêt que l'on a de choisir le modèle le mieux adapté.

## 8 Conclusion

Dans cette étude, nous proposons une méthodologie générale permettant de construire des RTF quel que soit le modèle sous certaines conditions. Nous appliquons cette méthodologie à deux modèles de propagation classiques en ASM que nous testons sur des données réelles pour en montrer les bénéfices.

Dans un contexte de traitement du signal, on peut voir

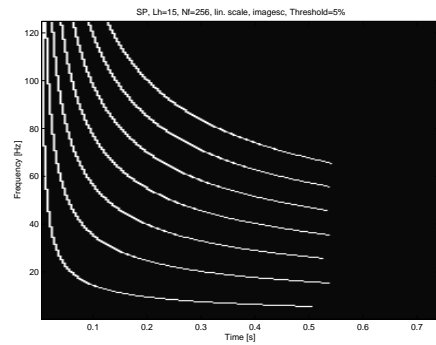


FIG. 2 – Tracé théorique des courbes de modes de la trace marine pour R=3500m (Mer du Nord)

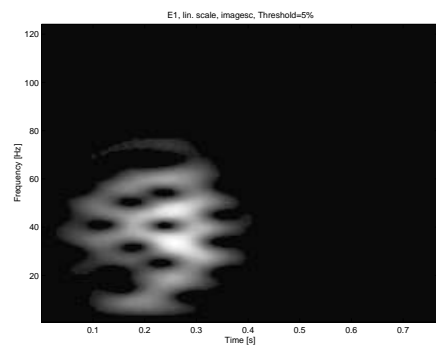


FIG. 3 – Spectrogramme pour R=3500m (Mer du Nord)

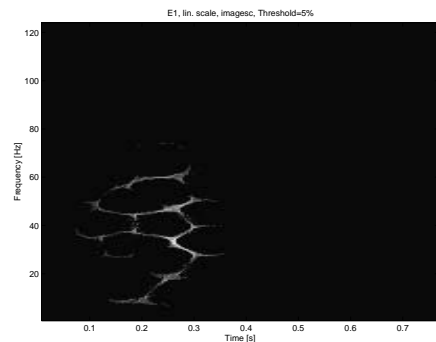


FIG. 4 – Spectrogramme réalloué pour R=3500m (Mer du Nord)

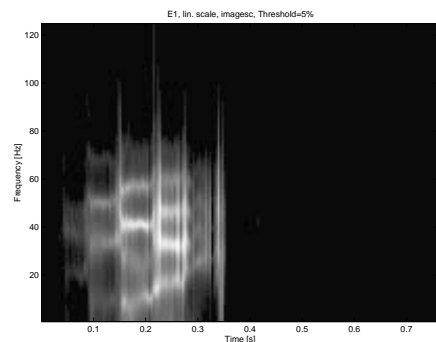


FIG. 5 – Représentation de Lagunas pour R=3500m (Mer du Nord)

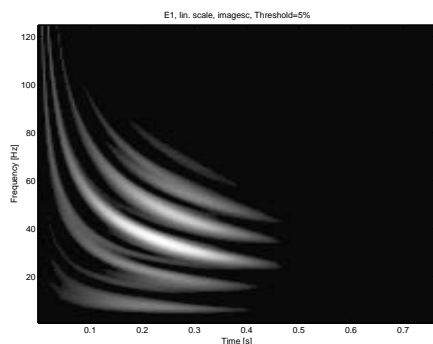


FIG. 6 – Version quadratique de la représentation adaptée au modèle parfait pour  $R=3500\text{m}$  (Mer du Nord)

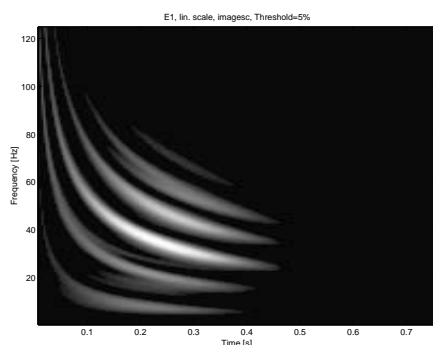


FIG. 7 – Version quadratique de la représentation adaptée au modèle de Pekeris pour  $R=3500\text{m}$  (Mer du Nord)

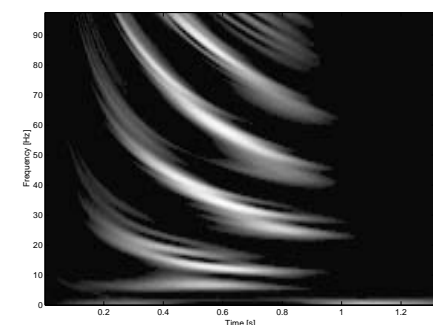


FIG. 8 – Version quadratique de la représentation adaptée au modèle parfait pour  $R=14000\text{m}$  (Golfe du Lion)

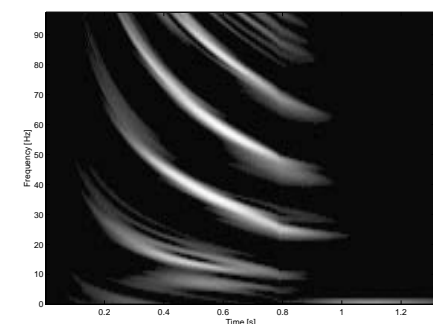


FIG. 9 – Version quadratique de la représentation adaptée au modèle de Pekeris pour  $R=14000\text{m}$  (Golfe du Lion)

les RTF construites et la méthodologie de construction comme se basant sur le principe de l'algorithme de Matching Pursuit développé par S. Mallat *et al.* [10]. Cet algorithme trouve, par itérations successives, la meilleure base pour la décomposition d'un signal. Le dictionnaire des atomes est complet lorsque la famille d'atomes couvre tout l'espace dont est issu le signal, il constitue alors la base la plus petite du signal. Dans notre cas, nous appliquons la philosophie de cet algorithme, à savoir projeter le signal sur des atomes temps-fréquence qui lui correspondent le mieux, la correspondance se faisant ici à partir de connaissances *a priori* et non de manière adaptative. Il en découle que l'incertitude temps-fréquence est canalisée grâce au fait que les atomes suivent les courbes théoriques.

Nous avons finalement testé ces méthodes sur des signaux réels et montré le bénéfice qu'elles apportent vis-à-vis des méthodes classiques. Cette approche permet de combiner la physique de propagation avec le traitement du signal.

## Références

- [1] C.L. Pekeris. Theory of propagation of explosive sound in shallow water. In *Geol.Soc.Am.Mem*, 1947.
- [2] L. Tolstoy and C.S. Clay *Ocean Acoustics : Theory and Experiment in Underwater Sound*. American Institute of Physics, 1987.
- [3] B. Nicolas J-L. Lacoume and J Mars Champs d'ondes adaptés en fréquences spatiales et temporelles : application en ASM In *19ème colloque du GRETSI*, Paris, 2003.
- [4] G. Faye Bourdeaux-Bartels C-S Chen and J.H. Miller. Time-frequency representations for wideband acoustic signals in shallow water. In *Oceans 2003*
- [5] P. Flandrin. *Temps-fréquence*. HERMES, 1993.
- [6] J.B. Allen and L.R. Rabiner A unified approach to Short Time Fourier Analysis and Synthesis *Proc. IEEE*, 65(11) :1558–1564, 1977.
- [7] F. Auger and P. Flandrin Improving the readability of Time-Frequency Time-Scale Representation by the Reassignment method *IEEE Transaction on Signal Processing*, 43(5) :1068–1089, 1995.
- [8] M.A. Lagunas M.E. Santamaria A. Gasull and A. Moreno Maximum likelihood filters in spectral estimation problems *Signal Processing*, 10 :19–34, 1986.
- [9] D.M.F. Chapman and D.D. Ellis The group velocity of normal modes. *J.Acoust.Soc.Am.*, 74(3) :973–979, 1983.
- [10] Zhifeng Zhang Stéphane Mallat. Matching pursuit with time-frequency dictionaries. *Technical report, Courant Institute of Mathematical Sciences, Computer Science Department, New York University* 1993.

# Choix d'une covariance pour la prédiction par krigeage de séries chronologiques échantillonnées irrégulièrement

Emmanuel VAZQUEZ<sup>1</sup>, Éric WALTER<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Dpt. Signaux et Systèmes Électroniques  
Supélec,  
91192 Gif-sur-Yvette, France

<sup>2</sup>Laboratoire des Signaux et Systèmes  
UMR CNRS – Supélec – Univ. Paris-Sud  
91192 Gif-sur-Yvette, France

emmanuel.vazquez@supelec.fr, eric.walter@lss.supelec.fr

**Résumé** – Les processus aléatoires gaussiens à temps continu permettent de modéliser des séries chronologiques échantillonnées irrégulièrement. La prédiction des valeurs futures est un problème d'extrapolation par krigeage. Nous nous intéressons ici au choix de la covariance. Nous utilisons des combinaisons linéaires positives de covariances élémentaires pour améliorer la modélisation et les performances de prédiction des séries chronologiques échantillonnées irrégulièrement. Covariances sous forme de combinaisons linéaires positives de cosinus. Estimation des paramètres par méthodes REML et MAP.

**Abstract** – Continuous-time Gaussian processes make it possible to model irregularly sampled time series. The prediction of future values is a problem of extrapolation, which can in this context be addressed with the tools of Kriging. The issue considered here is the choice of the covariance to be used by the Kriging predictor. Positive linear combinations of elementary covariances are employed in order to improve modelling and predictive performance in complex cases where a simple classical covariance is not enough. The parameters of the resulting complex covariance are estimated by REML (restricted maximum likelihood) or MAP estimation. The procedure is applied to the well known lynx series, with very good results.

## 1 Introduction

Dans cet article, nous explorons le problème de la prédiction de séries chronologiques échantillonnées irrégulièrement en utilisant la méthode de prédiction appelée krigeage [2, 4, 5]. Nous traitons une série temporelle comme des observations échantillonnées d'une réalisation d'un processus gaussien à *temps continu*, ce qui permet de traiter indifféremment des échantillons observés régulièrement ou non. Les principes du krigeage sont brièvement rappelés dans la section 2. Afin d'effectuer une prédiction pertinente, il est nécessaire de choisir une covariance appropriée pour le processus aléatoire modélisant la série temporelle. Notre contribution consiste à proposer des covariances construites en assemblant un grand nombre de covariances élémentaires afin de décrire les caractéristiques des séries temporelles (section 3), ainsi qu'une méthode de type maximum a posteriori pour estimer les paramètres de ces covariances (section 4). La méthode sera appliquée dans la section 5 à un exemple typique du domaine des séries temporelles.

## 2 Prédiction par krigeage

### 2.1 Prédiction linéaire

Les principes de la prédiction linéaire de processus aléatoires (ou krigeage) sont très sommairement présentés dans cette section. Notons que ce type de prédiction peut être vue comme

une régression régularisée [8]. Une série temporelle (supposée déterministe) est modélisée par un processus aléatoire stationnaire du second ordre noté  $X(t)$ , où  $t \in \mathbb{R}$  est le paramètre temps, de moyenne inconnue et de covariance (à choisir)

$$k(h) = \text{Cov}(X(t), X(t+h)), \quad t, h \in \mathbb{R}.$$

La série observée correspond donc à une réalisation  $\mathbf{x}^{\text{obs}} \in \mathbb{R}^n$  du vecteur aléatoire  $(X(t_1), \dots, X(t_n))^T$ . Si en outre les observations sont corrompues par un bruit de mesure additif, ce bruit est modélisé par des variables aléatoires indépendantes  $N_i$ . Pour simplifier la présentation, nous supposons ici le bruit négligeable.

Supposons dans un premier temps la moyenne de  $X(t)$  connue. La méthode la plus simple pour prédire  $X(t)$  est de calculer la meilleure projection linéaire  $\hat{X}(t)$  de  $X(t)$  sur l'espace  $\mathcal{H}_S$  généré par les variables aléatoires observées  $X(t_i)$ . Ceci correspond à la formulation du krigeage, et signifie que l'on cherche un prédicteur linéaire  $\hat{X}(t) = \sum_i \hat{\lambda}_{i,t} X(t_i)$  tel que

$$\text{Var}(\hat{X}(t) - X(t)) = \|\hat{X}(t) - X(t)\|^2$$

soit minimum ou, de manière équivalente puisque la meilleure prédiction linéaire est la projection orthogonale sur  $\mathcal{H}_S$ , tel que

$$\begin{aligned} (\hat{X}(t) - X(t), X(t_i)) &= \text{Cov}[\hat{X}(t) - X(t), X(t_i)] \\ &= 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (1)$$

En remplaçant  $\hat{X}(t)$  par son expression en fonction des  $X(t_i)$ , on vérifie que le vecteur  $\hat{\lambda}_t = (\hat{\lambda}_{1,t}, \dots, \hat{\lambda}_{n,t})^T$  est solution du

système linéaire

$$\mathbf{K}\hat{\lambda}_t = \mathbf{k}_t, \quad (2)$$

où  $\mathbf{K}$  est la matrice des covariances  $k(t_i - t_j)$  et  $\mathbf{k}_t$  est le vecteur des covariances  $k(t - t_i)$ . La matrice  $\mathbf{K}$  est de rang plein lorsque la covariance est définie positive et que les observations ne sont pas répétées. Notons que le prédicteur obtenu est sans biais, puisque la moyenne de  $X(t)$  est connue.

## 2.2 Krigeage intrinsèque

Supposons maintenant que  $E[X(t)] = b$ , avec  $b \in \mathbb{R}$  inconnu. On remarque que les combinaisons linéaires telles que  $\sum_i \lambda_i X(t_i)$  avec  $\sum_i \lambda_i = 0$  filtrent la moyenne inconnue de  $X(t)$  dans le sens où  $E[\sum_i \lambda_i X(t_i)] = 0$ . L'idée est donc de se ramener au cas à moyenne nulle en utilisant de tels accroissements. On considère plus généralement des accroissements d'ordre  $l$  de  $X(t)$  définis par les variables aléatoires

$$X(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i X(t_i) \quad (3)$$

telles que pour tout  $r \in \{0, \dots, l\}$ ,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i t_i^r = 0. \quad (4)$$

Cette dernière propriété peut être vue comme l'orthogonalité de la mesure à support fini  $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{t_i}$  avec les monômes  $t^r$  ( $\delta_t$  désigne la mesure de Dirac telle que pour tout  $B \subset \mathbb{R}$ ,  $\delta_t(B)$  est égal à un si  $t \in B$  et zéro sinon). Soit  $\tilde{\Lambda}_l$  l'ensemble des mesures à support fini vérifiant la relation (4). Les éléments de  $\tilde{\Lambda}_l$  filtrent toute moyenne polynomiale de  $X(t)$  (d'ordre inférieur ou égal à  $l$ ).

Une covariance généralisée [5] notée  $k(t, s)$  permet de calculer la covariance de  $X(\lambda)$  et  $X(\mu)$ ,  $\lambda, \mu \in \tilde{\Lambda}_l$ , en utilisant la relation

$$\text{Cov}[X(\lambda), X(\mu)] = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j k(t_i, t_j). \quad (5)$$

Les covariances généralisées sont de type *conditionnellement positif* [5], c'est-à-dire qu'elles doivent garantir

$$\text{Var}[X(\lambda)] = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j k(t_i, t_j) \geq 0$$

pour toute mesure  $\lambda \in \tilde{\Lambda}_l$ . La classe des covariances est donc incluse dans celle des covariances généralisées.

Le krigeage dit *intrinsèque* [5] construit un prédicteur  $\hat{X}(t) = \sum_{i=1}^n \hat{\lambda}_{i,t} X(t_i)$  minimisant  $\text{Var}[\hat{X}(t) - X(t)]$  sous la contrainte que  $\hat{X}(t) - X(t)$  soit un accroissement d'ordre  $l$ , c'est-à-dire  $\sum_i \hat{\lambda}_{i,t} \delta_{t_i} - \delta_t \in \tilde{\Lambda}_l$ . On est ainsi amené à résoudre le système linéaire:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{P}^\top \\ \mathbf{P} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_t \\ \mu_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_t \\ \mathbf{p}_t \end{pmatrix}, \quad (6)$$

où  $\mathbf{P}$  est une matrice  $(l+1) \times n$  dont les éléments sont les  $t_i^r$ ,  $\mu_t$  est un vecteur de coefficients de Lagrange et  $\mathbf{p}_t$  est le vecteur des monômes  $t^l$ .

La théorie du krigeage intrinsèque et des fonctions conditionnellement positives est mathématiquement plus difficile que celle du krigeage des processus aléatoires à moyenne connue. Sa mise en œuvre reste toutefois d'un niveau de simplicité élémentaire et, outre le fait qu'il est possible de traiter les processus aléatoires à moyenne inconnue, le krigeage intrinsèque

permet de considérer une classe de covariances plus vaste (notons, par exemple, que les splines de type "plaques minces" [10] sont fondées sur des noyaux conditionnellement positifs). Le krigeage intrinsèque permet également d'inclure de l'information a priori qu'on ne souhaite pas qu'elle soit régularisée (l'idée étant alors d'inclure des fonctions particulières en plus des monômes considérés plus haut [9]).

## 3 Choix d'une fonction de covariance

Nous cherchons à écrire la covariance de  $X(t)$  sous la forme d'une combinaison linéaire *positive* de covariances élémentaires stationnaires. Comme cas particulier, nous pouvons considérer une somme de cosinus telle que

$$k_\alpha(h) = \sum_{i=1}^l e^{\alpha_i} \cos u_i h, \quad (7)$$

où les pulsations  $u_i$  peuvent être choisies a priori et où les  $\alpha_i$  sont les paramètres ajustables de cette covariance. Notons que le caractère périodique de  $k(h)$  n'est pas gênant si l'on prend soin de choisir une période plus grande que l'horizon d'étude de  $X(t)$ .

## 4 Estimation des paramètres

Nous souhaitons estimer les paramètres  $\alpha_i$  lorsque  $l$  est grand (typiquement quelques centaines). La forme paramétrique (7) s'apparente alors à une représentation dans le domaine de Fourier. Une première idée consiste à estimer les  $\alpha_i$  par maximum de vraisemblance restreint (REML) [7]. Cette méthode est préférée à celle du maximum de vraisemblance parce que la moyenne de  $X(t)$  est inconnue.

### 4.1 Maximum de vraisemblance restreint

L'estimation au sens du maximum de vraisemblance restreint (*restricted maximum likelihood*, abrégé par REML, en anglais) des paramètres de la covariance de  $X(t)$  consiste à écrire non pas la fonction de vraisemblance des données observées, mais celle des accroissements (ou accroissements généralisés) de ces données. Ces accroissements s'appellent aussi des *contrastes*.

Notons  $\mathbf{X}^{\text{obs}} = (X(t_1), \dots, X(t_n))^\top$  le vecteur aléatoire des observations (en supposant le bruit négligeable pour simplifier). Notons également  $\mathbf{P} = (t_j^i)_{i=0, j=1}^{l, n}$  la matrice  $(l+1) \times n$  des monômes de degré inférieur ou égal à  $l$  évalués sur  $S = \{t_1, \dots, t_n\}$ . L'espace des mesures à support  $S$  annulant les polynômes de degré inférieur ou égal à  $l$  est de dimension  $n - l - 1$ . Supposons trouvée une matrice  $\mathbf{W}$  de taille  $n \times (n - l - 1)$  et de rang  $n - l - 1$ , telle que

$$\mathbf{P}\mathbf{W} = \mathbf{0}.$$

(Les colonnes de  $\mathbf{W}$  sont dans le noyau de  $\mathbf{P}$ .) Notons que les colonnes de  $\mathbf{W}$  sont donc les coefficients de mesures à support  $S$ ,  $\sum_{j=1}^n \mathbf{W}_{[i,j]} \delta_{t_j} \in \tilde{\Lambda}_l$ . Alors  $\mathbf{Z} = \mathbf{W}^\top \mathbf{X}^{\text{obs}}$  est un vecteur aléatoire gaussien à valeurs dans  $\mathbb{R}^{n-l-1}$ , de moyenne nulle et de matrice de covariance  $\mathbf{W}^\top \mathbf{K}(\alpha) \mathbf{W}$ , où  $\mathbf{K}(\alpha)$  est la matrice symétrique de covariance généralisée ayant comme éléments les scalaires  $k_\alpha(t_i - t_j)$ . Le vecteur aléatoire  $\mathbf{Z}$  est

un vecteur de contrastes. La log-vraisemblance des contrastes s'écrit

$$L(z, \alpha) = -\frac{n-l-1}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log \det(W^T K(\alpha) W) - \frac{1}{2} z^T (W^T K(\alpha) W)^{-1} z. \quad (8)$$

Plusieurs méthodes peuvent être envisagées pour calculer la matrice  $W$ . Les approches proposées par [3, 6, 7] sont considérées comme classiques. Nous préférons utiliser la décomposition  $QR$  de  $P^T$

$$P^T = (Q_1 | Q_2) \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix},$$

où  $(Q_1 | Q_2)$  est une matrice orthogonale de taille  $n \times n$  et  $R$  une matrice triangulaire supérieure de taille  $(l+1) \times (l+1)$ . Il est immédiat de vérifier que les colonnes de la matrice  $Q_2$  forment une base du noyau de  $P$  et nous pouvons donc choisir  $W = Q_2$ . Notons que  $W^T W = I_{n-l-1}$ . Le coût algorithmique du calcul de la vraisemblance est en  $O(n^3)$ .

## 4.2 Régularisation sur les paramètres

Comme nous l'illustrerons dans la section 5, l'estimation au sens du maximum de vraisemblance permet d'obtenir une covariance  $k_\alpha$  très proche de la covariance empirique. Cependant, s'il existe une bonne fidélité entre le modèle de covariance et la covariance empirique, la capacité de prédiction (ou de généralisation) du modèle aléatoire n'est pas nécessairement satisfaisante. Il s'agit d'un phénomène de sur-adaptation aux données qui s'explique par le fait que le modèle comporte un grand nombre de paramètres.

Il apparaît alors nécessaire de régulariser les paramètres  $\alpha_i$ , ce qui peut se faire par estimation au sens du maximum a posteriori (MAP) avec un a priori de régularité sur les paramètres. Comme ces paramètres s'apparentent à une estimée de la densité spectrale et que nous voulons que cette estimée soit relativement régulière, l'idée proposée est de modéliser les paramètres  $\alpha_i$  par un processus gaussien  $\alpha(u)$ , tel que  $\alpha_i = \alpha(u_i)$ ,  $i = 1, \dots, l$ . Autrement dit, la densité de probabilité du vecteur aléatoire  $\alpha = (\alpha(u_1), \dots, \alpha(u_l))^T$  s'écrit sous la forme

$$p(\alpha) = \frac{1}{Z} \exp \left( -\frac{1}{2} (\alpha - \bar{\alpha})^T K_{\alpha, \text{reg}}^{-1} (\alpha - \bar{\alpha}) \right),$$

où  $Z$  est une constante de normalisation,  $\bar{\alpha}$  est la moyenne du vecteur  $\alpha$ , et  $K_{\alpha, \text{reg}}$  est sa matrice de covariance. Nous faisons l'hypothèse que la moyenne du processus  $\alpha(u)$  est inconnue mais possède une forme linéairement paramétrée, par exemple du type  $b_0 + b_1 u$  ou une autre forme polynomiale. Reste à effectuer le choix de la covariance de  $\alpha(u)$ . Nous avons choisi une covariance de type exponentiel [11] en ajustant ses paramètres par une validation croisée rudimentaire.

Avec cet a priori, nous estimons  $\alpha$  au sens du MAP, en maximisant

$$J(\alpha) = -\frac{1}{2} \log \det(W^T K(\alpha) W) - \frac{1}{2} z^T (W^T K(\alpha) W)^{-1} z - \frac{1}{2} \alpha^T W_\alpha (W_\alpha^T K_{\alpha, \text{reg}} W_\alpha)^{-1} W_\alpha^T \alpha \quad (9)$$

par rapport à  $\alpha$ . L'expression (9) est constituée de deux parties. La première correspond à la log-vraisemblance restreinte formée à partir d'une matrice de contrastes  $W$  de taille  $n \times (n-q)$ ,

où  $q$  est la dimension de l'espace  $\mathcal{N}$  des fonctions polynomiales contenant la moyenne inconnue de  $X(t)$ . Le vecteur des contrastes  $z$  s'obtient donc par la transformation linéaire  $z = W^T x^{\text{obs}}$ . La matrice  $K(\alpha)$  désigne la matrice de covariance du vecteur des observations, formée à partir de  $k_\alpha(h)$  paramétrée par  $\alpha$ . Le dernier terme de (9) correspond à la log-densité restreinte du vecteur des paramètres formée à partir d'une matrice de contrastes  $W_\alpha$ . Nous utilisons cette formulation pour ne pas avoir à prendre en compte la moyenne inconnue du processus  $\alpha(u)$ .

Il est aisé de maximiser (9) par rapport aux paramètres  $\alpha_i$  parce que le gradient possède une expression analytique simple.

## 5 Exemple

Pour illustrer la méthode, considérons la série chronologique classique du nombre de lynx au Canada entre 1821 et 1934 représentée sur la figure 1. Cette série est étudiée en détails dans [1], ce qui permet de comparer facilement les performances des modèles proposés. Nous la modélisons par un processus gaussien stationnaire  $X(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , de moyenne inconnue et de covariance  $k(h)$  à choisir. La série observée correspond donc à une réalisation  $x^{\text{obs}} \in \mathbb{R}^n$  du vecteur aléatoire  $(X(t_1), \dots, X(t_n))^T$  et la prédiction est un problème d'extrapolation par krigeage. La difficulté du problème est de choisir une covariance appropriée pour  $X(t)$ .

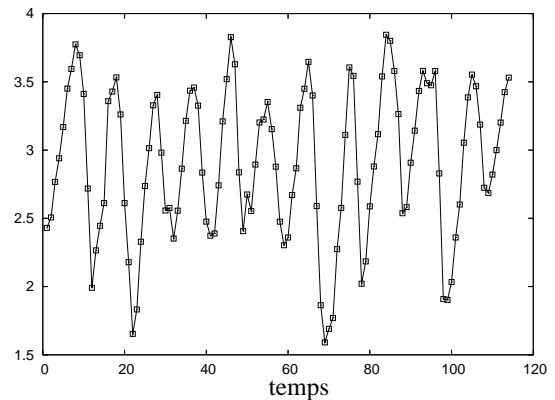


Figure 1: Évolution du logarithme en base 10 du nombre de lynx au Canada sur la période 1821-1934 (les abscisses correspondent à des pas de temps en années).

Le caractère périodique de la série explique la forme oscillante de sa fonction d'autocovariance empirique, présentée à la figure 2. Ceci suggère de prendre une covariance  $k(h)$  avec des oscillations. Toutefois, des expériences numériques avec des modèles de covariance simples (c'est-à-dire comportant relativement peu de paramètres) ne conduisent pas à des résultats satisfaisants<sup>1</sup>. Notons que le modèle proposé par [1] est un AR d'ordre 12 (sélectionné d'après un critère d'Akaike), ce qui signifie qu'il a typiquement six modes de résonance. Le modèle de covariance de cet AR(12) possède donc une capacité d'adaptation aux données plus importante que les covari-

<sup>1</sup>Ces expériences numériques sont menées avec des covariances de type cosinus amorti.

ances à temps continu mentionnées ci-dessus. Ceci souligne la faiblesse des procédures classiques de choix de covariance où l'on se limite à choisir celles-ci dans des familles restreintes [2, 7, 11].

D'après la figure 2, la covariance à temps continu obtenue par estimation *REML* apparaît qualitativement proche de la covariance empirique. Pour évaluer la qualité du modèle, nous utilisons le même critère  $S$  que dans [1], c'est-à-dire la moyenne quadratique des erreurs de prédictions à un pas sur les 14 dernières valeurs de la série.  $S$  vaut 0.138 dans le cas de l'*AR*(12) proposé par [1] et environ 0.350 dans notre cas. Notre résultat de prédiction à un pas après estimation de la covariance par maximum de vraisemblance est donc très mauvais en raison d'un phénomène de sur-adaptation aux données qui s'explique par le fait que le modèle de covariance comporte plus de paramètres qu'il n'y a de données.

Il apparaît alors nécessaire de régulariser les paramètres  $\alpha_i$  et nous utilisons la méthode proposée dans la section 4.2. Sur la série des lynx, nous obtenons alors des valeurs  $S$  entre 0.120 et 0.125, selon le choix des paramètres de la covariance de  $\alpha(u)$ . Les performances de prédiction sont donc *meilleures* que celles obtenues avec le modèle *AR*(12) de [1]. La covariance estimée est présentée à la figure 2. Les paramètres  $\hat{\alpha}_i$  estimés sont représentés en fonction des pulsations  $u_i$  sur la figure 3 où nous avons également représenté la densité spectrale du processus *AR*(12) de [1]. On constate la ressemblance entre les deux modèles. L'avantage du modèle proposé est que l'on contrôle de manière flexible l'adaptation aux données.

En conclusion, la méthode proposée, qui s'applique aussi à des séries non uniformément échantillonnées, se révèle pertinente et pourrait constituer la base de futurs travaux.

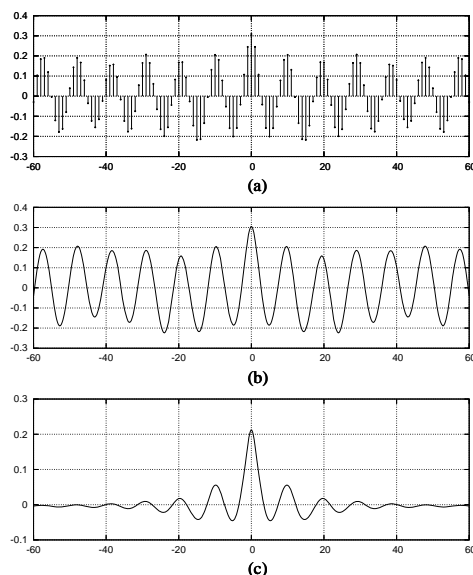


Figure 2: Fonctions de covariance de la série des lynx; (a) covariance à temps discret estimée empiriquement (estimateur *non biaisé*); (b) covariance à temps continu estimée par maximum de vraisemblance; (c) covariance à temps continu estimée par maximum a posteriori.

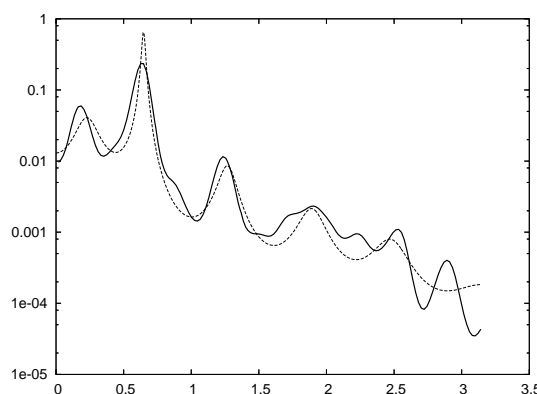


Figure 3: Représentation des paramètres estimés (et renormalisés) de la covariance en fonction de la pulsation (trait continu). Densité spectrale du modèle *AR*(12) de [1] (trait interrompu).

## References

- [1] P. Brockwell and R. Davis. *Time Series: Theory and Methods*. Springer-Verlag, 1987.
- [2] J.-P. Chilès and P. Delfiner. *Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty*. Wiley, New York, 1999.
- [3] D. A. Harville. Bayesian inference for variance components using only the error contrasts. *Biometrika*, 61:383–385, 1974.
- [4] G. Matheron. Principles of geostatistics. *Economic Geology*, 58:1246–1266, 1963.
- [5] G. Matheron. The intrinsic random functions, and their applications. *Adv. Appl. Prob.*, 5:439–468, 1973.
- [6] H. D. Patterson and R. Thompson. Recovery of inter-block information when block sizes are unequal. *Biometrika*, 58(3):545–554, 1971.
- [7] M. L. Stein. *Interpolation of Spatial Data: Some Theory for Kriging*. Springer, New York, 1999.
- [8] E. Vazquez. *Modélisation comportementale de systèmes non-linéaires multivariés par méthodes à noyaux et applications*. PhD thesis, Université Paris XI Orsay, 2005.
- [9] E. Vazquez and E. Walter. Intrinsic kriging and prior information. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 21(2):215–226, 2005.
- [10] G. Wahba. *Spline Models for Observational Data*, volume 59 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, 1990.
- [11] A. M. Yaglom. *Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions I: Basic Results*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, 1986.

# Amélioration par le bruit de la dynamique de capteurs à saturation

David ROUSSEAU, François CHAPEAU-BLONDEAU

Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA), FRE CNRS 2656, Université d'Angers,  
62 avenue Notre Dame du Lac, 49000 ANGERS, France.

david.rousseau@univ-angers.fr, chapeau@univ-angers.fr,  
<http://www.istia.univ-angers.fr/~chapeau/>

**Résumé** – Nous considérons des capteurs non linéaires de caractéristique entrée–sortie linéaire aux faibles amplitudes et saturantes aux grandes amplitudes. Nous proposons une méthodologie pour étendre la gamme d'amplitude de signaux pour laquelle ces capteurs répondent de manière fidèle au delà de leur région linéaire. L'extension de dynamique est obtenue via une réplique des capteurs à saturation associés en réseau parallèle puis via un ajout de bruits indépendants à l'entrée de chacun des capteurs. Ces résultats tirent profit de travaux récents sur l'utilisation de la résonance stochastique et du bruit utile dans les systèmes non linéaires avec de la signification pour les neurones biologiques et les capteurs à l'échelle micro ou nanométrique. Dans la méthodologie proposée, contrairement à ce que l'on observe classiquement dans les études sur la résonance stochastique et le bruit utile, le niveau de bruit à ajouter ne dépend pas de manière critique du niveau du signal utile que le capteur doit acquérir, conférant ainsi une certaine robustesse à cette extension de dynamique.

**Abstract** – We consider nonlinear sensor devices which are linear for small inputs and saturate at large inputs. A methodology is proposed in order to extend the amplitude range upon which these sensors give a faithful representation beyond the linear part of their input–output characteristic. The widened dynamic is obtained via replication of the saturating sensors associated in a parallel array and via the addition of independent noises at the input of each sensor. These results, which benefit from recent studies on the use of stochastic resonance and the constructive role of noise in nonlinear processes, bear significance for sensory neurons and sensors at micro or nano scale. Classically, in the study on stochastic resonance and useful noise, the optimal level of noise to be added critically depends on the signal to be transmitted. This is not the case in the proposed dynamic extension methodology which presents some property of robustness.

## 1 Introduction

Des comportements de saturation sont couramment observés chez les capteurs linéaires soumis à des signaux de grandes amplitudes. De tels comportements se traduisent, aux grandes amplitudes, par des distorsions qui affectent la qualité de l'information transmise lors de la transduction de signaux. La zone linéaire de la caractéristique entrée–sortie d'un capteur à saturation délimite donc habituellement la dynamique des signaux qu'il est capable de transmettre de manière fidèle. Nous montrons un moyen original pour étendre la zone linéaire de capteurs à saturation en réduisant la distorsion due à la saturation. Pour ce faire, nous utilisons des résultats récents sur l'étude du rôle bénéfique du bruit dans les systèmes non linéaires.

Le bruit joue un rôle essentiellement négatif dans les systèmes linéaires où une augmentation du niveau de bruit présent dans le système se traduit par une dégradation du traitement ou de la transmission d'un signal utile. Dans certains systèmes non linéaires, des effets coopératifs entre le signal utile et le bruit peuvent exister permettant à une augmentation du niveau de bruit présent dans le système d'entraîner une amélioration du traitement ou de la transmission d'un signal utile. Les effets bénéfiques du bruit dans les systèmes non linéaires, rassemblés sous le terme générique de résonance stochastique, sont intensément étudiés depuis 2 décennies dans une variété de processus toujours grandissante actuellement (voir [1] pour une synthèse récente dans le domaine de l'instrumentation). On ob-

serve des effets de résonance stochastique pour différentes familles de capteurs de caractéristique entrée–sortie non linéaire sans mémoire incluant des non-linéarités en loi de puissance [3], des non-linéarités à seuil [8], ou encore des non-linéarités à saturation [7] comme celles que nous considérons ici.

On distingue deux mécanismes par lequel le bruit peut jouer un rôle bénéfique dans la transduction d'un signal utile par des capteurs à saturation [10]. Le premier est un effet de polarisation par le bruit [7]. Il opère avec des capteurs isolés, où un ajout de bruit peut d'une certaine façon déplacer le point de fonctionnement du capteur vers une région de la caractéristique du capteur plus favorable à la transduction du signal. Un second mécanisme d'amélioration par le bruit agit dans des réseaux parallèles de capteurs identiques comme un effet d'enrichissement de la représentation du signal produit par le réseau de capteurs [4, 11, 8, 10]. Dans cette communication, nous montrons comment ces deux mécanismes de la résonance stochastique permettent d'étendre la dynamique de capteurs à saturation au delà de leur région linéaire au moyen d'une augmentation du niveau de bruit. Nous introduisons une méthodologie robuste pour régler le niveau de bruit de façon à conserver l'effet bénéfique du bruit même lorsque certains paramètres liés au signal utile ou aux capteurs sont amenés à varier.



## 2 Capteurs à saturation

Nous considérons des capteurs de caractéristique entrée–sortie statique  $g(\cdot)$ , linéaire pour des signaux de faibles amplitudes et saturantes aux grandes amplitudes. Nous modélisons ces capteurs par des saturations douces

$$g(u) = \tanh(\beta u), \quad (1)$$

avec  $g(u) = \beta u$  si  $|u| \ll 1/\beta$  et  $\pm 1$  si  $|u| \gg 1/\beta$  ou des saturations dures

$$g(u) = \begin{cases} -1 & \text{pour } \beta u \leq -1 \\ \beta u & \text{pour } -1 < \beta u < 1 \\ 1 & \text{pour } \beta u \geq 1, \end{cases} \quad (2)$$

le paramètre  $\beta > 0$  représentant la sensibilité du capteur.

Les capteurs à saturation  $g(\cdot)$  sont chargés de la transduction du signal d'entrée  $s(t)$ . Nous considérons des situations où cette entrée  $s(t)$  est d'amplitude suffisamment grande pour solliciter les capteurs dans leurs zones saturantes, au moins par moments, de tel sorte que  $s(t)$  subit une forte distorsion lors de sa transduction. Pour diminuer l'effet de cette distorsion, nous introduisons un réseau parallèle constitué de  $N$  capteurs identiques  $g(\cdot)$  qui reçoivent le signal  $s(t)$ , similairement à la configuration considérée dans [4, 11, 8, 10]. De plus, on contrôle la présence d'un bruit  $\eta_i(t)$ , indépendant de  $s(t)$ , que l'on ajoute volontairement à  $s(t)$  sur chaque capteur  $i$ . Ainsi, chaque capteur  $i$  produit individuellement le signal de sortie  $y_i(t) = g[s(t) + \eta_i(t)]$  avec  $i = 1, 2, \dots, N$ . Les  $N$  bruits  $\eta_i(t)$  associés aux capteurs sont blancs, mutuellement indépendants et identiquement distribués, de fonction de répartition  $F_\eta(u)$ , de densité de probabilité  $f_\eta(u) = dF_\eta(u)/du$  et d'amplitude efficace identique  $\sigma_{\eta_i} = \sigma_\eta$ . La réponse  $y(t)$  du réseau est obtenue en moyennant les réponses individuelles  $y_i(t)$  des  $N$  capteurs :

$$y(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g[s(t) + \eta_i(t)]. \quad (3)$$

Le rôle bénéfique attendu du bruit peut être expliqué qualitativement de la manière suivante [11, 8, 10] : les bruits ajoutés  $\eta_i(t)$  vont permettre à chaque capteur du réseau de répondre de manière différente au même signal d'entrée  $s(t)$ , au lieu de répondre à l'unisson. Ceci génère une représentation plus riche du signal d'entrée  $s(t)$  lorsque toutes les réponses individuelles  $y_i(t)$  sont collectées en sortie du réseau.

## 3 Extension de la dynamique par le bruit

Pour montrer la possibilité d'améliorer la dynamique de capteurs à saturation au moyen du réseau de l'Éq. (3), nous considérons comme signal utile un signal apériodique déterministe  $s(t)$  (nous avons également mené des études similaires sur des signaux périodiques [10]). Pour mesurer la distorsion subie par  $s(t)$  lors de sa transduction, nous choisissons d'utiliser l'intercovariance normalisée entre l'entrée  $s(t)$  et la sortie  $y(t)$

$$C_{sy} = \frac{\langle s(t) E[y(t)] \rangle - \langle s(t) \rangle \langle E[y(t)] \rangle}{\sqrt{[\langle s(t)^2 \rangle - \langle s(t) \rangle^2] [\langle E[y(t)]^2 \rangle - \langle E[y(t)] \rangle^2]}}. \quad (4)$$

Le signal d'entrée  $s(t)$  est de support  $T_s$  et  $\langle \dots \rangle$  est une opération de moyenne temporelle sur  $T_s$ . Il est possible [7, 8, 10] d'explicitier les espérances  $E[y(t)]$  et  $E[y^2(t)]$  en fonction du signal  $s(t)$  de la sensibilité  $\beta$  des capteurs, de la taille du réseau  $N$  et des grandeurs caractéristiques des bruits  $\eta$  ( $\sigma_\eta$ ,  $f_\eta$ ). À l'instant  $t$ , on a, d'après l'Éq. (3), l'espérance

$$E[y(t)] = E[y_i(t)] \quad (5)$$

et

$$E[y^2(t)] = \frac{1}{N} E[y_i^2(t)] + \frac{N-1}{N} E^2[y_i(t)] \quad (6)$$

qui sont indépendants de  $i$  puisque les  $\eta_i(t)$  sont i.i.d. De plus, d'après l'Éq. (3), on a pour tout  $i$ ,

$$E[y_i(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s(t) + u) f_\eta(u) du \quad (7)$$

et

$$E[y_i^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(s(t) + u) f_\eta(u) du. \quad (8)$$

À titre d'illustration, les Figs. 1 et 2 représentent l'intercovariance normalisée de l'Éq. (4), en fonction de l'amplitude efficace  $\sigma_\eta$  des bruits  $\eta_i(t)$  ajoutés sur les capteurs, pour la transmission par le réseau de capteurs à saturation de l'Éq. (3) de signaux d'entrée apériodiques particuliers de grandes amplitudes. Pour chaque taille  $N$  du réseau présentée sur les Figs. 1 et 2, nous constatons que la transmission de signaux de grandes amplitudes qui font saturer les capteurs, peut être améliorée par addition des bruits  $\eta_i(t)$  sur les capteurs. L'enrichissement du signal de sortie  $y(t)$  par le bruit se traduit par une augmentation de  $C_{sy}$  qui culmine pour un niveau optimal non nul des bruits ajoutés sur les capteurs  $\eta_i(t)$ . L'action du bruit permet une meilleure fidélité de transduction pour des signaux  $s(t)$  de grandes amplitudes faisant saturer les capteurs. La dynamique du réseau de capteurs en présence des bruits  $\eta_i(t)$  est donc plus étendue que celle d'un seul capteur sans bruit ajouté.

## 4 Robustesse de l'effet

Sur les Figs. 1 et 2, l'effet bénéfique du bruit est déjà disponible pour un capteur isolé soumis à un signal utile  $s(t)$  de grande amplitude (comme noté dans [7]). Toutefois, l'utilisation d'une augmentation de dynamique par le bruit dans le cas d'un capteur isolé est difficilement envisageable en pratique. En effet, la diminution de distorsion apportée par le bruit est faible. De plus, le niveau optimal de bruit minimisant cette distorsion dépend fortement de la sensibilité  $\beta$  du capteur et du signal  $s(t)$ . Des méthodes adaptatives complexes d'ajustement du niveau de bruit optimal ont été discutées pour des systèmes non linéaires isolés [5]. Nous proposons ici une méthodologie simple et non adaptative pour obtenir cet ajustement en utilisant un réseau de capteurs à saturation de grande taille. Les Figs. 1 et 2 montrent que l'efficacité de l'amélioration par le bruit de l'intercovariance normalisée entrée–sortie  $C_{sy}$  est davantage prononcée à mesure que la taille du réseau  $N$  augmente. La valeur maximale de  $C_{sy}$ , obtenue pour un niveau de bruit non nul, tend d'ailleurs vers 1 lorsque  $N$  tend vers l'infini. De plus, la pente décroissante, qui suit le passage par le niveau optimal de bruit, décroît à mesure que  $N$  augmente allant même jusqu'à s'annuler pour un réseau de taille infini. Le "plateau"

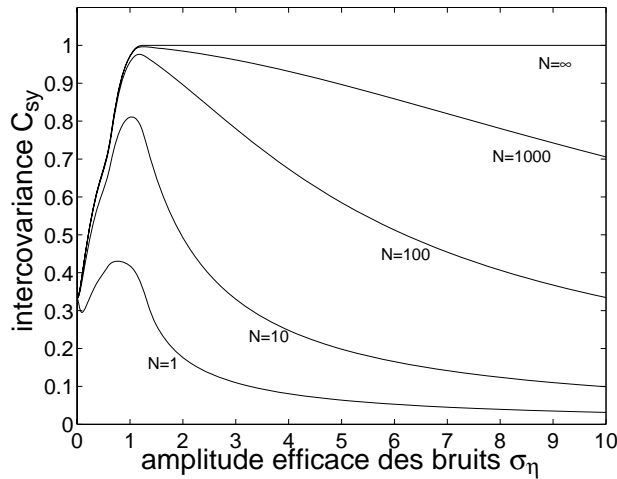


FIG. 1: Intercovariance normalisée entrée-sortie  $C_{sy}$  de l'Éq. (4), en fonction de l'amplitude efficace  $\sigma_\eta$  des bruits  $\eta_i(t)$  choisis uniformes, pour différentes tailles de réseaux allant de  $N = 1$  à l'infini (l'analyse exacte pour  $N = \infty$  est permise par les développements théoriques détaillés dans [8, 10]). Le signal utile aperiodique considéré est  $s(t) = 2 \sin\left(2\pi \frac{t}{T_s/2}\right) + \sin\left(2\pi \frac{t}{3T_s/2}\right)$ , quand  $t \in [0, T_s]$ , et  $s(t) = 0$  partout ailleurs. Les capteurs ont des caractéristiques à saturations douces comme dans l'Éq. (1) avec tous la même sensibilité  $\beta = 10$  de telle sorte qu'à bruit  $\eta_i(t)$  nul,  $\sigma_\eta = 0$ , le signal  $s(t)$  sature fortement à travers les capteurs  $g(\cdot)$  de l'Éq. (1).

ainsi observé signifie que pour des réseaux de grandes tailles  $N$ , la distorsion due à la saturation peut être limitée pour une large gamme de valeurs de l'amplitude efficace des bruits  $\eta_i(t)$ . Cette dernière observation, cohérente avec celle décrite dans [4] pour un réseau de neurones biologiques, met en évidence une propriété de robustesse (le réglage du niveau de bruit optimal n'est pas un paramètre critique) de l'effet d'amélioration de la dynamique par le bruit dans les réseaux de capteurs à saturation de grandes tailles  $N$ .

## 5 Exemples

Nous illustrons la propriété de robustesse décrite dans la section précédente sur deux exemples pratiques où des capteurs peuvent être amenés à saturer.

### 5.1 Cas d'une sensibilité variable

Sur la Fig. 3, on envisage la possibilité que la sensibilité  $\beta$  des capteurs, tout en restant identiques dans le réseau, puisse prendre différentes valeurs. Cette situation peut être rencontrée en pratique. En effet, les capteurs sont souvent soumis à d'autres grandeurs physiques que leur mesurande; des paramètres d'influence (typiquement la température ou la pression) peuvent agir sur la sensibilité des capteurs et amener ceux-ci à saturer si leurs effets ne sont pas compensés [2]. Les résultats de la Fig. 3 montrent que, dans de telles situations, une autre méthodologie est possible pour étendre la dynamique des capteurs sans avoir à contrôler à tout instant la valeur

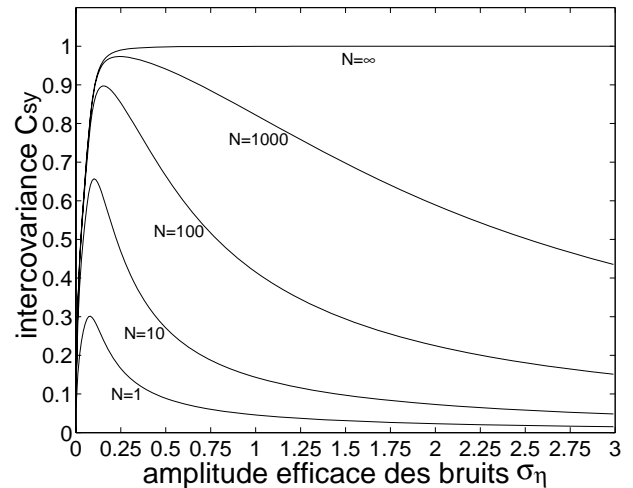


FIG. 2: Similaire à la Fig. 1 avec des capteurs à saturations dures comme dans l'Éq. (2) et des bruits  $\eta_i(t)$  choisis gaussiens. Le signal utile aperiodique considéré est  $s(t) = A + 0.2 \sin\left(2\pi \frac{t}{T_s/2}\right) + 0.1 \sin\left(2\pi \frac{t}{3T_s/2}\right)$ , quand  $t \in [0, T_s]$ , et  $s(t) = 0$  partout ailleurs. La composante  $A = 1$  constante ne porte pas d'information. Les capteurs ont tous la même sensibilité  $\beta = 1$  de telle sorte qu'à bruit  $\eta_i(t)$  nul,  $\sigma_\eta = 0$ , le signal  $s(t)$  sature fortement à travers les capteurs  $g(\cdot)$  de l'Éq. (1) (essentiellement à cause de la composante  $A$ ).

des paramètres d'influence. Ainsi, sur la Fig. 3, le niveau  $\sigma_\eta$  des bruits ajoutés  $\eta_i(t)$  est fixé pour une valeur donnée de la sensibilité des capteurs  $\beta = 10$  pour laquelle le signal utile  $s(t)$  considéré subit une forte distorsion. Comme on le constate sur la Fig. 3, lorsque l'on considère différentes valeurs de sensibilité, la distorsion reste constante. Le fait de fixer le niveau des bruits ajoutés  $\eta_i(t)$  n'affecte pas de manière significative la fidélité avec le signal d'entrée du signal transmis par le réseau. Ceci est particulièrement intéressant pour des réseaux de relatives grandes tailles où la distorsion est quasi nulle avec une intercovariance normalisée  $C_{sy}$  qui reste très proche de l'unité qu'elle que soit la saturation subie par le signal utile  $s(t)$ . Le point important sur un plan pratique est que ce résultat est obtenu sans avoir à ajuster le niveau de bruit ajouté quand la sensibilité des capteurs change.

### 5.2 Cas d'une composante continue

Sur la Fig. 4, les capteurs ne sont plus soumis à un facteur d'influence et leur sensibilité  $\beta$  est une constante. On s'intéresse au cas où une composante  $A$  continue ou lentement variable (par rapport aux variations de  $s(t)$ ) s'ajoute à  $s(t)$ . Lorsque  $A$  est plus grand que la dynamique linéaire du capteur, le signal utile est mal positionné par rapport aux capteurs. Cette situation est illustrée sur la Fig. 2 où l'on montre qu'un ajout de bruit dans le réseau peut permettre de diminuer l'effet de la saturation. Sur la Fig. 4, on adopte la même méthodologie que sur la Fig. 3. On fixe le niveau  $\sigma_\eta$  des bruits ajoutés  $\eta_i(t)$  pour une valeur donnée de la composante  $A = 1$  pour laquelle le signal utile  $s(t)$  considéré subit la distorsion la plus forte à laquelle on s'attend. Si la composante  $A$  prend différentes valeurs, inférieures ou même supérieures (pour les réseaux de

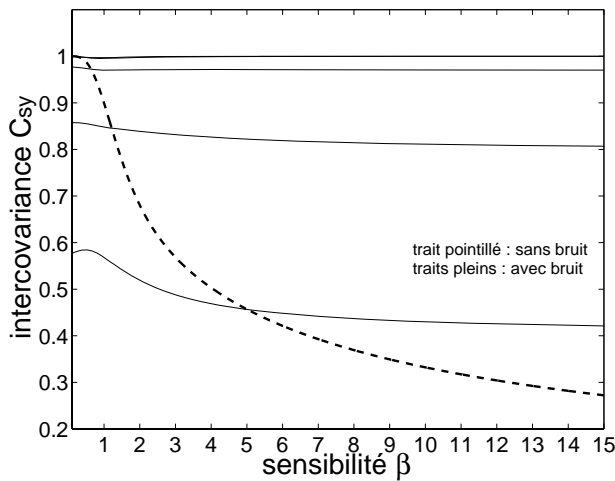


FIG. 3: Intercovariance normalisée entrée-sortie  $C_{sy}$  de l'Éq. (4), en fonction de la sensibilité des capteurs à saturation  $g(\cdot)$  prise égale à  $\beta$  pour tous les capteurs du réseau. Le signal utile aperiodique considéré est le même que celui pris pour la Fig. 1. En trait pointillé, cas d'un seul capteur à saturation en l'absence de bruit. En traits pleins, cas du réseaux de capteurs à saturation ( $N = 1, 10, 100, 1000, \infty$  en allant de bas en haut) avec un niveau de bruit uniforme ajouté fixe. Les courbes correspondant à  $N = 1000$  et  $N = \infty$  sont très proches (quasiment confondues à cette échelle). Pour chaque  $N$  représenté, le niveau de bruit considéré est le niveau optimal, correspondant au maximum de  $C_{sy}$ , lorsque la sensibilité des capteurs est celle de la Fig. 1,  $\beta = 10$ .

grandes tailles  $N \rightarrow \infty$ ) à la valeur prise pour l'ajustement du niveau de bruit, alors, la distorsion subie par le signal d'entrée du signal en sortie du réseau reste constante. Ceci illustre, pour une autre situation pratique, la robustesse de l'effet d'extension de dynamique améliorée par le bruit.

## 6 Conclusion

L'effet bénéfique du bruit, visible sur les Figs. 1 à 4, a jusqu'ici essentiellement été montré dans des réseaux de non-linéarités à seuils comme des neurones [4] et des comparateurs (par exemple [11, 8]). Il est montré ici dans un réseau de non-linéarités à saturation en présence de signaux aperiodiques ce qui permet, pour la première fois, une interprétation dans le contexte pratique de l'extension de la dynamique de capteurs. On rencontre des réseaux parallèles de transducteurs à saturation dont les tailles peuvent être grandes (largement supérieures à 1000) chez les neurones biologiques [9] ou avec les micro-nanotechnologies [6]. L'effet robuste de dynamique améliorée par le bruit, mis ici en évidence, pourrait se montrer pertinent dans le cadre de ces domaines d'investigation encore largement ouverts.

## Références

[1] G. P. Harmer, B. R. Davis, D. Abbott, "A review of stochastic resonance: circuits and measurement", *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 51, pp. 299–309, 2002.

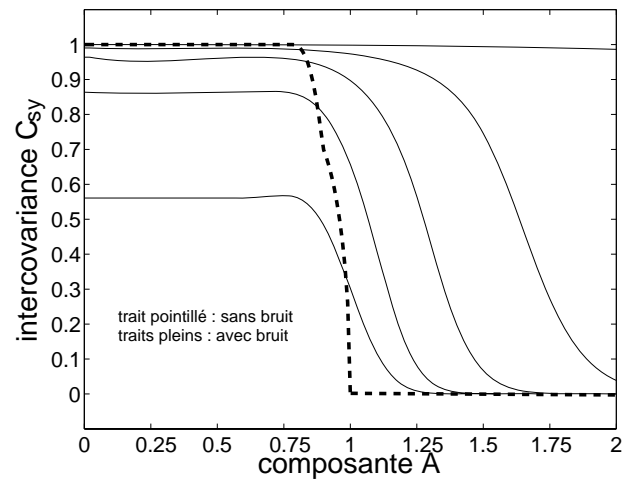


FIG. 4: Intercovariance normalisée entrée-sortie  $C_{sy}$  de l'Éq. (4), en fonction d'une composante  $A$  continue ou lentement variable non porteuse d'information qui s'ajoute au signal utile  $s(t)$ . Le signal utile aperiodique considéré est le même que celui pris pour la Fig. 2. En trait pointillé, cas d'un seul capteur à saturation en l'absence de bruit. En traits pleins, cas du réseaux de capteurs à saturation ( $N = 1, 10, 100, 1000, \infty$  en allant de bas en haut) avec un niveau de bruit gaussien ajouté fixe. Pour chaque  $N$  représenté, le niveau de bruit considéré est le niveau optimal, correspondant au maximum de  $C_{sy}$ , lorsque la composante  $A$  est celle de la Fig. 2,  $A = 1$ .

[2] G. Asch, et Collaborateurs, "Acquisition de données : du capteur à l'ordinateur", *Dunod*, Paris, 1999.

[3] F. Chapeau-Blondeau, D. Rousseau, "Enhancement by noise in parallel arrays of sensors with power-law characteristics", *Physical Review E*, vol. 70, pp. 060101(R), 1-4, 2004.

[4] J. J. Collins, C. C. Chow, T. T. Imhoff, "Stochastic resonance without tuning", *Nature*, vol 376, pp. 236–287, 1995.

[5] S. Maitam, B. Kosko, "Adaptive stochastic resonance", *Proceedings of the IEEE*, vol 86, pp. 2152–2183, 1998.

[6] I. Lee, X. Liu, B. Kosko, and C. Zhou, "Nanosignal processing: stochastic resonance in carbon nanotubes that detect subthreshold signal", *Nano Letters*, vol 12, pp. 1683–1686, 2003.

[7] D. Rousseau, J. Rojas Varela, F. Chapeau-Blondeau, "Stochastic resonance for nonlinear sensors with saturation", *Physical Review E*, vol 67, pp. 021102,1-6, 2003.

[8] D. Rousseau, F. Chapeau-Blondeau, "Suprathreshold stochastic resonance and signal-to-noise ratio improvement in arrays of comparators", *Physics Letters A*, vol 321, pp. 280–290, 2004.

[9] D. Rousseau, F. Chapeau-Blondeau, "Neuronal signal transduction aided by noise at threshold and saturation", *Neural Processing Letters*, vol 20, pp. 71–83, 2004.

[10] D. Rousseau, F. Chapeau-Blondeau, "Noise improvement and stochastic resonance in parallel arrays of sensors with saturation", *Proceedings 4th International Symposium on Physics in Signal and Image Processing*, pp. 49–54, 31 Jan.-2 Feb. 2005, Toulouse, France.

[11] N. G. Stocks, "Suprathreshold stochastic resonance in multilevel threshold systems," *Physical Review Letters*, vol. 84, pp. 2310–2313, 2000.

# Optimisation des codes LDPC pour les communications OFDM

Valérien MANNONI<sup>1</sup>, Guillaume GELLE<sup>2</sup>

<sup>1</sup>France Télécom R&D, RESA/BWA  
4 rue du Clos Courtel, B.P. 59, 35512 Cesson-Sévigné Cedex, France

<sup>2</sup>DéCom/CRéSTIC-URCA  
BP 1039, 51687 Reims Cedex 2, France

valerian.mannoni@francetelecom.com, guillaume.gelle@univ-reims.fr

**Résumé** – Nous présentons dans cet article une nouvelle méthode d'optimisation des codes correcteurs d'erreurs pour les transmissions OFDM codées sur canal sélectif en fréquence, basée sur l'utilisation des codes LDPC irréguliers. Dans un premier temps, nous introduisons une nouvelle paramétrisation des codes LDPC irréguliers que nous appelons profil d'irrégularité. Ensuite, nous proposons d'utiliser cette paramétrisation pour optimiser les codes LDPC pour les communications OFDM en utilisant comme critère la minimisation du seuil de convergence du code. L'optimisation de ce nouveau critère est ensuite faite par approximation Gaussienne. Des simulations illustrent les performances de notre approche comparativement à celle d'un code optimisé pour canal BABG.

**Abstract** – This paper deals with optimized channel coding for OFDM transmissions (COFDM) over frequency selective channels using irregular Low-Density Parity-Check codes. Firstly, we introduce a new characterization of the LDPC codes irregularity called "irregularity profile". Then, using this parameterization, we optimize the LDPC codes using the criterion based on the minimization of the convergence threshold. The optimization of this criterion is done using the Gaussian approximation technique. Simulations illustrate the good performance of our approach in comparison with irregular LDPC codes optimized on AWGN channel.

## 1 Introduction

Ce papier présente une nouvelle méthode de construction de codes correcteurs d'erreurs optimisés pour les transmissions OFDM codées (COFDM) [1]. En effet, les modulations OFDM se montrent être de bonnes candidates pour les standards émergeant de communications haut débit que ce soit pour les communications filaires ou radio, simple ou multi-utilisateurs. Nous proposons ici d'utiliser l'information sur l'état du canal disponible par voie de retour à l'émetteur dans certaines applications telle que les transmissions filaires xDSL. Celle-ci sert alors d'*a priori* pour construire des codes correcteurs d'erreurs qui soient *adaptés* à la sélectivité en fréquence du canal OFDM.

Les Turbo-codes ainsi que les codes LDPC sont deux familles concurrentes de codes pseudo-aléatoires approchant la capacité de certains canaux. Il a été montré que les codes LDPC irréguliers sont spécialement intéressants du fait que l'on peut en optimiser les paramètres caractérisant leur irrégularité ce qui a permis ainsi d'approcher la capacité de divers canaux de communication [2]. Nous proposons alors d'optimiser l'irrégularité des codes LDPC pour les canaux OFDM sélectifs en fréquence et pour ce faire nous supposons que nous avons une connaissance parfaite de l'état du canal à l'émetteur. Cependant, nous verrons qu'une connaissance partielle de celui-ci est suffisante pour réaliser nos codes.

Ce papier est organisé comme suit. Les principaux concepts et notations sur les codes LDPC ainsi que sur les modulations OFDM sont présentés en section 2. Dans la section 3 est décrit l'étude du comportement asymptotique par approximation Gaussienne des codes LDPC pour les canaux OFDM sélectifs en fréquence. A partir de cette étude, nous donnons l'algorithme d'optimisation des codes LDPC pour ce type de canal

en section 4. Finalement, les résultats sont présentés en section 5 et une conclusion est donnée en section 6.

## 2 Généralités

### 2.1 Codes LDPC

Un code LDPC est un code bloc défini par une matrice de vérification de parité  $\mathbf{H}$ , creuse, de dimension  $(M \times N)$  où  $N$  est la taille du mot de code et  $M$  le nombre d'équations de parité. Un code LDPC peut également être représenté par son graphe factoriel. Un graphe factoriel est un graphe bipartite contenant deux types de noeuds : les noeuds de données représentant le mot de code et les noeuds de contrôles représentant les vérifications de parité. Le  $i^{\text{ème}}$  noeud de donnée et le  $j^{\text{ème}}$  noeud de contrôle sont connectés par une branche si et seulement si  $\mathbf{H}_{j,i}$  est non nul.

Une classe plus générale des codes LDPC a ensuite été introduite par Luby *et al.* [3], il s'agit des codes LDPC *irréguliers*. Cette irrégularité se traduit par une distribution non uniforme du nombre de branches connectées aux différents types de noeuds sur le graphe factoriel. Habituellement l'irrégularité d'un code LDPC est spécifiée par deux polynômes :  $\lambda(x) = \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \lambda_i x^{i-1}$  et  $\rho(x) = \sum_{j=2}^{t_{rmax}} \rho_j x^{j-1}$  où  $\lambda_i$  (resp.  $\rho_j$ ) est la proportion des branches connectées aux noeuds de données (resp. noeuds de contrôles) de degré  $i$  c'est-à-dire connectés avec  $i$  branches (resp. degré  $j$ ).  $t_{cmax}$  (resp.  $t_{rmax}$ ) représente le taux de connexion maximal des noeuds de données (resp. contrôles). Ces deux polynômes sont liés par le rendement  $R$  du code, et la relation les liant, nommée contrainte de rendement, s'écrit :  $(1 - R) \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \lambda_i / i = \sum_{j=2}^{t_{rmax}} \rho_j / j$ . Il est également usuel d'utiliser une représentation duale de l'irrégularité qui consiste en l'utilisation de deux autres polynômes :



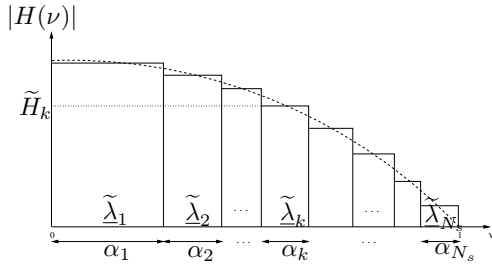


FIG. 2 – Approximation du canal sélectif en fréquence

Nous visons donc dans cet article à optimiser conjointement  $N_s$  "parties de code" LDPC correspondant aux  $N_s$  sous-bandes, lesquelles composent alors le code LDPC global. Chacune de ces  $N_s$  parties du code LDPC sera initialisée par une bande de fréquence du canal sélectif différente. La non-stationarité du canal de propagation est donc gérée par une initialisation non-constante de l'algorithme de décodage. Pour ce faire, il est tout d'abord nécessaire de redéfinir la paramétrisation du profil d'irrégularité (Cf. Fig.2) qui sera ici défini par la concaténation suivante :  $[\alpha_1 \tilde{\lambda}_1 \alpha_2 \tilde{\lambda}_2 \dots \alpha_k \tilde{\lambda}_k \dots \alpha_{N_s} \tilde{\lambda}_{N_s}]$ , où  $\tilde{\lambda}_k = [\tilde{\lambda}_{2,k}, \tilde{\lambda}_{3,k}, \dots, \tilde{\lambda}_{t_{max},k}]$  représente le vecteur définissant l'irrégularité en terme de proportion de noeuds de données du code LDPC situé dans la  $k^{ième}$  sous-bande avec  $\tilde{\lambda}_{i,k}$  la proportion des noeuds de données de degré  $i$  de la  $k^{ième}$  sous-bande.

Développons maintenant l'algorithme de l'approximation Gaussienne pour les canaux OFDM avec comme paramètre d'évolution l'information mutuelle. D'après l'équation (1), l'information mutuelle des messages sortants des noeuds de données de degré  $i$  dans la  $k^{ième}$  sous-bande est donnée par :

$$I_{v,i,k}^{(l)} = J \left( m_{u_0}(\tilde{H}_k) + (i-1)J^{-1} \left( I_u^{(l-1)} \right) \right), \quad (5)$$

où l'information mutuelle  $I_u$  des messages  $u$  provenant des noeuds de contrôles et la fonction  $J(\cdot)$  sont définies dans [6]. Ainsi, nous obtenons l'évolution de l'information mutuelle en fonction du profil d'irrégularité :

$$I_v^{(l)} = \sum_{i=2}^{t_{max}} \sum_{k=1}^{N_s} \alpha_k \frac{i \tilde{\lambda}_{i,k}}{\sum_{j=2}^{t_{max}} \sum_{n=1}^{N_s} \alpha_n j \tilde{\lambda}_{j,n}} J \left( m_{u_0}(\tilde{H}_k) + (i-1)J^{-1} \left( I_u^{(l-1)} \right) \right) = F_{im} \left( \tilde{H}, \sigma_b^2, I_v^{(l-1)} \right). \quad (6)$$

En utilisant (6) itérativement, nous pouvons suivre l'évolution de  $I_v^{(l)}$  au cours des itérations. Il devient donc maintenant possible de calculer le seuil de convergence lequel correspond ici au plus petit RSB au-dessus duquel  $I_v^{(l)} \rightarrow 1$  quand  $l \rightarrow +\infty$ .

## 4 Optimisation

Dans [5], nous avons proposé un critère d'optimisation non linéaire, basé sur la minimisation de la probabilité d'erreur bit après  $L$  itérations de décodage, qui nous permettait d'obtenir des codes LDPC présentant de bonnes performances pour de petites tailles de mot de code. Dans cet article, nous utilisons le critère d'optimisation plus classique introduit dans [2] qui consiste en la minimisation du seuil de convergence  $(E_b/N_0)^*$ . Ce critère est adapté pour des mots de code de taille importante, décodés avec un nombre d'itérations conséquent. Étant

donné qu'il n'est pas possible de minimiser directement le seuil de convergence, le critère d'optimisation réel consiste en fait à maximiser le rendement de codage d'un code LDPC exhibant un seuil à un  $(E_b/N_0)^*$  donné.

Le seuil de convergence étant le RSB au-dessus duquel  $I_v^{(l)} \rightarrow 1$  quand  $l \rightarrow \infty$ ,  $I_v^{(l)}$  définie par (6) doit alors être strictement croissante. Ainsi la condition de convergence  $I_v^{(l)} \rightarrow 1$  est donnée par :

$$I_v > F_{im} \left( \tilde{H}, \sigma_b^2, I_v \right) \quad \forall I_v \in [0, 1]. \quad (7)$$

Le problème d'optimisation peut être écrit comme suit :

$$[\tilde{\lambda}_{1,opt} \dots \tilde{\lambda}_{N_s,opt}] = \arg \min_{[\tilde{\lambda}_1 \dots \tilde{\lambda}_{N_s}]} \sum_{i=2}^{t_{max}} \sum_{k=1}^{N_s} \alpha_k i \tilde{\lambda}_{i,k} \quad (8)$$

sous la contrainte,

$$I_v > F_{im} \left( \tilde{H}, \sigma_b^2, I_v \right) \quad \forall I_v \in [0, 1]. \quad (9)$$

ainsi que sous les contraintes de normalisation et de proportion définies respectivement par :

$$\sum_{i=2}^{t_{max}} \tilde{\lambda}_{i,k} = 1 \quad \forall k = 1, \dots, N_s, \quad \text{and} \quad \tilde{\lambda}_{i,k} \in [0, 1]. \quad (10)$$

Afin de rendre la condition de convergence linéaire en fonction du profil d'irrégularité définie par les  $\tilde{\lambda}_{i,k}$ , nous insérons également la contrainte de rendement :

$$I_v > \sum_{i=2}^{t_{max}} \sum_{k=1}^{N_s} \alpha_k \frac{i \tilde{\lambda}_{i,k}}{(1-R) \sum_{j=2}^{t_{max}} j \tilde{\rho}_j} I_{v,i,k}^{(l)} \quad \forall I_v \in [0, 1]. \quad (11)$$

Ainsi, le problème d'optimisation devient linéaire en les paramètres à optimiser et peut donc être traité par programmation linéaire. Cependant, étant donné que le rendement  $R$  intervient dans la condition de convergence, nous avons été amené à développer l'algorithme d'optimisation suivant, basé sur une dichotomie :

1. Initialisation : Fixons un  $(E_b/N_0)$  initial suffisamment important, un rendement cible  $R^*$  et le pas de la dichotomie  $K_{dich}$ ,
2. Pour la valeur courante de  $(E_b/N_0)^*$  et un rendement cible  $R^*$ , effectuer l'optimisation suivante

$$\tilde{\lambda}_{opt} = [\tilde{\lambda}_{1,opt} \dots \tilde{\lambda}_{N_s,opt}] = \arg \min_{[\tilde{\lambda}_1 \dots \tilde{\lambda}_{N_s}]} \sum_{i=2}^{t_{max}} \sum_{k=1}^{N_s} \alpha_k i \tilde{\lambda}_{i,k} \quad (12)$$

sous les contraintes,

$$\sum_{i=2}^{t_{max}} \tilde{\lambda}_{i,k} = 1 \quad \forall k = 1, \dots, N_s, \quad \tilde{\lambda}_{i,k} \in [0, 1] \quad \text{and}$$

$$I_v > \sum_{i=2}^{t_{max}} \sum_{k=1}^{N_s} \alpha_k \frac{i \tilde{\lambda}_{i,k}}{(1-R^*) \sum_{j=2}^{t_{max}} j \tilde{\rho}_j} I_{v,i,k} \quad \forall I_v \in [0, 1].$$

3. Soit  $R_{opt} = 1 - \frac{\sum_{i=2}^{t_{max}} \sum_{k=1}^{N_s} \alpha_k i \tilde{\lambda}_{i,k,opt}}{\sum_{j=2}^{t_{max}} j \tilde{\rho}_j}$ , le rendement résultant obtenu après l'étape 2.

Si  $R_{opt} > R^*$ , diminuer la valeur de  $(E_b/N_0)^*$  par  $K_{dich}$ , et revenir à l'étape 2. Si  $R_{opt} < R^*$ , fixer le RSB à  $(E_b/N_0)^* + K_{dich}/2$ , diviser le pas de la dichotomie  $K_{dich}$  par 2 et revenir à l'étape 2.

4. L'algorithme d'optimisation stoppe dès que nous obtenons  $0 < |R^* - R_{opt}| < 10^{-5}$ .

## 5 Résultats des simulations

Dans cette section, nous présentons la structure du code LDPC optimisé pour le canal sélectif en fréquence Proakis B laquelle est illustrée en Fig.3. Pour cette optimisation, nous fixons le rendement de codage à  $R = 0.5$  et le taux maximum de connexion à  $t_{cmax} = 200$ . Au vu du profil d'irrégularité, nous pouvons faire deux remarques sur la forme du profil :

- tout d'abord, on peut constater que la répartition des degrés de connexion tend à *inverser* la forme du canal, c'est-à-dire à placer des taux de connexion importants aux endroits où le canal est de mauvaise qualité afin de compenser les évanouissements.
- Cependant, sur la première partie du mot de code, l'algorithme d'optimisation place des connexions à 3 alors que le degré minimum est 2. Ceci peut s'expliquer par le fait que dans cette partie du mot de code, le canal a un fort gain et fournit donc des messages de bonne qualité au décodeur. Ces bons messages se propageront d'autant mieux dans le graphe, au cours des itérations, que les degrés des noeuds seront élevés.

La forme globale du profil d'irrégularité est donc caractéristique d'un compromis entre ces deux comportements.

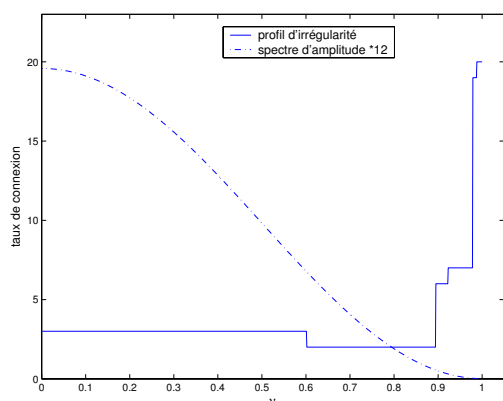


FIG. 3 – Profil d'irrégularité pour le canal Proakis B avec  $R = 1/2$ .

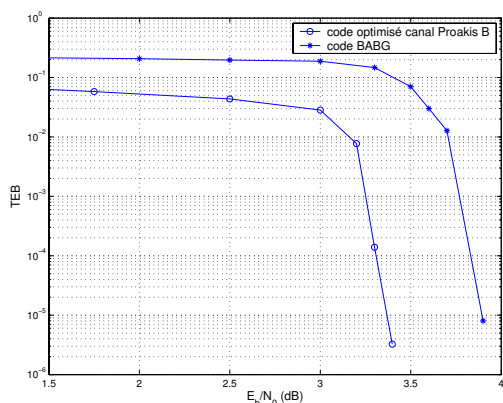


FIG. 4 – Performances du code LDPC optimisé pour le canal Proakis B et du code optimisé pour le canal BABG utilisés lors d'une transmission OFDM sur le canal Proakis B.  $R = 1/2$ ,  $N = 65536$  et le nombre d'itérations est  $L = 500$ .

Le tableau Tab.1 liste les seuils de convergence calculés par évolution de densité exacte sur le canal OFDM Proakis B du code LDPC optimisé pour ce canal et du code BABG (code LDPC optimisé pour le canal BABG avec les mêmes paramètres entrelacé). Notre code LDPC optimisé présente un gain de 0.27 dB par rapport au code BABG et de 1.5 dB par rapport au code régulier (3 ;6). Nous avons ensuite simulé une chaîne OFDM codée avec un code LDPC de taille finie. Les performances obtenues sont présentées en Fig.4.

TAB. 1 – Seuils de convergence obtenus par évolution de densité exacte des codes LDPC de  $R = 1/2$  à travers le canal OFDM Proakis B. La capacité du canal pour une constellation MAQ-4 est indiquée entre parenthèses.

R=1/2	canal Proakis B (1.18 dB)		
code LDPC	code optimisé	code BABG	(3 ;6)
$(E_b/N_0)^*$	3.03 dB	3.30 dB	4.48 dB

## 6 Conclusion

Dans ce papier, nous avons optimisé la structure des codes LDPC pour des transmissions OFDM à travers des canaux sélectifs en fréquence. Afin de pouvoir effectuer cette optimisation, il a tout d'abord été nécessaire de redéfinir le profil d'irrégularité comme paramétrisation des codes LDPC. A partir de cette paramétrisation, nous avons alors effectué l'optimisation à l'aide de l'approximation Gaussienne développée ici pour les canaux OFDM. L'implantation de l'algorithme d'optimisation est basée sur la programmation linéaire. Les résultats présentés montrent l'intérêt d'exploiter la sélectivité fréquentielle des canaux OFDM.

## Références

- [1] W.Y. Zou and Y. Wu, "COFDM : An Overview," *IEEE Trans. on Broadcasting*, vol. 41, no. 1, pp. 1–8, March 1995.
- [2] T. J. Richardson, A. Shokrollahi, and R. Urbanke, "Design of Capacity-Approaching Low-Density Parity-Check Codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 47, no. 2, pp. 619–637, Feb. 2001.
- [3] M.G. Luby, M. Mitzenmacher, A. Shokrollahi, and D. Spielman, "Analysis of Low Density Codes and Improved Designs Using Irregular Graphs," in *Proc of the 30th ACM STOC*, 1998.
- [4] S. Y. Chung, R. Urbanke, and T. J. Richardson, "Analysis of Sum-Product Decoding of Low-Density Parity-Check Codes Using a Gaussian Approximation," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 47, no. , pp. 657–670, Feb. 2001.
- [5] V. Mannoni, D. Declercq, and G. Gelle, "Optimized Irregular LDPC Codes for Multi-carrier Modulations over Frequency Selective Channels," in *EURASIP-JASP, special issue on 'Multi-carrier Communications and Signal Processing'*, vol. 10, pp. 1536–1546, Aug. 2004.
- [6] S. ten Brink, G. Kramer, and A. Ashikhmin, "Design of Low-Density Parity-Check Codes for Modulation and Detection," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 52, no. 4, pp. 670–678, April 2004.



# Une méthode simple de turbo estimation de source en décodage conjoint source-canal

Marion JEANNE<sup>1</sup>, Valérian MANNONI<sup>2</sup>, Pierre SIOHAN<sup>2</sup> \*

<sup>1</sup>INRIA Rennes

Campus universitaire de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France

<sup>2</sup>France Télécom, RESA/BWA

4, rue du Clos Courtel, B.P. 59, 35512 Cesson-Sévigné Cedex, France

marion.jeanne@irisa.fr, valerian.mannoni@francetelecom.com

pierre.siohan@francetelecom.com

**Résumé** – Le principe du décodage conjoint source-canal (DCSC) est d'utiliser des connaissances *a priori* sur la source afin de réduire les taux d'erreur au décodeur en exploitant la redondance résiduelle de la source compressée. Le plus souvent les auteurs supposent que les statistiques de la source sont parfaitement connues du décodeur. Nous proposons ici une méthode simple d'estimation de ces statistiques dans le cas de sources codées en longueur variable. Des simulations, réalisées avec un turbo code, illustrent la convergence de l'estimateur et la possibilité d'atteindre les limites de performance de cette méthode de DCSC.

**Abstract** – The basic principle of joint source-channel decoding is to use *a priori* source knowledge in order to reduce the error rates at the decoder side taking advantage of the residual redundancy left in the compressed source. More often authors assume that the source statistics are perfectly known by the receiver. Here, we propose a simple estimation method of these statistics in the case of variable length encoded sources. Simulations carried out with a turbo code illustrate the estimator convergence as well as the possibility to reach the performance limits of this JSCD method.

## 1 Introduction

Le décodage conjoint source-canal (DCSC) apparaît de plus en plus fréquemment en tant que solution alternative à la technique de décodage conventionnel dite séparée, ou tandem. Dans la présente étude, nous nous intéressons au DCSC pour une source codée en longueur variable. Cette situation intéressante en terme de compression correspond cependant à un cas plus critique pour la transmission. De fait de nombreuses techniques de DCSC de codes à longueur variables (CLV) ont été proposées ces dernières années [1]. Un de leurs points communs est la nécessité de s'appuyer sur la structure du codeur CLV et de ses statistiques pour améliorer les performances globales du décodeur dans des conditions de transmission données. Le plus souvent les auteurs supposent que ces statistiques sont exactement connues au décodeur. En pratique cela n'est pas le cas dans grand nombre d'applications en raison du coût en débit nécessaire pour les transmettre, qui est encore plus particulièrement important pour les sources non-stationnaires.

Ce problème d'estimation d'une source CLV est abordé dans [2] avec une méthode d'estimation non paramétrique. Les auteurs se placent dans un contexte de décodage souple source et utilisent une technique de type BCJR [3] pour le calcul des probabilités stationnaires d'une source sans mémoire. Dans [4] l'estimation est de type Baum-Welch et s'insère dans un schéma de DCSC de type turbo avec échange d'informations extrinsèques à chaque itération entre décodeur canal et décodeur source. A noter aussi qu'une méthode paramétrique est proposée dans

[5], elle montre la difficulté d'obtenir un modèle à la fois suffisamment simple et précis pour représenter des phénomènes réels dès qu'ils sont un peu complexes, en l'occurrence il s'agissait des coefficients CLV associés aux vecteurs-mouvement d'un codeur vidéo.

Dans notre étude le but initial est d'obtenir, comme dans [4], une méthode générique applicable à des sources avec ou sans mémoire que l'on code en CLV. Toutefois, par rapport à [4], où le décodeur source repose sur une variante du décodage BCJR appliqué sur un treillis bit-symbole à grand nombre d'états, nous souhaitons ici limiter la complexité. Nous considérons alors un schéma de transmission où le train binaire résultant du codeur CLV est protégé par un turbo code et une méthode de DCSC de type décodage canal aidé par la source (DCAS) [6]. Toutefois, au lieu de supposer comme en [6] que la statistique de la source est parfaitement connue au récepteur, nous proposons de l'estimer dans la boucle de turbo décodage.

En section 2 nous rappelons le principe de la méthode DCAS et nous y décrivons le module proposé pour la turbo estimation de la statistique de la source. La section 3 illustre les capacités de convergence de notre méthode d'estimation et les performances du décodeur DCAS correspondant.

## 2 Le décodage canal aidé par la source

### 2.1 Principe du DCSC par contrôle de la source

L'objectif en DCAS est d'améliorer le décodage du code canal par l'utilisation au niveau bit d'une information source *a*

\* Cette étude a été réalisée dans le cadre du réseau NewCom.

*priori* calculée, pour une structure de CLV donnée, à partir des probabilités d'occurrences des symboles source [6]. Ceci est effectué en établissant une bijection entre l'arbre du CLV et le treillis du code correcteur d'erreur. Par rapport à un schéma tandem, les gains de performance du décodeur sont en relation directe avec la redondance résiduelle de la source.

La figure 1 donne un exemple d'un arbre CLV, où l'ensemble  $\mathcal{C} = \{c^1, c^2, \dots, c^C\}$  représente les symboles source. Chaque symbole  $c^j \in \mathcal{C}$  s'écrit comme  $c^j = [c^j(1), \dots, c^j(i), \dots]$  où  $c^j(i)$  est le  $i^{\text{ème}}$  bit du mot de code représentant le symbole  $c^j$  (soit par exemple  $c^5 = [1, 1]$ ).

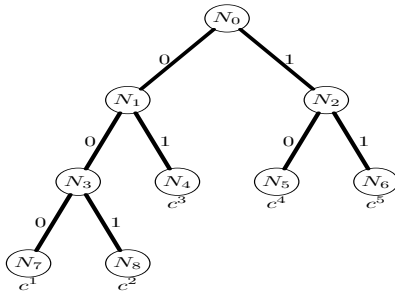


FIG. 1 – Arbre d'un CLV.

La chaîne de communication avec le décodeur DCAS est présentée à la figure 2. Le canal considéré ici est le canal à Bruit Additif Blanc Gaussien (BABG). Le module d'estimation source (cf. 2.2) nécessite un décodage canal itératif. Ici, comme dans [6], nous utilisons un turbo code avec, pour générer les informations extrinsèques (Ext), un algorithme de décodage sous optimal (Max-Log-MAP) par rapport au BCJR mais aussi moins complexe. Au niveau source le fait de réaliser un décodage dur des CLV se traduit aussi par une réalisation de complexité moindre que celle résultant d'un décodage souple source effectué sur un treillis [4].

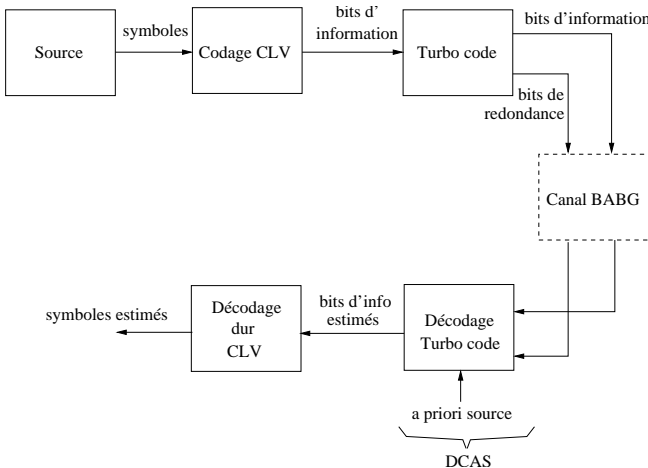


FIG. 2 – Chaîne de transmission en décodage conjoint source canal.

## 2.2 Turbo-estimation de la statistique de la source

La figure 3 détaille la structure du décodeur canal contrôlé par la source avec turbo-estimation des statistiques de cette

dernière. L'objectif du turbo-estimateur est ici de calculer, pour chacun des symboles source, les probabilités d'occurrences stationnaires pour une source sans mémoire et aussi celles de transitions pour une source markovienne. Ainsi chaque itération de ce turbo-estimateur se compose de 4 étapes. La première étape consiste à décider des bits d'information à partir des probabilités *a posteriori* (APPs) en sortie du second décodeur canal. La table de CLV fournit la séquence de symboles source résultante. La réalisation d'un histogramme permet ensuite d'estimer pour chaque symbole le nombre transmis ou encore, en gardant en mémoire la trace du symbole précédent ayant été décodé, le nombre correspondant à chaque couple successif de symboles. Finalement, à partir de cet histogramme, nous calculons les probabilités stationnaires et, si nécessaire, celles de transition entre symboles. Pour le cas stationnaire, l'estimation de la probabilité d'occurrence du  $n^{\text{ème}}$  symbole à l'itération  $l$  de décodage  $\hat{P}^{(l)}(c^n)$  s'écrit :

$$\hat{P}^{(l)}(c^n) = \frac{N_{c^n}^{(l)}}{N_{S_{dec}}^{(l)}}, n = 1, \dots, C \quad (1)$$

où  $N_{S_{dec}}^{(l)}$  désigne le nombre total de symboles source décodés à l'itération  $l$  et  $N_{c^n}^{(l)}$  le nombre de symboles  $c^n$  décodés à cette même itération. Après avoir déterminé à l'itération courante la statistique de la source, il suffit maintenant de calculer les probabilités de branche de l'arbre du CLV afin de réaliser la conversion symbole-bit de la figure 3. Ce calcul de probabilités estimées peut s'effectuer de manière similaire à celui décrit en [6] pour des probabilités supposées connues exactement. Nous posons  $I_k^j = \{n \in \mathbb{N} | \forall i < k, c^n(i) = c^j(i)\}$  comme étant l'ensemble des indices de tous les mots de code possédant les mêmes  $k - 1$  premiers bits que le mot de code  $c^j$ . Par convention, nous fixons  $I_1^j = \{1, \dots, C\}$ . Les probabilités estimées du symbole  $c^j$  et celle du bit  $c^j(i)$  seront notées respectivement  $\hat{P}(c^j)$  et  $\hat{P}(c^j(i))$ . La probabilité de chaque branche de l'arbre représentant le code CLV (correspondant chacune à une probabilité binaire) peut être exprimée à l'aide des probabilités des symboles source (ici estimées) et par exploitation de la structure de l'arbre. L'estimation à l'itération  $l$  de la probabilité de chaque branche dans le cas d'une source sans mémoire peut s'exprimer, pour  $k > 1$ , par la relation suivante :

$$\hat{P}^{(l)}(c^j(k) | c^j(1), \dots, c^j(k-1)) = \frac{\sum_{n \in I_k^j | c^n(k) = c^j(k)} \hat{P}^{(l)}(c^n)}{\sum_{n \in I_k^j} \hat{P}^{(l)}(c^n)} \quad (2)$$

Si les symboles source présentent une relation markovienne d'ordre 1, les calculs des différentes probabilités binaires doivent être revus en considérant chaque symbole comme un symbole précédent possible, soit :

$$\forall c^m \in \mathcal{C}, \hat{P}^{(l)}(c^j(k) | c^j(1), \dots, c^j(k-1), c^m) = \frac{\sum_{n \in I_k^j | c^n(k) = c^j(k)} \hat{P}^{(l)}(c^n | c^m)}{\sum_{n \in I_k^j} \hat{P}^{(l)}(c^n | c^m)} \quad (3)$$

Ensuite, tel que présenté dans [6], ces probabilités, *a priori* binaires relatifs à la source, interviennent dans le calcul des APPs et de l'extrinsèque du premier décodeur canal.

À l'itération suivante de turbo décodage on recommence ce processus, ce qui permet d'affiner l'estimation des probabilités

des symboles de la source, et donc les *a priori* source utilisés dans le turbo décodage. L'initialisation des probabilités symboles est effectuée en supposant que tous les symboles sont équiprobables.

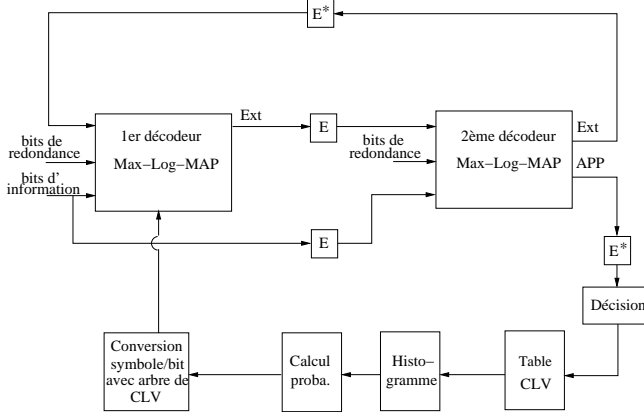


FIG. 3 – Turbo décodage conjoint source-canal avec estimation de la source.

### 3 Résultats de simulation

Dans toutes nos simulations, pour limiter la propagation des erreurs nous avons construit des paquets de  $M \times M$  bits. Ces données sont protégées par un turbo code poinçonné de rendement  $1/2$ , dont l'entrelaceur ligne-colonne ( $E$ ) est également de taille  $M \times M$ . Ce code est formé par une concaténation parallèle de deux codeurs convolutifs systématiques et récurrents de même polynôme générateur égal à  $(1 + D + D^2 + D^4)/(1 + D^3 + D^4)$ . Dans un premier temps nous présentons une étude de convergence du turbo-estimateur. Ensuite nous illustrons ses performances en transmission.

#### 3.1 Etude de convergence

L'étude de convergence a pour but d'évaluer la capacité du turbo-estimateur proposé à fournir des estimations sans biais et suffisamment précises. Pour ce faire, nous considérons une source Gauss-Markov de coefficient de corrélation 0,9 obtenue par une quantification uniforme avec 4 symboles (GM4) et nous nous intéressons à l'estimation des 16 probabilités de transition. La qualité de cette estimation va naturellement fortement dépendre de la taille de bloc (et donc d'entrelaceur) car elle influe à la fois sur les statistiques générées et sur les performances du turbo code.

Les simulations ont été effectuées pour différentes tailles d'entrelaceur, en générant un minimum de 15625 blocs et en se plaçant à un taux d'erreur symbole (TES) constant de  $10^{-3}$ . Ainsi, la figure 4 montre, pour le symbole  $c^2$ , l'évolution au cours des itérations de décodage de l'écart quadratique moyen (EQM) entre la probabilité estimée à l'itération  $l$ , que l'on note  $\hat{P}^{(l)}(c^2|c^2)$ , et la probabilité effectivement générée par bloc de taille  $M \times M$ , notée  $P_M(c^2|c^2)$ . On peut considérer que ces courbes obtenues pour le symbole  $c^2$ , tel que  $P(c^2|c^2) =$

0.6467, sont représentatives de celles obtenues pour l'ensemble des symboles. Comme attendu l'estimation de la statistique de la source s'affine avec les itérations, cependant quelle que soit la taille du bloc elle présente un biais par rapport à la probabilité réellement générée. On note également que ce biais est d'autant plus faible que la taille du bloc est importante.

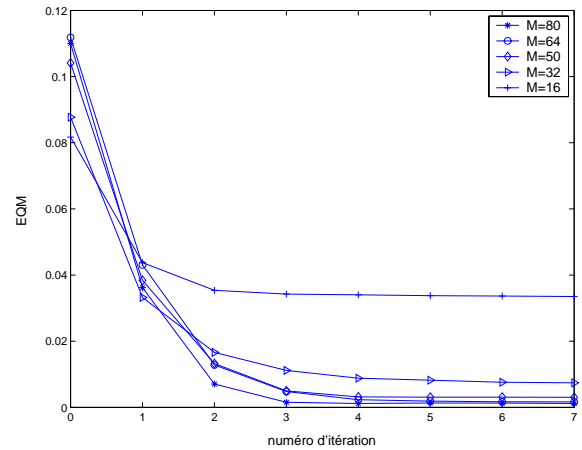


FIG. 4 – Evolution de l'EQM (pour  $c^2$ ) au cours des itérations de décodage entre les probabilités estimée et générée pour différentes tailles de bloc ( $M \times M$ ).

Sur la figure 5, nous avons représenté en fonction de la taille du bloc les EQM entre, d'une part,  $P_M(c^2|c^2)$  et  $P(c^2|c^2)$  puis, d'autre part, entre  $P_M(c^2|c^2)$  et  $\hat{P}^{(7)}(c^2|c^2)$ . Nous observons alors que le biais entre la statistique théorique et celle réellement générée s'amenuise avec l'augmentation de la taille du bloc. En effet plus la taille du bloc est conséquente plus un bloc de symboles sera représentatif de la statistique théorique. Notons également, avec la courbe en trait continu, que la turbo estimation permet de s'approcher très précisément de la valeur de probabilité effectivement générée. Ce dernier résultat illustre aussi l'intérêt de réaliser une estimation de la source au récepteur même dans le cas où l'on dispose d'un modèle théorique de la statistique de source.

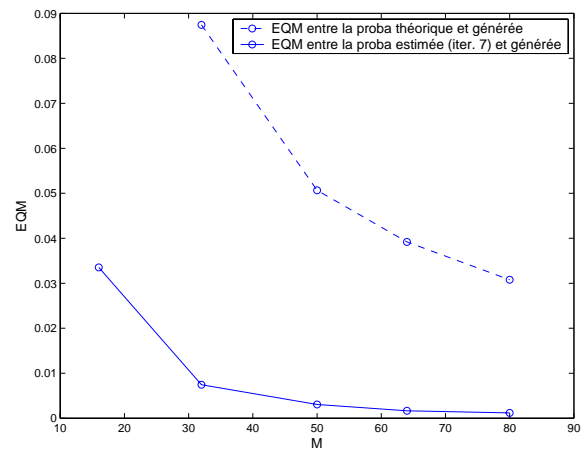


FIG. 5 – Evolution de l'EQM (pour  $c^2$ ) en fonction de la taille du bloc  $M \times M$  entre la probabilité théorique et celle générée et entre la probabilité estimée à l'itération 7 et la probabilité générée.

### 3.2 Etude des performances

En pratique un système de DCAS va fonctionner, soit en utilisant un modèle théorique de la statistique de source, soit en l'estimant. Dans nos simulations, nous comparons ces deux possibilités avec le schéma tandem pour deux sources de nature différente. Nous reprenons la source théorique GM4 et nous introduisons une source réelle correspondant aux CLV produits par un codeur vidéo MPEG-4 lors du codage des coefficients DC de luminance des images Intra (I) de la séquence Foreman. La redondance résiduelle relative, écart normalisé, noté  $\rho_r$ , entre la longueur moyenne de symboles et l'entropie de la source est plus élevée pour la source GM4 ( $\rho_r = 0,45$ ) que pour la source DC à 16 symboles également supposée markovienne ( $\rho_r = 0,16$ ). L'entrelaceur ligne-colonne retenu est tel que  $M = 64$ . Les courbes correspondantes en TES en fonction du Rapport Signal à Bruit (RSB), exprimé par la quantité  $(E_b/N_0)$ , sont représentées aux figures 6 et 7.

Avec un gain en RSB de l'ordre de 1,3 dB pour un  $TES=10^{-2}$ , la figure 6 montre à nouveau l'intérêt des méthodes de DCSC par rapport à la solution tandem. A partir de l'itération 3, elle confirme également l'avantage, déjà noté lors de l'étude de convergence, de la turbo estimation en comparaison de l'utilisation du modèle théorique.

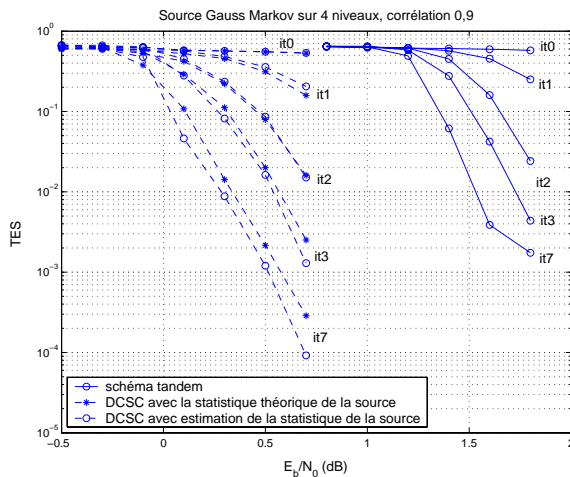


FIG. 6 – TES pour les 3 systèmes de décodage turbo de la source GM4 à différentes itérations de décodage.

Pour la source de coefficients DC issus de la séquence Foreman, nous considérons que la statistique théorique est constituée à partir des probabilités (stationnaires et de transitions) obtenues sur toute la séquence des 150 images codées en intra. La figure 7 montre qu'à nouveau le DCSC permet une amélioration par rapport au décodage tandem. Le gain en RSB, au mieux de l'ordre de 0,35 dB pour un  $TES=10^{-2}$ , est toutefois moindre qu'avec la source GM4, ce qui peut s'expliquer par la plus faible valeur de  $\rho_r$ . Une autre différence est liée à la moins bonne performance du module de turbo estimation qui se traduit pas une perte de 0,1 dB par rapport à l'utilisation des statistiques théoriques (connaissance parfaite de la source). Par rapport à la source GM4, cette perte provient vraisemblablement de la plus grande quantité d'informations à estimer, avec les  $16 \times 16$  (au lieu des  $4 \times 4$ ) termes de probabilités de transition pour une même taille d'entrelaceur. Toutefois, les courbes

à  $E_b/N_0$  donné montrent que des faibles écarts en RSB peuvent se traduire par des variations importantes du TES et donc avoir un fort impact sur les séquences vidéo MPEG-4 reconstruites.

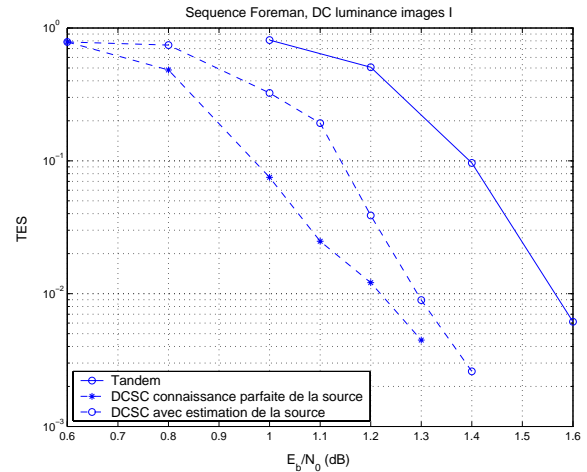


FIG. 7 – TES à l'itération 7 pour les 3 systèmes de décodage turbo et la source de CLV de luminance intra obtenue pour la séquence Foreman.

## 4 Conclusion

Nous avons proposé une technique simple pour l'estimation de statistiques de sources codées en longueur variable. Cet estimateur peut s'intégrer en particulier dans des procédures de DCSC où le décodeur canal est itératif. Les études de convergence ont montré l'avantage de la turbo estimation, par rapport à l'utilisation de modèles théoriques de probabilité, en particulier lorsque les blocs de données sont de faible taille. Dans tous les cas, source théorique ou réelle, la turbo estimation permet d'améliorer les performances en transmission par rapport au schéma tandem.

## Références

- [1] C. Guillemot and P. Siohan. Joint source-channel decoding of variable length codes with soft information : A survey. *JASP*, 6 :906–927, June 2005.
- [2] J. Wen and J. D. Villasenor. Utilizing soft information in decoding of variable length codes. In *Proc. of DCC*, Snowbird, USA, March 1999.
- [3] L. R. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek, and J. Raviv. Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate. *IEEE Trans. on Information Theory*, pages 284–287, March 1974.
- [4] C. Weidmann and P. Siohan. Décodage conjoint source-canal avec estimation en ligne de la source. In *CORESA'03*, Lyon, France, January 2003.
- [5] A. H. Murad and T. E. Fuja. Joint source-channel decoding of variable length encoded sources. In *Proc. of ITW*, pages 94–95, Killarney, Ireland, June 1998.
- [6] M. Jeanne, J.-C. Carlach, and P. Siohan. Joint source channel decoding of variable length codes for convolutional codes and turbo codes. *IEEE Trans. on Communications*, 53(1) :10–15, January 2005.

# Algorithmes Simplifiés pour le Décodage de Codes LDPC non-binaires

Adrian VOICILA<sup>1,3</sup>, David DECLERCQ<sup>1</sup>, Marc FOSSORIER<sup>2</sup>, François VERDIER<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ETIS ENSEA/UCP/CNRS UMR-8051, 95014 Cergy-Pontoise, (France),

<sup>2</sup>Dept. Electrical Engineering, Univ. Hawaii at Manoa, Honolulu, HI 96822, (USA),

<sup>3</sup>STMicroelectronics, Crolles, (France)

voicila@ensea.fr, declercq@ensea.fr

marc@aravis.eng.hawaii.edu, verdier@ensea.fr

**Résumé** – Dans cet article, nous présentons un algorithme de décodage simplifié des codes LDPC non-binaires, appelé EMS. Cet algorithme est une simplification de l'algorithme somme-produit dans le domaine logarithmique, qui permet des gains en terme de complexité et de stabilité numérique. Nous proposons également différentes variantes d'implantation de l'algorithme EMS. Les différentes variantes présentées sont comparées en termes de courbes de performances (FER) et complexité.

**Abstract** – In this paper, we introduce a simplified log-domain decoding algorithm for LDPC codes over  $GF(q)$ , named EMS. While this algorithm is a simplification of the conventional sum-product algorithm, the log-domain decoding has advantages in terms of implementation, computation complexity and numerical stability. Further, we propose some variants of implementation for the EMS algorithm, yielding a lower computational complexity. The different variants are compared both in terms of simulated FER performance and computational complexity.

## 1 Introduction

Pour des tailles modérées des mots de code, une des solutions les plus efficaces pour obtenir de bonnes performances d'erreur est d'utiliser des codes LDPC construits sur des corps de Galois non binaires d'ordre  $q$  ( $GF(q)$ ) [2]. Cependant, les décodeurs associés ont le désavantage d'avoir une complexité variant en  $O(q^2)$  [2, 4]. En conséquence, aucun corps d'ordre plus grand que  $q = 16$  ne peut être considéré pour une implantation hardware. Dans cet article nous présentons un algorithme proposé dans [5], qui réduit le nombre d'opérations nécessaires pour la mise à jour des noeuds de parité, tout en conservant des performances proches du décodage par propagation de croyances (BP). L'algorithme proposé est basé sur une généralisation de l'algorithme Min-Sum utilisé pour les décodeurs LDPC binaires, et a été appelé EMS (Extended Min-Sum). Nous étudions en détail dans cet article la complexité algorithmique du décodeur EMS, et présentons des résultats de simulation exhaustifs permettant de quantifier précisément la complexité nécessaire à une mise en œuvre numérique. Ces résultats donnent des indications quant à la complexité requise ainsi que le choix des paramètres du codeur et du décodeur qu'il faut utiliser en fonction des performances désirées. Les résultats de décodage obtenus sont à notre connaissance les meilleurs que l'on puisse obtenir pour des trames courtes et pour une complexité de décodage raisonnable.

## 2 Notations et position du problème

Un code LDPC dans  $GF(q)$  est défini par une matrice de parité  $H$  creuse de dimension  $M \times N$  ( $R = \frac{M-N}{N}$  est le rendement) dont les éléments non nuls appartiennent à  $GF(q)$ . Les

multiplications effectuées dans le corps  $GF(q)$  seront notées  $\otimes$  et tout élément d'un corps  $GF(q)$  peut être décrit en fonction d'un élément primitif du corps  $\alpha$ . Le corps de Galois est donc composé des éléments  $\{0, \alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^{q-2}\}$ .

La représentation graphique des codes LDPC non-binaires consiste à connecter l'ensemble des  $N$  noeuds de variables aux  $M$  noeuds de parité. Dans le cas de codes LDPC réguliers, les noeuds de variables sont connectés à  $d_v$  branches et les noeuds de parité à  $d_c$  branches. Le décodage par propagation de croyances du code LDPC consiste en la mise à jour des messages circulant sur les branches de cette représentation graphique [2, 3]. Les messages circulant sur les branches du treillis représentent les densités de probabilité des symboles du code et sont donc des vecteurs de taille  $q$ . On va noter les vecteurs des messages rentrant (respectivement sortant) dans un noeud de parité par  $U$  (respectivement  $V$ ).

L'algorithme de propagation de croyances consiste en deux étapes de calcul. Premièrement le passage par les noeuds de données est une multiplication termes à termes des  $d_v - 1$  messages entrants. Deuxièmement, le passage par les noeuds de parité consiste en une marginalisation des  $d_c$  messages entrant  $\{U_t\}_{1..d_c-1}$  conditionnellement à l'équation de vérification de parité:

$$\sum_{t=1}^{d_c} h_t \otimes c_t = 0 \quad (1)$$

où  $h_t$  sont des éléments non-nuls de la matrice  $H$  et  $c_t$  les symboles correspondants du mot de code. Cette deuxième étape est très complexe et représente l'obstacle majeur au décodage de code LDPC dans des corps d'ordre élevés. La complexité par noeud de parité est de l'ordre de  $O(q^2)$ , et peut être ramenée à une complexité moindre  $O(q * \log(q))$  lorsqu'on effectue le calcul dans le domaine de Fourier [2, 3]. Cependant, sous cette

forme l'algorithme de propagation de croyance requiert des multiplications et des divisions, ce qui est dommageable à toute implantation pratique. En vue d'une implantation hardware des codes LDPC non-binares, il est donc nécessaire de proposer un décodeur utilisant des log-rapports de vraisemblance comme messages, ne nécessitant que des additions.

### 3 L'algorithme Extended Min-Sum dans le domaine logarithmique (EMS)

#### 3.1 Présentation générale de l'algorithme

L'algorithme EMS est une généralisation de l'algorithme min-sum utilisé fréquemment pour le décodage des codes binaires, et fait partie de la vaste classe des algorithmes sous-optimaux, dont le but est de simplifier la complexité des calculs réalisés sur l'ensemble des noeuds de parité.

Nous utiliserons par la suite une représentation logarithmique des messages (Log-Density-Ratio: LDR). Un message  $U = \{U[k]\}_{k=0..q-1}$  est défini par  $q-1$  rapports comme suit :

$$U[k] = \log \left( \frac{\text{prob}(c = \alpha^{k-1})}{\text{prob}(c = 0)} \right)$$

A l'aide des notations de la FIG. 1, les 3 étapes d'une itération de décodage de l'algorithme EMS sont décrites dans la suite de cette section:

- 1. Mise à jour des noeuds variable de degré  $d_v$ :

$$U_{vp}[k] = L[k] + \sum_{v=1, v \neq c}^{d_v} V_{pv}[k] - offset \quad k = 0 \dots q-1$$

où  $L$  représente les LDR des symboles provenant du canal. La méthode consistant à introduire un facteur de correction (offset) est régulièrement utilisée pour compenser la perte due à l'utilisation d'algorithmes sous-optimaux [5].

- 2. Etape de permutations des messages:

Cette étape est une conséquence directe de l'équation de parité (1). En effet, l'algorithme de propagation de croyance employé pour la mise à jour des noeuds de parité utilise le produit entre les symboles du mot de code et leur valeur  $h_t$  correspondante. Cette multiplication se traduit par une permutation des LDR des symboles.

$$U_{pc}[h_t \otimes \alpha^k] = U_{vp}[\alpha^k] \quad k = 0 \dots q-1$$

La transformation du graphe factoriel FIG.1 permet l'écriture du processus de mise à jour de noeud de parité sous la forme d'un produit de convolution, similaire au cas binaire.

La transformation en sens inverse ( $V_{cp} \rightarrow V_{pv}$ ) est faite à l'aide des valeurs  $h_t^{-1}$ .

- 2. Mise à jour des noeuds de parité de degré  $d_c$ :

Le principe de l'algorithme EMS est de n'utiliser qu'une partie des valeurs des messages  $U_{pc}$ , afin de construire une fonction fiabilité sous-optimale. Celle-ci est utilisée pour la mise à jour des noeuds de parité, elle doit être très peu coûteuse en nombre d'opérations et dépend de l'équation de vérification de parité. L'algorithme EMS peut être implanté d'une manière efficace via la méthode récursive proposée dans [2] pour la mise à jour

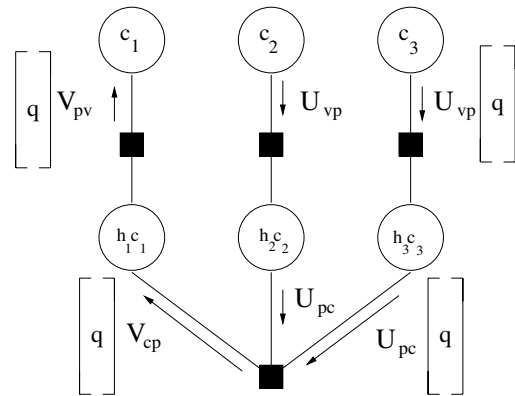


FIG. 1: Structure en graphe factoriel d'un noeud de parité pour un code LDPC non-binaire

des noeuds de parité.

Cette méthode s'interprète comme une implantation type "Forward/Backward" du calcul des fiabilités. A chaque étape de récursion, appelée étape élémentaire, on considère seulement deux messages entrants pour effectuer le calcul des fiabilités FIG.2. Notre approche pour présenter les détails de l'étape de mise à jour des noeuds de parité est basée sur le principe de la méthode récursive, chaque processus intermédiaire de vérification de parité comportant deux entrées.

Ainsi deux types de messages sont considérés dans la description de l'algorithme. Les messages de type  $U$  sont des messages  $U_{pc}$ , venant du graphe, les messages  $I$  sont des messages intermédiaires nécessaires à l'implantation récursive. Nous verrons dans la section suivante que cette distinction de deux types de messages est utile à l'étude de complexité.

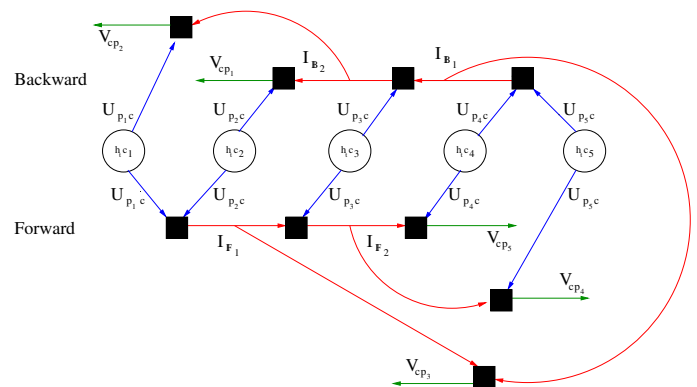


FIG. 2: La structure récursive de l'algorithme EMS pour un noeud de parité de degré  $d_c = 5$

Conformément à la représentation en graphe factoriel de la méthode récursive FIG.2, pour des valeurs de  $d_c > 4$  on distingue trois types d'étapes élémentaires:

- Les deux messages entrants sont de type  $U$ : étape  $U-U$ .
- Un des messages entrant est de type  $U$  et l'autre de type  $I$ : étape  $U-I$ .
- Les deux messages entrants sont de type  $I$ : étape  $I-I$ .

### 3.2 Détails d'une étape élémentaire

Soient  $\{X_t\}_{t=1,2}$  les messages entrant dans un nœud de parité élémentaire, c'est-à-dire une des étapes décrites ci-dessus (U-U), (U-I) ou (I-I), et  $Y_3$  le message sortant. L'algorithme EMS commence par sélectionner dans les messages  $X_t$  les  $\{r_t\}_{t=1,2}$  plus grandes valeurs que l'on note  $x_t^{(k_c)}$ ,  $k_c = 1 \dots r_t$ . On note de plus  $\alpha_t^{(k_c)}$  les valeurs des éléments de  $\text{GF}(q)$  correspondant à ces valeurs maximales.

A l'aide de ces valeurs  $\alpha_t^{(k_c)}$  et des contraintes de parité du codes LDPC, on construit l'ensemble de configurations :

$$S(\alpha_3^{(i)}) = \left\{ \left( x_1^{(k_c)}, x_2^{(k_c)} \right) : \alpha_1^{(k_c)} + \alpha_2^{(k_c)} + \alpha_3^{(i)} = 0 \quad \forall k_c = 1 \dots r_t \right\}$$

A chacune des configurations, on associe une fiabilité définie comme suit:

$$L(\alpha_3^{(i)}) = \sum_{t=1}^2 x_t^{(k_c)} \quad i = 0 \dots q-1$$

On précise que pour certaines valeurs particulières de  $\{r_t\}_{t=1,2}$ , il existe des ensembles  $S(\alpha_3^{(i)})$  qui peuvent être vides, ce qui implique un problème de convergence pour l'EMS. Une solution à ce problème est l'utilisation de l'ensemble de configurations suivant:

$$S_0(\alpha_3^{(i)}) = \left\{ \left( x_1^{(k)}, x_2^{(k)} \right) \mid \alpha_1^{(0)} + \alpha_2^{(k)} + \alpha_3^{(i)} = 0 : \alpha_1^{(k)} + \alpha_2^{(0)} + \alpha_3^{(i)} = 0 \quad \forall k = 0 \dots q-1 \right\}$$

Cet ensemble n'est jamais vide et garantit la mise à jour de toutes les valeurs de  $Y_3[\alpha_3^i]$ ,  $\forall \alpha_3^i = 0 \dots q-1$ .

Les valeurs  $L(\alpha_3^i)$  expriment la fiabilité, que l'équation de parité soit satisfaite lorsque  $h_3 \otimes c_3$  est supposé égal à  $\alpha_3^i$ . Dans ces conditions, l'équation de mise à jour correspondant à une étape élémentaire est:

$$Y_3[\alpha_3^i] = \max_{S(\alpha_3^{(i)}) \cup S_0(\alpha_3^{(i)})} L(\alpha_3^i) \quad i = 1 \dots q-1$$

la fonction maximum servant à choisir la configuration la plus fiable.

## 4 Evaluation de la complexité de l'algorithme EMS

Nous évaluons la complexité de l'algorithme EMS en comptant le nombre d'opérations basiques (additions réelles, additions dans  $\text{GF}(q)$ , comparaisons) par nœud de parité.

Le nombre d'opérations par étape élémentaire est  $3r_1r_2$  dans le cas de messages entrants à  $r_1$  et  $r_2$  valeurs maximales (une addition réelle, une addition dans  $\text{GF}(q)$  et une comparaison). Pour la totalité d'un nœud de parité de degré  $d_c$ , la complexité de la méthode récursive s'exprime comme suite:

$$C_{rec} = 3 \sum_{i=1}^{3(d_c-2)} \min(r_1r_2, q^2) \quad (2)$$

L'intérêt de l'implantation récursive de l'algorithme EMS repose sur la présence des messages intermédiaires (I), qui au niveau compromis complexité - performances nous offre des degrés de liberté supplémentaires, notamment sur le choix des paramètres  $r_1$  et  $r_2$ .

La complexité de l'algorithme EMS dépend des valeurs prises par  $r_1$  et  $r_2$  dans les différents (U-U, U-I, I-I) étapes de l'implantation récursive.

Ainsi, le choix suivant:

$$\begin{cases} \text{U-U} & : (r_1 = r_2 = q) \\ \text{U-I} & : (r_1 = r_2 = q) \\ \text{I-I} & : (r_1 = r_2 = q) \end{cases}$$

Correspond à l'algorithme présenté en [4], et également à la complexité la plus grande (infaisable pour des corps d'ordre trop élevés) pour l'algorithme EMS.

Une version moins coûteuse de l'algorithme correspond au choix de paramètres suivants:

$$(A) \begin{cases} \text{U-U} & : (r_1 = r_2 = n_m \ll q) \\ \text{U-I} & : (r_1 = n_m r_2 = q) \\ \text{I-I} & : (r_1 = r_2 = q) \end{cases}$$

Avec ce choix de paramètres, on se ramène à la même complexité que l'implantation bloc (non-récursive) proposée dans [5]. La complexité globale d'un nœud de parité est dans ce cas approximativement<sup>1</sup>:

$$C = 3 \{ 2n_m^2 + (2d_c - 4)n_m q + (d_c - 4)q^2 \} \quad (3)$$

Nous avons fait une étude exhaustive de la comparaison de complexité basé sur l'équation (3).

Pour quantifier la performance des algorithmes de décodage, nous calculons le seuil  $\delta$  de convergence du décodeur en utilisant un algorithme d'évolution de densité, outil désormais classique pour l'étude des codes LDPC [1]. Ce seuil correspond au  $(E_b/N_0)$  minimal au delà duquel un code de taille infini atteint une probabilité d'erreur nulle. Ainsi, plus le seuil  $\delta$  est faible, meilleures sont les performances. Nous utiliserons le code régulier ( $d_v = 2, d_c = 4$ ) de rendement 0.5 comme base d'étude, et ce pour des ordres de corps de Galois  $q = 64, 128, 256$ .

La figure FIG.3 trace le logarithme de la complexité par nœud de parité de l'approche récursive (3) en fonction de la valeur du seuil de convergence  $\delta$ . Très logiquement, la complexité requise augmente de façon très importante lorsqu'on tente de se rapprocher du seuil de convergence optimal, donné par le seuil de l'algorithme BP non-simplifié sur  $\text{GF}(256)$ . Notons également que les codes dans  $\text{GF}(64)$  sont les plus simples à décoder, mais qu'il sont limités en performances puisque leur seuil minimal se trouve à 0.15dB de la limite (seuil BP). Enfin, ces courbes montrent qu'à performance donnée, un plus gros effort est nécessaire pour passer de  $\text{GF}(128)$  à  $\text{GF}(256)$  que pour passer de  $\text{GF}(64)$  à  $\text{GF}(128)$ . La conclusion est donc que si le code le permet, pour une performance donnée, il est plus avantageux de considérer le plus petit corps possible.

1. On néglige la complexité due à  $S_0(\alpha_3^{(i)})$  car l'utilisation de cet ensemble peut être réduite à seulement certaines étapes



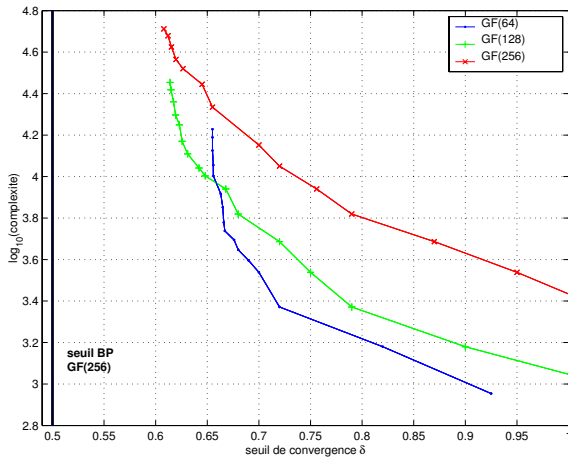


FIG. 3: Comparaison de complexités de l'algorithme EMS-(A) pour différents ordres de corps

## 5 Algorithme EMS à complexité minimale

Pour un choix de  $n_m$  (nombre de maximums) donné, la complexité minimale de l'implantation récursive est obtenue avec les paramètres :

$$(\mathcal{B}) \begin{cases} \text{U-U} & : (r_1 = r_2 = n_m) \\ \text{U-I} & : (r_1 = r_2 = n_m) \\ \text{I-I} & : (r_1 = r_2 = n_m) \end{cases}$$

La complexité de cette approche est d'ordre  $O(n_m^2)$  et la valeur exacte est donnée par :

$$C = 3 \times 3(d_c - 2)n_m^2 \quad (4)$$

L'un des intérêts de la méthode proposée ci-dessus réside dans la complexité bien moindre que celle donnée par la formule (3). Dans la suite, on présente une comparaison complexité - performances entre deux versions de complexités différentes de l'algorithme EMS. La première version, est basée sur l'hypothèse que chaque message (U ou I) utilisé pour le calcul d'un noeud de parité prend en compte seulement  $n_m$  valeurs (choix paramètres  $(\mathcal{B})$ ), la deuxième version de complexité correspond au choix des paramètres  $(\mathcal{A})$ .

La FIG.4 présente la perte de performances entre les deux versions de complexité, la moins complexe figure en trait plein et la plus complexe en pointillé, pour un code LDPC non-binaire sur GF(256) ( $d_v = 2, d_c = 4$ ) comportant K=1504 bits d'information.

L'écart entre les deux algorithmes s'explique par l'utilisation partielle de l'information apportée par les messages U et I. Cet écart est fortement dépendant de l'ordre du corps mais semble insensible à la variation du rapport signal à bruit  $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$ .

Suite à cette observation, nous nous sommes intéressés à l'influence de  $n_m$  sur les performances de décodage de l'algorithme EMS, pour réduire l'écart entre les courbes tout en conservant un important gain de complexité.

Dans le cadre de l'exemple de la figure FIG. 4, il suffit de choisir  $n_m = 20$  pour l'algorithme EMS à complexité minimale (EMS-(B)) pour récupérer toute la perte de performance. Même avec cette valeur plus grande de  $n_m$ , le gain de com-

plexité entre l'algorithme EMS-(B) et EMS-(A) est d'un ordre de grandeur 10.

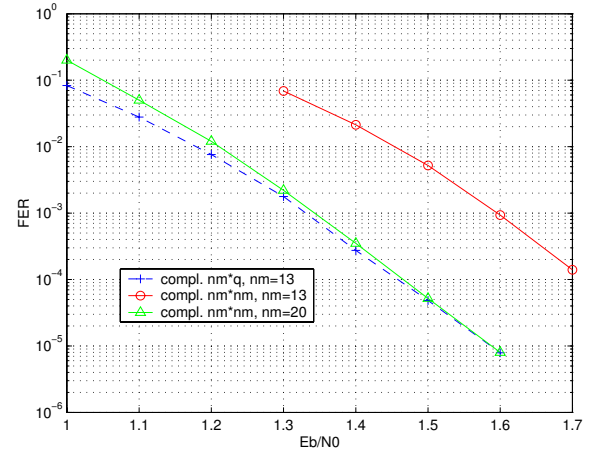


FIG. 4: Performances comparées des algorithmes EMS-(B) et EMS-(A) pour différents valeurs de  $n_m$

## 6 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé une implantation récursive de l'algorithme EMS [5] qui nous a permis de développer de nouvelles versions de l'algorithme EMS à complexité réduite (EMS-(B)). L'algorithme EMS-(B) est un bon candidat pour une éventuelle implantation hardware d'un décodeur LDPC non-binaire en raison de sa complexité inférieure à celle des autres algorithmes existants. De plus la dégradation des performances constatée est négligeable.

## Références

- [1] T.J. Richardson, M.A. Shokrollahi and R.L. Urbanke, "Design of Capacity-Approaching Low-Density Parity Check Codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 47, pp. 619-637, Feb. 2001.
- [2] M. Davey and D.J.C. MacKay, "Low Density Parity Check Codes over GF(q)," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 2, pp. 165-167, June 1998.
- [3] L. Barnault and D. Declercq, "Fast Decoding Algorithm for LDPC over GF(2^q)," *The Proc. 2003 Inform. Theory Workshop*, Paris, France, pp. 70-73, Mar. 2003,
- [4] H. Wymeersch, H. Steendam and M. Moeneclaey, "Log-Domain Decoding of LDPC Codes over GF(q)," *The Proc. IEEE Intern. Conf. on Commun.*, Paris, France, June 2004, pp. 772-776.
- [5] D. Declercq and M. Fossorier, "Extended MinSum Algorithm for Decoding LDPC Codes over GF(q)," *ISIT'05*, Adelaide, Australia, Sept. 2005.

# Transmission prioritaire JPEG2000 sur lien sans fil

Benoît Parrein, Nicolas Normand, Patrick Le Callet  
IRCCyN / IVC, École polytechnique de l'université de Nantes,  
rue Christian Pauc, 44306 Nantes cedex 3, FRANCE

Benoit.Parrein@univ-nantes.fr, Nicolas.Normand@univ-nantes.fr, Patrick.Lecallet@univ-nantes.fr

**Abstract** — This paper presents an instance of priority encoding transmission system based on an exact and discrete Radon transform called the Mojette transform. The system includes an optimization process constrained jointly by the hierarchy of the source and by the channel property. In the framework of JPEG2000 image wireless transmission, the hierarchy is characterized by an objective quality evaluation which is well correlated with the human judgement and the channel estimation is realized by an exponential loss profil. The solution is compared with the system of JPEG2000 WireLess (JPWL) based on the PSNR criteria and the Reed-Solomon codes.

## 1 Introduction

La norme JPEG2000 étend dans sa partie 11 le processus de compression d'image aux aspects de transmission sans fil de manière à architecturer un véritable système multimédia communicant sur des canaux radio. Outre le cœur du système de codage normalisé, la transmission JPEG2000 WireLess (JPWL) propose une protection inégale pilotée par de l'information sémantique renseignant sur la sensibilité aux erreurs de transmission pour chaque portion de flux codé. Dans cette perspective, le codage de source n'a plus seulement pour objet une optimisation débit-distorsion mais également un apport en termes de fonctionnalités et d'interactivité (JPIP) ainsi qu'une adaptation à un milieu communicant spécifique. Pour cette dernière, le document de travail [1] propose une protection inégale concentrée sur les en-têtes principaux et de suite partant du fait que toute erreur à ces niveaux a un effet rédhibitoire sur le flux image. La sensibilité aux erreurs est caractérisée par le PSNR et des codes correcteurs classiques de type Reed-Solomon sont appliqués à un niveau symbole pour réaliser cette protection. Dans [2], les codes (160,64), (80,25) et (40,13) sont mis en œuvre ce qui se traduit par des taux de redondances respectifs de 1,50 à 2,20 ajoutés aux quelques 500 octets des en-têtes. Cette très forte protection améliore manifestement les probabilités de succès au décodage lorsque des pertes binaires surviennent puisqu'elle garantit l'intégrité des en-têtes que le canal affiche de bonnes ou de très mauvaises propriétés. Cependant, l'évaluation des performances et la protection au niveau des symboles sont fortement éloignées des canaux réels sans fil vus par exemple au travers des déclinaisons du protocole IEEE802.xx (WLAN ou WiMax). Plus précisément, l'approche en cours de normalisation ne considère à aucun moment l'efficacité des mécanismes opérés au niveau des couches Multiple Access Control (MAC) et physique (PHY) tels que les ARQ (Automatic Request Query) hybrides mêlant codage (turbo-code) et retransmission ni la recherche exploratoire effectuée depuis une dizaine d'années sur la protection inégale [3] ou encore les nouvelles représentations basées sur une description multiple de l'information [4]. Dans ce papier,

nous considérons les deux couches PHY et MAC efficaces à délivrer des symboles intègres de manière à nous consacrer exclusivement à la protection inégale au niveau paquet de la hiérarchie de la source pilotée par une méta-information sémantique pertinente.

## 2 Présentation du système de protection inégale

Ce système de protection inégale a pour objectif de supporter la hiérarchie de la source de façon transparente pour le canal. Les paquets (ou descriptions) engendré(e)s doivent être de même importance en termes de reconstruction. On parle de banalisation des paquets. Cette opération peut être faite à l'aide de l'opérateur Mojette qui effectue des projections d'un espace discret 2D vers un ensemble 1D plus ou moins redondant. Plus de résultats en termes de restructurabilité et de performances sont disponibles au lecteur dans [6]. Pour la suite, les projections Mojette ou paquets sont autant de descriptions banalisées disponibles pour la couche MAC.

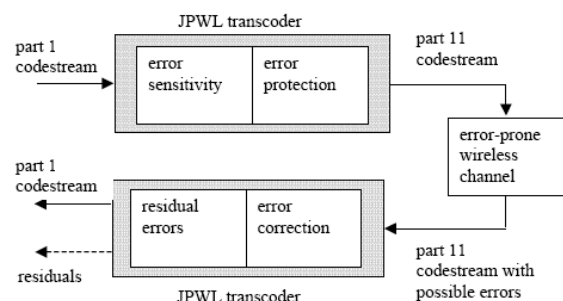


FIG. 1 – Le schéma général de la protection inégale est extrait de [1] dans sa partie transcodage. Elle implique une description de la sensibilité aux erreurs et une protection aux erreurs réalisés respectivement dans ce papier à l'aide d'un critère perceptuel et de la transformation Mojette.

## 2.1 Allocation de redondance optimale

De manière simple, la transformation Mojette peut fournir une description redondante de l'information initiale. En effet, à un sous-ensemble suffisant de projections, peut s'adjoindre un nombre de projections supplémentaires qui réalisent la protection puisqu'elle autorise la perte du même nombre. L'allocation de redondance optimale a pour objet de déterminer ce nombre de projections supplémentaires en fonction de la description de la sensibilité aux erreurs (ESD) et de la probabilité de recevoir l'information initiale. Dans le cas d'une source scalable, décomposable en sous-flux, l'optimisation est effectuée de manière globale pour obtenir pour chaque sous-flux le nombre de projections nécessaires ce qui réalise la protection inégale. L'allocation de redondance est déterminée par la fonction  $\rho$  fonction qui associe à un sous-flux le nombre de projections nécessaire à sa reconstruction. Soit  $s$  l'indice des flux allant de 1 à  $L$ , la structure emboîtée de la source suppose que le sous-flux  $s$  n'est utilisable que si le sous-flux  $s - 1$  est reconstruit, ce dernier nécessite donc au plus autant de projections que le sous-flux  $s$  et la fonction  $\rho$  est donc croissante. La fonction  $\rho$  optimale est celle qui maximise la qualité en termes d'espérance mathématique de la qualité reconstruite au décodeur :

$$E(Q) = \sum_{t=1}^L p_{\rho(t)} Q_t = \sum_{t=1}^L \left( p_{\rho(t)} \sum_{s=1}^t q_s \right) \quad (1)$$

$$= \sum_{s=1}^L \left( q_s \sum_{t=s}^L p_{\rho(t)} \right) = \sum_{s=1}^L c_{\rho(s)} q_s, \quad (2)$$

où  $p_n$  est la probabilité de recevoir exactement  $n$  projections,  $c_n$  est la probabilité de recevoir au moins  $n$  projections :  $c_n = \sum_{i=n}^L p_i$  ;  $Q_n$  est la note de qualité associée à l'image reconstruite des sous-flux 1 à  $n$  ;  $q_s$  représente l'incrément de qualité apporté par le sous-flux  $s$  :  $q_s = Q_s - Q_{s-1}$ . En pratique, le calcul considère l'évolution de  $E(Q)$  engendrée par l'insertion d'un sous-flux pour chaque valeur licite de redondance.

Cette maximisation de l'espérance mathématique de la qualité constitue le lien entre le codage source et le codage de canal en considérant conjointement les propriétés de la source (incrément de qualité) et la voie de retour canal (probabilités de réception).

## 2.2 Évaluation objective des incréments de qualité

L'évaluation automatique de qualité visuelle d'images ayant subi des dégradations est un problème complexe. Dans la littérature, le PSNR est trop souvent le seul critère objectif de qualité utilisé alors qu'il est bien connu qu'un tel critère n'est pas suffisamment corrélé avec le jugement humain. Nous développons dans le laboratoire des métriques bien plus performantes en nous appuyant sur une modélisation fine du système visuel humain [7]. Dans le cadre de ce travail, nous utilisons une métrique bien adaptée aux dégradations liées à une compression JPEG 2000. Le critère consiste d'abord à projeter une image de

référence et sa version dégradée dans un espace perceptuel de manière à normaliser les différences en fonction de leur seuil de visibilité. L'espace perceptuel inclut la prise en compte de la perception des couleurs et des effets de masquage. L'étape clé suivante combine les erreurs de manière à fournir une seule note de 0 à 5. La manière d'opérer cette combinaison est ici adaptée au cas JPEG 2000. À l'aide de ce critère, on peut donc déterminer les incréments de qualité apportés par chaque sous-flux en comparant l'image de référence à sa version reconstruite exploitant les sous-flux disponibles. Dans ces conditions, une comparaison des courbes débit-distortion obtenues en utilisant le PSNR d'une part, et le critère objectif d'autre part, montre clairement les insuffisances du critère PSNR.

## 2.3 Code correcteur géométrique Mojette

Partant de l'optimisation précédente, nous disposons pour chaque sous-flux de la redondance allouée à savoir du nombre de projections nécessaires pour reconstruire progressivement l'information initiale hiérarchisée. Cette reconstruction repose sur le critère de Katz qui impose sur un support rectangulaire de largeur  $P$  et de hauteur  $Q$  et pour des angles  $(p_i, q_i)$  de vérifier au moins une de ces deux conditions :

$$\sum_i |p_i| \geq P \text{ ou } \sum_i |q_i| \geq Q. \quad (3)$$

Le choix des angles est dicté par l'équivalence des projections en termes de reconstruction et par la vérification du critère de Katz dans la seule direction verticale. Pour ce faire, les angles de type  $(p_i, 1)$  pour  $i = 1, \dots, N$  sont retenus. De cette manière, sur  $N$  projections envoyées,  $M_s$  projections parmi  $N$  sont nécessaires et suffisantes pour reconstruire le flux  $s$ . Dès lors sachant  $M_s$  et la taille des sous-flux, des supports 2D sont constructibles pour chaque flux  $s$ . Dans ce cadre appliqué à la transmission, ces supports agissent comme des mémoires tampons qualifiées de géométriques. De capacité égale aux flux qu'elles protègent, ces mémoires tampon ont des niveaux de reconstruction qui diffèrent en fonction des niveaux de priorité. L'exemple de la figure 2 illustre le procédé. Elle fait état d'une transmission avec trois mémoires tampons géométriques correspondant à trois niveaux de priorités. Sur les quatre projections envoyées  $\{p_{-2,1}, p_{-1,1}, p_{0,1}, p_{1,1}\}$ , deux projections (respectivement trois et quatre) sont nécessaires pour reconstruire la mémoire tampon un (resp. deux et trois).

## 3 Application à la transmission d'une image

### 3.1 Résultats

Notre application concerne la transmission de l'image test 'Lena' en niveau de gris de dimension  $512 \times 512$ . Un modèle de perte de paquet exponentiel est retenu pour valider notre approche en environnement sans fil. Un codage avec perte JPEG2000 est appliqué à l'image test avec un

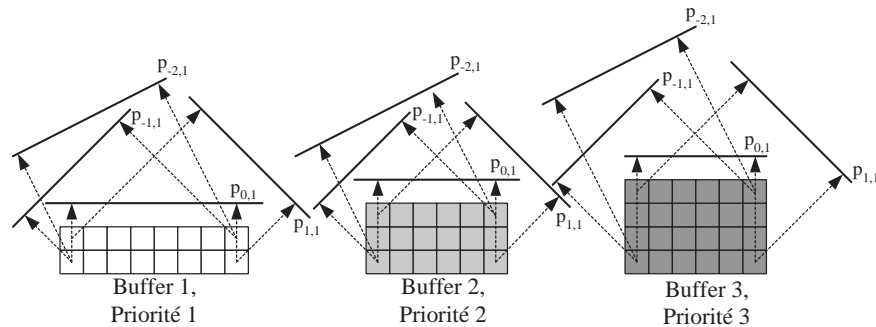


FIG. 2 – Exemple de protection inégale mettant en jeu trois mémoires tampons géométriques pour quatre angles de projection. Deux projections (respectivement trois et quatre) sont nécessaires pour reconstruire la mémoire tampon un (resp. deux et trois).

débit cible de 0,5 bpp, 5 niveaux de décomposition ondelette et seulement 2 couches de qualité de manière à limiter le nombre de paquets JPEG2000 dans cet exemple. Au nombre de 12, ils concernent chacun une couche de qualité, un niveau de décomposition (incluant la sous-bande LL), une composante. À chaque paquet est affectée une note objective de qualité correspondant à son décodage et à celui des paquets en amont du flux. Considérant les paquets vides fournis par le codage arithmétique et les paquets n'apportant pas significativement d'incrément de qualité, on procède à une agrégation des paquets afin d'obtenir les sous-flux source hiérarchisés par leur note objective. De cette façon, six sous-flux sont retenus qui correspondent à l'agrégation des paquets 1, 2 et 3, au paquet 4, au paquet 5, à l'agrégation des paquets 6, 7 et 8, au paquet 9, au paquet 10 et à l'agrégation des paquets 11 et 12. Le tableau 1 résume la constitution des sous-flux source.

À partir de cette description grabuable de la source, on effectue l'allocation optimale de redondance décrite au §2.1 au regard des incréments de qualité et du profil exponentiel de perte. La protection inégale s'applique alors sur l'ensemble du flux (en-tête et données images). Elle se caractérise dans le cas d'un code géométrique Mojette par un nombre de projections suffisantes parmi un nombre  $N$  de projections envoyées. De l'ordre de grandeur du nombre de paquets JPEG2000,  $N$  est fixé ici à 16 projections. Initialement, aucun des sous-flux n'est transmis se traduisant par un indice de protection à  $N+1$ . Le nombre de projections suffisantes pour reconstruire chaque sous-flux est décrémenté. L'espérance de la note objective qualité correspondant à la protection inégale et à un profil exponentiel de perte est calculée. La figure 3 résume la procédure pour une valeur de perte de paquet moyenne égale à 10%. Les différentes singularités (au nombre de six) correspondent à la décision du système de protection d'ajouter à la transmission un nouveau sous flux pour atteindre l'objectif de qualité. Une lecture selon l'axe des ordonnées permet de fixer un seuil de qualité acceptable et d'obtenir la protection inégale à réaliser. Par exemple, une note de 4,51 peut être obtenue par une protection de type 11-11-12-12-13-17 représentant pour chacun des six sous-flux le nombre de projections suffisantes. Le dernier sous-flux n'est ici pas transmis pour remplir cet objec-

tif. La taille des projections est de 843 octets pour un débit global du codage conjoint source canal de 0,41 bpp. De même, une lecture selon l'axe des abscisses est possible lorsque un débit maximal est stipulé par le canal. Si une redondance de 5% est tolérée pour la protection de la source JPEG2000 i.e 0,535 bpp en débit global la qualité espérée est de 4,62 avec une protection de type 8-8-10-10-10-17. Dans cet exemple, la perte de la moitié des projections est compensée en vue de reconstruire les flux 1 et 2.

### 3.2 Performances

La faible densité des relations de parités autorise un décodage itératif rapide par la transformation Mojette inverse. Les sous-flux prioritaires sont reconstruits naturellement en premier. Contrairement au codage JPEG2000 sans protection, la perte des premières projections n'est pas rédhibitoire pour le décodage. Les dégradations sont progressives quelle que soit la position de l'effacement dans le flux. Les projections ont une même capacité de reconstruction. En cela, on se rapproche des codes MDS (Maximum Distance Separable) auxquels les codes Reed-Solomon appartiennent. Pour ce codage  $M$  mots du code parmi  $N$  suffisent pour reconstruire le message. Le schéma présenté est de type  $(1 + \varepsilon)MDS$  où  $\varepsilon$  représentant le surdébit nécessaire au décodage est de l'ordre de 1% pour la transmission d'une image couleur  $512 \times 512$  pour une complexité linéaire avec les symboles d'informations et le nombre de projections en  $\mathcal{O}(IN)$ . Par ailleurs, la protection appliquée au niveau des paquets JPEG2000 nous autorise une fine granularité de protection contrairement aux approches par codes correcteurs classiques [5].

## 4 Conclusions

Dans ce papier, nous avons présenté une réalisation de transmission prioritaire JPEG2000 sur un modèle de lien sans fil par codage géométrique Mojette. On démontre par l'application que la remontée d'information canal au sein du codage source est prépondérante pour une transmission visant à l'optimisation de la qualité au décodage. Ainsi, dans les cas critiques de transmission la stratégie de pro-

TAB. 1 – Agrégation des paquets JPEG2000 pour la constitution des sous-flux source à protéger.

#paquet	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
taille (octets)	247	542	1266	2303	2615	991	1	113	472	1276	2741	3538
note objective	1.00	1.00	1.10	3.41	4.21	4.50	4.50	4.50	4.63	4.68	4.88	4.89
#sous-flux	1			2	3	4			5		6	
débit source (bpp)	0.0807			0.1509	0.2307	0.2645			0.3178		0.5094	

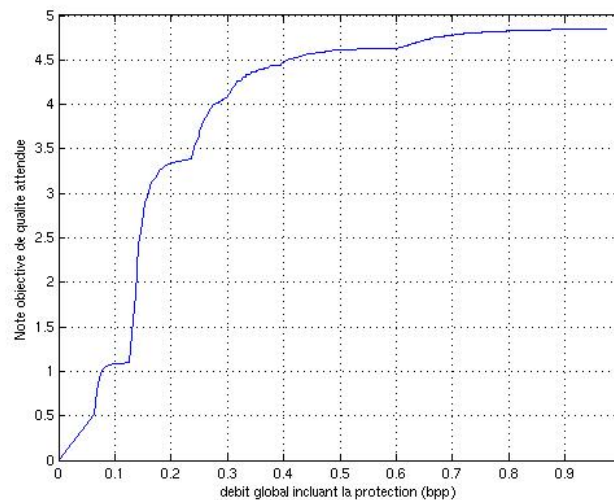


FIG. 3 – Note objective de qualité attendue à la réception d'une source JPEG2000 (Lena) protégée de manière inégale. Résultat de la procédure d'optimisation pour un profil de perte de paquet exponentiel de valeur moyenne égale à 10%.

tection inégale opte généralement pour ne pas transmettre les flux qui n'apportent pas significativement d'incrément de qualité. De cette manière, une redondance accrue est allouée aux flux prioritaires. La perspective de ce travail est la régulation temporelle de la protection afin de correspondre avec les comportements non stationnaires des canaux Internet et également supporter la protection inégale d'une source vidéo.

## Références

- [1] JPEG2000 image coding system - Part 11 : Wireless JPEG 2000 - Working draft version 3.1. ISO/IEC JTC1/SC29/WG1 WG1N3294, Avril, 2004.
- [2] F. Dufaux and D. Nicholson. JPWL : JPEG2000 for wireless applications, Proc. SPIE, Applications of Digital Image Processing XXVII, 2004.
- [3] A. Albanese, J. Blömer, J. Edmonds, M. Luby, and M. Sudan, "Priority Encoding Transmission", IEEE Trans. Inform. Th., vol.42, pp.1737-1744, nov. 1996.
- [4] V. Goyal, "Multiple Description Coding : Compression Meets the Network," IEEE Signal Processing Magazine 18, pp. 74-93, sept. 2001.
- [5] A. Mohr and E. A. Riskin and R. E. Ladner, "Unequal Loss Protection : Graceful Degradation of Image Quality over Packet Erasure Channels Through Forward Error Correction", Journal on Sel. Areas in Com., vol. 18, no.6, pp.819-628, juin 2000.
- [6] B. Parrein. Description multiple de l'information par transformation Mojette. Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 2001.
- [7] M. Carnec, P. Le Callet, D. Barba. Full Reference And Reduced Reference Metrics For Image Quality Assessment. ISSPA 2003, Paris, Juillet 2003.

# Ultra Wide Band Receiver based on Turbo-Equalization

F. BENEDETTO, G. GIUNTA, A. NERI, D. BLASI

Digital Signal Processing and Multimedia Communications Lab.

Dept. of Applied Electronics, University of ROMA TRE, Via della Vasca Navale 84, 00146 Rome, Italy.

fbenedetto@ieee.org, giunta@ieee.org, neri@uniroma3.it, blasottolo@yahoo.it

**Résumé** – La technologie de l'Ultra-Large-bande (UWB) est actuellement étudiée comme une solution utile pour les systèmes de communications sans fil de grande capacité. Le rapport élevé de la largeur de bande du signal à la largeur de bande de l'information rend la technologie d'UWB attrayante pour des applications d'accès multiple. La synchronisation et l'égalisation du canal sont les questions cruciales dans le développement de la technologie d'UWB, dû à la courte durée des signaux transmises. Dans cette contribution, nous proposons un turbo-égaliseur pour des récepteurs d'UWB, afin d'améliorer l'exécution de l'approche conventionnelle (récepteur RAKE). En particulier, les résultats obtenus ont démontré un perfectionnement d'exécution, en termes de taux d'erreurs sur les bits, avec une complexité computationnelle menable.

**Abstract** – Ultra-Wide-band (UWB) technology is currently being investigated as a promising solution for high-capacity wireless communications systems. The high ratio of the transmitted signal bandwidth to the information signal bandwidth makes UWB technology attractive for multiple-access applications. Channel equalization and time synchronization are crucial issues in the development of the UWB technology, due to the short duration of the transmitted pulses. In this contribution, we propose a turbo-equalizer for UWB receivers, in order to improve the performance of the conventional approach (i.e. Rake receiver). In particular, the obtained results have evidenced a performance enhancement, in terms of bit error rate, with a tractable computational complexity.

## 1. Introduction

Ultra-Wide-band (UWB) technology is currently being investigated as a promising solution for high-capacity wireless communications systems. The very small power spectral densities (PSDs) of UWB systems ensure only minimal mutual interference between UWB and other communication applications [1]-[2]. The high ratio of the transmitted signal bandwidth to the information signal bandwidth makes UWB technology attractive for multiple-access applications. A time-hopping (TH) sequence is applied in UWB systems to eliminate catastrophic collisions in multiple access [10]. Several modulation techniques have been proposed for UWB signals, including pulse-position modulation (PPM) and several forms of pulse amplitude modulation (PAM) such as binary phase-shift keying (BPSK) and on-off keying (OOK) [3], [10]. Currently, TH-PPM and TH-BPSK UWB systems are often considered as alternatives for a given application, although the differences between the two systems lead to different performance characteristics [4].

Moreover, UWB technology is characterized by the transmission of very short pulses which occupy large frequency bandwidths. Due to a very short impulse occupies a bandwidth much greater than the transmitted symbol rate, UWB signals can also be considered as a spread spectrum technology. Channel equalization and time synchronization are crucial issues in the development of the UWB technology, due to the short duration of the transmitted pulses. Conversely, achieving the potential of UWB is challenging due to the difficulty of accurate synchronization and channel estimation, inhibiting a receiver's ability to fully exploit the multi-path diversity. Rake receiver, as one of the most popular solutions for the channel equalization, has been

proposed for the UWB system to capture multi-path energy and mitigate inter-symbol interference (ISI) [5]-[7]. Novel channel estimation strategies can be devised [8].

This is the key point that this work focuses on, addressing some of the previous issues. In this contribution, in fact, we propose a turbo-equalizer for UWB receivers, in order to improve the performance of the conventional methods. We are showing in the following sections that the turbo-equalization approach allows implementing a more efficient UWB receiver than the conventional scheme (i.e. Rake receiver), in terms of bit error rate, with tractable computational complexity. Turbo-equalization is an iterative equalization and decoding technique that can achieve equally impressive performance gains for communication systems that send digital data over channels that require equalization, i.e. those that suffer from ISI [9]. The way that most practical receivers have been designed is to first process the received observations to account for the effects of the channel and to make estimates of the transmitted channel symbols that best fit the observed data. A number of criteria for performance have been used for such equalizers, ranging from those attempting to simply invert the channel to linear and non-linear equalizers based on minimizing a mean-squared error (MSE) metric to even those that are symbol-error-rate (SER) optimal [9].

This work is organized as follows. Section 2 describes the system model while Section 3 illustrates in details the proposed turbo-equalization technique. In Section 4, the UWB receiver we propose is depicted in details, while in Section 5 simulation results are used to show the performance benefits of the proposed approach. Conclusions are finally depicted in Section 6.

## 2. System Model

In this contribution, as channel model we utilize the same channel model that has been worked out by the IEEE 802.15SG3a research group and described in [12]. This model is inspired by the Markovian Saleh/Valenzuela (S/V) channel model: the multi-path components scattered from the same impulse are grouped in *cluster*, at the receiver side. Each cluster is composed by some *rays*, i.e. by some pulses. The clusters arrival time is modelled as a Poisson process with rate  $\lambda$  while the rays arrival time is characterized by a rate  $\lambda$ . In the S/V model, the gain of each ray is a complex random variable whose phase can uniformly vary in the interval  $[-\pi, \pi]$ ; in the channel model we assume, it becomes a real variable whose phase, now a discrete random variable, can assume only two values:  $\pi$  (in case of direct ray) or  $-\pi$  (reflected ray) with the same probability. In this work, we choose a Direct Sequence/Spread Spectrum (DS/SS) UWB system based on a BPSK modulation. This choice has been driven by the fact that, according to [11], time-based DS/SS UWB systems are characterized by better performance in terms of bit-error-rate (BER) than time-based TH UWB systems. Hence, in a DS/SS UWB system, every bit,  $c_k$ , is transmitted on  $N_s$  pulses with amplitude given by:

$$x_k = A \cdot p_k \cdot (-1)^{c_k}, \quad k = 0, 1, \dots, N_s - 1 \quad (1)$$

where  $p_k$  is the  $k$ -th pseudonoise (PN) code and  $A$  is a constant depending on the power used during transmission. Therefore, the signal transmitted by the  $i$ -th user can be expressed as [12]:

$$s^{(i)}(t) = \sum_k x_k^{(i)} \sum_{n=0}^{N_s-1} p_n^{(i)} w(t - nT_f - kN_sT_f) \quad (2)$$

where  $T_f$  is the frame time and  $w(t)$  the transmitted waveform. Different users are identified by different PN sequences, chosen to be orthogonal one to the other, in order to minimize the effects due to the cross-interference.

Another crucial issue that must be addressed is the problem of time-synchronization. In fact, time-synchronization is still a great challenge in UWB systems design, because of the short time duration of the pulses (i.e. of the order of  $ns$ ). Moreover, a UWB signal is affected by time jitter. This means that the signal delay  $\tau_k$  (i.e. the signal delay corresponding to the  $k$ -th frame) can be modelled as a Gaussian random process as follows [14]:

$$\tau_k = \tau_{k-1} + \xi, \quad \xi = N(0, \sigma_\xi^2) \quad (3)$$

The synchronization is acquired during the preamble. The synchronization algorithm must be repeated at least every frame in order to avoid time jitter, updating the optimal sampling instant [13]. The low computational complexity of the synchronization algorithm makes all these iterations possible: in fact, the algorithm estimates the signal delay on the current frame as  $\tau_k = \hat{\mu}_k T_s$ , where  $T_s = T_f / N_f$  is the sampling time and  $N_f$  the number of samples per frame. Therefore, there are only  $N_f$  possible values of  $\hat{\mu}_k$  among which the algorithm can choose, according to the following rule:

$$\hat{\mu}_k = \arg \max_{0 \leq \mu_k \leq N_f - 1} \left\{ \sum_{m=0}^{M_f-1} \sum_{l=0}^{L-1} \left| r_{m, [l+\mu_k]N_f} - \frac{1}{M_f} \sum_{j=0}^{M_f-1} r_{j, [l+\mu_k]N_f} \right|^2 \right\} \quad (4)$$

where:

$$r_{m, [l+\mu_k]N_f} = \begin{cases} r((k+M_f-1)T_f + (l+\mu_k)T_s), & l+\mu_k \leq T_f \\ r((k+M_f-2)T_f + (l+\mu_k)T_s), & l+\mu_k > T_f \end{cases} \quad (5)$$

and  $r(t)$  is the received signal.



Fig. 1: block scheme of an UWB transmitter

## 3. Turbo Equalization

In this section, we are showing how to implement a turbo-equalizer receiver for an UWB system. According to the scheme of fig. 1, using a convolutional code of rate  $K_c/N_s$ , the encoder produces an output of  $N_s = 2K_c$  bit  $\mathbf{b} = [b_0, b_1, \dots, b_{N_s-1}]^T$  given an input of  $K_c$  bit  $\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_{K_c-1}]^T$ . An interleaver is also added, to avoid long error bursts, giving  $N_s$  bit  $\mathbf{c} = [c_0, c_1, \dots, c_{N_s-1}]^T$  as output. Finally the BPSK mapping produces the symbols to be transmitted.

The turbo-equalization scheme we use in this work is composed by four steps in cascade: once the transmitted channel symbols have been estimated, they can be de-mapped into their associated code bits, de-interleaved and finally decoded using a bit error rate (BER) optimal decoder for the error control coding (ECC). Once the ECC processes the information, it can, in turn, generate its own information (i.e. the “soft” information [9]) indicating the relative likelihood of each of the transmitted bits. This soft information from the decoder could then be properly interleaved and taken into account in the equalization process, creating a feedback loop between the equalizer and the decoder. This feedback loop structure is essentially the proposed turbo-equalization approach, i.e. the *a posteriori* information (the output of the decoder) can be used as the *a priori* information (input for the equalizer). Analogously, the output of the equalizer can be used to obtain some information to feed up the decoder in the following iteration.

The block scheme is illustrated in fig. 2, where  $\mathbf{y}$  and  $\hat{\mathbf{h}}$  represent, respectively, the received signal and the estimated channel impulse response, expressed by their representative vectors. In our turbo-equalization scheme, as in the turbo decoding approach in general, only extrinsic information is fed back, as depicted in fig. 2. Feeding back intrinsic information would create a direct positive feedback, which would lead to fast convergence but typically far from the globally optimal solution.

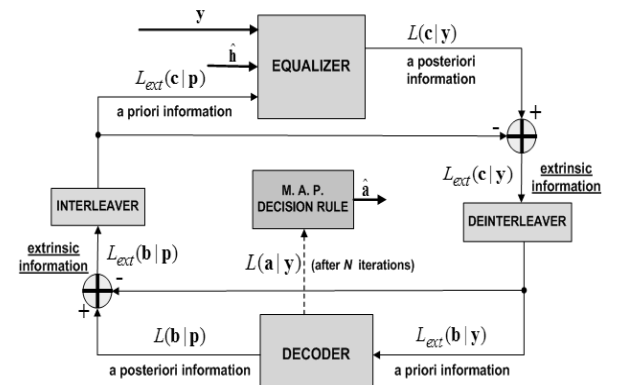


Fig. 2: Block scheme of the proposed turbo-equalizer receiver.



The interleaver and de-interleaver are included into the iterative loop to further minimize the direct feedback effect. Moreover, a common *maximum a posteriori probability* (MAP) rule is used in the scheme to make a decision on the received bit [9]. The MAP decision is based on the optimal decision rule that leads to the choice of the bit 0 if  $L(a_k|y) \geq 0$ , and of the bit 1 if  $L(a_k|y) < 0$  being  $L(a_k|y) = \ln(P(a_k=0|y) / P(a_k=1|y))$  the *a posteriori* likelihood ratio (see fig. 3). As illustrated in fig. 2, the equalization forward/backward algorithm needs the channel impulse response  $\hat{h}$ , that can be obtained using a least square technique.

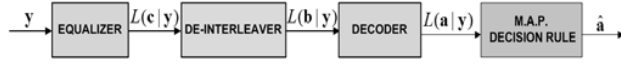


Fig. 3: MAP decision rule

#### 4. UWB Receiver

The synchronization algorithm needs to know the channel impulse response. During the preamble, the CIR can be easily estimated thanks to the knowledge of both the received and transmitted signal (the preamble is known at the receiver side), but problems arise at the end of the preamble. The receiver's design is therefore based on the following idea: once the preamble is over, the least square algorithm uses both the received samples and the estimates of the transmitted signal, i.e. the outputs of the turbo equalizer. The problem is that the turbo equalizer will not produce any bit, if the synchronization block is not updated before. On the other hand, the synchronization algorithm needs the channel estimates, that will not be evaluated, if the turbo equalizer doesn't work in the proper way (see fig.4).

Thanks to the short duration of both the UWB frame time (10÷100ns) and the symbol time, we can consider the channel as time-invariant (or at least slowly variant) during one symbol time. So, once the preamble is over, both the synchronization and the turbo equalization algorithm use the channel estimates evaluated by the least square algorithm, during the reception of the previous symbol. More in details, the synchronization algorithm requires the observation of at least  $M_f$  frames to properly work while the turbo-equalizer needs, obviously,  $N_s$  frames (one symbol). Therefore, the length of the preamble must be at least of  $(M_f + N_s)$ . Until the  $(M_f + N_s)$ -th frame has been received, the only active block in the receiver is represented by the synchronization algorithm. Then, once the  $(M_f + N_s)$ -th frame has been received, the turbo-equalizer can evaluate the first  $K_c$  data bits (i.e. the first symbol) using the estimates realized by the synchronization algorithm and corresponding to the last symbol of the preamble.

As depicted in fig. 4, from these  $K_c$  data bits (i.e. the bits corresponding to the first symbol), re-applying the convolutional code, the interleaver, and the BPSK mapping, the proper signal level ( $\hat{x}_k$ ) can be obtained. This latter, jointly with the received samples, allow the least square algorithm to estimate the channel coefficients that will be used both from the synchronizer and the turbo equalizer, during the reception of the second information symbol. Hence, from the reception of the second symbol until the end of the communication, the channel coefficients, estimated through the least square algorithm, are used by the synchronizer to sample the received signal at the optimal

sampling instant, and by the turbo-equalizer to estimate the bit transmitted during the sub-sequent symbol.

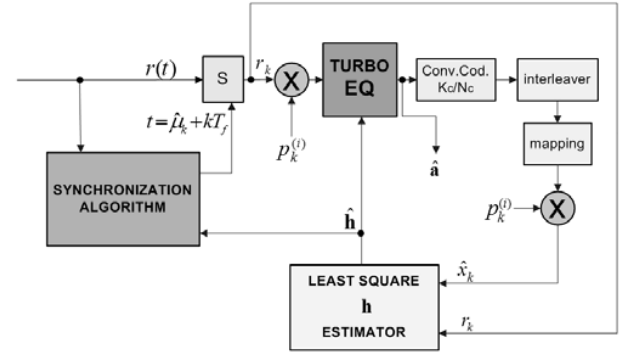


Fig. 4: Turbo-equalization and synchronization algorithm

#### 5. Simulation Results

We are showing in this section that the turbo-equalization approach allows implementing a more efficient UWB receiver than the conventional approach, in terms of bit error rate, with tractable computational complexity. We have used simulation analyses to evidence the achievable gain of the turbo-equalization technique applied to a UWB receiver, compared with the conventional approach (i.e. Rake receiver), as shown in the following figures. For this purpose a number of simulations have been carried out. The obtained results that we are showing in this contribution finally confirm the effectiveness of the proposed turbo-equalization procedure in presence of ISI.

The convolutional code was chosen with  $K_c = 4$  and  $N_s = 8$ , i.e. with a rate  $R = 1/2$ . We choose so low values for  $K_c$  and  $N_s$  in order to estimate the channel response as often as possible, because of the instability of the channel (following the model described in [12]). The number of considered multi-path components  $L = K \cdot N$ , being  $K$  and  $N$ , respectively, the maximum number of clusters and rays inside one cluster, was chosen equal to 106. fig. 5a shows the performance of the two receivers (Rake and Turbo-equalizer). From the graph, it can be easily seen that when no *a priori* information is used, i.e. when  $N = 0$ , the performance behavior is the same for both the receivers. The case  $N = 1$  shows how important is the role played by the *a priori* information, in terms of minimizing the effects of the interference. This trend is confirmed and enhanced using greater values for the number of iterations. Moreover, in our simulation trials we have taken into account the effects due to different speeds of channel variations. All the curves depicted in fig. 5b refer to the case  $N = 4$  of the turbo equalizer. In particular, the curve with  $M = 256$  of fig. 5b corresponds to the curve with  $N = 4$  in fig 5a, and refers to the situation where the channel response change in a significant way, every 256 frames (i.e.  $\approx 3.277 \mu s$ ). Remembering that, for each received frame, the channel impulse response is estimated from the previous  $N_s = 8$  received frames, the performance of the system obviously degrades if  $M$  decreases. In fact, if  $M = 2$  the channel change every two frames while the CIR is estimated and updated only every 8 frames.

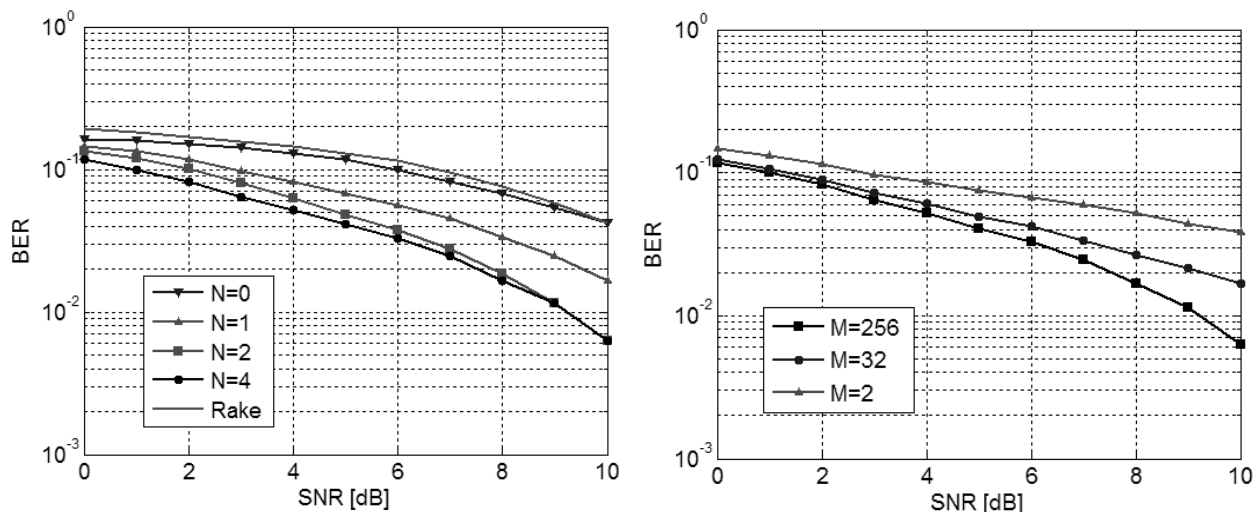


Fig. 5: Performance of the UWB turbo-equalizer receiver varying the number of iterations (left) versus the conventional approach (i.e. Rake receiver) and (right) with different channel variation speeds.

## 6. Conclusions

In this contribution, we proposed a turbo-equalizer for UWB receivers, in order to improve the performance of the conventional approach (i.e. Rake receiver). The turbo-equalization phase we use in this work is composed by four steps in cascade: once the transmitted channel symbols have been estimated, they can be de-mapped into their associated code bits, de-interleaved and finally de-coded using a bit error rate (BER) optimal decoder for the error control coding (ECC). We showed that the turbo-equalization approach allows implementing a more efficient UWB receiver than the conventional approach, in terms of bit error rate, with tractable computational complexity. We have used simulation analysis to evidence the achievable gain of the turbo-equalization technique applied to a UWB receiver. For this purpose, a number of simulations have been carried out. The obtained results finally confirm the effectiveness of the proposed turbo-equalization procedure in presence of ISI.

## Références

- [1] B. Hu and N.C. Beaulieu, "Accurate Evaluation of Multiple-Access Performance in TH-PPM and TH-BPSK UWB Systems," *IEEE Trans. on Comm.*, vol. 52, no. 10, Oct. 2004.
- [2] X. (G.) Gao, R. Yao, Z. Feng "Multi-band UWB System with Hadamard Coding", *IEEE 58<sup>th</sup> Veh. Techn. Conf.*, vol. 2, pp. 1288-1292, Oct. 2003.
- [3] G. Durisi, S. Benedetto, "Performance Evaluation and Comparison of Different Modulation Schemes for UWB Multiaccess Systems", *IEEE Int. Conf. on Comm.*, vol. 3, pp. 2187-2191, May 2003.
- [4] W. Siriwongpairat, M. Olfat and K. J. Ray Liu "On the Performance Evaluation of TH and DS UWB MIMO Systems", *IEEE Wireless Comm. and Networking Conf.*, vol. 3, pp. 1800-1805, March 2004.
- [5] M. L. Welborn, "System Considerations for Ultra-Wideband Wireless Networks", in *Proc. IEEE Radio and Wireless Conf.*, pp. 5-8, Boston, MA, Aug. 2001.
- [6] B. Mielczarek, M.-O. Wessman and A. Svensson, "Performance of Coherent UWB Rake Receivers with Channel Estimators", *IEEE 58<sup>th</sup> Veh. Techn. Conf.*, vol. 3, pp. 1880-1884, Oct. 2003.
- [7] D. Cassioli, M. Z. Win, F. Vatalaro and A. F. Molisch "Performance of Low-Complexity Rake Reception in a Realistic UWB Channel", in *Proc. of IEEE Int. Conf. on Comm.*, vol. 2, pp. 763-767, May 2002.
- [8] X. Peng, F. Chin, AS. Madhukumar, "Performance Studies of an Over-Sampling Multi-Channel Equalizer for a Multi-band UWB System", in *Proc. of IEEE Conf. on UWB Systems and Techn.*, pp.413 - 417, Nov. 2003.
- [9] R. Koetter, A.C. Singer and M. Tuchler, "Turbo Equalization", *IEEE Signal Proc. Magazine*, vol. 21, no. 1, pp. 67 - 80, Jan. 2004.
- [10] R. A. Scholtz, "Multiple Access with time hopping impulse modulation", in *Proc. IEEE Military Comm. Conf.*, Boston MA, Oct. 1993.
- [11] Z. Wu, F. Zhu, C. R. Nassar, "Performance comparison of frequency domain processing and time domain processing in ultra wide band links", *45<sup>th</sup> Midwest Symp. on Circuits and Systems, MWSCAS-2002*, vol. 3, pp. III - 591-6, Aug. 2002.
- [12] M. Di Benedetto, G. Giancola, *Understanding Ultra Wide Band radio fundamentals*, Prentice Hall, 2004.
- [13] C. Carbonelli, U. Mengali, U. Mitra, "Synchronization and channel estimation for UWB signals", *IEEE Global Telecomm. Conf., GLOBECOM '03*, vol. 2, pp. 764 - 768, Dec. 2003.
- [14] A. R. Nayak, J. R. Barry, S. W. McLaughling, "Joint timing recovery and Turbo Equalization for coded partial response channel", *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 38, no. 5, pp.2295-2297, Sept. 2002.

# Synchronisation de phase - Boucle à remodulation souple

Stéphanie BAY<sup>1</sup>, Christophe VANSTRACEELE<sup>1</sup>, Benoit GELLER<sup>1,3</sup>, Jean-Pierre BARBOT<sup>1</sup>, Jean-Marc BROSSIER<sup>2</sup> \*

<sup>1</sup>Laboratoire SATIE / UMR 8029

ENS Cachan 61, avenue du Président Wilson 94235 Cachan Cedex, France

<sup>2</sup>Laboratoire LIS

ENSIEG, 961, av. de la houille blanche, Domaine Universitaire BP 46, 38402 Saint Martin d'Hères

<sup>3</sup>Université Paris 12

av. du Général de Gaulle, 94010 Créteil Cedex

bay@satie.ens-cachan.fr, vanstraceele@satie.ens-cachan.fr, geller@satie.ens-cachan.fr,  
barbot@satie.ens-cachan.fr, jean-marc.brossier@lis.inpg.fr

**Résumé** — Les performances des systèmes de transmission numérique dépendent de nombreux facteurs. Parmi ceux-ci, l'étape de synchronisation est déterminante pour la qualité de réception de l'information numérique transmise. En effet, les améliorations apportées par les codes correcteurs d'erreurs et les turbo-codes en particulier sont fortement tributaires de l'étape de synchronisation. Nous présentons dans cet article un algorithme permettant d'estimer et de compenser la phase de la porteuse du signal reçu en exploitant l'information souple fournie par tout turbo-décodeur. La méthode proposée permet de faire une mise à jour de la phase à chaque symbole grâce à une boucle adaptative utilisant les log-vraisemblances de chaque bit reçu fournies par un turbo-décodeur. De plus, une boucle "aller-retour" permet d'améliorer sensiblement le comportement de cet estimateur de phase et ainsi d'obtenir des performances, en terme d'Erreur Quadratique Moyenne, proches de la boucle à symboles connus.

**Abstract** — The phase estimation is a really important step in digital communication systems. Without a good synchronization, using error correction codes and turbo-codes is suboptimum. This paper describes a new synchronizing algorithm which can update the phase of each received symbol. The estimated phase is calculated with a Soft Decision Feedback Loop. This loop uses the Log-Likelihood Ratio (LLR) provided by the turbo-decoder's soft output. A forward-backward loop improves the phase estimation. This algorithm can be applied on every QAM's constellations and good performance is achieved till near Shannon's limit SNRs.

## 1 Introduction

Le turbo-décodage permet des performances proches de la capacité de Shannon à faible rapport signal à bruit [1][4]. Mais ces performances supposent une synchronisation parfaite : la moindre erreur de phase entraîne une dégradation importante du taux d'erreur binaire comme l'illustre la figure 1. Ainsi, il est indispensable d'estimer et de compenser correctement la phase de la porteuse du signal reçu. Nous proposons donc un algorithme exploitant les informations souples provenant d'un turbo-décodeur. Ces informations sont alors insérées dans une boucle adaptative qui agit ensuite sur la phase du signal reçu.

## 2 Présentation du modèle

Le système considéré dans cet article est un système de communication numérique utilisant un code correcteur produit et des constellations QAM (Quadrature Amplitude Modulation) de taille fixée variable entre 2-QAM et 1024-QAM. Le canal de transmission considéré introduit une erreur sur la phase de la porteuse et ajoute un Bruit Additif Blanc Gaussien (BABG). Les symboles émis subissent donc une rotation due à l'erreur de phase et sont perturbés par le BABG :

\* Cette étude a été partiellement financée par le contrat européen Newcom n°507325

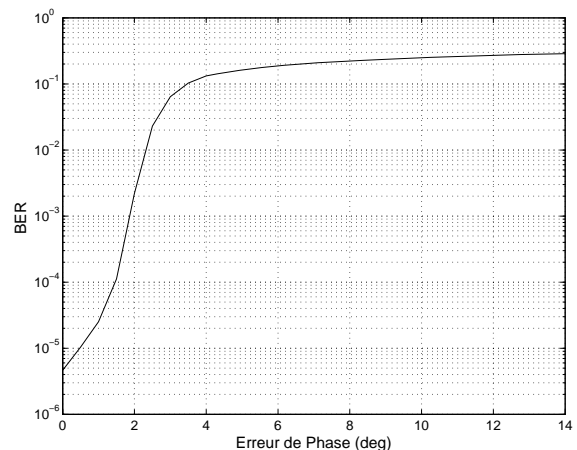


FIG. 1 — Conséquence d'une erreur de phase sur le TEB (Taux d'Erreur Binaire) (BCH(32,26,4)<sup>2</sup> sur 1024-QAM avec Eb/No=17.5dB)

$$y_k = a_k e^{i\varphi_k} + b_k \quad (1)$$

pour  $k = 1 \dots K$ , avec  $a_k \in \{Q_1 \dots Q_M\}$  symboles indépendants d'une constellation M-QAM où  $M = 2^N$ ,  $b_k$  le terme de bruit additif de moyenne nulle et de variance  $\sigma_b^2$ .

L'erreur de phase  $\varphi_k$  quant à elle, est supposée avoir une évolution brownienne s'ajoutant à une dérive linéaire

[2] :

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k + \Delta\varphi + w_k \quad (2)$$

où  $\Delta\varphi$  est une dérive linéaire due à un décalage de fréquence et  $w_k$  est un bruit gaussien de moyenne nulle de variance  $\sigma_b^2$  portant sur la phase du signal (gigue).

A la réception, nous utilisons pour illustrer le fonctionnement de cette boucle de phase un décodeur de Pyndiah [6], applicable à n'importe quel code produit construit à partir de codes blocs linéaires. Ce décodeur a l'avantage de converger plus rapidement que les autres turbo-décodeurs. Sa sortie souple est une estimation de la log-vraisemblance calculée grâce aux décisions données par le décodeur de Chase [3]. Concernant la synchronisation, [7] propose un algorithme de synchronisation itératif exploitant la sortie du décodeur de Pyndiah. Cet algorithme de synchronisation nécessite une phase constante sur un mot de code. L'algorithme que nous proposons dans cet article permet de suivre les variations rapides de phase à l'intérieur même d'un mot de code.

Les observations forment le vecteur  $Y = (y_1, \dots, y_K)^T$ . On peut exprimer la vraisemblance des observations :

$$P(Y|\theta, a_1, \dots, a_K) = \prod_{k=1}^K \frac{1}{\pi\sigma_b^2} \exp\left(-\frac{|y_k - a_k e^{i\theta}|^2}{\sigma_b^2}\right) \quad (3)$$

où  $\theta$  est le paramètre d'intérêt (ici  $\theta = \varphi$  phase que l'on souhaite estimer). Maintenant, en tenant compte de l'information a priori sur les symboles  $a_k$  inconnus, avec  $a_k \in \{Q_1, \dots, Q_M\}$ , on obtient :

$$P(Y|\theta) = \sum_{k=1 \dots K} P(Y|\theta, a_1, \dots, a_K) P(a_1, \dots, a_K) \quad (4)$$

En considérant que les bits sont indépendants, on peut exprimer la probabilité d'un symbole en fonction de la probabilité de chaque bit :

$$P(a_k = Q_m) = \prod_{n=1}^N P(b_n^k = q_n^m) \quad (5)$$

où  $b_n^k \in \{-1, +1\}$  représente le  $n^{ieme}$  bit du  $k^{ieme}$  symbole QAM. La probabilité d'un bit s'exprime alors en fonction de sa log-vraisemblance :

$$P(b_n^k = q_n^m) = \frac{e^{\frac{q_n^m L_n^k}{2}}}{2 \cosh\left(\frac{L_n^k}{2}\right)} \quad (6)$$

où  $L_n^k$  est la log-vraisemblance sur le  $n^{ieme}$  bit du  $k^{ieme}$  symbole QAM émis. On en déduit alors la probabilité d'un symbole :

$$P(a_k = Q_m) = \left[ \prod_{n=1}^N \frac{1}{2 \cosh\left(\frac{L_n^k}{2}\right)} \right] \times \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N q_n^m L_n^k\right) \quad (7)$$

En groupant les termes en exponentielle, l'équation (7) devient :

$$P(Y|\theta) = \left(\frac{1}{\pi\sigma_b^2}\right)^K \left[ \prod_{k=1}^K \left( \prod_{n=1}^N \frac{1}{2 \cosh\left(\frac{L_n^k}{2}\right)} \right) \right] \times \sum_{m=1}^M W_m(y_k, L_k, \theta) \quad (8)$$

où

$$W_m(y_k, L^k, \theta) = \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N q_n^m L_n^k - \frac{|y_k - e^{i\theta} Q_m|^2}{\sigma_b^2}\right) \quad (9)$$

avec  $L^k = (L_1^k, \dots, L_n^k, \dots, L_N^k)$ .

Seul le terme  $W_m(y_k, L^k, \theta)$  dépend de  $\theta$ . La dérivée de la log-vraisemblance est donc la suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \log P(Y|\theta) &= \sum_{k=1}^K \frac{\partial}{\partial \theta} \log \sum_{m=1}^M W_m(y_k, L^k, \theta) \\ &= \frac{2}{\pi\sigma_b^2} \sum_{k=1}^K \frac{\sum_{m=1}^M \text{Im}(y_k e^{-i\theta} \overline{Q_m}) W_m(y_k, L^k, \theta)}{\sum_{m=1}^M W_m(y_k, L^k, \theta)} \end{aligned} \quad (10)$$

L'estimateur du Maximum de Vraisemblance est obtenu en annulant cette expression. Mais la recherche d'une telle solution est irréalisable. On est alors amené à mettre en place une boucle adaptative qui corrige  $\theta$  à chaque symbole reçu.

### 3 Boucle à remodulation souple

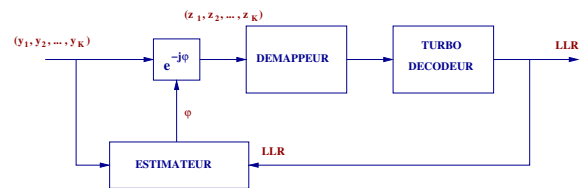


FIG. 2 – Boucle de phase à remodulation souple

On a introduit l'information "a priori" sur les symboles  $a_k$  fournie par la sortie du turbo-décodeur [6]. L'estimateur du Maximum de Vraisemblance étant trop complexe, on construit la boucle adaptative de la figure 2 qui corrige la phase à chaque nouveau symbole reçu. L'implantation de l'algorithme, utilisable pour n'importe quel type de modulation QAM, se trouve alors allégée :

$$\hat{\varphi}_k = \hat{\varphi}_{k-1} + \gamma \frac{\sum_{m=1}^M \text{Im}(y_k \overline{Q_m} e^{-i\hat{\varphi}_{k-1}}) W_m(y_k, L^k, \hat{\varphi}_{k-1})}{\sum_{m=1}^M W_m(y_k, L^k, \hat{\varphi}_{k-1})} \quad (11)$$

Dans cette boucle, il est important de bien doser l'information souple réinjectée.  $W_m$  (équation 11), peut alors être interprété comme un poids assigné à chaque symbole possible  $Q_m$  appartenant à la constellation considérée :

$$W_m(y_k, L^k, \theta) = \exp \left( K_{DFL} \sum_{n=1}^N q_n^m L_n^k - \frac{|y_k - e^{i\theta} Q_m|^2}{\sigma_b^2} \right) \quad (12)$$

où  $K_{DFL}$  est le coefficient de pondération des LLR (Log Likelihood Ratio) qui doit être optimisé en fonction des conditions de transmission. Ce poids dépend à la fois de la distance de  $Q_m$  vis à vis du symbole reçu mais aussi des log-vraisemblances des bits du symbole reçu. Ainsi, une forte log-vraisemblance et/ou une distance très faible par rapport au symbole reçu augmenteront le poids de ce symbole dans le calcul. Par conséquent la boucle tendra à calculer une nouvelle phase  $\hat{\varphi}_k$  qui permettra de se rapprocher de ce symbole. A l'inverse, une faible log-vraisemblance associée à une grande distance par rapport au symbole reçu diminueront l'importance d'un symbole QAM dans le calcul.

Si pour illustrer les performances de cette boucle, nous avons choisi un turbo-décodeur de codes-produits, il est important de noter à ce stade qu'aucune hypothèse sur l'architecture du turbo-décodeur n'a été introduite, la seule donnée exploitée étant le LLR. Cette boucle peut donc également fonctionner avec un turbo-décodeur de codes convolutifs.

Cet algorithme est un algorithme de poursuite. Les simulations que nous présentons ont pour vocation d'illustrer les capacités de poursuite de cette boucle. L'algorithme a donc été initialisé avec la valeur exacte de phase, supposant par là-même que l'étape de synchronisation initiale avait été réalisée. Dans un cas concret, la boucle pourrait être initialisée par l'un des algorithmes décrit dans [5] et [7]. Lors de la première itération, l'estimation de la phase est effectuée en considérant que l'on ne possède pas d'information a priori. Dans ce cas au niveau de l'estimateur de la figure 2,  $LLR=0$ . Le bloc d'information grossièrement asservi en phase est alors appliqué à la suite de la chaîne de réception. Dès la deuxième itération, il est possible de tenir compte de l'information souple apportée par le turbo-décodeur. Plusieurs itérations peuvent être nécessaires pour la bonne convergence de l'algorithme.

## 4 Boucle aller-retour

Dans le cas où les paramètres ne sont pas constants, cet algorithme peut amener la présence d'un biais (erreur de traînage). Le décodeur bloc gardant en mémoire tous les symboles d'un même mot de code, une idée supplémentaire est donc de faire fonctionner la boucle dans les deux sens : sens direct et inverse (figure 3). En sens inverse, le biais apporté sera en général opposé à celui obtenu dans le sens direct, comme le montre la figure 4. En effectuant la moyenne pondérée de ces deux estimations, on montre qu'un gain de 2 à 3 dB sur l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) de la phase estimée est obtenu.

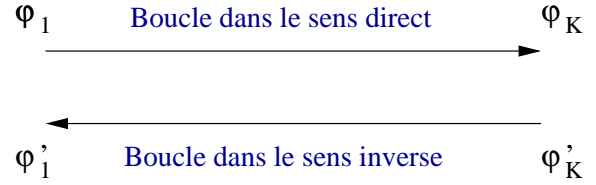


FIG. 3 – Fonctionnement aller-retour

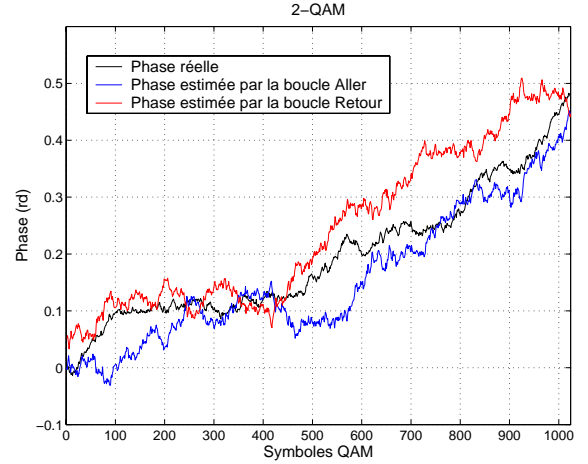


FIG. 4 – Boucles aller et retour sur une MDP-2

Une première estimation de phase est donnée en faisant tourner la boucle dans le sens direct. On obtient un premier vecteur  $\hat{\varphi}_0, \dots, \hat{\varphi}_K$ . Ensuite, on applique le même algorithme mais maintenant en envoyant les symboles dans le sens inverse. L'initialisation de cette deuxième phase se fait en utilisant le résultat obtenu pour le dernier symbole en sens direct  $\hat{\varphi}'_K = \hat{\varphi}_K$ . On obtient un nouveau vecteur  $\hat{\varphi}'_0, \dots, \hat{\varphi}'_K$ . L'estimation finale  $\hat{\varphi}''_k$  pourra alors être donnée par :

$$\hat{\varphi}''_k = \frac{\hat{\varphi}_k + \hat{\varphi}'_k}{2} \quad (13)$$

La figure 5 nous montre l'effet de la boucle aller-retour sur l'estimation de phase pour une modulation MDP-2 (ou 2-QAM ou BPSK). La perturbation de phase est fixée pour cette simulation à  $\sigma_\Phi = \pi \cdot 10^{-2}$ . On peut voir que le gain en terme d'EQM approche les 3 dB pour  $E_b/N_0 = 0dB$ .

## 5 Résultats et conclusion

Dans les simulations, la perturbation sur la phase est modélisée par un gigue gaussienne (2) de variance  $\sigma_\Phi^2$  sans dérive linéaire. Les performances de l'estimateur de phase sont présentées en terme d'EQM. Dans le cas étudié d'une 256-QAM, pour un  $E_b/N_0 = 13dB$  ( $TEB = 3 \cdot 10^{-5}$ ) avec une gigue de phase  $\sigma_\Phi = 6\pi \cdot 10^{-3}rd$  pour le terme  $w_k$  (équation (2)), la figure 6 montre qu'il est nécessaire de trouver un compromis sur la quantité d'information réinjectée  $K_{DFL}$  dans l'itération suivante. On peut voir

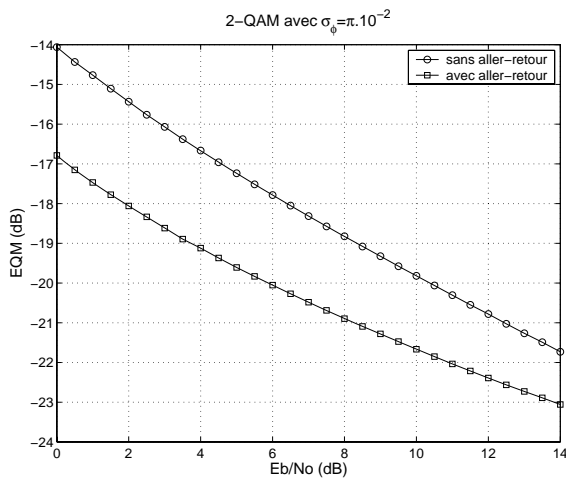


FIG. 5 – EQM pour une Boucle aller-retour sur une 2-QAM

sur la figure 7, pour une 256-QAM, l'apport de la décision souple ( $K_{DFL} = 2.10^{-1}$ ). On constate que la deuxième itération, qui utilise l'information provenant du turbo-décodeur, apporte un gain en terme d'EQM de 4dB (à  $E_b/N_0 = 13\text{dB}$ ) par rapport à une boucle sans connaissance a priori. Ensuite, l'utilisation de l'information souple permet de gagner 0.4 dB par rapport à une boucle n'utilisant que les décisions dures sur les bits. La troisième itération, tirant partie de l'estimation des LLR de l'itération précédente, permet d'affiner encore l'estimation et donc de diminuer l'EQM. Dans cette configuration, l'amélioration apportée par une remodulation souple par rapport à la remodulation dure est de 0.6 dB.

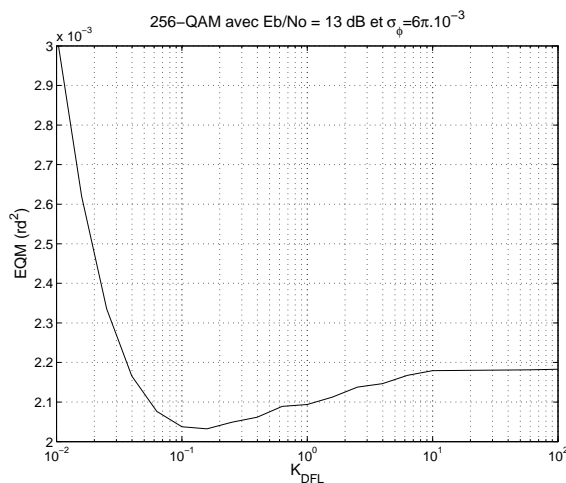


FIG. 6 – EQM en fonction du coefficient de pondération des LLR

L'algorithme proposé a l'avantage d'estimer une phase pour chaque symbole reçu. Il permet donc de poursuivre des évolutions de phase rapides à l'intérieur d'un mot de

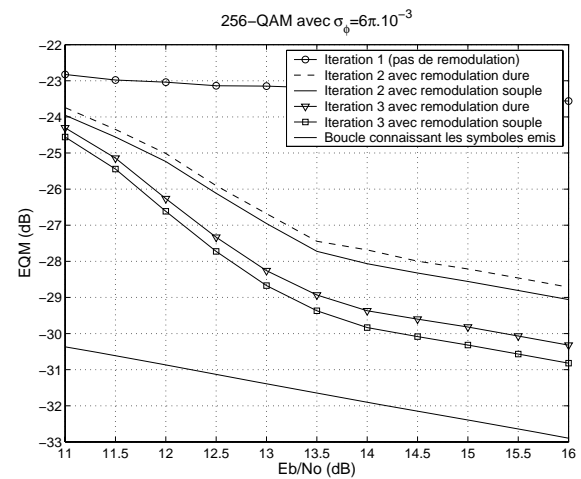


FIG. 7 – EQM pour une 256-QAM ; en fonction du rapport  $E_b/N_0$

code et fonctionne pour des constellations de tailles importantes. Cette boucle à remodulation souple a été utilisée ici pour estimer et corriger la phase du signal reçu, mais elle peut également être utilisée pour estimer le gain ou tout autre paramètre d'intérêt d'un canal de transmission, y compris pour des canaux à évolutions rapides tels que certains canaux de Rayleigh.

## Références

- [1] C. Berrou and A. Glavieux. Near optimum error correcting coding and decoding : Turbo-codes. *IEEE Trans. Commun.*, 44(10) :1261–1271, October 1996.
- [2] J.M. Brossier, P.O. Amblard, and B. Geller. Self adaptive PLL for multicarrier local loop transmission. In *Proc. Eusipco*, pages 631–634, Toulouse, September 2002.
- [3] D. Chase. A class of algorithms for decoding block codes with channel measurement information. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 18(1) :170–182, January 1972.
- [4] S. Hagenauer, E. Offer, and L. Papke. Iterative decoding of binary block and convolutional codes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 42(2) :429–445, March 1996.
- [5] Wrangok Oh and Kyungwhoon Cheun. Joint Decoding and Carrier Phase Recovery Algorithm for Turbo Codes. *IEEE Commun. Letters*, 5(9) :375–377, September 2001.
- [6] R. Pyndiah. Near optimum decoding of product codes : Block Turbo Codes. *IEEE Trans. Commun.*, 46(8) :1003–1010, August 1998.
- [7] C. Vanstraceele, B. Geller, J.P. Barbot, and J.M. Brossier. An iterative phase synchronization scheme for general QAM constellations. In *Proc. ICC'2004*, volume CT 08 Synchronization, pages 519–522, Paris, June 2004.

# Impact de l'a priori sur les performances de l'égaliseur MAP et distribution des LRV extrinsèques

Noura SELLAMI<sup>1</sup>, Aline ROUMY<sup>2</sup>, Inbar FIJALKOW<sup>3</sup>,

<sup>1</sup>ISECS, Route Menzel Chaker km 0.5, B.P 868, 3018 Sfax, Tunisie

<sup>2</sup>IRISA-INRIA, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France

<sup>3</sup>ETIS, UMR 8051, ENSEA-UCP-CNRS, 6 av. du Ponceau, 95014 Cergy-Pontoise, France

sellami.noura@yahoo.fr, aline.roumy@irisa.fr

fijalkow@ensea.fr

**Résumé** – Afin de combattre les effets des interférences entre symboles (IES), l'égaliseur optimal à utiliser est basé sur le critère Maximum *a posteriori* (MAP). Nous considérons le cas où l'égaliseur MAP est alimenté par des informations *a priori* sur les données émises, comme pour un turbo égaliseur. Nous proposons d'étudier analytiquement l'impact de l'*a priori* sur les performances de l'égaliseur MAP. Nous distinguons deux cas d'étude : le cas où les informations *a priori* sont fiables et le cas où elles ne sont pas fiables. Dans un turbo égaliseur, l'égaliseur et le décodeur s'échangent des Logarithmes du Rapport de Vraisemblance (LRV) extrinsèques pour améliorer les performances au fil des itérations. Nous proposons ici d'étudier analytiquement la distribution de ces LRV. Le but de cette étude est d'effectuer de manière analytique, dans un travail futur, l'analyse de la convergence des turbo égaliseurs utilisant un égaliseur MAP.

**Abstract** – To combat the effects of intersymbol interference, the optimal equalizer to be used is based on maximum *a posteriori* (MAP) detection. We consider the case where the MAP equalizer is provided with *a priori* information on the transmitted data, as in a turbo equalizer. We propose to study analytically the impact of the *a priori* on the MAP equalizer performance. We distinguish two cases: the case of unreliable *a priori* and the case of reliable *a priori*. In a turbo equalizer, the equalizer and the decoder exchange extrinsic Log Likelihood Ratios (LLRs). We propose here to study analytically their distribution. The aim of this study is to perform in the future the analytical convergence analysis of turbo equalizers using the MAP equalization.

## Introduction

Afin de combattre les effets des interférences entre symboles (IES), l'égaliseur optimal à utiliser est basé sur le critère Maximum *a posteriori* (MAP) [1]. Nous considérons deux critères, le critère MAP séquence et le critère MAP symbole. En l'absence d'informations *a priori* sur les données émises, la détection selon le critère MAP devient équivalente à la détection selon le critère Maximum de vraisemblance (MV). Des algorithmes efficaces existent pour le détecteur MAP séquence tel que l'algorithme de Viterbi [3], et pour le détecteur MAP symbole tel que l'algorithme BCJR [1]. Ces algorithmes sont intéressants puisque leur complexité augmente linéairement plutôt qu'exponentiellement avec la taille de la séquence. Les performances de l'égaliseur de Viterbi en présence d'un canal à Bruit Additif Blanc Gaussien (BABG) ont été étudiées par Forney [3]. Cette étude supposait qu'aucune information *a priori* n'est fournie à l'égaliseur.

Dans ce papier, nous considérons le cas où l'égaliseur MAP est alimenté par des informations *a priori* sur les données émises, comme pour un turbo égaliseur [2]. Nous proposons d'étudier analytiquement l'impact de l'*a priori* sur les performances de l'égaliseur MAP. Nous montrons que l'utilisation des informations *a priori* par l'égaliseur MAP est équivalente à un gain en terme de Rapport Signal à Bruit (RSB) et nous donnons une expression analytique de ce gain. Nous distinguons deux cas d'étude : le cas où les informations *a priori* sont fiables et le cas où elles ne sont pas fiables. Cette étude est une

généralisation des résultats de [4], qui sont valables uniquement quand les *a priori* ne sont pas fiables.

Dans un turbo égaliseur, l'égaliseur et le décodeur s'échangent des Logarithmes du Rapport de Vraisemblance (LRV) extrinsèques pour améliorer les performances au fil des itérations [2]. Nous proposons ici d'étudier analytiquement la distribution de ces LRV. Le but de cette étude est d'effectuer de manière analytique, dans un travail futur, l'analyse de la convergence des turbo égaliseurs utilisant un égaliseur MAP. En effet, les analyses classiques de convergence sont basées sur les EXIT charts (extrinsic information transfer charts) [6] et utilisent des simulations puisqu'il est difficile d'étudier analytiquement les performances de l'égaliseur MAP quand le nombre des états du treillis est supérieur à 2.

## 1 Modèle du système

Nous considérons la transmission des données sur un canal sélectif en fréquence. Les bits d'information en entrée sont modulés en symboles MDP-2 (modulation de phase à 2 états) dont l'alphabet est  $\mathcal{A} = \{+1, -1\}$ . Nous supposons que les transmissions se font par blocs de  $T$  symboles. Le canal est supposé invariant durant un bloc. Le signal reçu en bande de base échantillonné au rythme symbole à l'instant  $k$  est donné par

$$x_k = \sum_{l=0}^{L-1} h_l s_{k-l} + n_k \quad (1)$$



où  $L$  est la mémoire du canal et  $s_k, (1-L \leq k \leq T-1)$  sont les symboles émis. Dans cette expression,  $n_k$  sont modélisés par des échantillons indépendants d'un bruit réel blanc gaussien suivant la loi normale  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  où  $\mathcal{N}(\alpha, \sigma^2)$  est une distribution gaussienne de moyenne  $\alpha$  et de variance  $\sigma^2$ . Le terme  $h_l$  est le  $l^{\text{ième}}$  coefficient du canal qu'on suppose réel.

Nous nous intéressons à l'égalisation selon le critère MAP. Nous considérons un événement d'erreur  $\mathcal{E}_m$  de longueur  $m$  [3]. La probabilité de cet événement quand il n'y a pas d'*a priori* à l'entrée de l'égaliseur est [3] :

$$P(\mathcal{E}_m) = Q\left(\frac{\|\underline{\varepsilon}_m\|}{2\sigma}\right) \quad (2)$$

où  $\underline{\varepsilon}_m$  est la séquence d'erreur correspondant à  $\mathcal{E}_m$  convoluée par le canal et  $Q(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} \exp(-y^2/2) dy$ . Soit  $d_{\min}$  la distance minimale du canal [3] définie comme la valeur minimale de  $\|\underline{\varepsilon}_m\|$ . Du fait de la décroissance exponentielle de la fonction  $Q(\cdot)$ , la probabilité d'erreur totale  $P(\Sigma)$  sera dominée à fort RSB par la probabilité de l'événement correspondant à la valeur minimale  $d_{\min}$  de  $\|\underline{\varepsilon}_m\|$  [3]. Ainsi, à fort RSB,

$$P(\Sigma) \simeq Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right). \quad (3)$$

## 2 Analyse de l'égaliseur

Nous supposons ici que le canal est parfaitement connu au niveau du récepteur. L'égaliseur MAP calcule les probabilités *a posteriori* sur les symboles transmis,  $P(s_k = s|\underline{x})$ ,  $s \in \mathcal{A}$ ,  $1-L \leq k \leq T-1$ , où  $\underline{x}$  est le vecteur des observations reçu durant un bloc. Comme dans un turbo égaliseur, nous supposons que l'égaliseur fournit à sa sortie des LRV extrinsèques [6] :

$$\begin{aligned} LRV_{ext, eg}(s_k) &= LRV_{eg}(s_k) - LRV_{priori, eg}(s_k) \\ &= \log \frac{P(s_k = +1|\underline{x})}{P(s_k = -1|\underline{x})} - \log \frac{P(s_k = +1)}{P(s_k = -1)} \end{aligned}$$

qui sont les LRV *a posteriori*  $LRV_{eg}(s_k)$  moins les LRV *a priori*  $LRV_{priori, eg}(s_k)$ . Nous supposons que les observations *a priori* à l'entrée de l'égaliseur sont modélisées par les sorties d'un canal BABG (Bruit Additif Blanc Gaussien) de moyenne nulle et de variance  $\sigma_{eg}^2$ . Ainsi, les LRV *a priori* sont modélisés par des échantillons indépendants gaussiens suivant la loi normale  $\mathcal{N}(\frac{2s_k\mu_{eg}^2}{\sigma^2}, \frac{4\mu_{eg}^2}{\sigma^2})$  où  $\mu_{eg} = \frac{\sigma}{\sigma_{eg}}$ . Cette modélisation gaussienne des LRV avec rapport 2 entre variance et moyenne est classique dans l'analyse des récepteurs itératifs [6]. Nous avons montré dans [4] que lorsque l'égaliseur est alimenté par des informations *a priori*, la probabilité d'un événement d'erreur  $\mathcal{E}_m$  de longueur  $m$  peut s'écrire

$$P(\mathcal{E}_m) = Q\left(\frac{\sqrt{\|\underline{\varepsilon}_m\|^2 + 4m\mu_{eg}^2}}{2\sigma}\right).$$

Dans la suite, nous proposons de calculer la probabilité d'erreur totale de l'égaliseur et de trouver la distribution des LRV extrinsèques  $LRV_{ext, eg}(s_k)$ . Nous généralisons les résultats de [4] et distinguons deux cas : le cas d'informations *a priori* peu fiables ( $\mu_{eg}$  faible) et le cas d'informations *a priori* fiables ( $\mu_{eg}$  élevé).

### 2.1 Cas 1 : *a priori* non fiable

Considérons le cas d'informations *a priori* peu fiables. En général, dans l'égaliseur MAP, les erreurs se produisent par paquets. Ainsi, nous ne considérons pas les erreurs isolées puisqu'elles se produisent rarement et nous supposons que  $m \geq 2$ . De plus, par définition de la distance minimale,  $\|\underline{\varepsilon}_m\|^2 \geq d_{\min}^2$ . Aussi, une borne supérieure de  $P(\mathcal{E}_m)$  est obtenue en remplaçant  $\|\underline{\varepsilon}_m\|^2$  par  $d_{\min}^2$  et  $m$  par 2. Nous avons observé que cette borne est atteinte pour les canaux tels que  $L \leq 6$ , puisque pour ces canaux la séquence d'erreur permettant d'atteindre la distance minimale est en général de longueur  $m = 2$ . Pour les canaux plus longs, une recherche exhaustive de la séquence permettant d'atteindre la borne supérieure doit être effectuée. Par souci de clarté de la présentation, nous considérons dans ce qui suit uniquement les canaux courts ( $L \leq 6$ ). A fort RSB, le terme correspondant à la borne supérieure va dominer la somme des probabilités des événements d'erreurs. Ainsi, la probabilité totale d'erreur peut être approximée par

$$P(\Sigma) \simeq Q\left(\frac{\sqrt{d_{\min}^2 + 8\mu_{eg}^2}}{2\sigma}\right). \quad (4)$$

En comparant (3) et (4), on déduit que l'égaliseur MAP utilisant les informations *a priori* est équivalent à l'égaliseur MAP sans *a priori* mais avec un RSB équivalent en dB

$$R\tilde{S}B_{dB} = RSB_{dB} + 10 \log_{10}\left(1 + \frac{8\mu_{eg}^2}{d_{\min}^2}\right) \quad (5)$$

où  $RSB_{dB}$  est le vrai rapport signal à bruit de la transmission. On sait que la probabilité totale d'erreur pour une modulation MDP-2, sur un canal BABG avec une moyenne nulle et une variance  $\sigma_1^2$  est  $P(\Sigma) \simeq Q\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)$ . Nous en concluons que les performances de l'égaliseur MAP quand il est alimenté par les informations *a priori* sont équivalentes à celles du canal BABG avec une moyenne nulle et une variance  $\sigma_1^2 = \frac{4\sigma^2}{d_{\min}^2 + 8\mu_{eg}^2}$ . Ainsi, les LRV *a posteriori* à la sortie de l'égaliseur MAP peuvent être modélisés par des échantillons indépendants d'une variable aléatoire suivant la loi  $\mathcal{N}(\frac{2s_k}{\sigma_1^2}, \frac{4}{\sigma_1^2})$ . Puisque les LRV extrinsèques et les LRV *a priori* sont indépendants par construction, nous obtenons à fort RSB,

$$\begin{aligned} LRV_{ext, eg}(s_k) &\sim \mathcal{N}\left(s_k\left(\frac{2}{\sigma_1^2} - \frac{2\mu_{eg}^2}{\sigma^2}\right), \left(\frac{4}{\sigma_1^2} - \frac{4\mu_{eg}^2}{\sigma^2}\right)\right) \\ &= \mathcal{N}\left(s_k\left(\frac{d_{\min}^2 + 4\mu_{eg}^2}{2\sigma^2}\right), \left(\frac{d_{\min}^2 + 4\mu_{eg}^2}{\sigma^2}\right)\right) \end{aligned} \quad (6)$$

### 2.2 Cas 2 : *a priori* fiable

Quand les informations *a priori* deviennent fiables ( $\mu_{eg}$  élevé), les observations *a priori* ont plus d'influence sur la détection que les observations provenant du canal. Puisque les informations *a priori* sont indépendantes, les erreurs ne vont plus se produire par paquets. Ainsi, dans ce cas, les erreurs isolées ( $m = 1$  et  $\|\underline{\varepsilon}_m\|^2 = 4$ ) vont se produire et vont dominer la probabilité totale d'erreurs, qui peut alors être approximée par  $P(\Sigma) \simeq Q\left(\frac{\sqrt{1+\mu_{eg}^2}}{\sigma}\right)$ . Donc, l'égaliseur MAP utilisant les

informations *a priori* est équivalent à l'égaliseur MAP sans *a priori* mais avec un RSB équivalent

$$R\tilde{S}B_{dB} = RSB_{dB} + 10 \log_{10} \left( \frac{4}{d_{\min}^2} (1 + \mu_{eg}^2) \right) \quad (7)$$

Dans ce cas, les performances de l'égaliseur MAP sont indépendantes du canal et sont équivalentes aux performances d'un canal BABG centré et de variance  $\sigma_2^2 = \frac{\sigma^2}{(1+\mu_{eg}^2)}$ . Puisque les LRV extrinsèques et les LRV *a priori* sont indépendants, on obtient,

$$\begin{aligned} LRV_{ext.eg}(s_k) &\sim \mathcal{N} \left( s_k \left( \frac{2}{\sigma_2^2} - \frac{2\mu_{eg}^2}{\sigma^2} \right), \left( \frac{4}{\sigma_2^2} - \frac{4\mu_{eg}^2}{\sigma^2} \right) \right) \\ &= \mathcal{N} \left( s_k \left( \frac{2}{\sigma^2} \right), \frac{4}{\sigma^2} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Notons que lorsque les informations *a priori* deviennent fiables, les LRV extrinsèques sont équivalents aux LRV correspondant à un canal BABG de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ . Ainsi, l'effet de l'IES est éliminé.

### 2.3 Modélisation des LRV extrinsèques

Dans les paragraphes précédents, nous avons donné les distributions des LRV extrinsèques dans deux cas limites, quand l'*a priori* n'est pas fiable ( $\mu_{eg}$  est faible) et quand il est fiable ( $\mu_{eg}$  est élevé). Cependant, il n'est pas évident que cette analyse reste valable pour les valeurs intermédiaires de  $\mu_{eg} = \frac{\sigma}{\sigma_{eg}}$ . Nous suggérons qu'il existe une valeur limite de  $\mu_{eg}$  qu'on appelle  $\mu_{eg-\lim}$  telle que

$$\begin{cases} LRV_{ext.eg}(s_k) \sim \mathcal{N} \left( s_k \left( \frac{d_{\min}^2 + 4\mu_{eg}^2}{2\sigma^2} \right), \left( \frac{d_{\min}^2 + 4\mu_{eg}^2}{\sigma^2} \right) \right) \\ \quad , \text{ si } \mu_{eg} < \mu_{eg-\lim} \\ LRV_{ext.eg}(s_k) \sim \mathcal{N} \left( s_k \left( \frac{2}{\sigma^2} \right), \frac{4}{\sigma^2} \right), \text{ sinon.} \end{cases}$$

Cette valeur limite qui correspond à l'égalité entre (6) et (8), est donnée par

$$\mu_{eg-\lim} = \sqrt{1 - \frac{d_{\min}^2}{4}} \quad (9)$$

Le choix de cette valeur limite sera validé par les simulations.

### 2.4 Utilité de l'égaliseur MAP lorsque l'*a priori* est fiable

Il est légitime de s'interroger sur l'utilité de l'égaliseur MAP lorsque l'*a priori* est fiable. En effet, en présence d'un *a priori* fiable, vaut-il mieux détecter les symboles à partir de l'*a priori* seul ou bien à partir des sorties *a posteriori* de l'égaliseur MAP ?

La comparaison des probabilités d'erreur des deux scénarios permet de répondre à la question. Si la détection utilise l'*a priori* seulement, la probabilité d'erreur est alors

$$P(\Sigma) \simeq Q \left( \frac{1}{\sigma_{eq}} \right). \quad (10)$$

puisque l'entrée (dite *a priori*) de l'égaliseur MAP est modélisée comme la sortie d'un canal BABG de variance de bruit  $\sigma_{eq}^2$ .

En revanche, à la sortie de l'égaliseur MAP, la probabilité d'erreur peut se réécrire (voir paragraphe 2.2)

$$P(\Sigma) \simeq Q \left( \frac{\sqrt{1 + \mu_{eq}^2}}{\sigma} \right) = Q \left( \sqrt{\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_{eq}^2}} \right). \quad (11)$$

La décroissance monotone de la fonction  $Q(\cdot)$ , permet de conclure que (10) est supérieur à (11) et qu'il est donc meilleur en terme de performances d'utiliser l'égaliseur MAP plutôt que la détection à partir de l'*a priori*, même dans le cas d'un *a priori* fiable.

## 3 Résultats des simulations

Dans les simulations, nous utilisons la modulation MDP-2 et nous supposons que le canal est constant et connu au niveau du récepteur. Nous considérons le canal dont la réponse impulsionnelle est (0.29; 0.50; 0.58; 0.50; 0.29). Sa distance minimale est 1.0532 [5]. Nous alimentons l'égaliseur MAP avec des LRV *a priori* gaussiens indépendants suivant la loi normale  $\mathcal{N}(\frac{2s_k\mu_{eg}^2}{\sigma^2}, \frac{4\mu_{eg}^2}{\sigma^2})$ , pour un  $\mu_{eg} = \frac{\sigma}{\sigma_{eg}}$  donné. Sur les figures 1 et 2, nous traçons les courbes de Taux d'Erreurs Binaire (TEB) en fonction du RSB respectivement quand la détection des symboles émis est basée sur les LRV *a posteriori* et quand elle est basée sur les LRV extrinsèques. Les courbes continues montrent les performances obtenues par simulations. Sur la figure 1, les courbes discontinues sont obtenues en décalant la courbe correspondant au cas sans *a priori* ( $\mu_{eg} = 0$ ) par les valeurs des décalages en RSB données dans (5) et (7). Nous remarquons que les courbes théoriques approximent bien les courbes obtenues par simulations. Sur la figure 2, les courbes discontinues sont obtenues en considérant les expressions théoriques des LRV extrinsèques données dans (6) et (8). Ici,  $\mu_{eg-\lim} = 0.866$ . Nous remarquons que lorsque  $\mu_{eg} \geq \mu_{eg-\lim}$ , les performances sont similaires aux performances du canal BABG avec une variance  $\sigma^2$  (courbe BABG). Quand  $\mu_{eg} < \mu_{eg-\lim}$ , les courbes théoriques approximent bien les courbes obtenues par simulations à fort RSB. Ces résultats sont cohérents avec l'analyse faite précédemment.

La figure 3 montre les moyennes des LRV extrinsèques quand les bits émis sont égaux à 1 en fonction de  $\mu_{eg}$  pour RSB=7dB. Nous remarquons que pour  $\mu_{eg} \gg \mu_{eg-\lim}$  et  $\mu_{eg} \ll \mu_{eg-\lim}$ , les moyennes analytiques approximent bien celles obtenues par simulations. Autour de la valeur limite  $\mu_{eg-\lim}$ , l'approximation est moins juste mais reste satisfaisante pour prédire les performances extrinsèques de l'égaliseur comme le montre la figure 2.

## 4 Conclusion

Dans ce papier, nous considérons un égaliseur MAP alimenté par des observations *a priori* gaussiennes, comme pour un turbo égaliseur. Nous étudions analytiquement l'impact de l'*a priori* sur les performances de l'égaliseur MAP. Nous montrons que l'utilisation des informations *a priori* par l'égaliseur MAP est équivalente à un gain en terme de Rapport Signal à Bruit (RSB) et nous donnons une expression analytique de ce gain. Nous distinguons deux cas d'étude : le cas où les informations *a priori* sont fiables et le cas où elles ne sont pas fiables.

Nous donnons aussi l'expression analytique de la distribution des LRV extrinsèques en sortie de l'égaliseur. Le but de ce travail est d'effectuer dans le futur l'analyse de convergence analytique des turbo égaliseurs utilisant l'égaliseur MAP.

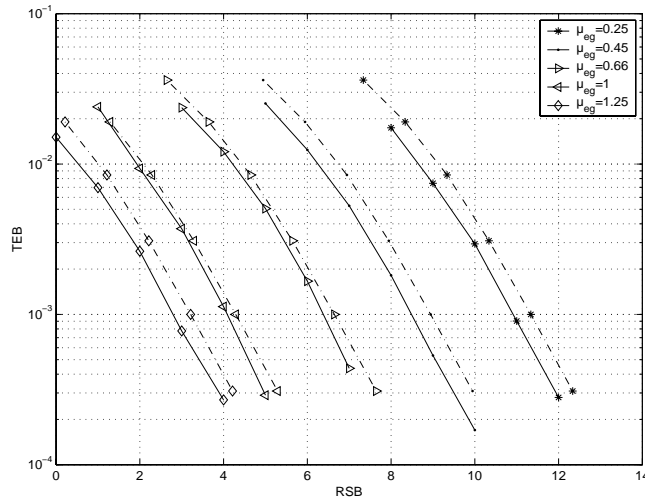


FIG. 1: TEB en fonction du RSB : Détection basée sur les LRV *a posteriori*.

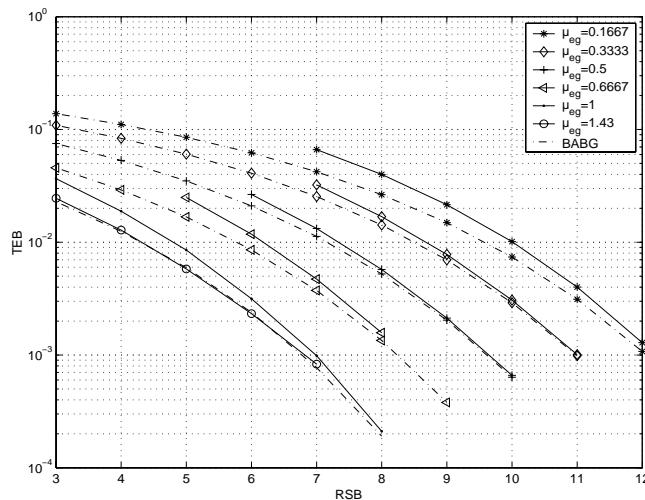


FIG. 2: TEB en fonction du RSB : Détection basée sur les LRV extrinsèques.

## References

- [1] L.R.Bahl, J.Cocke, F.Jelinek, and J.Raviv, "Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. IT-32, pp.284-287, March 1974.
- [2] C.Douillard, M.Jezequel, C.Berrou, A.Picart, P.Didier, and A.Glavieux, "Iterative correction of intersymbol interference: turbo-equalization," *European Trans. Telecommun.*, vol. 6, no. 5, pp. 507-511, 1995.

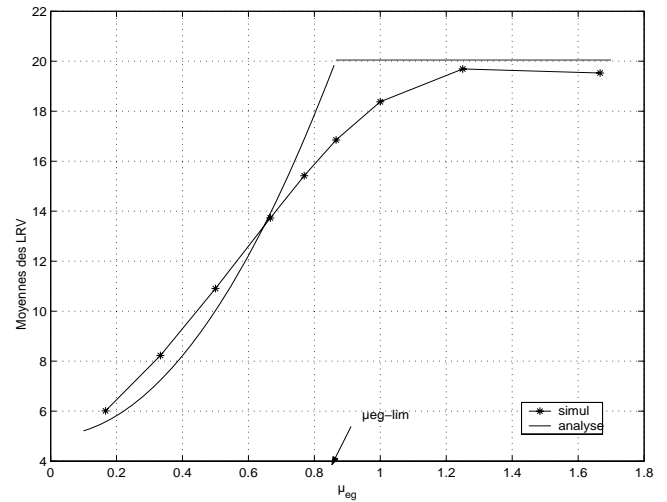


FIG. 3: Moyennes des LRV extrinsèques quand les bits émis sont égaux à 1 en fonction de  $\mu_{eg}$  à RSB=7dB.

- [3] G.D.Forney, Jr., "Maximum-likelihood sequence estimation for digital sequences in the presence of intersymbol interference," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 18, pp. 363-378, May 1972.
- [4] N.Sellami, A.Roumy, and I.Fijalkow, "On the analysis of the MAP equalizer performance within an iterative receiver," *IEEE Workshop on Signal Process. Advances in Wireless Comm. (SPAWC'04)*, Lisbon, Portugal, July 2004.
- [5] W.Ser, K.Tan, and K.Ho, "A new method for determining "unknown" worst-case channels for maximum-likelihood sequence estimation," *IEEE Trans. on Comm.*, vol. 46, no. 2, pp. 164-168, February 1998.
- [6] M.Tüchler, R.Koetter, and A.Singer, "Turbo equalization: principles and new results," *IEEE Trans. on Comm.*, vol. 50, no. 5, pp. 754-767, May 2002.

# Analyse de la convergence d'un système multi-antennes précodé itératif

Jérôme Le Masson et Charlotte Langlais  
Département Électronique, ENST-Bretagne  
Technopôle Brest-Iroise, CS 83818, 29238 Brest Cedex 3

jerome.lemasson@enst-bretagne.fr, charlotte.langlais@enst-bretagne.fr

**Résumé** – Dans ce papier, nous proposons une analyse de la convergence d'un système multi-antennes précodé avec un traitement itératif conjoint en réception. Cette analyse est basée sur un diagramme EXIT et des simulations de type Monte Carlo. Le précodage linéaire utilise une matrice de Hadamard et le système multi-antennes met en œuvre un multiplexage spatial à plusieurs antennes d'émission et de réception. On observe que le schéma d'émission/réception mis en place permet d'atteindre un gain en diversité potentiel égal au produit de la taille de la matrice de précodage par le nombre d'antennes de réception. L'analyse du diagramme EXIT met en évidence l'influence des paramètres système sur la convergence et les performances asymptotiques. Les résultats sont présentés pour une modulation de type MAQ-16 offrant ainsi une efficacité spectrale élevée.

**Abstract** – In this paper, we propose to study the convergence of a linearly precoded MIMO system with an iterative decoding. This study is based on an EXIT chart and Monte Carlo simulations. The precoding is performed by an Hadamard matrix and the MIMO system carries out a spatial multiplexing. The potential diversity gain for such a system is equal to the number of receive antennas times the size of the precoder. The EXIT chart shows the influence of the system parameters over the convergence and the asymptotical performance. Results are presented for a 16-QAM that allows an high spectral efficiency.

## 1 Introduction

L'objectif des nouveaux systèmes de communications sans fil n'est plus de combattre les évanouissements intrinsèques au canal de propagation mais plutôt de tirer parti de la diversité apportée par ces évanouissements. Les techniques de précodage linéaire, en particulier celle proposée dans [1], permettent d'exploiter la diversité temporelle et/ou fréquentielle d'un canal à évanouissements. Avec un précodage linéaire associé à un codage de canal et un récepteur itératif, il est alors possible d'atteindre un gain en diversité égal à la taille de la matrice de précodage [2]. Le principe MIMO (*Multiple Input Multiple Output*), basé sur l'utilisation d'antennes multiples en émission et en réception, permet quant à lui de tirer parti de la diversité spatiale du canal. De plus, la capacité d'un schéma d'émission multi-antennes augmente linéairement avec le nombre d'antennes, ce qui conduit à une efficacité spectrale potentielle très importante. Cette potentialité intrinsèque peut être approchée lorsque la technique MIMO est associée à des récepteurs performants faisant appel à des traitements itératifs en réception [3]. Ainsi un système constitué d'un précodage linéaire et d'un dispositif multi-antennes est susceptible de tirer parti de la diversité spatio-temporelle tout en offrant une efficacité spectrale élevée [4].

La méthode des diagrammes EXIT (*EXtrinsic Information Transfer*) permet d'analyser la convergence des processus itératifs [5]. De plus, elle aide à mettre en évidence l'influence de certains paramètres afin d'optimiser la construction du système. Dans le contexte d'un multiplexage spatial, différentes études ont été proposées, dont [6].

Dans ce papier, nous étudions un système MIMO associé à un précodage linéaire pour une modulation d'ordre élevé.

Le récepteur utilise un algorithme itératif basé sur le traitement conjoint du précodage linéaire et du multiplexage spatial. L'égaliseur est issu de travaux sur la turbo-égalisation dans le contexte d'un canal avec IES (Interférences Entre Symboles) [7]. Il est basé sur le critère MEQM (Minimum d'Erreur Quadratique Moyenne) avec information *a priori* et constitue une version approchée de la turbo-égalisation proposée dans [8]. Des systèmes MIMO précodés itératifs sont également présentés dans [9] avec un algorithme de type turbo-BLAST et dans [10] avec un détecteur de type MAP (Maximum *A Posteriori*).

Après avoir présenté l'association du système MIMO et du précodage linéaire, nous décrivons brièvement l'égaliseur MEQM avec information *a priori* dans un contexte général puis adapté à une transmission MIMO précodée. L'égaliseur effectue alors le traitement conjoint des interférences générées par le canal MIMO et par le précodage. La contribution principale du papier réside dans l'analyse de la convergence du système proposé à l'aide d'un diagramme EXIT. Ce type de diagramme permet d'illustrer l'influence du précodage sur la capacité du système à converger ainsi que sur ses performances asymptotiques.

## 2 Chaîne de transmission

### 2.1 Système d'émission

La figure 1 présente le système MIMO précodé utilisé. Les données à transmettre sont codées puis entrelacées suivant un schéma de type BICM (*Bit Interleaved Coded Modulation*). La conversion bits/symboles forme des  $q$ -uplets puis réalise la *mapping* vers la constellation de type MAQ-2<sup>q</sup>. Les symboles complexes obtenus sont alors répartis vers les  $N_e$  an-

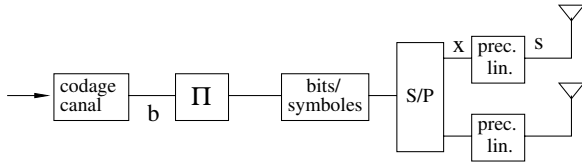


FIG. 1 – Précodage linéaire et multiplexage spatial, schéma d'émission avec  $N_e = 2$ .

tennes d'émission. Avant la transmission, chaque flux est pré-codé à l'aide d'une matrice de Hadamard de taille  $M$ . Ainsi, les données précodées sont étalées sur  $M$  instants de transmission distincts ce qui permet d'exploiter la diversité temporelle sur une durée de  $M$  temps symboles. Un tel schéma d'émission et ses avantages en termes de capacité sont présentés dans [11]. Dans le cas d'une transmission OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*), l'étalement peut être effectué sur les différentes sous-porteuses, exploitant ainsi la diversité fréquentielle.

## 2.2 Système de réception

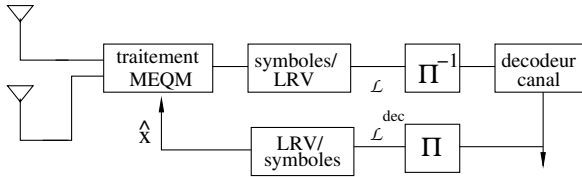


FIG. 2 – Traitement itératif conjoint en réception avec  $N_r = 2$ .

Les signaux provenant des  $N_r$  antennes de réception pendant  $M$  instants sont traités simultanément à l'aide de l'égaliseur de type MEQM décrit plus loin. Cet égaliseur utilise une information *a priori* générée par le décodeur de canal mettant ainsi en œuvre un traitement itératif. Ces informations sont échangées sous la forme de LRV (Log-Rapports de Vraisemblance) représentant la valeur et la fiabilité des informations transmises. Conformément à [12], on utilise la totalité de l'information *a posteriori* en sortie du décodeur de canal. Afin de respecter le type de données traité par chacun des deux modules, une fonction d'entrelacement et des conversions symboles-LRV sont nécessaires. Ces fonctions sont décrites dans [2].

## 2.3 Modèle de canal

Le canal de propagation considéré ici est non sélectif en fréquence et composé de sous-canaux de type Rayleigh, chacun correspondant à un couple d'antennes émission/réception. Le canal de propagation à l'instant  $t$  se représente alors sous la forme d'une matrice  $\mathbf{H}_t$  de taille  $N_e \times N_r$ . Les matrices du canal sont indépendantes à chaque instant, ce qui est alors représentatif d'un canal à évanouissements rapides ou d'un système OFDM avec entrelacement parfait. Enfin, on considère que seul le récepteur a une connaissance parfaite de  $\mathbf{H}_t$  à chaque instant.

## 3 Traitement itératif conjoint antennes-précodage

Dans cette section, nous décrivons l'égaliseur MEQM, inspiré de [7] et adapté au traitement conjoint du canal MIMO et du précodage linéaire.

### 3.1 Égaliseur MEQM avec information *a priori*

On considère tout d'abord le problème plus général du traitement du signal en sortie d'un canal à interférences par blocs. La relation qui lie l'entrée et la sortie d'un tel canal peut s'écrire

$$\mathbf{r} = \mathcal{H} \mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (1)$$

où  $\mathbf{x}$  est le vecteur de symboles émis,  $\mathcal{H}$  la matrice du canal,  $\mathbf{w}$  un bruit blanc additif gaussien et  $\mathbf{r}$  le vecteur reçu.

L'égaliseur MEQM avec information *a priori* comporte une annulation d'interférences suivie d'une égalisation adaptée pour chaque itération de décodage. La sortie de l'égaliseur produit des symboles ( $\tilde{x}_k$ ) en fonction des données reçues ( $r_k$ ), de la matrice de canal  $\mathcal{H}$  et de symboles estimés ( $\hat{x}_k$ ). Les symboles ( $\hat{x}_k$ ) sont construits à partir des LRV donnés par le décodeur de canal à l'itération précédente. La sortie de l'égaliseur s'écrit

$$\tilde{x}_k = \lambda_k \mathbf{p}_k^H (\mathbf{r} - \mathcal{H} \hat{\mathbf{x}} + \hat{x}_k \mathbf{h}_k) \quad (2)$$

avec  $\mathbf{h}_k$  la colonne d'indice  $k$  de  $\mathcal{H}$  et  $\mathbf{p}_k$  la colonne d'indice  $k$  de la matrice d'égalisation  $\mathbf{P}$ . Le critère MEQM permet alors de déterminer la matrice  $\mathbf{P}$  et les  $\lambda_k$ . On a alors

$$\mathbf{p}_k = ((\sigma_x^2 - \sigma_{\hat{x}}^2) \mathcal{H} \mathcal{H}^H + \sigma_w^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{h}_k \quad (3)$$

et

$$\lambda_k = \frac{\sigma_x^2}{1 + \sigma_{\hat{x}}^2 \beta_k}, \quad \beta_k = \mathbf{p}_k^H \mathbf{h}_k \quad (4)$$

avec  $\mathbf{I}$  la matrice identité. La variance des symboles estimés  $\sigma_{\hat{x}}^2$  est mesurée sur l'ensemble du bloc de données par

$$\sigma_{\hat{x}}^2 = \mathbb{E} \left\{ |\hat{x}_l|^2 \right\} \approx \frac{1}{N_b} \sum_{l=0}^{N_b-1} |\hat{x}_l|^2 \quad (5)$$

où  $N_b$  est la taille du bloc.  $\sigma_{\hat{x}}^2$  est mis à jour à chaque itération et les matrices d'égalisation sont alors recalculées.

Lors de la première itération, on a  $\sigma_{\hat{x}}^2 = 0$  et  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ . Le traitement se réduit à une égalisation linéaire MEQM classique.

D'autre part, si on suppose une estimation parfaite des symboles ( $\sigma_{\hat{x}}^2 = \sigma_x^2$  et  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$ ), l'égaliseur correspond alors un annuleur d'interférences incluant le filtre adapté au canal. On obtient alors en sortie de l'égaliseur

$$\tilde{x}_k \propto \mathbf{h}_k^H \mathbf{h}_k x_k + \mathbf{h}_k^H \mathbf{w} \quad (6)$$

Si  $L$  est la taille des  $\mathbf{h}_k$ , l'équation (6) correspond à la sortie d'un récepteur MRC (*Maximum Ratio Combining*) exploitant une diversité sur  $L$  canaux distincts. On en déduit donc que le gain en diversité maximal atteignable par ce type de système est égal à  $L$ .

Enfin, il est possible de réduire la complexité de décodage en utilisant uniquement les deux versions extrêmes de l'égaliseur : l'égaliseur MEQM linéaire pour la première itération et l'annuleur d'interférences avec filtre adapté pour les itérations suivantes. Cette version sous-optimale ne requiert des inversions de matrices que lors de la première itération de décodage.

Elle conduit cependant à une convergence plus tardive du processus itératif quand le niveau d'interférences est élevé. Ainsi, cette version est moins efficace sur le système multi-antennes précodé (cf. 4.2). Dans le contexte MIMO, ce type de récepteur, dérivé dans [3], offre de très bonnes performances pour seulement quelques itérations de décodage.

### 3.2 Adaptation au système MIMO précodé

L'égaliseur précédemment décrit peut être adapté pour traiter conjointement le précodage linéaire et le multiplexage spatial sur le canal MIMO. Pour cela, les effets conjoints du précodage et du système multi-antennes sont inclus dans  $\mathcal{H}$ . Ainsi, le précodage de taille  $M$  associé à un système à  $N_e$  antennes d'émission et  $N_r$  antennes de réception peut être représenté par une matrice  $\mathcal{H}$  de taille  $(M.N_r) \times (M.N_e)$ . On construit  $\mathcal{H}$  conformément au schéma présenté en figure 1. Soit  $\mathbf{F} = \text{diag}(\mathbf{H}_0, \dots, \mathbf{H}_{M-1})$  la matrice diagonale par blocs constituée des matrices de canal aux instants d'émission  $0, \dots, M-1$ . Soit  $\mathbf{G} = (g_{i,j})$  la matrice construite à partir de la matrice de précodage  $\mathbf{D} = (d_{i,j})$  telle que

$$g_{i,j} = \begin{cases} d_{p,s} & \text{si } q = r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } \begin{cases} p = i \text{ div } N_e & r = i \text{ mod } N_e \\ q = j \text{ div } M & s = j \text{ mod } M \end{cases} \quad (7)$$

$\mathcal{H}$  peut alors s'écrire comme le produit  $\mathbf{FG}$ . Elle vérifie  $\mathcal{H}\mathcal{H}^H = \mathbf{FF}^H$  car  $\mathbf{D}$  est unitaire. Ainsi, la matrice à inverser

$$(\sigma_x^2 - \sigma_k^2) \mathcal{H}\mathcal{H}^H + \sigma_w^2 \mathbf{I} \quad (8)$$

est diagonale par blocs ce qui permet de conserver une complexité raisonnable du traitement en réception.

La complexité de l'égaliseur est indépendante de la modulation et celui-ci peut donc être mis en œuvre pour des transmissions comportant un nombre d'antennes raisonnable et une matrice de précodage de grande taille.

## 4 Analyse de la convergence

Dans cette partie, nous analysons le récepteur itératif décrit précédemment à l'aide d'un diagramme EXIT et de simulations de type Monte Carlo.

Le codage de canal utilisé est un code convolutif récuratif systématique circulaire (CRSC) de longueur de contrainte  $K = 7$  et de rendement  $1/2$ . Les blocs codés sont de grande taille (4096 octets), et on utilise l'algorithme de décodage Max-Log-MAP. La modulation utilisée est une MAQ-16 avec un *mapping* de Gray. On compare un système MIMO  $4 \times 4$  seul avec un système MIMO précodé utilisant le même nombre d'antennes et une matrice de Hadamard de taille  $M = 8$ . L'efficacité spectrale des deux systèmes est donc de 8 bits/s/Hz. Les courbes asymptotiques de diversité sont obtenues en simulant un système où  $L$  répliques des symboles sont transmises sur des canaux de Rayleigh indépendants ; le récepteur comporte un traitement MRC et un codage de canal identique au système étudié. Le gain en diversité est alors égal à  $L$  (1, 4 ou 32).

### 4.1 Diagrammes EXIT

La méthode des diagrammes EXIT, proposée par ten Brink dans [5], permet de visualiser graphiquement la convergence des systèmes itératifs.

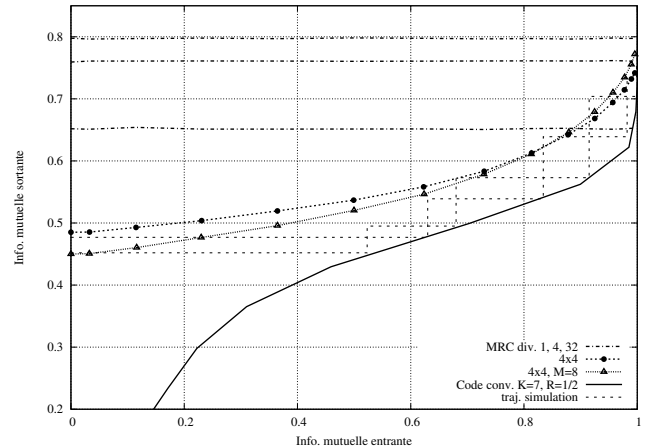


FIG. 3 – Comparaison des systèmes multi-antennes avec et sans précodage linéaire sur canal de Rayleigh,  $E_b/N_0 = 7$  dB.

Le diagramme est constitué des courbes de mesure de l'information mutuelle sortante en fonction de l'information mutuelle entrante pour chacun des composants du système itératif (ici, le décodeur de canal et l'égaliseur MEQM).

La figure 3 présente le diagramme EXIT de fonctionnement du récepteur itératif pour le système MIMO avec et sans précodage linéaire. Les courbes obtenues sont des moyennes effectuées sur un grand nombre de réalisations du canal.

Sur la partie gauche du diagramme, la courbe du système précodé se trouve au-dessous de celle du système MIMO seul. Cela indique donc que l'insertion du précodage linéaire retarde la convergence pour ce type de traitement. À l'inverse, lorsque l'information mutuelle entrante tend vers 1, les courbes des deux systèmes étudiés se croisent. On en déduit que le précodage linéaire améliore les performances asymptotiques du système. Ceci est la conséquence de l'exploitation de la diversité temporelle du canal par le précodage linéaire. Les simulations confirment ce résultat.

Par ailleurs, des mesures de l'information mutuelle au cours d'une simulation de transmission sont effectuées. Les trajectoires obtenues (en pointillé sur la figure 3) ne coïncident pas exactement avec les courbes. L'explication de ce phénomène, donnée dans [6], ne remet pas en cause l'interprétation du diagramme faite ici.

### 4.2 Résultats de simulation

Les figures 4 et 5 donnent les résultats de simulation pour les systèmes MIMO sans et avec précodage linéaire. Les simulations sont effectuées avec l'égaliseur MEQM ainsi que sa version sous-optimale. On observe une convergence vers la courbe de gain en diversité 4 pour le système MIMO non précodé et vers la courbe de gain en diversité 32 pour le système MIMO précodé. Cela confirme l'effet multiplicatif de la diversité spatiale et temporelle. Le gain en diversité passe ainsi de 4 à 32 mais ne permet de gagner que 0,5 dB environ pour un TEB de  $10^{-5}$ . Enfin, pour ce système, la version sous-optimale de l'égaliseur ne permet pas de tirer efficacement parti du précodage linéaire, la convergence ayant lieu tardivement dans ce cas.

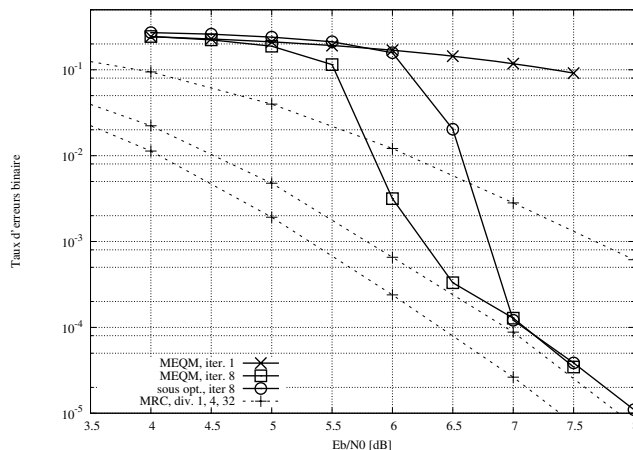


FIG. 4 – TEB du système multi-antennes  $4 \times 4$  sans précodage linéaire sur canal de Rayleigh.

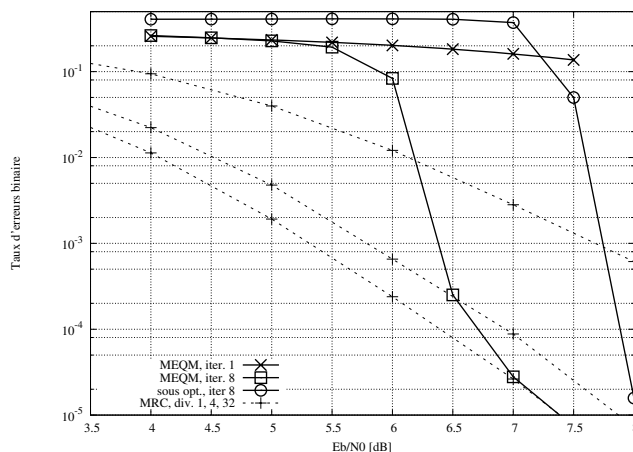


FIG. 5 – TEB du système multi-antennes  $4 \times 4$  avec précodage linéaire  $M = 8$  sur canal de Rayleigh.

## 5 Conclusion

Nous avons comparé deux systèmes multi-antennes dont l'un comporte un précodage linéaire exploitant la diversité temporelle d'un canal à évanouissement. On peut montrer, à l'aide d'un diagramme EXIT, que l'ajout du précodage linéaire provoque une convergence plus tardive du processus itératif. D'autre part, la comparaison avec un récepteur MRC exploitant la diversité sur des canaux de Rayleigh indépendants permet d'établir que les performances asymptotiques du système correspondent à un gain en diversité égal au produit du nombre d'antennes de réception par la taille du précodage. Ainsi, le schéma d'émission MIMO  $4 \times 4$  avec un précodage de taille 8 avec un traitement conjoint itératif en réception permet d'atteindre les performances d'une transmission MAQ-16 codée avec un gain en diversité de 32 (8 itérations,  $E_b/N_0 \geq 7$  dB) tout en offrant une efficacité spectrale égale à 8 bits/s/Hz.

On peut souligner que le canal utilisé ici est un modèle idéal à évanouissements rapides et que les atténuations sont parfaitement connues du récepteur. De plus, le schéma de transmission utilisé ne permet pas au précodage linéaire d'exploiter la diversité de transmission. La structure pourrait être adaptée dans le

cas de canaux statiques ou quand les variations dans le temps sont faibles. Dans le cas de l'OFDM, la question se pose alors en termes de diversité fréquentielle.

## Références

- [1] X. Ma and G. B. Giannakis, "Complex field coded MIMO systems : performance, rate, and trade-offs," *Wirel. Commun. Mob. Comput.*, vol. 2, pp. 693–717, 2002.
- [2] J. Le Masson, C. Langlais, and C. Berrou, "Linear precoding with low complexity MMSE turbo-equalization and application to the wireless LAN system," in *International Conference on Communications, ICC'05*, May 2005.
- [3] M. Sellathurai and S. Haykin, "Turbo-BLAST for wireless communications : theory and experiments," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, no. 10, pp. 2538–2546, 2002.
- [4] X. Ma and G. B. Giannakis, "Full-diversity full-rate complex-field space-time coding," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 51, no. 11, pp. 2917–2930, Nov. 2003.
- [5] S. ten Brink, "Convergence behavior of iteratively decoded parallel concatenated codes," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 49, no. 10, pp. 1727–1737, Oct. 2001.
- [6] C. Hermosilla and L. Szczecinski, "Exit charts for turbo receivers in MIMO systems," in *Seventh International Symposium on Signal Processing and Its Applications*, vol. 1, July 2003, pp. 209–212.
- [7] C. Laot, R. Le Bidan, and D. Leroux, "Low complexity MMSE turbo-equalization : a possible solution for EDGE," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 4, no. 3, pp. 965–974, May 2005.
- [8] M. Tüchler, A. C. Singer, and R. Koetter, "Minimum mean squared error equalization using a priori information," *IEEE Transactions On Signal Processing*, vol. 50, no. 3, pp. 673–683, March 2002.
- [9] P.-J. Bouvet, M. Hélar, and V. Le Nir, "Low complexity iterative receiver for linear precoded MIMO systems," in *IEEE Eighth International Symposium on Spread Spectrum Techniques and Applications*, Aug. 2004, pp. 17–21.
- [10] N. Gresset, J. Boutros, and L. Brunel, "Linear precoding under iterative processing for multiple antennas channels," in *First International Symposium on Control, Communications and Signal Processing*, 2004, pp. 563–566.
- [11] J. Sykora and M. Knize, "Linear diversity precoding design criterion for block-fading delay limited MIMO channel," in *Global Telecommunications Conference, GLOBECOM'04*, vol. 6, Nov. 2004, pp. 3711–3715.
- [12] F. Vogelbruch and S. Haar, "Improved soft ISI cancellation for turbo equalization using full soft output channel decoder's information," in *Global Telecommunications Conference, GLOBECOM'03*, vol. 3, Dec. 2003, pp. 1736–1740.



# Décodage de Turbo Codes Produit Ternaires

Loïc BARNAULT<sup>1,2</sup>, David DECLERCQ<sup>1</sup>, Jacques EUDES<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ETIS ENSEA/UCP/CNRS UMR 8051,  
6, avenue du Ponceau BP 44, F 95014 CERGY-PONTOISE CEDEX,  
Tél. : +33 1 30 73 66 10 Fax. : +33 1 30 73 66 27

<sup>2</sup>Thalès, Colombes, France  
Barnault@ensea.fr, Declercq@ensea.fr, Jacques.Eudes@fr.thalesgroup.com

**Résumé** – Dans cet article, nous présentons une généralisation de l'algorithme "list-based" ALD-FBBA appliqué aux codes blocs ternaires. Des itérations de cet algorithme permettent le décodage de turbo codes produits ternaires. Nous montrons que les performances de ces turbo codes produits ternaires sont comparables à celles des turbo codes produits binaires.

**Abstract** – In this paper, we present a generalization of the list-based ALD-FBBA algorithm applied to ternary bloc codes. Iterations of this algorithm permit to decode ternary turbo product codes defined by the interleaving of ternary bloc codes. We show that ternary turbo product codes performance are comparable to binary turbo product codes.

## Introduction

Un code produit est défini par la concaténation en série de deux codes constituants de type bloc. Un code produit est ternaire lorsque ses codes constituants sont aussi de nature ternaire – les symboles prennent alors leurs valeurs dans l'ensemble  $\{0;1;2\}$ . Un turbo code produit ternaire est un code produit ternaire à décodage itératif, ce qui implique que ses codes constituants sont associés à un décodage SISO (Soft Input Soft Output). La première partie de cet article correspond à l'étude des codes constituants et de leur décodage par un nouvel algorithme généralisé de l'algorithme ALD-FBBA utilisé pour les codes blocs binaires [3]. La seconde partie définit les turbo codes produits ternaires et leur décodage itératif.

## 1 Décodage des codes constituants

### 1.1 Notation, Encodage

Soit  $\mathcal{C}$ , un code bloc ternaire de taille  $N$ , d'information  $K$  et de matrice génératrice  $G_{(N,K)}$ . Le codeur associé à  $\mathcal{C}$  encode le vecteur d'information ternaire  $I_{(K)}$  en un mot de code ternaire  $C_{(N)}$  de la manière suivante,

$$C = GI \quad (1)$$

On définit d'autre part  $L_{(N)}$ , le vecteur de vraisemblances associé au mot de code  $C$ . Le  $k^{ième}$  élément du vecteur  $L$  est composé de trois valeurs de probabilité et s'exprime ainsi,

$$L_k = [p(y_k|c_k=0) \ p(y_k|c_k=1) \ p(y_k|c_k=2)] = [l_0 \ l_1 \ l_2] \quad (2)$$

$k \in [0; N-1]$

### 1.2 Discussion sur le décodage

Pour être utilisé comme code constituant d'un turbo code produit, le code bloc  $\mathcal{C}$  doit être associé à un décodage SISO (soft input, soft output). Les décodeurs SISO de codes binaires sont le plus souvent définis à partir de fiabilités construites sur une liste de mots de codes candidats [1]. On peut citer les deux algorithmes suivants,

L'algorithme *Chase* repose sur la construction d'un ensemble de mots de codes par un décodage algébrique de patterns dérivés de la décision dure en sortie du canal. Les différentes déclinaisons de l'algorithme Chase reposent sur la façon de définir ces patterns et satisfont à des degrés différents le compromis performance-complexité. Ainsi, Chase-I définit  $\binom{N}{\lfloor d/2 \rfloor}$  patterns, Chase-II définit  $2^{\lfloor d/2 \rfloor}$  patterns alors que Chase-III n'en définit que  $\lfloor d/2 \rfloor + 1$  ( $d$  étant la distance de Hamming du code). La sortie souple de l'algorithme est construite en appliquant une marginalisation sur l'ensemble précédemment défini.

L'algorithme *ALD-FBBA* détermine dans un premier temps une matrice d'encodage basée sur les symboles les plus fiables du mot de code reçu. Ensuite, il utilise cette matrice d'encodage pour construire un ensemble de mots de codes à partir de patterns dérivés de la décision dure en sortie du canal. Les patterns sont définis de manière à optimiser le compromis performance/complexité, en contrôlant la qualité et la taille de l'ensemble. La sortie souple de l'algorithme est également construite en appliquant une marginalisation sur l'ensemble précédemment défini.

Dans la section suivante, nous décrivons en détail la généralisation ternaire de l'algorithme ALD-FBBA.

### 1.3 Algorithme ALD-FBBA ternaire

Soit  $Y_D$  la sortie de la décision dure d'un mot de code bruité  $Y$ . On a  $Y_D = C + B$  où  $B$  est un bruit discret de taille  $N$  à valeurs dans  $\{0,1,2\}^1$ .

On veut construire un estimé  $\tilde{C}$  du mot de code  $C$  en utilisant les symboles les moins bruités de  $Y_D$ . On sélectionne puis on ordonne les symboles les plus fiables (selon une fonction de fiabilité  $\mathcal{F}$ ) qui permettent la reconstruction d'un mot de code. Cette sélection-permutation s'effectue par l'intermédiaire d'une matrice  $Q_{\mathcal{F}}$  appliquée sur le mot de code bruité et décidé  $Y_D$ , le vecteur résultant est appelé  $U$ .

$$U = Q_{\mathcal{F}}Y_D = Q_{\mathcal{F}}(C + B) \quad (3)$$

avec la définition de l'encodage  $C = GI$ ,

$$U = Q_{\mathcal{F}}GI + Q_{\mathcal{F}}B \quad (4)$$

La matrice  $Q_{\mathcal{F}}$  sélectionne dans  $G$  les lignes correspondants aux symboles les plus fiables, sous la contrainte que l'on puisse reconstruire le mot de code.  $Q_{\mathcal{F}}G$  est donc inversible par construction (pivot de Gauss). Ainsi,

$$(Q_{\mathcal{F}}G)^{-1}U = I + (Q_{\mathcal{F}}G)^{-1}Q_{\mathcal{F}}B \quad (5)$$

puis,

$$I = (Q_{\mathcal{F}}G)^{-1}U - (Q_{\mathcal{F}}G)^{-1}Q_{\mathcal{F}}B \quad (6)$$

de nouveau avec  $C = GI$ ,

$$C = G(Q_{\mathcal{F}}G)^{-1}U - G(Q_{\mathcal{F}}G)^{-1}Q_{\mathcal{F}}B \quad (7)$$

on définit alors  $G_{\mathcal{F}} = G(Q_{\mathcal{F}}G)^{-1}$  comme étant une matrice d'encodage secondaire,

$$C = G_{\mathcal{F}}U - G_{\mathcal{F}}Q_{\mathcal{F}}B \quad (8)$$

Une estimation du mot de code  $C$  est alors  $\tilde{C} = G_{\mathcal{F}}U$  ce qui donne,

$$\tilde{C} = C + G_{\mathcal{F}}Q_{\mathcal{F}}B \quad (9)$$

Le choix de la fiabilité  $\mathcal{F}$ , fonction de la vraisemblance  $L_k$  d'un symbole, est effectué dans l'optique de minimiser l'erreur  $G_{\mathcal{F}}Q_{\mathcal{F}}B$ . La fonction de fiabilité que nous utilisons consiste en la différence entre les deux valeurs minimales de  $L_k$ .

$$\mathcal{F}(L_k) = l_{i_1} - l_{i_0} \quad (10)$$

avec  $i_0$  l'indice du minimum, et  $i_1$  l'indice du second minimum. Cette fonction de fiabilité est propre au décodeur ternaire.

L'algorithme ALD-FBBA consiste à construire un sous-ensemble  $\mathcal{S}$  de mots de codes, concentrés au voisinage du mot de code bruité reçu (Le voisinage étant défini comme les mots de

codes les plus fiables au sens de  $\mathcal{F}$ ). Pour cela, on définit des variations au voisinage du mot de code candidat,

$$C^{(0)} = \tilde{C} = G_{\mathcal{F}}U \quad (11)$$

Le voisinage de  $C^{(0)}$  correspond aux mots de codes  $C^{(i)}$  dont la fiabilité des symboles qui diffèrent de  $C^{(0)}$  est faible.

Divers types d'ensembles  $\mathcal{S}$  peuvent être utilisés. Le plus efficace serait l'univers des mots de codes, ce qui correspondrait à un décodage au sens du maximum de vraisemblance. Il n'est cependant pas utilisable en raison de sa complexité. Il s'agit donc de trouver un bon compromis entre qualité du décodage et complexité. L'ensemble  $\mathcal{S}_1$  décrit ci-dessous est intéressant puisque pour une faible complexité il ne fait varier que les  $l$  symboles supposés les moins fiables. Le cardinal de cet ensemble est de  $3^l$  mots de codes,  $l$  est un paramètre qui permet d'explorer un voisinage plus ou moins étendu autour du mot de code candidat. Quant à l'ensemble  $\mathcal{S}_2$ , il est utilisé pour pouvoir effectuer par la suite l'étape de construction de la sortie souple. L'ensemble que nous utilisons est  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ .

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ C^{(i)} = G_{\mathcal{F}} \left( U + [\overset{K}{\underset{0 \dots 0}{\overset{0 \dots 0}{i_0 \dots i_{l-1}}} 0 \dots 0]^T \right), \forall (i_0 \dots i_{l-1}) \in \{0; 1; 2\}^l \right\} \quad (12)$$

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ C^{(i)} = G_{\mathcal{F}} \left( U + [\overset{t}{\underset{0 \dots 0}{\overset{0 \dots 0}{i_r 0 \dots 0}}} 0 \dots 0]^T \right), \forall i_r \in \{1; 2\}, \forall t \in [0; K-1] \right\} \quad (13)$$

L'ensemble  $\mathcal{S}$  contient donc les mots de code candidats dont les fiabilités vont produire la sortie souple du décodeur. A chaque élément d'un mot de code  $C^{(i)}$ , on associe sa probabilité contenu dans l'entrée souple  $L$ . Pour chaque mot de code, on effectue le produit  $W^{(i)}$  des probabilités associées aux symboles de  $C^{(i)}$ .

$$W^{(i)} = \prod_k L_k[C_k^{(i)}] \quad (14)$$

$W^{(i)}$  représente donc la fiabilité du mot de code  $C^{(i)}$ . Pour calculer la sortie souple  $S$ , on cherche à estimer la probabilité  $S_k[j]$  qu'a l'élément  $C_k$  d'avoir la valeur  $j$ . On définit alors  $S_k[j]$  comme étant le maximum des  $W^{(i)}$  associés aux mots de codes satisfaisant  $C_k^{(i)} = j$ .

$$S_k[j] = \max_{C_k^{(i)}=j} (W^{(i)}) \quad (15)$$

1. Pour le calcul  $(C + B)$ , les opérations se font modulo 3.

## 2 Décodage itératif d'un turbo code produit ternaire

### 2.1 Notation

Maintenant que nous disposons d'un décodage SISO de codes blocs ternaires, nous allons l'appliquer au décodage itératif d'un code produit ternaire. Soient  $\mathcal{C}_1$  le code ligne et  $\mathcal{C}_2$  le code colonne du code produit,  $N_1$  (resp.  $N_2$ ) et  $R_1$  (resp.  $R_2$ ) sont les tailles et rendements de  $\mathcal{C}_1$  (resp.  $\mathcal{C}_2$ ). Le code produit a donc une taille  $N = N_1 N_2$ , et un rendement  $R = R_1 R_2$ . La figure 1 représente la structure de ce code produit. Le code est envoyé sur un canal additif Gaussien dont l'entrée est une constellation  $3PSK$ .

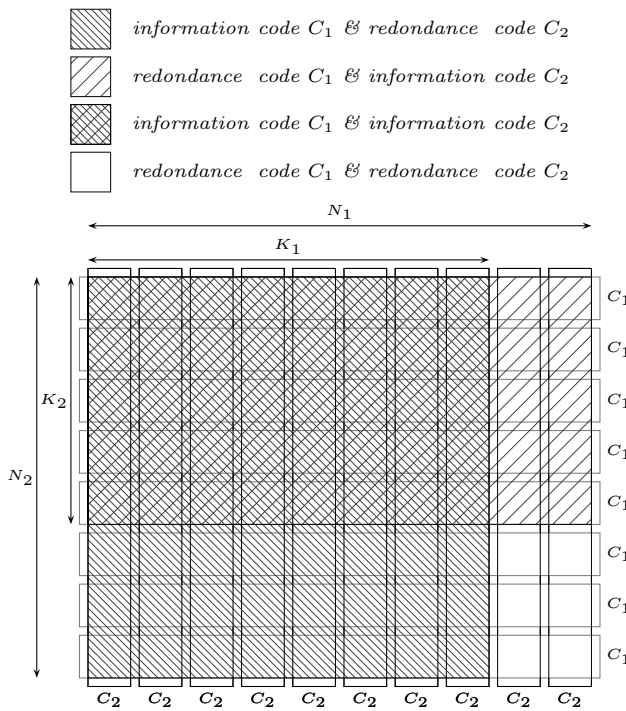


FIG. 1 – Structure d'un code produit, constitué d'un entrelacement de codes blocs lignes et de codes blocs colonnes

La figure 2 compare à  $E_b$  constante, les distances libres de la BPSK ( $\circ$ ), de la QPSK ( $\blacksquare$ ), et de la 3PSK ( $\blacktriangle$ ). Les distances libres  $d_{\text{lib}}^{(BPSK)}$  et  $d_{\text{lib}}^{(QPSK)}$  sont identiques, alors que la distance libre  $d_{\text{lib}}^{(3PSK)}$  est légèrement supérieure.

$$\begin{aligned} d_{\text{lib}}^{(BPSK)} &= 2\sqrt{E_b} \\ d_{\text{lib}}^{(3PSK)} &= \sqrt{3 \log_2(3)} \sqrt{E_b} \\ &\approx 2.1806 \sqrt{E_b} \\ d_{\text{lib}}^{(QPSK)} &= 2\sqrt{E_b} \end{aligned} \quad (16)$$

Pour définir les turbo codes produits les plus performants a priori, nous avons choisis des codes constituants possédant des distances minimales les plus grandes possibles [4].

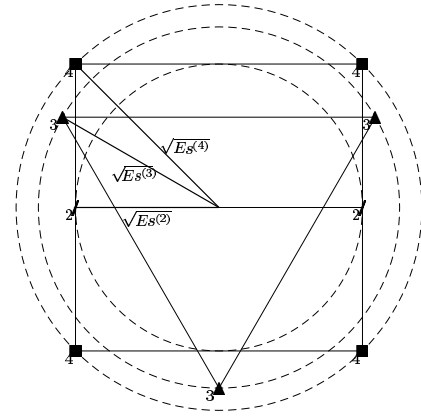


FIG. 2 – Représentation des distances libres  $d_{\text{lib}}^{(BPSK)}$ ,  $d_{\text{lib}}^{(3PSK)}$  et  $d_{\text{lib}}^{(QPSK)}$  pour une énergie par bit  $E_b$  identique.

### 2.2 Décodage itératif

Une itération du décodage de ces turbo codes produits se décompose en deux étapes. La première correspond au décodage de chaque code bloc associé aux lignes, et la seconde au décodage des codes blocs associés aux colonnes. Chacune de ces étapes a pour entrée les vraisemblances ainsi que l'information extrinsèque issue de l'étape précédente pondérée par un coefficient  $\alpha$  pour les lignes, et  $\beta$  pour les colonnes [3][5]. Le schéma suivant décrit le fonctionnement d'une itération de décodage,  $L$  étant les vraisemblances,  $E_n^{(L)}$  l'information extrinsèque en entrée de l'étape ligne, et  $E_n^{(C)}$  l'information extrinsèque en entrée de l'étape colonne.

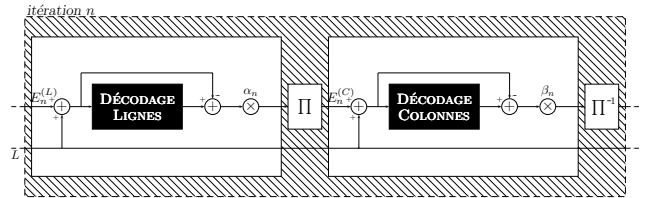


FIG. 3 – Les deux étapes d'une itération de décodage

Le graphique 4 compare les performances d'un turbo code produit ternaire associé à une  $3PSK$  et celles d'un turbo code produit binaire associé à une  $QPSK$  pour une efficacité spectrale identique  $\eta = 0.72$  et pour une information binaire de l'ordre de 424 bits (taille ATM).

$$\eta = R_{\text{ter}} \log(3) / \log(2) = 2R_{\text{bin}} \quad (17)$$

Le code ternaire possède les caractéristiques suivantes  $\mathcal{C}_1(N = 26 - 1, K = 18 - 1, d_{\min} = 6)$  et  $\mathcal{C}_2(N = 26 - 2, K = 18 - 2, d_{\min} = 6)$ , le rendement est de  $R = 0.45$ , l'information binaire équivalente est  $K_{\text{bin}} = 431$ , et le nombre de symboles  $3PSK$  en sortie est 600. Le code binaire est défini par  $\mathcal{C}_1(N = 35 - 0.74, K = 22 - 1.41, d_{\min} = 6)$  et  $\mathcal{C}_2(N = 35 - 0.74, K = 22 - 1.41, d_{\min} = 6)$ , ainsi  $R = 0.36$ ,  $K = 424$  et le nombre de symboles  $QPSK$  en sortie est 587 (Les tailles des codes constituants ne sont pas entières en raison de poinçonnages non uniformes). Ces résultats montrent des performances comparables pour le turbo code produit binaire d'une part, et le turbo code produit ternaire d'autre part.

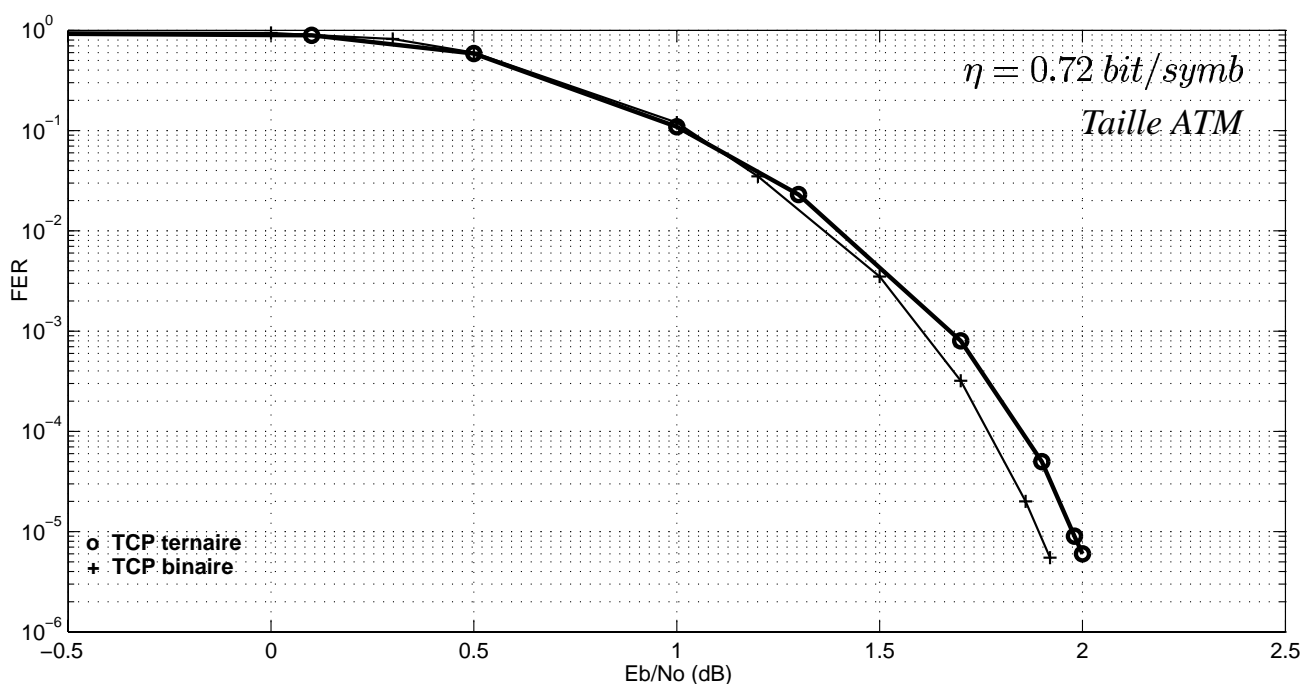


FIG. 4 – Performances comparées d'un turbo code produit binaire et d'un turbo code produit ternaire de taille ATM, pour une efficacité spectrale  $\eta = 0.72$

Considérons une chaîne de communication complète avec code et modem. Si l'on s'intéresse à la transmission de paquets de petites tailles (ATM par exemple) on s'aperçoit qu'il existe une plage d'efficacité spectrale pour laquelle la *QPSK* ne peut être démodulée correctement et la *BPSK* n'offre pas une capacité satisfaisante. Pour une efficacité spectrale  $\eta \in [0.5, 0.7]$ , l'utilisation d'une constellation *3PSK* facilite la démodulation tout en permettant une capacité proche de la *QPSK*. Pour que cette chaîne de communication ternaire puisse concurrencer ce qui existe en binaire, elle doit comporter un code ternaire aux performances comparables à celles d'un code binaire.

### 3 Conclusion

Nous proposons dans cet article une extension de l'algorithme ALD-FBBA associé au décodage itératif des turbo codes produit ternaires.

Les résultats montrent que les performances des turbo codes binaires et ternaires sont comparables. Ceci nous permet d'utiliser une chaîne de communication entièrement ternaire en conservant de bonnes performances au niveau du code tout en facilitant la démodulation. En effet la constellation *3PSK* est plus robuste aux erreurs de synchronisation car c'est la constellation complexe ayant la plus grande distance libre à  $E_n/N_0$  fixé. Enfin, il pourrait être intéressant de compléter cette étude en comparant les performances de ce turbo code produit ternaire avec celles d'un code LDPC ternaire.

### Références

- [1] Philippa. A. Martin, Desmond. P. Taylor, Marc. P. C. Fossorier, "Soft-Input Soft-Output List-Based Decoding Algorithm", ISIT 2002.
- [2] C. Barrios Vicente & J.H. Weber, "Dynamic Chase decoding algorithm", Proceedings IEEE Information Theory Workshop, Paris, France, pp. 312-315, March 31 - April 4, 2003.
- [3] Juing. Fang, Fabien. Buda & Emmanuel Lemois, "Turbo Product Code : A Well Suitable Solution To Wireless Packet Transmission For Very Low Error Rates", 2<sup>nd</sup>, International Symposium on Turbo Codes & Related Topics, Brest, France, 2000.
- [4] F.R. Kschischang & S. Pasupathy, "Some Ternary and Quaternary Codes and Associated Sphere Packings", IEEE Transactions on information theory, VOL. 38, NO.2, March 1992.
- [5] R. Pyndiah, "Near optimum decoding of product codes : block turbo codes", IEEE Trans. on Communications, Vol. 46, n° 8, August 1998.

# Index des auteurs

Abadi Mohammed	367-370
Abbadì Sami	1013-1016
Abed-meraim Karim	65-68, 1233-1236
Abeida Habti	69-72
Abergel Alain	133-136
Aboutajeddine Driss	1065-1068
Abrial Pierrick	303-306
Abry Patrice	153-156, 279-282, 323-326, 549-552
Achard Catherine	5-8
Adde Patrick	795-798
Adib Abdellah	1065-1068
Adnet Claude	1181-1184
Aeschlimann Fabien	827-830
Aime Claude	265-268
Ait-el-fquih Boujemaa	213-216
Aknin Patrice	101-104
Alasseur Clémence	209-212
Albouy Benjamin	385-388
Alexandre Rolim Fernandes Carlos	57-60
Alleysson David	347-350
Allier Emmanuel	827-830
Almansa Andrés	513-516
Alvarado Victor	719-722
Amara Amara	9-12
Amat Philippe	1045-1048
Amblard Pierre-olivier	89-92
Amiel Frédéric	9-12
Amoud Hassan	367-370
Andriamisaina Caaliph	823-826
André Thomas	1001-1004
André-obrecht Régine	473-476
Anthoine Sandrine	307-310
Antoni Jérôme	461-464, 1097-1100
Antonini Marc	1001-1004, 1013-1016
Aoudi Walid	363-366
Ardon Roberto	707-710
Argentieri Sylvain	85-88
Armspach Jean-paul	331-334
Assemaat Louis	1141-1144
Astruc Jean-pierre	221-224
Ataman Stefan	835-838
Atli Benediktsson Jon	505-508
Attilio Pegoraro Paolo	315-318
Aubert Gilles	1113-1116
Aufort Gabriel	429-432
Augereau Bertrand	1017-1020
Augusto Negri Pablo	679-682
Aupetit-berthelemot Christelle	839-842

Auvray Vincent	157-160
Ayache Alain	521-524
Aïssa-el-bey Abdeldjalil	1233-1236
Babel Marie	1021-1024
Badier Jean-michel	433-436
Baillet Sylvain	189-192
Bailly Gérard	1137-1140, 1221-1224
Bali Nadia	1061-1064
Baras Cléo	1205-1208
Barbaresco Frédéric	921-924, 1181-1184, 1209-1212
Barbier Daniel	253-256
Barbot Jean-pierre	619-622
Bardinet Eric	189-192
Barlaud Michel	1001-1004, 1113-1116
Barnault Loic	631-634
Bartelmaos Steve	65-68
Bas Patrick	1129-1132
Basset Olivier	21-24, 53-56
Batatia Hadj	521-524
Baudais Jean-yves	735-738
Baudoin Geneviève	1025-1028
Bay Stéphanie	619-622
Baylou Pierre	145-148
Beaumesni Brice	489-492
Beauseroy Pierre	1145-1148
Beghdadi Azeddine	29-32
Belaroussi Rachid	671-674, 941-944
Belkacemi Hocine	1177-1180
Bellanger Jean-jacques	425-428
Bellanger Maurice	45-48
Bellard Elisabeth	185-188
Belloir Fabien	397-400
Ben Amar Chokri	1013-1016
Benboudjema Dalila	909-912
Bendjoya Philippe	257-260
Benedetto F.	615-618
Benois Pineau Jenny	97-100
Benslimane Anis	465-468
Bensrhair Abdelaziz	683-686
Berar Maxime	1137-1140
Bernard Olivier	359-362
Bertin Emmanuel	299-302
Bertolino Pascal	339-342, 889-892
Besserer Bernard	1161-1164
Biard Mathieu	249-252
Bichot Elodie	1149-1152
Bimbot Frédéric	1229-1232
Blacher Silvia	413-416
Blanchard Frédéric	17-20
Blasi D.	615-618
Bleuzzen Aurore	249-252

Bloch Isabelle	283-286, 937-940
Bobillet William	1085-1088
Bombardier Vincent	695-698
Bomel Pierre	779-782
Bon Nicolas	1169-1172
Bonacci David	579-582
Bonnefont Michel	1049-1052
Borgnat Pierre	323-326
Boubchir Larbi	233-236
Boucheret Marie-laure	961-964
Bouchoux Sophie	803-806
Boudraa Abdel-ouahab	29-32, 77-80, 559-562
Boujemâa Hatem	747-750
Bounsiar Abdenour	1145-1148
Bourdon Pascal	1017-1020
Bourennane El-bay	803-806
Bourennane Salah	33-36, 73-76, 77-80
Boustany Roger	1097-1100
Bouthemy Patrick	157-160
Boutillon Emmanuel	853-856
Bouveyron Charles	711-714
Bozkurt Baris	481-484
Brie David	1053-1056, 1077-1080, 1081-1084
Brochard Jacques	465-468
Brossier Jean-marc	89-92, 619-622
Brunel Nicolas	921-924
Brusseau Elisabeth	287-290
Buzuloiu Vasile	493-496
Bérar Maxime	161-164
C. M. Mota Joao	81-84
Cachard Christian	417-420
Caillault Emilie	687-690
Cammas Nathalie	997-1000
Canals Raphael	137-140
Cancès Jean-pierre	839-842
Canu Stéphane	763-766, 949-952
Capelle Anne-sophie	703-706
Caplier Alice	481-484
Capman François	1025-1028
Cappé Olivier	201-204
Capricelli Thomas	655-658
Cardoso Jean-françois	303-306
Cariou Claude	1121-1124
Cariou Laurent	743-746
Carminati Lionel	97-100
Caron François	217-220
Carrault Guy	241-244, 377-380
Carteret Cédric	1053-1056
Cartron Mickaël	787-790
Casseau Emmanuel	823-826
Castella Marc	1073-1076



Cavaro-menard Christine	525-528, 533-536, 639-642
Cesar Moura Mota João	57-60
Cexus Jean-christophe	559-562
Chabah Myriam	1169-1172
Chabert Marie	1033-1036
Chabrier Sébastien	917-920
Chainais Pierre	541-544
Chaix De Lavarène Brice	347-350
Chakchouk Moez	371-374
Chanussot Jocelyn	117-120, 505-508
Chapeau-blondeau François	595-598
Chapron Michel	1141-1144
Charbonnier Pierre	1109-1112, 1213-1216
Chareyron Gael	1037-1040
Charpentier Patrick	695-698
Charrier Christophe	913-916
Charron Cyril	351-354
Chassande-mottin Eric	261-264
Chateau Thierry	791-794
Chatellier Christian	1017-1020
Chatellier Laurence	457-460
Chaufray Jean-marie	65-68, 843-848
Chaumont Marc	489-492, 675-678
Chauvet Wilfried	849-852
Chaux Caroline	229-232
Chehdi Kacem	335-338, 659-662, 667-670, 1121-1124
Chenoune Yasmina	389-392
Chenu-tournier Marc	869-872
Chevalier Pascal	1057-1060
Chevreuil Antoine	1057-1060
Chibane Alexandre	401-404
Chihab Najat	221-224
Chonavel Thierry	477-480
Christov Nicolai	1089-1092
Chupin Marie	189-192
Ciblat Philippe	169-172
Ciuciu Philippe	295-298
Cladel Nicolas	1225-1228
Clady Xavier	679-682
Claire Jonchery	1157-1160
Clarysse Patrick	287-290
Claude Isabelle	409-412
Coatrieux Jean-louis	197-200
Coche Emmanuel	529-532
Cointault Frédéric	727-730
Collewet Christophe	1-4
Colot Olivier	703-706
Coltuc Dinu	1037-1040, 1197-1200
Combettes Patrick	655-658
Comon Pierre	1069-1072, 1093-1096
Condat Laurent	237-240

Conseil Simon	33-36
Coquin Didier	493-496
Corre Gwenole	779-782
Cosandier-rimélé Delphine	433-436
Coudray Renan	1161-1164
Coulais Alain	133-136, 311-314
Coulon Pierre-yves	1221-1224
Courboulay Vincent	639-642
Courtellemont Pierre	933-936, 1149-1152
Coussy Philippe	779-782
Couvreux Laurent	481-484
Cros Lionel	575-578
Crussière Matthieu	735-738
Cygan Hervé	101-104
Czyz Jacek	205-208
D'hondt Olivier	1185-1188
D'hooge Jan	359-362
Danes Patrick	85-88
Daoudi Khalid	723-726
Daout Franck	1173-1176
Dare-emziviat D��lphine	77-80
Daubechies Ingrid	307-310
Davignon Franck	21-24, 53-56
Davoine Franck	327-330, 1201-1204
Davy Manuel	217-220, 973-976, 985-988
De Almeida L. F. André	81-84
De Craene Mathieu	1029-1032
De Roover Cédric	1105-1108
De Stéfano Pierre	775-778
Declercq David	607-610
Declercq David	631-634
Defontaine Antoine	377-380
Delabrouille Jacques	303-306
Delaigle Jean-françois	1005-1008
Delmas Jean-pierre	1181-1184
Del��chelle Eric	389-392
Dervin Mathieu	961-964
Desbat Laurent	193-196, 401-404
Desbouvries François	213-216
Descombes Xavier	509-512
Desurmont Xavier	1005-1008
Desvignes Michel	161-164, 783-786, 1137-1140
Devaux Marie-françoise	397-400
Devillard François	807-810
Dillenseger Jean-louis	355-358
Discher Antoine	1153-1156
Do Minh-tan	465-468
Dobigeon Nicolas	105-108
Dole Hervé	133-136
Domingues Antonio	469-472
Doncarli Christian	245-248

Doncescu Andrei	393-396
Dousse Olivier	269-272
Doussot Michel	367-370
Driouchi Driss	469-472
Dubois Corentin	985-988
Dubost Stéphanie	457-460
Ducassee Alain	961-964
Duchêne Bernard	635-638
Duchêne Cédric	89-92, 109-112
Duchêne Jacques	181-184, 367-370
Duffner Stefan	1113-1116
Duflos Emmanuel	217-220
Dugué Pierre	381-384
Duhamel Pierre	221-224, 953-956
Dumas Jean-michel	839-842
Dumoulin Jean	659-662
Durand Rémi	113-116
Dutilleux Guillaume	1109-1112
Dutoit Thierry	481-484
Duval Laurent	229-232
Duverdier Alban	849-852
Décréau Pierrette	517-520
Déforges Olivier	1021-1024
Ea Thomas	9-12, 819-822
Echelard Antoine	545-548
Eglin Véronique	691-694
Elhafid Abdelkamel	397-400
Elkefi Akran	1013-1016
Ellouze Noureddine	663-666
Emile Bruno	699-702
Ernst Harald	209-212
Eudes Jacques	631-634
Facciolo Gabriele	513-516
Fadaili Elmostafa	981-984
Fadili Jalal	233-236
Faisan Sylvain	331-334
Falcou Joel	791-794
Farah Georges	181-184
Fattaccioli Dominique	587-590
Faucon Gérard	381-384
Faure Laetitia	393-396
Fauvel Mathieu	505-508
Favier Gérard	57-60, 81-84, 177-180
Fernandez-maloigne Christine	1-4, 703-706
Ferrari André	265-268
Ferro-famil Laurent	501-504, 1185-1188
Fesquet Laurent	827-830
Feuilloy Mathieu	185-188
Fijalkow Inbar	623-626, 835-838, 869-872, 957-960
Fiorio Christophe	1193-1196
Flandrin Patrick	153-156, 755-758, 969-972

Fliess Michel	173-176, 571-574
Foidart Jean-michel	413-416
Foret Guillaume	889-892
Forster Philippe	113-116, 121-124, 141-144, 767-770
Fortrat Jacques-olivier	185-188
Fossorier Marc	607-610
Foster Stuart	363-366
Foulonneau Alban	1213-1216
Fournier-prunaret Danièle	1049-1052
François Serignat Jean	485-488
Françoise Dibos	1157-1160
Friboulet Denis	359-362
Frogerais Paul	425-428
Frélicot Carl	933-936
Féron Olivier	635-638
Fuchs Jean-Jacques	759-762
Gac Nicolas	783-786
Gacon Pierre	1221-1224
Gadat Sébastien	945-948
Ganoun Ali	137-140
Garda Patrick	819-822
Garello René	1169-1172
Garnero Line	189-192
Garot Jérôme	389-392
Garreau Mireille	197-200
Gasser Alain	429-432
Gaussier Philippe	1217-1220
Gazengel Bruno	1041-1044
Gelle Guillaume	599-602
Geller Benoît	619-622
Georges Koepfler	1157-1160
Germain Christian	145-148
Germain Guy	567-570
Germond Cécile	1181-1184
Ghogho Mounir	169-172
Gimenez Gérard	21-24, 53-56
Ginolhac Guillaume	113-116, 767-770, 1173-1176
Giovannelli Jean-françois	311-314, 457-460
Girard Stéphane	711-714
Girault Jean-marc	249-252
Giunta G.	615-618
Gosselin Bernard	529-532, 901-904
Gouiffès Michèle	1-4
Goursaud Claire	839-842
Gouze Annabelle	1105-1108
Goy François	253-256
Graba Tarik	819-822
Graffigne Christine	371-374
Grall-maës Edith	1145-1148
Granado Bertrand	819-822
Grandidier Frédéric	807-810

Grangeat Pierre	193-196, 401-404
Grenier Pierre	553-556
Grenier Thomas	21-24, 53-56
Grenier Yves	1233-1236
Gribonval Rémi	1229-1232, 1237-1240, 1245-1248
Grivel Eric	1085-1088, 1089-1092
Gros Patrick	37-40
Guglielmi Véronique	1049-1052
Guidorzi Roberto	1085-1088
Guigue Vincent	719-722, 763-766, 949-952
Guigues Laurent	885-888
Guillard Gwenaël	291-294
Guillemaud Régis	253-256
Guillemin Fabrice	273-276
Guillemot Christine	37-40, 731-734
Guillemot Ludovic	1189-1192
Guillet Valéry	65-68
Guérin Alexandre	381-384
Guérin Dominique	727-730
Hadda Sami	861-864
Hafemeister Laurence	1217-1220
Hamioud Farida	715-718
Hamitouche Chafiaâ	291-294
Hamlaoui Soumya	327-330
Hammal Zakia	481-484
Hamrouni Kamel	663-666
Hamza Radhi	371-374
Harba Rachid	429-432
Hasboun Dominique	189-192
Hassani Moha	177-180
Hazart Aurélien	457-460
Heit Bernard	807-810
Heitz Fabrice	1213-1216
Herbin Michel	17-20
Herbulot Ariane	1113-1116
Hernandez Alfredo	241-244, 377-380, 425-428
Herve Nicolas	811-814
Hewson David	181-184, 367-370
Heyrman Barthélémy	771-774
Histace Aymeric	525-528, 639-642
Ho Ba Tho Marie-christine	409-412
Honeiné Paul	969-972
Houacine Amrane	441-444
Houcke Sébastien	877-880
Huart Jérémy	339-342, 889-892
Huet Sylvain	823-826
Huillery Julien	381-384
Husson Lionel	209-212
Hélard Jean-françois	743-746
Hérault Jeanny	347-350, 1117-1120
Idier Jérôme	295-298, 651-654, 1077-1080, 1081-1084

Ikhlef Aïssa	873-876
Ioana Cornel	575-578
Ionescu Bogdan	493-496
Iordache Razvan	29-32
Istrate Dan	485-488
Ivert Blaise	253-256
J.j. Michel Olivier	257-260
Jabloun Meryem	977-980
Jacquelet Yann	437-440, 893-896
Jaffard Stephane	549-552
Jallon Pierre	1057-1060
Jansen Maarten	225-228
Jarboui Slaheddine	861-864
Jarifi Safaa	897-900
Jaïdane Mériem	371-374
Jbari Atman	1065-1068
Jeanne Marion	603-606
Jehan-besson Stéphanie	1113-1116
Jennane Rachid	429-432
Joannis Claude	715-718
Join Cédric	173-176, 571-574
Jolion Jean-michel	925-928
Joséphine Castaing	965-968
Joumaa Hussein	1201-1204
Journet Nicholas	691-694
Julien-vergonjanne Anne	839-842
Jurie Frédéric	791-794
Jutten Christian	1101-1104
Jégou Hervé	731-734
Kaddous Taha Abdel	1049-1052
Kahlifa Nawres	663-666
Kerouedan Sylvie	795-798
Khalil Hachicha	815-818
Khanfouci Mourad	831-834
Kharbouche Saïd	929-932
Khenchaf Ali	1169-1172
Khoudeir Majdi	465-468
Kibangou Alain	177-180
Kieffer Michel	953-956
Kinie Abel	437-440, 421-424, 893-896
Klaine Luc	335-338, 667-670
Kouamé Denis	249-252
Krstulovic Sacha	1237-1240
Labarre David	1089-1092
Labat Christian	651-654
Labbani-igbida Ouidad	351-354
Lacaze Bernard	849-852, 1033-1036
Lacoume Jean-louis	449-452, 587-590
Lafarge Florent	509-512
Lagrange Jean-michel	707-710
Laguitton Soizic	355-358

Lambert Patrick	493-496
Lamine Ndiaye Mamadou	893-896
Lamy-bergot Catherine	957-960
Lanchantin Pierre	905-908
Langlais Charlotte	627-630
Lantéri Henri	129-132
Larrieu Nicolas	319-322, 323-326
Larue Anthony	1101-1104
Larzabal Pascal	121-124, 141-144
Lashermes Bruno	549-552
Lathauwer Lieven De	965-968
Lathuilière Alexandra	343-346
Laurent Benhamou Claude	429-432
Laurent Christophe	25-28
Laurent Hélène	699-702, 917-920
Lavallou François	647-650
Le Bec Gaël	375-376
Le Bihan Nicolas	13-16, 61-64
Le Bouquin Jeannès Régine	381-384
Le Breton Hervé	197-200
Le Callet Patrick	611-614
Le Duff Alain	1041-1044
Le Gal Bertrand	823-826
Le Guen Benjamin	997-1000
Le Guennec Daniel	873-876
Le Hégarat-masclé Sylvie	93-96
Le Maire Sophie	413-416
Le Masson Jérôme	627-630
Le Touzé Grégoire	587-590
Lebossé Jérôme	537-540
Lebrun Gilles	913-916
Lecellier François	537-540
Lecomte Christèle	929-932
Leconge Rémy	533-536
Leducq Paul	501-504
Lee Chang-ming	953-956
Lefèvre Sébastien	1125-1128
Lejeune Gérard	583-586
Leray Pierre	799-802
Lesage Sylvain	1237-1240
Lesturgie Marc	113-116
Letellier Laurent	771-774
Levy Vehel Jacques	553-556
Li Jian-jin	541-544
Liebgott Hervé	363-366
Lienard Jean	157-160
Lopera Olga	643-646
Lopez-martinez Carlos	445-448
Loubaton Philippe	1057-1060
Louradour Jérôme	723-726
Louët Yves	865-868



Lucas Marie-françoise	245-248
Lucas Yves	385-388, 469-472
Luthon Franck	489-492
Lutton Evelyne	553-556
Lédée Roger	517-520, 529-532, 533-536
Léonard François	977-980
Lévy-vehel Jacques	545-548
Lézoray Olivier	913-916
Maaoui Choubeila	699-702
Macq Benoît	205-208, 529-532, 643-646, 1029-1032, 1105-1108
Mailhes Corinne	579-582, 583-586
Maillard Mickaël	1217-1220
Maitrot Aude	245-248
Makni Salima	295-298
Mallet Gregory	719-722
Mancas Matei	901-904
Mancas-thillou Céline	901-904
Mancini Stéphane	783-786
Mannoni Valérian	599-602, 603-606
Marc Chassery Jean	1129-1132
Marché Pierre	469-472
Marcos Sylvie	831-834, 1177-1180
Marque Catherine	567-570
Mars Jérôme I.	61-64, 449-452, 497-500, 587-590, 1101-1104
Martial Mari Jean	417-420
Martin Eric	779-782, 823-826
Martin Lionel	33-36
Martin Nadine	583-586, 977-980
Martin Vincent	1033-1036
Marzani Franck	343-346
Mascarilla Laurent	1149-1152
Massiani Arnaud	775-778
Massot Corentin	1117-1120
Mathieu-marni Sandrine	509-512
Maussang Frédéric	117-120
Mayrargue Sylvie	739-742
Mazet Vincent	1077-1080, 1081-1084
Mboup Mamadou	173-176, 571-574
Meessen Jérôme	1005-1008
Menard Daniel	811-814
Menard Michel	639-642
Mesnager Gilles	961-964
Miche Pierre	929-932
Michel Lagrange Jean	647-650
Michel Valérie	367-370
Michelet Franck	145-148
Milgram Maurice	5-8, 671-674, 679-682, 941-944
Milisavljevic Nada	643-646
Miron Sebastian	61-64
Mohammad-djafari Ali	635-638, 1061-1064
Mohammad-khani Gholam-reza	953-956

Moisan Lionel	93-96
Montanvert Annick	237-240
Montois Jean-jacques	421-424, 437-440, 893-896
Moreau Eric	981-984
Moreau Nicolas	1205-1208
Morin Luce	997-1000
Mostafaoui Ghilès	5-8
Moudden Yassir	303-306
Moulin Céline	253-256
Moulines Eric	201-204
Moureaux Jean-marie	1189-1192
Moussaoui Saïd	1053-1056
Mulot Rémy	691-694
Mustapha Mouaddib El	351-354
Ménard Daniel	49-52
Nafkha Amor	853-856
Najim Mohamed	1085-1088, 1089-1092
Narduzzi Claudio	315-318
Ndiaye Mamadou	421-424, 437-440
Needles Andrew	363-366
Neri A.	615-618
Nicolas Barbara	449-452, 587-590
Nicolas Pascal	185-188
Normand Nicolas	611-614
Nouvel Fabienne	775-778
Nuzillard Danielle	397-400
Olivier Amblard Pierre	109-112
Olivier Christian	1017-1020
Ouazine Boulem	441-444
Oudin Marc	1181-1184
Ovarlez Jean-philippe	121-124
Owezarski Philippe	319-322, 323-326
Ozerov Alexey	1229-1232
Padellini Marc	1025-1028
Paindavoine Michel	771-774
Palicot Jacques	799-802, 865-868, 873-876, 881-884
Pardo Alvaro	513-516
Parisot Christophe	1005-1008
Parrein Benoit	611-614
Pascal Frédéric	121-124
Pastor Dominique	125-128, 897-900
Patard Jean-jacques	355-358
Pateux Stéphane	997-1000
Patrick Garda	815-818
Paul Yonnet Jean	375-376
Paulus Caroline	497-500
Payan Yohan	1137-1140
Pellerin Denis	1165-1168
Pesquet Jean-christophe	229-232, 1009-1012, 1073-1076
Pesquet-popescu Beatrice	1009-1012
Petit Eric	389-392

Petrisor Teodora	1009-1012
Petrochilos Nicolas	397-400
Philipp-foliguet Sylvie	885-888
Philippe Delahaye Jean	799-802
Philippe Pierrick	1229-1232
Picinbono Bernard	751-754
Pieczynski Wojciech	909-912, 921-924
Pierpaoli Elena	307-310
Pierre Delmas Jean	69-72
Pinel Pierre	1049-1052
Pinna Andrea	819-822
Pinquier Julien	473-476
Poggi Sylvain	185-188
Poline Jean-baptiste	295-298
Pollet Claire	559-562
Pothin Jean-baptiste	1133-1136
Pottier Eric	445-448, 501-504, 1185-1188
Pouletaut Philippe	409-412
Poulliat Charly	957-960
Prevost Lionel	671-674, 941-944
Pronzato Luc	149-152
Prêteux Françoise	1153-1156
Puech William	1045-1048, 1193-1196
Pyndiah Ramesh	405-408
Quellec Jean-michel	1169-1172
Quinquis André	453-456, 575-578
Radoi Emanuel	453-456
Ragot José	715-718
Rahmouni Alain	389-392
Rajhi Hatem	371-374
Rajih Myriam	1093-1096
Rakotomamonjy Alain	683-686, 719-722, 763-766, 917-920, 949-952
Ramasso Emmanuel	1165-1168
Ramel Jean-yves	691-694
Randrianarisolo Solofohery	389-392
Raoof Kosai	375-376
Rauch Jean-louis	517-520
Regis Sebastien	393-396
Renaudin Marc	827-830
Renaux Alexandre	141-144
Renoult Adrien	869-872
Revenu Marinette	537-540
Revol-muller Chantal	21-24, 53-56
Richard Cédric	41-44, 969-972, 1133-1136
Rilling Gabriel	755-758
Ristic Branko	205-208
Robin Amandine	93-96
Rocher Romuald	49-52
Rodet Thomas	133-136
Rojo Guerra Pablo	257-260
Roland Christian	853-856

Romain Olivier	819-822
Romaniuk Barbara	161-164, 1137-1140
Rombaut Michèle	1165-1168
Rondao Alface Patrice	1029-1032
Ronsin Joseph	1021-1024
Roques Sylvie	563-566
Ros Julien	25-28
Rosec Olivier	477-480, 897-900
Rosenberger Christophe	917-920
Rossant Florence	9-12, 937-940
Rostaing Philippe	857-860
Rota Ludwig	1069-1072
Roue Benoît	1129-1132
Rougon Nicolas	1153-1156
Roumy Aline	623-626
Rousseau David	595-598
Rousseau Lionel	253-256
Roux Christian	291-294
Roux Philippe	449-452
Roux Stephane	549-552
Roux Sébastien	193-196
Roviras Daniel	849-852
Rémy Frédérique	563-566
Saadani Ahmed	843-848
Sahli Kheira	583-586
Said Ghada	287-290
Saidi Zineb	73-76, 77-80, 559-562
Salamatian Kavé	277-278
Saloux Eric	537-540
Salzenstein Fabien	905-908
Saoudi Samir	795-798
Sayadi Bessem	835-838
Scalart Pascal	49-52
Scalise Sandro	209-212
Schang Daniel	185-188
Scheers Bart	643-646
Scherrer Antoine	279-282
Schmid Cordelia	711-714
Schmit Renaud	771-774
Schmitt Emmanuel	695-698
Schmitt Françoise	1173-1176
Sebag Guy	409-412
Sebbe Raphael	529-532
Sedoglavic Alexandre	173-176
Seguier Renaud	1225-1228
Sellami Noura	623-626
Semani Dahbia	933-936
Semira Hichem	1177-1180
Senhadji Lotfi	241-244
Senn Eric	779-782
Sentieys Olivier	49-52, 787-790, 811-814

Serradel Eduard	265-268
Sevestre-ghalila Sylvie	371-374
Siala Mohamed	747-750
Sicot Guillaume	405-408, 877-880
Simand Isabelle	925-928
Simard Patrice	101-104
Simon Antoine	197-200
Simon Carine	739-742
Siohan Pierre	603-606
Sira-ramirez Hebertt	571-574
Souchon Gregory	249-252
Soueres Philippe	85-88
Soulat Damien	429-432
Soule Augustin	277-278
Stark Jean-luc	303-306
Strauss Olivier	165-168
Suard Frédéric	683-686
Suraud Xavier	517-520
Sérot Jocelyn	791-794
Tafnine Farid	441-444
Taft Nina	277-278
Taralova Ina	545-548
Tauber Clovis	521-524
Terrien Jérémy	567-570
Theuillon Gwladys	575-578
Theys Céline	129-132
Thierry Eric	149-152
Thiran Patrick	269-272
Thirion Laetitia	113-116
Thirion-moreau Nadège	981-984
Thoraval Laurent	331-334
Tillier Christophe	1009-1012
Tonnin Francois	37-40
Torres Eslava Manuel	9-12
Totir Felix	453-456
Tourneret Jean-yves	105-108
Toutant Jean-luc	1193-1196
Touzri Makram	795-798
Tranquart François	249-252
Tremeau Alain	1197-1200
Treuillet Sylvie	137-140, 385-388
Trémeau Alain	1-4, 1037-1040
Uhlig Steve	315-318
Unay Devrim	481-484
Unser Michael	557-558
Uribelarea Jean-louis	393-396
Vacher Michel	485-488
Vanheeghe Philippe	217-220
Vannoorenberghe Patrick	929-932
Vanstraceele Christophe	619-622
Vautrot Philippe	17-20

Vazquez Emmanuel	591-594
Verdier François	607-610
Verly Jacques	413-416
Viard-gaudin Christian	687-690
Vieira Michelle	977-980
Villain Nicolas	707-710
Vincent Damien	477-480
Vincent Emmanuel	1245-1248
Vincent Nicole	1125-1128
Vinet Hugues	989-996
Voda Alina	401-404
Voicila Adrian	607-610
Voisin Yvon	343-346
Vozel Benoit	335-338, 667-670, 659-662
Vray Didier	363-366
Vrigneau Baptiste	857-860
Walter Eric	591-594
Wendling Fabrice	241-244, 421-424, 425-428, 433-436, 437-440
Wendt Herwig	153-156
Winzenrieth Renaud	409-412
Wisse El Bahri M.	747-750
Wolfe Patrick	973-976
Wolsztynski Eric	149-152
X. Nguyen Hung	269-272
Yang Victor	363-366
Yao Koffi	857-860
Younes Laurent	945-948
Yves Tourneret Jean	265-268
Zabré Sidkièta	881-884
Zarzoso Vicente	1069-1072
Zayen Bassem	1205-1208
Zergaïnoh Anissa	221-224
Zerubia Josiane	509-512
Zhang Yu	319-322
Zozor Steeve	89-92, 109-112
Le Carpentier Éric	1241-1244